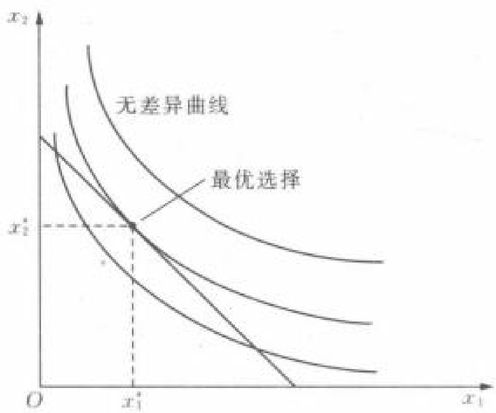
▶5

选　择

在这一章里，我们将把预算集和消费者偏好理论结合在一起，以考察消费者的最优选择。前面我们已经说过，所谓消费者选择的经济模型，指的是人们总是选择他们能够负担的最优消费束。现在，我们可用更为专业化的术语把这个模型进一步表述为"消费者从他们的预算集中选择最偏好的消费束"。

5.1　最优选择



最优消费位置处在无差异曲线与预算线的切点上。

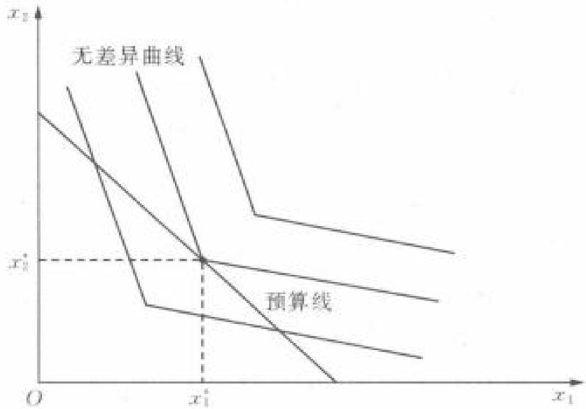
图 5.1　最优选择

图 5.1 显示了一种典型的情况。在该图中，我们绘制了预算集和消费者的几条无差异曲线。我们想在预算集中找出处在最高无差异曲线上的消费束。因为偏好是性状良好的，所以多总比少更受到偏好。因此，我们只把注意力集中于预算线上的消费束，而不考虑预算线以下的消费束。

现在，让我们从预算线的右下角开始向左移动。当我们沿着预算线移动时，注意到，我们正移向越来越高的无差异曲线。当我们达到刚好与预算线相切的最高的无差异曲线时，我们就停下来。图中，预算线与无差异曲线相切处的消费束标记为(x_1^*, x_2^*)。

(x_1^*, x_2^*)是消费者的最优选择。与(x_1^*, x_2^*)相比他更偏好的消费束集——在无差异曲线之上的消费束集——并不和他能够负担的消费束，即他的预算线以下的消费束相交。因此，消费束(x_1^*, x_2^*)是消费者能够负担的最优消费束。

注意，最优消费束的一个重要特征是：在这种选择处，无差异曲线与预算线是相切的。认真考虑一下你就会明白情况必定如此：如果无差异曲线与预算线不相切，那它就会穿过预算线，如果它穿过预算线，那么在预算线上就会有某个邻近的点处在无差异曲线的上



在最优消费点上，无差异曲线没有切线。

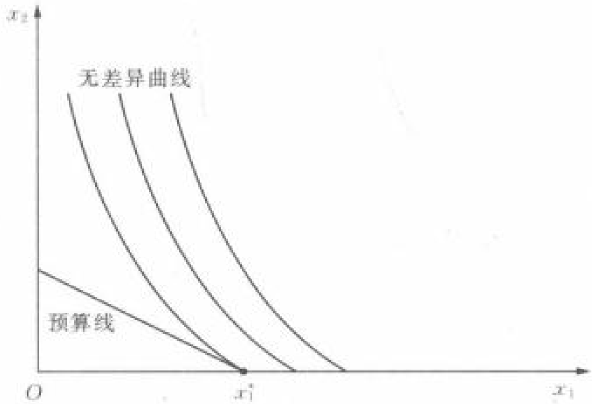
图 5.2　折拗的偏好

方——这意味着我们尚未处在最优消费束上。

最优选择必须真的符合相切条件吗？并非所有的情况都是如此。但是在大多数饶有兴趣的场合，情况确是如此。在最优选择点上，无差异曲线不会穿过预算线始终是成立的，那么，在什么情况下"不穿过"就意味着相切呢？我们先来看几种例外情况。

第一种例外，无差异曲线有可能没有切线，如图 5.2 所示。无差异曲线在最优选择点上有一个折点，而没有确定的切线，因为切线的数学定义要求在任何一点上只有唯一的一条切线。这种情况并没有多少经济意义——它比其他任何情况都麻烦。

第二种例外情况更为有趣。如图 5.3 所示，假设最优选择出现在某些商品的消费为零的时候。那么，虽然无差异曲线的斜率与预算线的斜率不相同，但无差异曲线却仍然没有穿过预算线。我们说图 5.1 代表一个内部最优，而图 5.3 则代表一个边界最优。



在最优消费选择处，商品 2 的消费为零。无差异曲线与预算线不相切。

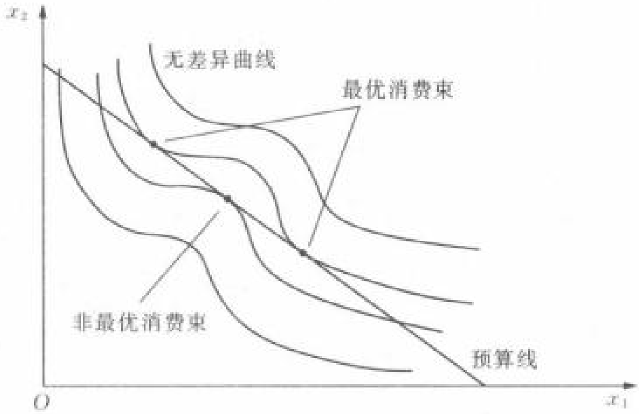
图 5.3　边界最优

如果我们愿意不考虑"折拗偏好"的情况，我们就可以忘记图 5.2 给出的例子。如果我们愿意将考察只限于内部最优的情况，我们也可以不考虑第二个例子。假如我们的内部最优处在平滑的无差异曲线上，无差异曲线的斜率与预算线的斜率就必定相同。因为如果它们不相同，无差异曲线就将穿过预算线，我们也就不可能找到最优点。

我们已经找到了最优选择必须满足的必要条件。如果最优选择涉及同时消费两种商品——因此它是一个内部最优——那么无差异曲线必定与预算线相切。但是，相切是否就是最优消费束的充分条件呢？如果我们找到这样一个消费束，在该点处无差异曲线与预算线相切，那么我们能否肯定我们达到了最优选择呢？

请看图 5.4，在这里，我们有三个相切条件都得到满足的消费束，它们都是内部点，但其中只有两种选择是最优的。所以，通常情况下，相切仅仅是最优选择的必要条件，而不是充分条件。

但有一个重要的例外，即在凸偏好的情况下相切是最优选择的充分条件。在凸偏好的情况下，任何满足相切条件的点必定是最优点，这在几何学上是很清楚的：由于凸的无差异曲线必定弯曲而离开预算线，它们不可能再弯回来与之相切。



这里有三个切点,但只有两个最优点。因此,相切是必要条件而不是充分条件。

图 5.4 不止一个切点

图 5.4 还向我们显示了在通常情况下,满足相切条件的最优消费束不止一个。然而凸本身又意味着一个限制条件,如果无差异曲线是严格凸的——它没有任何平坦的部分——那么,在每一条预算线上将只有一个最优选择。尽管这可以用数学证明,但仅仅从图形上就可以看出。

在内部最优点上,边际替代率一定等于预算线斜率的这个条件从图上看是相当明显的。但它在经济学上的含义是什么呢?回想一下,边际替代率的一种解释是消费者恰好愿意采纳的交换比率。那么,假定市场正向消费者提供一个等于 $-p_1/p_2$ 的交换比率——如果你放弃 1 单位的商品 1,你就能够购买 p_1/p_2 单位的商品 2。如果消费者处在某个他愿意保持不变的消费束上,那么,在这个消费束上边际替代率必定等于这个交换比率,即

$$\mathrm{MRS}=-\frac{p_1}{p_2}$$

考察这个问题的另一种方法是设想如果边际替代率与价格比率不相同将会发生什么情况。例如,假定 MRS 为 $\Delta x_2/\Delta x_1=-1/2$,而价格比率为 1/1。这意味着消费者刚好愿意放弃 2 单位的商品 1,以获得 1 单位的商品 2——但市场却愿意在 1 比 1 的基础上交换它们。因此,消费者肯定愿意放弃一些商品 1 以便购买更多的商品 2。无论何时,只要边际替代率与价格比率不相同,消费者就肯定不会处在他(或她)的最优选择上。

5.2 消费者需求

一定价格和收入水平下的商品 1 和商品 2 的最优选择,称作消费者的*需求束*。通常情况下,当价格和收入水平发生变化时,消费者的最优选择也将会改变。*需求函数*是将最优选择——需求数量——与不同的价格和收入值联系在一起的函数。

我们将需求函数记为同时依赖于价格和收入的函数:$x_1(p_1, p_2, m)$ 和 $x_2(p_1, p_2, m)$。对于每一组不同的价格和收入,都将有一个不同的商品组合成为消费者的最优选择。不同的偏好将导致不同的需求函数,我们下面就将研究几个例子。在后面几章中,我们的主要目标是研究这些需求函数的性状——当价格和收入发生变化时,最优选择是如何变化的。

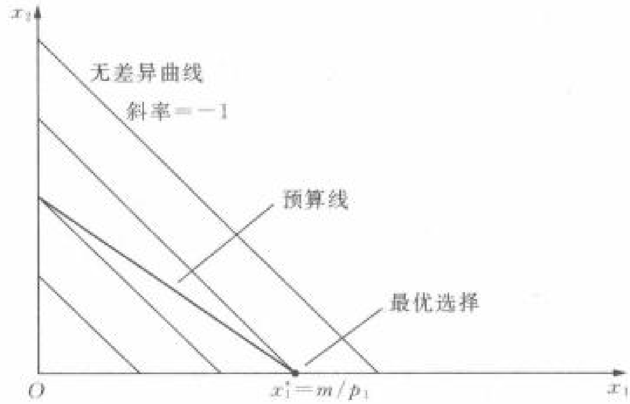
5.3 若干例子

我们把上述关于消费者选择的模型应用于第 3 章描述的有关偏好的例子。对于每一

个例子，论证的基本程序相同：绘制出无差异曲线和预算线，然后找出预算线与最高无差异曲线相切的点。

完全替代

图 5.5 所示的是完全替代的例子。我们有三种可能的情况。如果 $p_2 > p_1$，那么预算线的斜率就比无差异曲线的斜率平坦。在这种情况下，最优消费束是消费者把所有的钱都花费在商品 1 的消费上。如果 $p_1 > p_2$，那么，在最优选择点上，消费者就只购买商品 2。最后，如果 $p_1 = p_2$，就会有一系列的最优选择——在这种情况下，满足预算约束的任何数量的商品 1 和商品 2 的组合都是最优的。因此，对商品 1 来说，需求函数为



如果商品是完全替代的，最优选择通常在边界上。

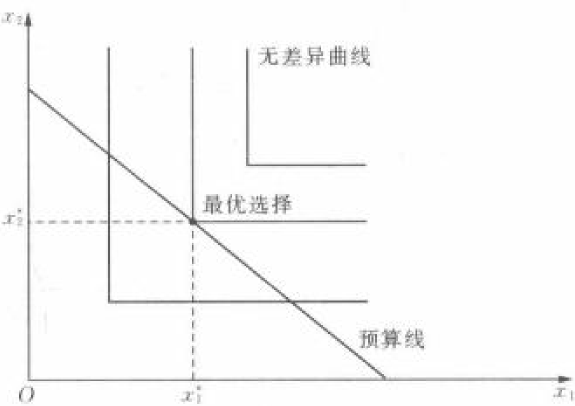
图 5.5　完全替代情况下的最优选择

$$x_1 = \begin{cases} m/p_1 & \text{若 } p_1 < p_2 \\ \text{介于 0 和 } m/p_1 \text{ 之间的任何数量} & \text{若 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{若 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

这些结论与通常的感觉是否一致呢？所有这些都表明，如果两种商品是完全替代的，那么消费者将会只购买较便宜的那一种。而如果两种商品的价格相同，消费者就不会在意购买哪一种。

完全互补

图 5.6 显示了完全互补的情况。请注意，最优选择必然总是出现在对角线上。因为在那里，无论价格是多少，消费者所购买的两种商品的数量都相同。对应于我们的例子，就是人有两只脚，所以要成双地买鞋。①



如果商品是完全互补的，那么由于最优选择出现在 $x_1 = x_2$ 的地方，所以需求量总是处在对角线上。

图 5.6　完全互补情况下的最优选择

让我们运用代数方法来求出最优选择。我们知道不管价格如何，消费者总要购买相同数量的商品 1 和商品 2。我们用 x 来表示这个数量。于是，我们必须满足预算约束

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

求解 x，我们得到关于商品 1 和商品 2 的最优选择：

$$x_1 = x_2 = x = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

① 不要担心，以后我们将得到更多有趣的结论。

在这里,最优选择的需求函数是相当直观的。由于两种商品总是一起消费,所以,这种消费就好像是消费者将他所有的钱都花费在价格为 p_1+p_2 的单一商品上。

中性商品和厌恶品

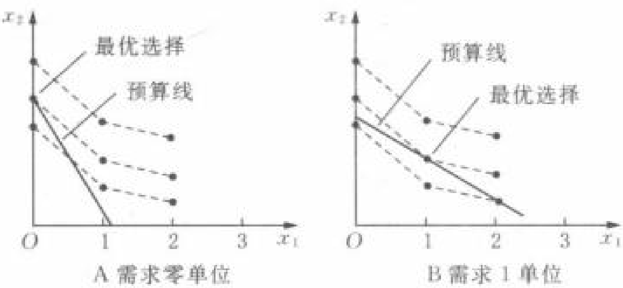
在中性商品的情况下,消费者把所有的钱都花费在他喜爱的商品上,而不购买任何中性商品。如果一种商品是厌恶品,也会发生相同情况。因此,如果商品 1 是嗜好品,而商品 2 是厌恶品,那么需求函数就将为

$$x_1 = m/p_1$$
$$x_2 = 0$$

离散商品

假设商品 1 是只能以整数单位获得的商品,而商品 2 是可用来购买一切东西的货币。如果消费者分别选择 1, 2, 3, …单位的商品 1,那他也就是分别选择了消费束$(1, m-p_1)$, $(2, m-2p_1)$, $(3, m-3p_1)$,依此类推。我们只要比较每个消费束的效用,就能知道哪个消费束的效用最高。

或者,我们也可以运用图 5.7 所示的无差异曲线来进行分析。像通常一样,最优消费束处在最高的无差异“曲线”上。如果商品 1 的价格非常高,消费者就会作出消费零单位的选择;随着价格的下降,消费者将会发现消费 1 个单位是最优的。一般地,随着价格的进一步下降,消费者会选择消费更多单位的商品 1。



在图 A 中,商品 1 的需求等于零,而在图 B 中,商品 1 的需求是 1 个单位。

图 5.7 离散商品

凹偏好

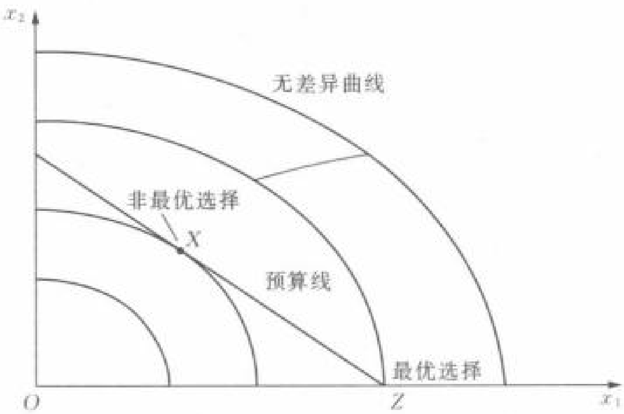
考察图 5.8 所示的情况,X 是否是最优选择?不是。对这些偏好来说,最优选择永远是边界选择,就像消费束 Z 一样。回想一下非凸偏好的情况。如果你有钱购买冰淇淋和橄榄,而你又不喜欢一起消费它们,你就会把钱全部花在其中一种或另一种商品上。

柯布-道格拉斯偏好

假定效用函数取柯布-道格拉斯函数形式:$u(x_1, x_2)=x_1^c x_2^d$。在本章的附录中,我们运用微积分求出了这一效用函数的最优选择,其结果是

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$$

$$x_2 = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$$



最优选择是处在边界上的 Z 点,而不是内部切点 X,因为 Z 点处在较高的无差异曲线上。

图 5.8 凹偏好情况下的最优选择

这些需求函数在代数例子中通常是很有用的，所以你要尽可能地记住它们。

柯布-道格拉斯偏好有一个便利的特性。考察一个具有柯布-道格拉斯偏好的消费者在商品1上的花费占他收入的比重。如果他消费 x_1 单位的商品1，花费 p_1x_1，那么，这部分消费占他全部收入的比例就为 p_1x_1/m。用需求函数代替 x_1，我们有

$$\frac{p_1x_1}{m}=\frac{p_1}{m}\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}=\frac{c}{c+d}$$

类似地，消费者在商品2上的花费占他收入的比重为 $d/(c+d)$。

因此，具有柯布-道格拉斯偏好的消费者在每种商品上的花费总是占他收入的一个固定的份额。这个份额的大小取决于柯布-道格拉斯函数中的指数。

这就是为什么将柯布-道格拉斯效用函数的指数和指定为1会非常方便的原因。如果 $u(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$，那么，我们就能直接将 a 视作在商品1上的花费占收入的比重。正因为如此，我们通常把柯布-道格拉斯偏好记为这种形式。

5.4 估计效用函数

我们现在已知偏好和效用函数的一些不同的形式，并考察了由这些偏好所产生的各种需求行为。但在实际生活中，我们却常常必须从相反的方向来进行研究：我们观察到的是需求行为，而问题却是由哪种偏好产生了我们观察到的行为。

例如，假设我们观察到一个消费者在若干不同价格和收入水平下作出的选择。表5.1列举的就是一例。这是一张在不同年份时的不同价格和收入水平下对两种商品的需求表。运用公式 $s_1=p_1x_1/m$ 和 $s_2=p_2x_2/m$，我们计算出了每年在每种商品上的花费占收入的份额。

表 5.1　描述消费行为的若干数据

年份	p_1	p_2	m	x_1	x_2	s_1	s_2	效用
1	1	1	100	25	75	0.25	0.75	57.0
2	1	2	100	24	38	0.24	0.76	33.9
3	2	1	100	13	74	0.26	0.74	47.9
4	1	2	200	48	76	0.24	0.76	67.8
5	2	1	200	25	150	0.25	0.75	95.8
6	1	4	400	100	75	0.25	0.75	80.6
7	4	1	400	24	304	0.24	0.76	161.1

就这些数据来说，支出的份额相对保持不变。虽然不同的观察之间存在小的偏差，但这不足以影响我们的结论。商品1的平均支出份额约是1/4，商品2的平均支出份额约是3/4。看起来，形如 $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{3}{4}}$ 的效用函数与这些数据拟合得相当好。换句话说，这种形式的效用函数产生的选择行为与观察到的选择行为相当近似。便利起见，我们运用这个估计的柯布-道格拉斯效用函数，计算出了与每次的观察数据相对应的效用值。

就我们依据观察到的行为所能得到的结论而言，消费者看起来一直在使函数 $u(x_1,$

$x_2)=x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{3}{4}}$ 实现最大化。对消费者行为的进一步观察很可能使我们否定这个假说,但基于我们已有的数据,它与最优化模型拟合得非常好。

这一点具有非常重要的意义,因为现在我们就可以利用这种"拟合"的效用函数,来评价拟推出的新政策将会产生的影响。举例来说,假设在政府计划实施的税制下,消费者面临的价格为(2, 3),他拥有的收入为 200。那么,按照我们的估计,这些价格下的需求束应该是

$$x_1=\frac{1}{4}\frac{200}{2}=25$$

$$x_2=\frac{3}{4}\frac{200}{3}=50$$

这个需求束的估计效用是

$$u(x_1, x_2)=25^{\frac{1}{4}}50^{\frac{3}{4}}\approx 42$$

这意味着新的税收政策使消费者的境况好于他在第 2 个年份中的境况,而差于他在第 3 个年份中的境况。这样,我们就可以通过观察到的选择行为来评价拟推出的新政策对这个消费者的影响。

由于这个思想在经济学中非常重要,所以,我们接下来重温一下它的推理方法。给定关于选择行为的某些观察资料,我们试图确定的是消费者在使怎样的效用函数(如果存在的话)实现最大化。一旦估计出这样的效用函数,我们就能运用它来预测新情况下的选择行为,以及评估经济环境中可能发生的变化。

当然,我们这里描述的是一种非常简单的情况。实际上,我们通常得不到关于个人消费选择的详细数据。我们经常获得的是个人的分组数据——青少年、中产阶级家庭、老年人,等等。对于不同的商品,这些群体具有不同的偏好,这些偏好反映在他们的消费支出模式中。我们能够估计出描述他们消费模式的效用函数,因此也就能运用这种估计的效用函数来预测需求,并对政策建议进行评估。

在上述的简单例子中,很明显,支出份额相对保持不变,因此,柯布-道格拉斯效用函数实现了相当好的拟合。在其他情况下,更复杂的效用函数形式可能比较适合,这时,计算变得更加繁杂,我们可能需要使用计算机来进行估计,但是,计算程序的基本思想都是一致的。

5.5 边际替代率条件的含义

上一节,我们考察了这样一个重要的思想:关于需求行为的观察数据能够告诉我们有关产生这种行为的消费者基础偏好的重要信息。拥有足够多的关于消费者选择的观察资料,我们通常就能估计出产生这些选择的效用函数。

然而,甚至对于一个消费者在一组价格下的选择所作的观察,也能使我们对消费变化时消费者的效用将如何变化的问题作出某种有用的推断。让我们来看看这个推断是如何得到的。

在组织良好的市场上，典型的情况是每个人面临大致相同的商品价格。例如，考虑黄油和牛奶这两种商品。如果每个人都面临相同的价格，每个人都在最优化自己的选择，每个人都处在内部解上……那么，每个人对于黄油和牛奶必然具有相同的边际替代率。

下面的论述直接来源于上述的分析。对于黄油和牛奶，市场为每个人提供了相同的交换率，每个人都在调整消费束，直到两种商品对于他们的“内部”边际价值等于这两种商品在市场上的“外部”价值。

有趣的是这个论述并不依赖于收入和嗜好。人们也许会对两种商品的总消费作出极不相同的评价，一些人可能消费很多黄油和少量的牛奶，而另外一些人则可能正相反。一些富裕的人或许会消费很多牛奶和很多黄油，而另外一些人则可能对每一种商品都消费得很少。但是，消费这两种商品的每一个人都必定具有相同的边际替代率。他们必须约定以一种商品表示的另一种商品的价值：他们愿意牺牲多少数量的一种商品以换取另一种商品。

以价格比率衡量边际替代率非常重要，因为它意味着，我们拥有一种为消费束可能发生的变化进行估价的方法。例如，假定牛奶的价格是每夸脱 1 美元，而黄油的价格是每磅 2 美元。那么，对消费牛奶和黄油的所有人来说，边际替代率一定是 2：他们必须得到 2 夸脱牛奶作为对放弃 1 磅黄油的补偿；或者相反，作为对放弃 2 夸脱牛奶的补偿，他们必须得到价值相当的 1 磅黄油。因此，消费这两种商品的每一个人都将以相同的方式来评价边际消费。

现在假定一个发明家发明了一种把牛奶变成黄油的新方法：将 3 夸脱牛奶倒入特定的机器中，就可以得到 1 磅黄油，而不会产生任何有用的副产品，试问，这种机器会有市场吗？毫无疑问，风险资本家肯定不会问津，这是因为每个人都已在用 2 夸脱牛奶换取 1 磅黄油的点上进行交易，他们怎么又会为换取 1 磅黄油而放弃 3 夸脱牛奶呢？答案是他们必然不愿意。因此，这种发明毫无价值。

但是，如果机器的操作相反，倒入 1 磅黄油能得到 3 夸脱牛奶，又将会出现什么情况呢？这种机器会有市场吗？答案是肯定的。牛奶和黄油的市场价格告诉我们，人们仅能用 1 磅黄油换取 2 夸脱牛奶。因此，与市场上现行的交换比率相比，用 1 磅黄油换取 3 夸脱牛奶更为合算。

市场价格显示第一台机器是无利可图的：它投入价值 3 美元的牛奶，但只产出价值 2 美元的黄油，这一事实恰好是人们认为投入价值大于产出价值的另一种表述方式。第二台机器仅用价值 2 美元的黄油就产出了价值 3 美元的牛奶，由于人们认为产出的价值超出了投入的价值，这台机器是有利可图的。

重要的是，由于价格度量的是人们恰好愿意用一种商品替代另一种商品的比率，所以，价格可以应用于评价涉及消费变化的政策建议中。注意，价格并不是随意的数字，它反映了人们对边际物品的评价，这一事实是经济学中最基本和最重要的观点之一。

如果我们观察到一组价格下的一次选择，我们就得到一个消费点上的边际替代率。如果价格发生变化，而我们又观察到了相应的另一次选择，我们就得到了另一个边际替代率。随着我们观察到越来越多的选择，关于产生观察到的选择行为的基础偏好的形状，我

们也就知道得越来越多。

5.6 税收类型的选择

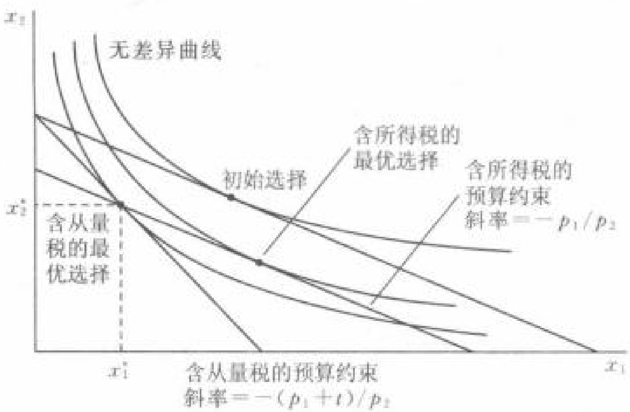
即使我们运用到目前为止已经论述过的很少一部分的消费理论，我们也能够得出有趣的和重要的结论。这里有一个描述在两种税收类型之间进行选择的很好的例子。我们知道，从量税是根据商品的消费量课征的税，例如对每加仑汽油征收 15 美分的汽油税。所得税则是对收入课征的税。如果政府想要增加一定数量的收入，是征收从量税较好还是征收所得税较好呢？让我们运用已经学过的知识来回答这个问题。

首先，我们分析征收从量税。假定初始的预算约束为

$$p_1x_1+p_2x_2=m$$

那么，如果我们按税率 t 对商品 1 的消费课税，预算约束会发生什么变化？答案很简单。在消费者看来，商品 1 的价格就好像上升了 t。因此，新的预算约束就是

$$(p_1+t)x_1+p_2x_2=m \tag{5.1}$$



这里，我们考察税收收入都为 R^* 时的从量税和所得税的情况。在所得税情况下，消费者的境况相对会更好。因为他可以选择处在更高无差异曲线上的点。

图 5.9　所得税与从量税

因此，商品的从量税提高了消费者面临的价格。图 5.9 提供了这种价格变化如何影响需求的一个例子。此时，我们还无法确定这种税收是增加还是减少商品 1 的消费，尽管我们推测课税将会使消费减少。无论出现哪种情况，最优选择 (x_1^*, x_2^*) 都必须满足预算约束

$$(p_1+t)x_1^*+p_2x_2^*=m \tag{5.2}$$

通过这种课税，政府收入增加的数量为 $R^*=tx_1^*$。

现在，让我们再来考虑一下使政府增加相同数量收入的所得税的情况，在这种情况下，预算约束的形式将为

$$p_1x_1+p_2x_2=m-R^*$$

进一步，替代掉 R^*，上式变为

$$p_1x_1+p_2x_2=m-tx_1^*$$

在图 5.9 中，这条预算线处在什么位置呢？

很显然，这条预算线与初始预算线具有相同的斜率 $-p_1/p_2$，但问题是要确定它的位置。可以证明，包含所得税的预算线必定经过点 (x_1^*, x_2^*)。检验的方法是将 (x_1^*, x_2^*) 代

入包含所得税的预算约束中，看它是否满足约束条件。

方程式

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* = m - tx_1^*$$

正确吗？是的，因为它恰好是式(5.2)经过整理后的形式，而我们已知后者是正确的。

这就证实(x_1^*, x_2^*)位于包含所得税的预算线上：它是消费者能够负担的选择。但是，它是否就是最优选择呢？答案显然是否定的。在(x_1^*, x_2^*)点上，边际替代率为$-(p_1+t)/p_2$，但所得税却让我们按照$-p_1/p_2$的比率进行交换。这样，预算线就与无差异曲线在(x_1^*, x_2^*)点相交。这意味着预算线上可能有一些点比(x_1^*, x_2^*)点更受消费者的偏好。

因此，在政府向消费者征收相同数量的税收的条件下，消费者在课征所得税时的境况，好于他在课征从量税时的境况，从这个意义上说，所得税肯定优于从量税。

这是一个好的结论，值得我们记住，但是，对它的局限也必须有所了解。第一，它仅仅适用于一个消费者的情况。这一论点表明，对任何既定的一个消费者来说，在政府得到相同数量税收的情况下，与课征从量税相比，课征所得税会使他（或她）的境况更好些。但是，不同的人所缴纳的所得税的数量是不同的。因此，对全体消费者来说，统一的所得税并不一定比统一的从量税更好（考虑一下这种情况，一些消费者不消费任何数量的商品1——这些消费者肯定偏好从量税而不喜欢统一的所得税）。

第二，我们假定征收所得税时消费者的收入不会变化，并且假定所得税基本上是一次性缴纳的——这种税仅仅改变消费者必须花费的货币数量，但并不影响他必须作出的任何选择。这是一个不太符合现实的假设。如果收入是消费者自己赚得的，我们就可以预期，课征这种税将挫伤消费者赚取收入的热情，以至于课税以后，税后收入的下降幅度可能超过课税的数量。

第三，我们完全忽略了供给对课税的反应。我们已经说明了需求是如何对税收变化作出反应的，但是，供给对税收变化也有反应，一项完全的分析应当将这些反应也包括在内。

小　结

1. 消费者的最优选择是消费者预算集中处在最高无差异曲线上的消费束。
2. 最优消费束的特征一般由无差异曲线的斜率（边际替代率）与预算线的斜率相等这个条件来表示。
3. 如果我们观察到若干个消费选择，我们就很可能估计出产生那种选择行为的效用函数。这样一种效用函数可以用来预测未来的选择，以及估计新的经济政策对消费者的效用。
4. 如果每个人在两种商品上面临相同的价格，那么，他们就具有相同的边际替代率，并因此愿意以相同的方式来交换这两种商品。

复习题

1. 假定两种商品是完全替代品，那么商品 2 的需求函数是什么？

2. 假设无差异曲线是一条斜率为 $-b$ 的直线，并且给出任意的价格 p_1、p_2 和收入 m，那么，消费者的最优选择是什么？

3. 假定一个消费者在每一杯咖啡里总是加 2 匙糖。如果每匙糖的价格为 p_1，每杯咖啡的价格为 p_2，消费者花费在咖啡和糖上的总额为 m 美元，那么，他打算分别购买多少咖啡和糖？

4. 假定你对冰淇淋和橄榄具有高度的非凸偏好，如同正文描述的那样，你所面临的价格分别为 p_1 和 p_2，并有 m 美元可供支出。请列出你所选择的最优消费束。

5. 如果一个消费者的效用函数为 $u(x_1, x_2)=x_1x_2^4$，那么，他在商品 2 上的花费占他收入的比例是多少？

6. 在哪一种类型的偏好下，无论课征从量税还是课征所得税，消费者的境况会一样好？

附录

能够求解偏好最大化问题和得到实际需求函数的代数例子，是十分有用的。在本章正文中，我们在诸如完全替代和完全互补这些简单的情况下作了这方面的工作。这里，我们来看如何在更为一般的情况下进行这些工作。

首先，我们通常用效用函数 $u(x_1, x_2)$ 来表示消费者的偏好。在第 4 章，我们已经看到，它不是一个很有限制性的假定；大多数性状良好的偏好都可以用效用函数来描述。

首先注意到，我们已经获悉如何求解最优选择的问题。这里，我们仅仅需要把前面 3 章中已经学过的知识结合在一起。从本章中，我们知道最优选择 (x_1, x_2) 必须满足条件

$$\mathrm{MRS}(x_1, x_2)=-p_1/p_2 \tag{5.3}$$

在第 4 章的附录中，我们得知边际替代率(MRS)可以表示为效用函数的导数之比的相反数。因此，替代 MRS 并消去负号，我们有

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{5.4}$$

在第 2 章里，我们知道最优选择必须满足预算约束

$$p_1x_1+p_2x_2=m \tag{5.5}$$

这使我们得到两个方程——边际替代率条件和预算约束——以及两个未知数 x_1 和 x_2。我们所要做的就是求解这两个方程，并找出作为价格和收入的函数的 x_1 与 x_2 的最优选择。求解两元一次方程组的方法有很多种，常用的一种解法——尽管它不总是最简单

的——是从预算约束中解出一种选择，然后将它代入边际替代率(MRS)条件中。

将预算约束重新整理为

$$x_2=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1 \tag{5.6}$$

将上式代入方程式(5.4)中，得到

$$\frac{\partial u(x_1,\ m/p_2-(p_1/p_2)x_1)/\partial x_1}{\partial u(x_1,\ m/p_2-(p_1/p_2)x_1)/\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

这看似可怕的表达式仅有一个未知数 x_1，一般可以从中求解出用$(p_1,\ p_2,\ m)$表示的 x_1。然后，通过预算约束可以求解出作为价格和收入的函数的 x_2。

我们也可以采用最大化的微积分条件这一更系统的方法来求得效用最大化问题的解。为此，我们首先使效用最大化问题成为一个约束最大化问题：

$$\max_{x_1,\ x_2} u(x_1,\ x_2)$$
$$\text{s.t. } p_1x_1+p_2x_2=m$$

这一问题要求，我们所选择的 x_1 和 x_2 要满足两个条件：第一，它们必须满足预算约束；第二，它们实现的 $u(x_1,\ x_2)$值要比满足预算约束的 x_1 和 x_2 的任何其他值给出的效用值都大。

解这一问题有两种有用的方法。第一种是简单地从约束条件中求得用其中一个变量表示的另一个变量，然后将其代入目标函数。

例如，对于 x_1 的任何给定值，为满足预算约束我们所需要的 x_2 可以通过线性函数

$$x_2(x_1)=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1 \tag{5.7}$$

给出。

现在，我们用 $x_2(x_1)$来替代效用函数中的 x_2，得到非约束最大化问题

$$\max_{x_1} u(x_1,\ m/p_2-(p_1/p_2)x_1)$$

这是一个仅与 x_1 有关的非约束最大化问题。因为无论 x_1 取任何值，我们所使用的函数 $x_2(x_1)$都能保证 x_2 的值满足预算约束。

一般情况下，我们只要对 x_1 求微分并令其结果等于零就可以求解这一问题。按此程序，我们首先得到一阶条件式：

$$\frac{\partial u(x_1,\ x_2(x_1))}{\partial x_1}+\frac{\partial u(x_1,\ x_2(x_1))}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}=0 \tag{5.8}$$

这里的第一项是增加 x_1 如何使效用增加的直接效用，第二项由两部分组成：x_2 增加时的效用增长率$\partial u/\partial x_2$，乘以 x_1 增加时为继续满足预算方程 x_2 的增长率 dx_2/dx_1。我们可以对式(5.7)求微分，以计算后面这个导数

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{p_1}{p_2}$$

将它代入式(5.8),我们有

$$\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

这恰好表示 x_1 和 x_2 之间的边际替代率必定等于在最优选择(x_1^*, x_2^*)点上的价格比率。这就是我们上面得到的最优选择条件:无差异曲线的斜率必须等于预算线的斜率。当然,最优选择也必须满足预算约束 $p_1x_1^*+p_2x_2^*=m$,这又给了我们包含两个未知数的两个方程。

第二种方法是通过运用拉格朗日乘数法来求解这些问题。这种方法首先要定义一个称作拉格朗日的辅助函数:

$$L=u(x_1, x_2)-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$$

新变量λ称作拉格朗日乘数,这是因为在拉格朗日函数中它与约束条件相乘。拉格朗日定理认为,最优选择(x_1^*, x_2^*)必定满足三个一阶条件:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}-\lambda p_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=p_1x_1^*+p_2x_2^*-m=0$$

这三个方程具有几个有趣的特点:第一,可以注意到,它们都是拉格朗日函数对于 x_1、x_2 以及λ的导数,且都等于0。其中,最后一个对于λ的导数恰好就是预算约束。第二,对于三个未知数 x_1、x_2 和λ,我们拥有三个方程式,我们有希望求解出用 p_1、p_2 和 m 表示的 x_1 和 x_2。

拉格朗日定理在任何一本高级微积分书中都有证明。在高级经济学教程中,它的应用相当广泛。但是,对于我们的目的来说,我们只需知道这一定理的陈述以及如何应用就可以了。

在我们所给出的特定情况下,如果用第一个条件除以第二个条件,就可以得到

$$\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

正如我们前面的论述,上式简要地说明了边际替代率必须等于价格比率。预算约束给了我们另一个方程,因此,我们又回到了包含两个未知数的两个方程。

例子:柯布-道格拉斯需求函数

在第4章,我们介绍了柯布-道格拉斯效用函数

$$u(x_1, x_2)=x_1^cx_2^d$$

由于效用函数只对单调变换有定义，因此，对此表达式取对数后再处理是比较方便的：

$$\ln u(x_1, x_2) = c\ln x_1 + d\ln x_2$$

让我们为柯布-道格拉斯效用函数找出 x_1 和 x_2 的需求函数。我们所要解决的问题是

$$\max_{x_1, x_2} c\ln x_1 + d\ln x_2$$
$$\text{s.t. } p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

求解这一问题至少有三种方法。一种方法是写出边际替代率条件和预算约束。运用在第 4 章中导出的边际替代率表达式，我们有

$$\frac{cx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

两个方程含有两个未知数，可以求出 x_1 和 x_2 的最优选择。求解的一个方法是把第二式代入第一式中，得

$$\frac{c(m/p_2 - x_1p_1/p_2)}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

交叉相乘，得

$$c(m - x_1p_1) = dp_1x_1$$

重新整理后得到

$$cm = (c+d)p_1x_1$$

或者

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$$

这就是 x_1 的需求函数。要找出 x_2 的需求函数，只要将上式代入预算约束，就可以得到

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} \\ &= \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2} \end{aligned}$$

第二种方法是一开始就将预算约束代入最大化问题。如果采用这种方法，我们的问题就变成

$$\max_{x_1} c\ln x_1 + d\ln(m/p_2 - x_1p_1/p_2)$$

这个问题的一阶条件是

$$\frac{c}{x_1} - d\frac{p_2}{m - p_1x_1}\frac{p_1}{p_2} = 0$$

只需很浅显的代数知识，我们就能得到解

$$x_1=\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$$

把这再代回到预算约束 $x_2=m/p_2-x_1p_1/p_2$，就可得到

$$x_2=\frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$$

这些就是这两种商品的需求函数，令人高兴的是，它们与用其他方法求出的解完全相同。

现在采用拉格朗日方法。建立拉格朗日函数

$$L=c\ln x_1+d\ln x_2-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$$

然后微分，得出三个一阶条件

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{c}{x_1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{d}{x_2}-\lambda p_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=p_1x_1+p_2x_2-m=0$$

现在，窍门在于如何解出这些方程！最好的运算步骤是先解出 λ，然后再解 x_1 和 x_2。因此，我们先整理前面这两个方程，得到

$$c=\lambda p_1x_1$$

$$d=\lambda p_2x_2$$

只需要把这两个方程相加，就可以得到：

$$c+d=\lambda(p_1x_1+p_2x_2)=\lambda m$$

由此可得

$$\lambda=\frac{c+d}{m}$$

把这代回前面的两个方程求解 x_1 和 x_2，便可得到

$$x_1=\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$$

$$x_2=\frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$$

恰好与前面的结果一样。