▶4

效 用

在维多利亚女王时代，哲学家和经济学家轻率地把“效用”看作是一个人的整个福利的指标。效用被看作是对个人快乐的数学测度。这个观念一旦确立，自然就认为消费者进行选择是为了实现他们的效用最大化，也就是使他们尽可能获得最大的快乐。

问题是这些古典经济学家实际上从来没有阐述过如何去度量效用。我们应该怎样使与不同选择相联系的效用的“量”数量化呢？一个人的效用与另一个人的效用是一样的吗？“多一支棒棒糖给我带来的效用是多一个胡萝卜给我带来的效用的两倍”，这句话的意思是什么呢？除了人们要实现效用最大化以外，效用的概念还有其他的独立意义吗？

由于存在这些概念上的问题，经济学家放弃了把效用当作对快乐的测度的旧式观点。取而代之的是在*消费者偏好*基础上经过完全重新阐述的消费者行为理论，在这个理论中，效用仅仅看作是描述偏好的一种方法。

经济学家逐渐认识到，就选择行为来说，所有涉及效用的问题，都是一个消费束的效用是否比另一个消费束的效用更高一些的问题——高出多少实际上与问题无关。最初，偏好是用效用定义的：对消费束(x_1, x_2)的偏好超过对消费束(y_1, y_2)的偏好，就意味着消费束X的效用大于消费束Y的效用。但是现在，我们倾向于从相反的方向来考察这些问题。消费者偏好对于分析选择来说是很有用的基本描述，而效用则只不过是描述偏好的一种方式。

*效用函数*是为每个可能的消费束指派一个数字的方法，它指派给受较多偏好的消费束的数字大于指派给受较少偏好的消费束的数字。这就是说，对消费束(x_1, x_2)的偏好超过对消费束(y_1, y_2)的偏好，其充分必要条件是(x_1, x_2)的效用大于(y_1, y_2)的效用：这用符号表示就是，$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$当且仅当$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$。

效用指派的唯一重要特征在于它对消费束所进行的排序。效用函数的数值，只在对不同消费束进行排序时才有意义；任意两个消费束之间的效用差额的大小是无关紧要的。因为这种效用强调消费束的排列次序，所以它被称作*序数效用*。

请看表4.1，在这个例子中，我们列举了为三个消费束指派效用的若干不同办法，所有这些办法都能使消费束按相同的次序进行排列。在这个例子中，消费者偏好A胜于偏好B，偏好B胜于偏好C。所有这些指派办法都是描述相同偏好顺序的有效的效用函数，因为它们都具有这样一个特征：指派给A的数字大于指派给B的数字，指派给B的数字又大于指派给C的数字。

表 4.1　指派效用的不同办法

消费束 \ 效用	U_1	U_2	U_3
A	3	17	-1
B	2	10	-2
C	1	0.002	-3

因为只有消费束的排序才有意义，所以不可能只存在一种为消费束指派效用的办法。如果我们能够找到一种为消费束指派效用数字的办法，我们就能找到无限多种指派效用的办法。如果 $u(x_1, x_2)$ 代表一种为消费束 (x_1, x_2) 指派效用数字的办法，那么 $u(x_1, x_2)$ 乘以 2（或任何其他正数）就一定也是指派效用的一种办法。

乘以 2 是单调变换的一个例子。单调变换是以保持数字次序不变的方式将一组数字变换成另一组数字的方法。

通常，我们是用把每个数字 u 转换成其他某个数字 $f(u)$ 的函数 $f(u)$ 来表示一个单调变换的。这种变换是在 $u_1 > u_2$ 隐含着 $f(u_1) > f(u_2)$ 的意义上以保持数字次序不变的方式进行的。单调变换和单调函数在本质上是同一回事。

乘以一个正数（例如，$f(u)=3u$），加上任意数（例如，$f(u)=u+17$），u 的奇次幂（例如，$f(u)=u^3$），等等①，这些都是单调变换的例子。

通过考察两个 u 值之间的 f 的变动除以 u 的变动的商，可以测度随 u 变动的 $f(u)$ 的变动率：

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=\frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}$$

对于单调变换来说，$f(u_2)-f(u_1)$ 同 u_2-u_1 的符号始终是一样的。因此，单调函数的变动率总是正的。这意味着单调函数的图形总是具有正的斜率，如图 4.1A 所示的那样。

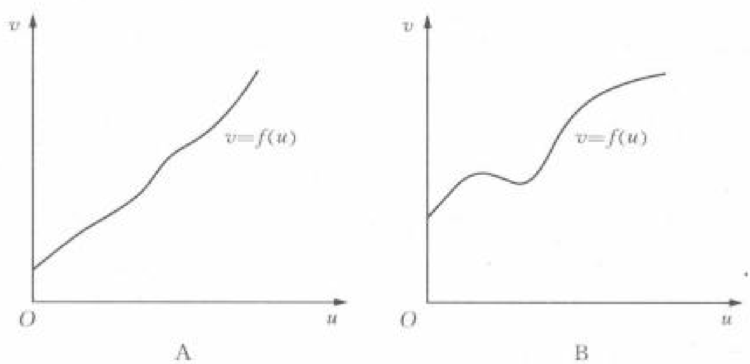


图 A 所示的是一个单调函数——始终递增的函数。图 B 所示的函数不是单调函数，因为它有时递增，有时递减。

图 4.1　正单调变换

① 我们这里所谓的“单调变换”，严格来说应该称作“正单调变换”，以区别于“负单调变换”，后者是将数字的次序倒转过来的一种单调变换。单调（monotonic）变换有时被称作“单调的（monotonous）变换”，这似乎是不公正的，因为它们实际上是饶有趣味的。

如果 $f(u)$是表示某种偏好的效用函数的任一单调变换,那么 $f(u(x_1, x_2))$就一定也是一个表示那些相同偏好的效用函数。

为什么这样说呢?论证可以用下面三个命题来给出:

1. $u(x_1, x_2)$代表特定的偏好意味着当且仅当$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$时,$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$。

2. 但如果 $f(u)$是一个单调变换,那么,当且仅当 $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$时,$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$。

3. 因此,当且仅当$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$时,$f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$,因此,函数 $f(u)$同原效用函数 $u(x_1, x_2)$以一样的方式代表偏好。

我们用下面这个原理来概括这段讨论:*一个效用函数的单调变换还是一个效用函数,这个效用函数代表的偏好与原效用函数代表的偏好相同。*

从几何学上讲,效用函数是一种给无差异曲线标明序数的办法。因为一条无差异曲线上的每一个消费束带来的效用一定相同,所以,效用函数就是一种通过使较高效用的无差异曲线得到较大的指派数字的方式,给不同的无差异曲线指派数字的方法。从这个角度看,单调变换只不过是对无差异曲线重新标明数字。只要包含受较多偏好的消费束的无差异曲线比包含受较少偏好的消费束的无差异曲线得到更大一些的数字,这些标出的数字就一定表示相同的偏好。

4.1 基数效用

有一些效用理论对效用的数值赋予了重要意义,这些理论被称作*基数效用*理论。在这种理论中,两个消费束之间的效用差额的大小被认为具有某种重要的意义。

我们知道如何说明某个人对一个消费束的偏好是否超过对另一个消费束的偏好:我们只要提供给他(或她)在这两个消费束之间作一选择的机会,然后观察他(或她)选择哪一个消费束就行了。因此,我们知道如何对两个消费束指派序数效用:我们只要指派给被选择的消费束比遭拒绝的消费束较高一些的效用就行了。任何一种这样的指派都是一个效用函数。因此,我们就有了一种对某个人来说,确定一个消费束是否比另一个消费束具有更高效用的可操作的标准。

但是,我们怎么能说明某个人对一个消费束的喜爱程度是其对另一个消费束的喜爱程度的两倍呢?甚至你又怎么能说你对一个消费束的喜爱程度是你对另一个消费束的喜爱程度的两倍呢?

我们可以为这种指派提出各种定义:如果我愿意为一个消费束支付的货币两倍于对另一个消费束支付的货币,那么,我对这个消费束的喜爱程度就是我对另一个消费束的喜爱程度的两倍。或者,如果我为了得到一个消费束相对于另一个消费束愿意奔走两倍远的路程,等候两倍长的时间,或下两倍的赌注,那么,我对这个消费束的喜爱程度就两倍于我对另一个消费束的喜爱程度。

这些定义中的每一个都没有错;每种定义都能产生一种指派效用水平的办法,按照这种办法,所指派数字的大小具有某种操作上的意义。但是,每一个定义都不很准确。特别

是，虽然它们中的每一个都可能解释对某一样东西的需要两倍于对另一样东西的需要意味着什么，但看起来没有一个能对这种说法作出令人信服的解释。

即使我们能够找到一种似乎特别令人信服的指派效用数值的方法，这种方法对于我们描述选择行为又有什么用呢？为了确定是这个消费束还是另一个消费束被选择，我们只需要知道我们偏好哪一个消费束——哪一个消费束具有较高的效用。知道效用具体有多大并不会对我们描述选择行为有任何的帮助。既然基数效用并不是描述选择行为所必需的，而且，也没有任何令人信服的方法来指派基数效用，所以我们将完全坚持序数效用的分析框架。

4.2　构造效用函数

但是，我们能确信一定有指派序数效用的办法吗？在偏好次序已知的情况下，我们总是能够找到一种按这种偏好次序排列消费束的效用函数吗？存在一种描述任意的合理偏好次序的效用函数吗？

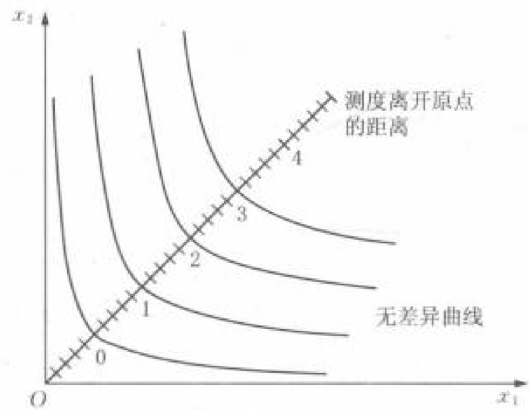
并不是每一种偏好都能够用效用函数来表示。举例来说，假使某人的偏好不具有传递性，使得 $A \succ B \succ C \succ A$。那么，这些偏好的效用函数就应该由 $u(A)$、$u(B)$、$u(C)$ 这样一些数字组成并使得 $u(A) > u(B) > u(C) > u(A)$，而这却是不可能的。

但是，如果我们排除像非传递偏好那样的反常情况，那么就可以证明，通常我们是能够找到代表偏好的效用函数的。我们在这里先演示一种构造效用函数的办法，另一种办法将在第 14 章中作出说明。

假设我们已知一张无差异曲线图，如图 4.2所示。我们知道，效用函数是一种为无差异曲线标记数字使得受较多偏好的无差异曲线得到较大数字的一种办法。我们如何做到这一点呢？

一种容易的做法是画一条如图 4.2 所示的对顶线，沿着这条线测度每条无差异曲线离原点的距离，并以此标记每条无差异曲线。

我们如何知道这就是一个效用函数呢？不难看出，如果偏好是单调的，这条经过原点的直线就一定与每条无差异曲线只相交一次。因此，每个消费束只能标记一个数字，而且，处在较高位置的无差异曲线上的那些消费束将标上较大的数字——这一切表明这就是一个效用函数。



画一条对顶线，用沿这条线测度的每条无差异曲线离原点的距离给每条无差异曲线标记数字。

图 4.2　根据无差异曲线构造效用函数

这使我们找到了一个为无差异曲线标记数字的办法，至少，只要偏好是单调的，情况就是如此。虽然，这在任何给定的情况下并非始终是最自然的办法，但这种办法至少说明了序数效用函数的概念是相当一般化的：几乎任何一种“合理”的偏好都能够用效用函数表示。

4.3 效用函数的几个例子

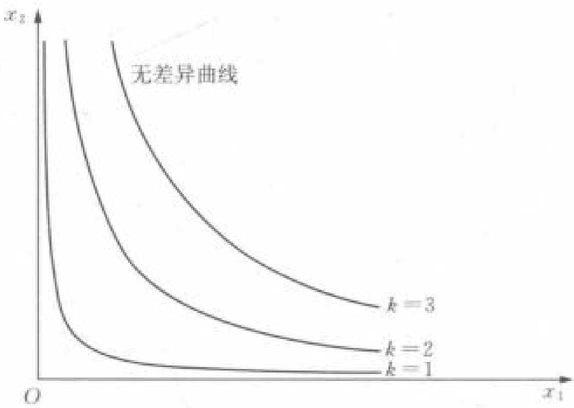
在第3章,我们描述了关于偏好和表示偏好的无差异曲线的几个例子。我们也可以用效用函数来表示这些偏好。如果你已经知道效用函数 $u(x_1, x_2)$,要绘制无差异曲线就比较容易了:你只要标出所有使得 $u(x_1, x_2)$ 等于一个常数的点 (x_1, x_2) 就行了。在数学上,使得 $u(x_1, x_2)$ 等于一个常数的所有点 (x_1, x_2) 的集合称作*水平集*。对应于每个不同的常数值,我们可以得到不同的无差异曲线。

例子:由效用推导出无差异曲线

假设效用函数由 $u(x_1, x_2)=x_1x_2$ 给出,无差异曲线看起来像什么呢?

我们知道,对于某个常数 k 来说,典型的无差异曲线就是使得 $k=x_1x_2$ 的所有 x_1 和 x_2 的集合。将 x_2 作为 x_1 的函数求解,我们发现典型的无差异曲线满足公式

$$x_2=\frac{k}{x_1}$$



对应于不同 k 值的无差异曲线 $k=x_1x_2$。

图 4.3 无差异曲线

图4.3画出了 $k=1, 2, 3, \cdots$ 时的无差异曲线。

让我们来考察另外一个例子。假定我们已知一个效用函数 $v(x_1, x_2)=x_1^2x_2^2$。它的无差异曲线看起来是什么样的呢?根据标准的代数法则,我们得到

$$v(x_1, x_2)=x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=u(x_1, x_2)^2$$

因此,效用函数 $v(x_1, x_2)$ 只是效用函数 $u(x_1, x_2)$ 的平方。由于 $u(x_1, x_2)$ 不可能取负值,所以 $v(x_1, x_2)$ 是原先效用函数 $u(x_1, x_2)$ 的单调变换。这意味着效用函数 $v(x_1, x_2)=x_1^2x_2^2$ 的无差异曲线一定与图4.3所示的无差异曲线的形状完全相同。虽然无差异曲线上标记的数字有所不同——原先是 $1, 2, 3, \cdots$ 现在变成了 $1, 4, 9, \cdots$——但是,满足 $v(x_1, x_2)=9$ 的消费束的集合与满足 $u(x_1, x_2)=3$ 的消费束的集合完全相同。因为 $v(x_1, x_2)$ 和 $u(x_1, x_2)$ 以完全相同的次序对全部消费束进行排列,所以它们所描述的偏好完全相同。

按另一方向做——找出表示某条无差异曲线的效用函数——相对来说要更为困难。做这件事有两种方法。第一种是数学方法。已知无差异曲线,我们要找到这样一个函数:沿每条无差异曲线它都是一个常数,并且对较高的无差异曲线指派较大的数字。

第二种方法比较直观。假定已知对偏好的描述,我们要尽量考虑消费者在试图使什么实现最大化——哪一种商品组合能描述消费者的选择行为。虽然现在这样说似乎还有点含糊,但在我们讨论过几个例子以后,它的意义就会变得比较明确。

完全替代

还记得关于红、蓝铅笔的那个例子吗?消费者看重的全部事情就是铅笔的总数。因

此，用铅笔的总数来测度效用是自然的。我们暂时选择 $u(x_1, x_2)=x_1+x_2$ 作为效用函数，但这是真的效用函数吗？只需要回答两个问题：沿着无差异曲线移动，它等于常数吗？对于受较多偏好的消费束，它指派了较高的数字吗？这两个问题的答案都是肯定的，所以我们就有了效用函数。

当然，这并不是我们所能使用的唯一的效用函数。我们也可以用铅笔数的平方来表示效用函数。因此，就像 $u(x_1, x_2)$ 的任何其他单调变换一样，效用函数 $v(x_1, x_2)=(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ 也能够表示完全替代偏好。

如果消费者愿意按不同于 1 比 1 的比例用商品 1 换取商品 2，情况又会怎样呢？举例来说，假设消费者为了补偿他所放弃的 1 单位商品 1，要求获得 2 单位的商品 2。这意味着，对于消费者来说，商品 1 的价值是商品 2 的价值的两倍。因此，效用函数采取的形式是，$u(x_1, x_2)=2x_1+x_2$。注意，由这种效用函数推导出的无差异曲线的斜率为 -2。

一般地，完全替代偏好可以用以下形式的效用函数来描述

$$u(x_1, x_2)=ax_1+bx_2$$

这里的 a 和 b 是用来测度商品 1 和商品 2 对于消费者的“价值”的某两个正数。注意，典型的无差异曲线的斜率由 $-a/b$ 给出。

完全互补

关于左脚鞋和右脚鞋的例子就符合这种情况。在这种偏好情况下，消费者只关心他有多少双鞋，所以自然地我们就选择鞋子的成双数作为效用函数。你所有鞋的完全成双数是你所有的右脚鞋的数量 x_1 和你所有的左脚鞋的数量 x_2 中的最小数。因此，完全互补的效用函数采取的形式是 $u(x_1, x_2)=\min\{x_1, x_2\}$。

为了证明这种效用函数确实可行，我们选出一个消费束，例如(10, 10)。如果我们增加 1 个单位商品 1，我们就得到(11, 10)，但我们还是处在同一条无差异曲线上，是这样吗？是的，因为 $\min(10, 10)=\min(11, 10)=10$。

因此，$u(x_1, x_2)=\min\{x_1, x_2\}$ 是能够描述完全互补的效用函数的。同往常一样，任何单调变换也都是合适的效用函数。

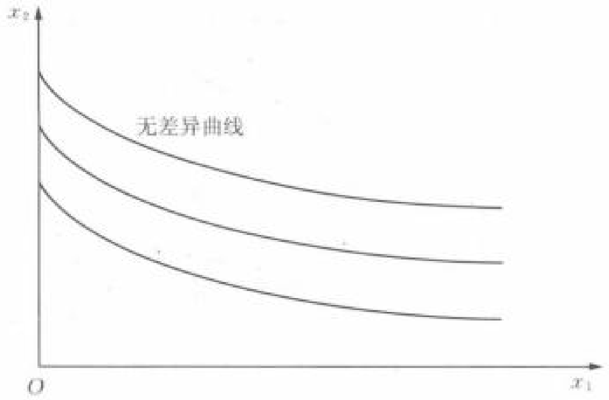
在消费者愿意按不同于 1 比 1 的某个比例消费商品的情况下，事情又会怎样呢？例如，对于每杯茶总是放两匙糖的消费者来说，情况会怎样呢？如果 x_1 表示可得到的茶的杯数，x_2 表示可得到的糖的匙数，则按此比例放糖的茶的杯数就将是 $\min\left\{x_1, \frac{1}{2}x_2\right\}$。

这里的构思有点巧妙，因此在进一步分析之前我们先对它进行讨论。如果茶的杯数大于糖的匙数的一半，那么，我们就不能对每一杯茶都放两匙糖。这种情况下，最终的结果是只有 $\frac{1}{2}x_2$ 杯茶放了糖(你可以通过对 x_1 和 x_2 取不同的值来验证这一点)。

当然，这个效用函数的任意单调变换将描述相同的偏好。例如，我们将效用函数乘以 2 就可以去掉式子中的分数。这样得到的效用函数就是 $u(x_1, x_2)=\min\{2x_1, x_2\}$。

一般地，描述完全互补偏好的效用函数可以由下式给出

$$u(x_1, x_2)=\min\{ax_1, bx_2\}$$



每条无差异曲线都是一条单一的无差异曲线垂直移动的结果。

图 4.4　拟线性偏好

式中的 a 和 b 是描述商品消费比例的正数。

拟线性偏好

这里的无差异曲线的形状我们以前从未见过。如图 4.4 所示,假设消费者的无差异曲线都是相互之间垂直平移得到的。这意味着全部无差异曲线都是一条无差异曲线垂直"移动"的结果。由此得到这样一个结论:无差异曲线的方程一定采取 $x_2=k-v(x_1)$ 的形式,其中 k 是对不同的无差异曲线取不同的值的常数。该方程表明,每条无差异曲线的高度等于 x_1 的某个函数 $-v(x_1)$ 再加上常数 k。较高无差异曲线的 k 值较大。(减号只是为了方便,下面我们就会明白为什么用减号比较方便。)

这里自然用 k 来为无差异曲线标号——大致地说,k 就是无差异曲线在纵轴方向的高度。求解 k 并令它等于效用,我们就有

$$u(x_1, x_2)=k=v(x_1)+x_2$$

在这种情况下,效用函数对商品 2 来说是线性的,但对商品 1 来说却是非线性的;因此,它称作*拟线性效用*,意味着"局部线性"的效用。$u(x_1, x_2)=\sqrt{x_1}+x_2$ 或者 $u(x_1, x_2)=\ln x_1+x_2$ 都是拟线性效用的具体例子。虽然拟线性效用函数并不特别符合现实,但它们却非常容易分析,就像我们在本书后面的若干例子中所见到的那样。

柯布-道格拉斯偏好

另一种普遍使用的效用函数是*柯布-道格拉斯效用函数*

$$u(x_1, x_2)=x_1^c x_2^d$$

其中,c 和 d 都是描述消费者偏好的正数。①

柯布-道格拉斯效用函数在一些例子中很有用。由柯布-道格拉斯效用函数代表的偏好,它的一般形状如图 4.5 所示。我们在图 4.5A 中绘制了 $c=1/2$, $d=1/2$ 的无差异曲线,在图 4.5B 中绘制了 $c=1/5$, $d=4/5$ 的无差异曲线。请注意参数 c 和 d 的不同值是如何导致无差异曲线的不同形状的。

柯布-道格拉斯无差异曲线看起来就像我们在第 3 章中称作"良态无差异曲线"的凸的、单调的无差异曲线。柯布-道格拉斯偏好是良态无差异曲线的标准范例,事实上,描述它们的公式大约就是产生良态偏好的最简单的代数表达式。在后面的研究中我们将看到,柯布-道格拉斯偏好在用代数描述经济思想的例子中是十分有用的。

① 保罗·道格拉斯(Paul Douglas)是 20 世纪的一位经济学家,他先在芝加哥大学执教,后来成为美国的一名参议员。查尔斯·柯布(Charles Cobb)是阿默斯特学院(Amherst College)的一位数学家。柯布-道格拉斯函数形式最初常常被用来研究生产行为。

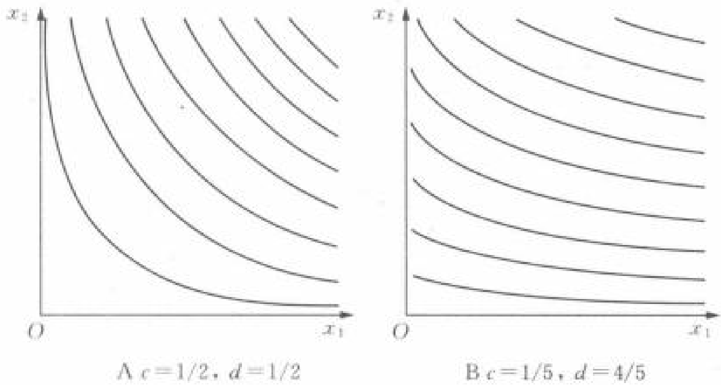


图 A 表示的是 $c=1/2$，$d=1/2$ 时的情形；图 B 表示的是 $c=1/5$，$d=4/5$ 时的情形。

图 4.5　柯布-道格拉斯无差异曲线

当然，柯布-道格拉斯效用函数的单调变换会确切地表示同一个偏好，考察这种变换的两个例子，对我们是有帮助的。

第一个例子是，如果我们取效用的自然对数，各项的乘积就会变成相加的和，因此我们就会有

$$v(x_1, x_2)=\ln(x_1^c x_2^d)=c\ln x_1+d\ln x_2$$

由于取对数是一种单调变换，所以这个效用函数的无差异曲线看起来就像最初那个柯布-道格拉斯函数的无差异曲线。(对自然对数的简要复习，可参见本书的数学附录。)

第二个例子是，假设我们从下述形式的柯布-道格拉斯函数出发：

$$v(x_1, x_2)=x_1^c x_2^d$$

将上式取幂 $1/(c+d)$，我们就有

$$x_1^{\frac{c}{c+d}}\ x_2^{\frac{d}{c+d}}$$

现在定义一个新的数

$$a=\frac{c}{c+d}$$

我们就能把效用函数写成

$$v(x_1, x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$$

这意味着我们总是能够对柯布-道格拉斯效用函数作单调变换而使指数和等于 1。后面将会证明，这是一个有用的解释。

柯布-道格拉斯效用函数可以用各种不同的形式表示，你最好学会认识它们，因为在我们的例子中，这族偏好是非常有用的。

4.4　边际效用

考察这样一个消费者，他(或她)正在消费某消费束(x_1, x_2)。当我们稍微多给他(或

她)一点商品1时,这个消费者的效用会怎样变化?这种变动率称作商品1的边际效用。我们把它记为MU_1,并把它看作一个比率

$$MU_1=\frac{\Delta U}{\Delta x_1}=\frac{u(x_1+\Delta x_1, x_2)-u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

它测度与商品1数量的微小变动(Δx_1)相联系的效用变动(ΔU)率。注意商品2的数量在此计算中保持不变。①

这个定义隐含着,为了计算同商品1的消费的微小变动联系在一起的效用的变动,我们只需要使消费的变动量乘上这种商品的边际效用:

$$\Delta U=MU_1\Delta x_1$$

商品2的边际效用可以用相同的方式来定义:

$$MU_2=\frac{\Delta U}{\Delta x_2}=\frac{u(x_1, x_2+\Delta x_2)-u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

注意,商品1的消费数量在我们计算商品2的边际效用时保持不变。我们可以用公式

$$\Delta U=MU_2\Delta x_2$$

来计算同商品2的消费的变动相联系的效用的变动。

这里,认识到边际效用的量值取决于效用的量值是非常重要的。因此,边际效用取决于我们所选择的测度效用的特定办法。如果效用扩大2倍,边际效用也会相应地扩大2倍。虽然我们仍然有表示相同偏好的完全有效的效用函数,但它的标度却有所不同。

这表明边际效用本身并没有行为方面的内容。我们能根据消费者的选择行为来计算边际效用吗?我们不能。选择行为仅仅显示了有关消费者按什么方式排列不同消费束的信息;而边际效用则取决于我们用来反映偏好次序的特定的效用函数,效用函数的数值并没有特殊的意义。然而,就像我们在下一节中将要见到的那样,我们可以证明,边际效用也可以用来计算某种的确具有行为方面内容的东西。

4.5 边际效用和边际替代率

效用函数$u(x_1, x_2)$可以用来度量第3章定义的边际替代率(MRS)。记住,边际替代率度量的是在给定消费束上的无差异曲线的斜率:它可以被解释为消费者恰好愿意用商品2代替商品1的比率。

这种解释使我们得到一个计算边际替代率的简单方法。考察在效用保持不变的条件下每种商品的消费的变化($\Delta x_1, \Delta x_2$)——即我们沿着无差异曲线移动时消费的变化,那么我们一定有

$$MU_1\Delta x_1+MU_2\Delta x_2=\Delta U=0$$

① 边际效用的微积分表述可参见本章附录。

求解无差异曲线的斜率，我们得到

$$\mathrm{MRS}=\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=-\frac{MU_1}{MU_2} \tag{4.1}$$

（注意，方程的左边是下标 2 在分子，下标 1 在分母；方程的右边则是下标 1 在分子，而下标 2 在分母。千万不要混淆！）

边际替代率的代数符号是负的，因为你要得到更多一些商品 1，又要保持相同的效用水平，你就必须放弃一些商品 2。可是，保留这个麻烦的负号总会令人感到讨厌，因而经济学家通常都用其绝对值来表示边际替代率——把它看作是一个正数。只要不发生混淆，我们就遵循这一习惯。

关于边际替代率计算的饶有兴趣的事情是：可以通过观察人们的实际行为来度量边际替代率——就像第 3 章所描述的那样，我们可以找到人们恰好愿意接受的那个交换率。

效用函数，从而边际效用函数，并不是唯一的。一个效用函数的任何单调变换都能使你得到另一个同样有效的效用函数。因此，比如说我们把效用乘以 2，那么边际效用就一定也要乘以 2。因此，边际效用函数的量值取决于所选择的效用函数，而这种选择是任意的。边际效用函数不是仅仅取决于行为，而且取决于我们用来描述行为的效用函数。

但边际效用的比率却给了我们一个可观察的量值——边际替代率。边际效用的比率同你所选择的效用函数的特定变换没有关系。我们可以看一下，如果你把效用乘以 2，结果将会怎样。这时，边际替代率(MRS)变成

$$\mathrm{MRS}=-\frac{2MU_1}{2MU_2}$$

这里的 2 可以消掉，所以边际替代率保持不变。

对效用函数进行任何单调变换，都会发生相同的情况。进行单调变换就是对无差异曲线重新标号，而上述边际替代率的计算则只关注沿既定无差异曲线的移动。即使边际效用由于单调变换发生了变化，边际效用的比率也不会与所选择的代表偏好的特定方式相关。

4.6　通勤车票的效用

效用函数基本上是描述选择行为的方法：如果当我们可获得消费束 Y 时我们却选择了消费束 X，那么 X 一定具有比 Y 较高的效用。通过研究消费者所作的选择，我们可以估计出描述消费者行为的效用函数。

在运输经济学领域，人们普遍运用这一思想来研究消费者经常往返于两地的行为。在大多数城市中，往返于住所和上班地点的人们都面临着乘公交车还是驾车去上班的选择。每一种选择都可以看作是以下特征的一个不同组合：行车时间、等候时间、实际开支的费用，以及舒适、便利等等。我们用 x_1 表示每种交通方式的行车时间，用 x_2 表示每种交通方式的等候时间，其余依次类推。

如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示自己驾车时的 n 个不同特征的值，$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$表示

乘公交车时的 n 个不同特征的值,我们就可以考虑这样一个模型,在这个模型中,消费者对于自己驾车还是乘公交车的选择,取决于他更偏好哪一个组合。

更具体地,一般出行者对上述特征的偏好可以表示为如下形式的效用函数

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_n x_n$$

其中,系数(β_1, β_2, …, β_n)都是未知参数。虽然,这个效用函数的任何单调变换毫无疑问都能同样地描述选择行为,但是从统计的角度看,最容易处理的还是它的线性形式。

现在,假设我们观察的是这样一组相似的出行者,他们根据其面临的往返时间和费用的具体模式在自己驾车和乘公交车之间作出选择。可以采用一些统计技术来找到对于一组出行者的可观察到的选择模式来说最适合的系数 β_i($i=1$, …, n)。这些统计技术提供了为不同的交通方式估计效用函数的办法。

有一份研究报告给出的效用函数采用了以下的形式:①

$$U(TW, TT, C)=-0.147TW-0.0411TT-2.24C \tag{4.2}$$

其中,

TW =乘公交车或自己驾车要用的全部步行时间

TT =以分钟计算的全部行车时间

C =以美元计算的全部行车费用

在多梅尼亚-麦克法登的研究报告中,这个估计出来的效用函数准确地描述了占他们样本 93%的家庭在自己驾车和乘公交车之间所作的选择。

(4.2)式中三个变量的系数描述的是一个普通家庭给予各种特征的权数,换言之,就是各种特征的边际效用。一个系数对另一个系数的比率,度量的是一个特征和另一个特征之间的边际替代率。例如,步行时间的边际效用对全部行车时间的边际效用的比率,表示在一般消费者看来,步行比乘车大致要艰辛 3 倍。换句话说,要是能减少 1 分钟的步行时间,消费者宁愿多增加 3 分钟的乘车时间。

同样,费用对行车时间的比率也表示一般出行者在这两个变量之间的权衡。在这份研究报告中,一般出行者对往返时间的估价是 0.041 1/2.24=0.018 3 美元/分钟,也就是每小时 1.10 美元。而在 1967 年,也就是研究样本的年份,一般出行者的工资大约为 1 小时 2.85 美元。

这种估计出来的效用函数对于决定公共运输系统进行某种改革是否值得这个问题很有价值。例如,在上述效用函数中,能对交通方式的选择作出解释的一个重要因素就是往返所花费的时间。城市的交通管理当局可以按照某种成本,增加公交车的数量以减少这种往返时间。但是,新增乘客人数所带来的收益能够保证补偿新增的支出吗?

已知效用函数和一组出行者,我们就能预测出哪些出行者会选择自己驾车,哪些出行

① 参见托马斯·多梅尼克和丹尼尔·麦克法登(Thomas Domenich and Daniel McFadden):《城市交通需求》(北荷兰出版社,1975 年)。除了这里描述的完全经济变量以外,该书中的预测过程还引入了各种形式的家庭地理特征。由于丹尼尔·麦克法登在发展用于预测此类模型的技术方面所做出的贡献,他被授予 2000 年度的诺贝尔经济学奖。

者会选择乘公交车。由此，我们可以对收益是否足以补偿新增成本的问题得出结论。

此外，我们还可以用边际替代率来估算每个出行者对减少的往返时间所作的估价。在上述多梅尼亚-麦克法登的研究报告中，我们看到，一般消费者在1967年是按照每小时1.10美元的比率对往返时间进行估价的。因此，这些出行者应该愿意为他(或她)的往返时间减少20分钟而支付大约0.37美元。这个数字使我们得到了一个度量适当增加公交车服务所带来的美元收益的尺度。这种收益必须同成本进行比较，以决定增加这些服务是否值得。有了对收益的数量测度，当然有助于确定合理的交通政策。

小　结

1. 效用函数仅仅是一种表示或概括偏好排列次序的方法。效用水平的数值并没有实质性的含义。
2. 因此，对于一个既定的效用函数来说，它的任何一种单调变换所表示的都是相同的偏好。
3. 由公式 $MRS = \Delta x_2/\Delta x_1 = -MU_1/MU_2$，可以根据效用函数计算出边际替代率(MRS)。

复习题

1. 正文中说，一个数自乘奇数次是单调变换。那么，一个数自乘偶数次又会怎样呢？这是一种单调变换吗？(提示：考虑 $f(u)=u^2$ 这种情况。)

2. 下面哪些是单调变换？

(1) $u=2v-13$；

(2) $u=-1/v^2$；

(3) $u=1/v^2$；

(4) $u=\ln v$；

(5) $u=-e^{-v}$；

(6) $u=v^2$；

(7) $u=v^2$，其中 $v>0$；

(8) $u=v^2$，其中 $v<0$。

3. 我们在正文中说过，如果偏好是单调的，经由原点的对顶线与每一条无差异曲线只会相交一次。你能严格地证明这一点吗？(提示：如果它同某条无差异曲线相交两次，会出现什么情况呢？)

4. 哪种偏好可用如同 $u(x_1, x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$ 形式的效用函数表示？效用函数 $v(x_1, x_2)=13x_1+13x_2$ 表示何种偏好？

5. 哪种偏好可用如同 $u(x_1, x_2)=x_1+\sqrt{x_2}$ 形式的效用函数表示？效用函数

$v(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1\sqrt{x_2}+x_2$ 是 $u(x_1, x_2)$ 的单调变换吗?

6. 考虑效用函数 $u(x_1, x_2)=\sqrt{x_1x_2}$,它表示哪种偏好? 函数 $v(x_1, x_2)=x_1^2x_2$ 是 $u(x_1, x_2)$ 的单调变换吗? 函数 $w(x_1, x_2)=x_1^2x_2^2$ 是 $u(x_1, x_2)$ 的单调变换吗?

7. 你能解释为什么效用函数的单调变换不会改变其边际替代率?

附录

我们首先要弄清楚“边际效用”的含义。与经济学中的其他领域一样,“边际”就是导数的意思。因此,商品 1 的边际效用就是

$$MU_1=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{u(x_1+\Delta x_1, x_2)-u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}=\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

注意,我们在这里使用了偏导数,因为商品 1 的边际效用是在商品 2 的数量保持不变的假设下进行计算的。

现在,我们可以采用微分形式重新表述正文中的边际替代率的推导过程。我们用两种方法进行这种推导,一种是微分,另一种是用隐函数。

在第一种方法中,我们考察效用保持不变时的一种变动$(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$。因此,我们要求

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2=0$$

第一项度量的是微小变动 $\mathrm{d}x_1$ 所造成的效用增加,第二项度量的是微小变动 $\mathrm{d}x_2$ 所造成的效用增加。我们要对这些变动进行选择以使效用的总变动 $\mathrm{d}u$ 等于零。求解 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

这正是正文中方程(4.1)的微分表达形式。

在第二种方法中,我们把无差异曲线看作是由函数 $x_2(x_1)$ 表示的。这就是说,对于每个 x_1 的值,函数 $x_2(x_1)$ 都能告诉我们,为了留在那条特定的无差异曲线上,我们需要的 x_2 是多少。因此,$x_2(x_1)$ 必须满足等式

$$u(x_1, x_2(x_1))\equiv k$$

式中的 k 是所讨论的无差异曲线的效用标号。

对这个恒等式两边关于 x_1 求微分,可以得到

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}=0$$

注意,在这个恒等式中有两个地方出现 x_1,所以 x_1 的变动将通过两条途径使效用函数发

生变动,因此,我们必须在出现 x_1 的每一处求导。

接下来,求解这个方程并得到关于$\partial x_2(x_1)/\partial x_1$ 的表达式

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}=-\frac{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_2}$$

这与我们以前得到的解相同。

虽然隐函数法要稍微严格一些,但只要你不做什么傻事,微分法就显得更为直接。

假设我们对一个效用函数作单调变换,例如,$v(x_1,\ x_2)=f(u(x_1,\ x_2))$。我们先计算这个效用函数的边际替代率(MRS)。根据连锁法则,我们可以得到

$$\mathrm{MRS}=-\frac{\partial v/\partial x_1}{\partial v/\partial x_2}=-\frac{\partial f/\partial u}{\partial f/\partial u}\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}=-\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$$

因为分子分母中的$\partial f/\partial u$ 可以消去。这表明边际替代率与效用的表示方法无关。

这使我们得到一个识别由不同效用函数表示的偏好的有用办法:已知两个效用函数,只要计算一下边际替代率,看看它们是否相同。如果它们相同,那么这两个效用函数就具有相同的无差异曲线。如果对于每个效用函数来说,偏好递增的方向相同,那么基本偏好也一定相同。

例子:柯布-道格拉斯偏好

柯布-道格拉斯偏好的边际替代率很容易用上面推导出的公式来计算。

如果我们选择对数表达式

$$u(x_1,\ x_2)=c\ln x_1+d\ln x_2$$

那么,我们就会有

$$\mathrm{MRS}=-\frac{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_2}=\frac{c/x_1}{d/x_2}=-\frac{cx_2}{dx_1}$$

注意,这里的 MRS 只取决于两个参数的比率和两种商品的数量。

如果我们选择指数表达式

$$u(x_1,\ x_2)=x_1^c x_2^d$$

结果又会怎样? 这时,我们会有

$$\mathrm{MRS}=-\frac{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,\ x_2)/\partial x_2}=-\frac{cx_1^{c-1}x_2^d}{dx_1^c x_2^{d-1}}=-\frac{cx_2}{dx_1}$$

这和上面的结果完全一样。当然,你一直知道,单调变换不可能改变边际替代率。