▶22

成本曲线

在上一章，我们阐述了厂商的成本最小化行为。在本章，我们将利用一种重要的几何图形即成本曲线来继续研究这个问题。成本曲线是对厂商成本函数的几何表述，它在确定最优产量选择时具有非常重要的作用。

22.1 平均成本

回顾上一章所讨论的成本函数。要素的价格为(w_1, w_2)时，生产 y 单位产量的最小成本由函数$c(w_1, w_2, y)$给出。在本章以后的部分，要素的价格保持不变，从而成本就仅仅是产量 y 的函数$c(y)$。

厂商的某些成本与产量水平无关。如同第 21 章所述，这些成本称作不变成本。不论厂商的产量如何，不变成本是厂商必须支付的成本。例如，不论产量如何，厂商都要支付应归还的抵押借款。

另一类成本随着产量的变动而变动：这些成本是可变成本。厂商的总成本总是可以表示为可变成本 $c_v(y)$与不变成本 F 的和，即

$$c(y) = c_v(y) + F$$

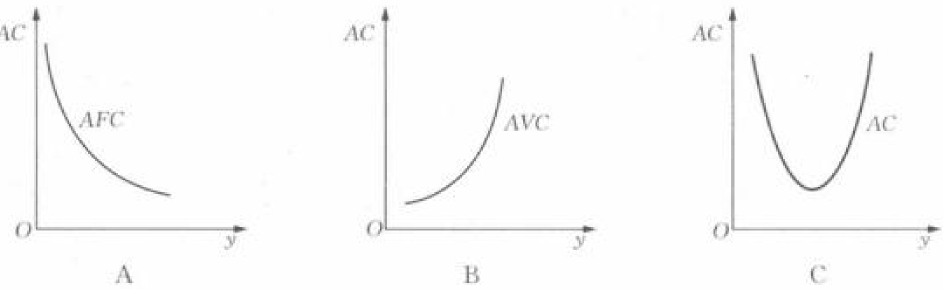
平均成本函数度量的是每单位产量的成本，平均可变成本函数度量的是每单位产量的可变成本，平均不变成本函数度量的是每单位产量的不变成本。根据上述的等式，我们可以得到

$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y)$$

其中，$AVC(y)$表示平均可变成本，$AFC(y)$表示平均不变成本。这些成本函数的几何形状是怎样的呢？最简单的成本函数当然是平均不变成本函数：当 $y=0$ 时，平均不变成本无穷大；随着产量 y 的逐渐增大，平均不变成本趋向于零。见图22.1A所示。

考察可变成本函数。从产量为零开始，考察生产一个单位产量时的情况。当 $y=1$ 时，平均可变成本恰好是生产这个单位产量所花费的可变成本。现在，产量增加到 2 个单

位。我们预期,在最坏的情况下,可变成本会增加1倍,从而平均可变成本保持不变。在产出规模扩大时,如果我们采取一种更有效率的方式组织生产,那么平均可变成本最初甚至可能会下降,但最终,平均可变成本还是会上升。为什么呢?因为只要存在不变要素,它们最终就会制约生产过程。



在图A中,当产量增加时,平均不变成本减少;在图B中,平均可变成本最终随着产量的增加而增加;图C综合了这两种效应,就得到U形的平均成本曲线。

图22.1 平均成本曲线图

例如,假设不变成本指的是与一间规模固定的厂房有关的租金或抵押借款。当产量增加时,平均可变成本——单位生产成本——可能暂时不变。但是一旦对厂房的使用达到饱和时,这些成本就会迅速上升,从而使平均可变成本具有图22.1B所示的形状。

平均成本曲线是平均可变成本曲线与平均不变成本曲线的加总,因此,它呈现图22.1C所示的U形。起初平均成本曲线的下降源自平均不变成本的下降;而最终平均成本曲线的上升则是由于平均可变成本的上升所引致的,综合这两种效应,平均成本曲线就呈现图形所示的U形。

22.2 边际成本

还有一条有趣的成本曲线是边际成本曲线,它度量的是因产量的变动而引起的成本的变动。这就是说,在任何给定的产量水平 y 上,如果产量变动某个数量 Δy,我们就要考察成本会如何变动:

$$MC/y=\frac{\Delta c(y)}{\Delta y}=\frac{c(y+\Delta y)-c(y)}{\Delta y}$$

我们也可以利用可变成本函数来表示边际成本的定义:

$$MC/y=\frac{\Delta c_v(y)}{\Delta y}=\frac{c_v(y+\Delta y)-c_v(y)}{\Delta y}$$

由于 $c(y)=c_v(y)+F$,当产量 y 变动时不变成本 F 保持不变,所以,上述两种有关边际成本的定义是等价的。

通常,我们取 Δy 为1单位产量,这样,边际成本就等于多生产1单位产量时的成本的变动量。如果我们考虑的是一种离散商品的生产,那么,生产 y 单位产量时的边际成本就等于 $c(y)-c(y-1)$。通常,这是考察边际成本的一种简便的方式,但它有时也会产生歧

义。请记住,边际成本度量的是一种变化率,即成本变动量与产出变动量之比。如果产量变动 1 单位,那么,边际成本就可以看似成本的简单变化,但当我们增加 1 单位的产量时,它实际上是一种变化率。

如何把边际成本曲线添加到上文描述的平均成本曲线图中呢?首先,应该注意这样的问题,由定义可知,当产量为零时,可变成本也等于零,于是生产第 1 个单位产量的边际成本为

$$MC(1)=\frac{c_v(1)+F-c_v(0)-F}{1}=\frac{c_v(1)}{1}=AVC(1)$$

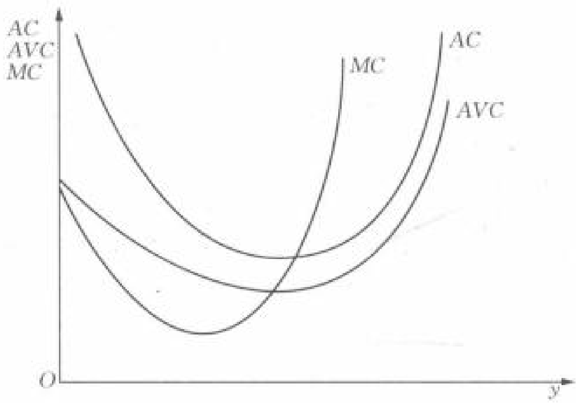
因此,第 1 个单位产量的边际成本等于这个单位产量的平均可变成本。

现在,假定我们正在平均可变成本递减的区域进行生产,那么,可以肯定的是,在此区域内边际成本小于平均可变成本。这是因为,要使平均值下降,就必须使增加的数量小于平均值。

考虑表示不同产量水平上的平均可变成本的一系列数值。如果平均可变成本是递减的,那么,每增加 1 单位产量所产生的成本就必定小于该点的平均可变成本。毕竟,要使平均值下降,就必须使新增加的单位小于平均值。

类似地,如果我们处在平均可变成本上升的区域,那么,边际成本必定大于平均可变成本——较高的边际成本在拉动平均成本上升。

由此可见,在平均可变成本曲线最低点的左边,边际成本曲线必定位于平均可变成本曲线之下;在平均可变成本曲线最低点的右边,边际成本曲线必定位于平均可变成本曲线之上。这就意味着,边际成本曲线必定穿过平均可变成本曲线的最低点。



图中,AC 是平均成本曲线,AVC 是平均可变成本曲线,MC 是边际成本曲线。

图 22.2 成本曲线

同样的论证也完全适用于平均成本曲线。如果平均成本曲线是下降的,那么,边际成本必定小于平均成本;反之如果平均成本曲线正在上升,那么,一定是较高的边际成本在拉动平均成本上升。依据这些结论,边际成本曲线具有图 22.2 所示的形状。

复习以下要点:

- 最初,平均可变成本曲线可能下降,但并非一定如此。然而,只要存在不变的生产要素,平均可变成本曲线最终一定会上升。
- 最初,平均成本曲线会因不变成本的下降而下降,但随着平均可变成本的上升,它最终也会随着上升。
- 在第 1 个单位的产量水平上,边际成本等于平均可变成本。
- 边际成本曲线穿过平均可变成本曲线和平均成本曲线的最低点。

22.3 边际成本和可变成本

此外,在各种成本曲线之间还存在另外一些联系。下面举一个不太明显的例子:可以证明,生产 y 单位产量的可变成本,可以表示为边际成本曲线以下一直到产量 y 轴为止的面积。为什么呢?

回顾前文,边际成本曲线度量的是每增加1单位产量所产生的成本。如果把每增加1单位产量所产生的成本加总起来,我们就可以得到总的生产成本——不包括不变成本。

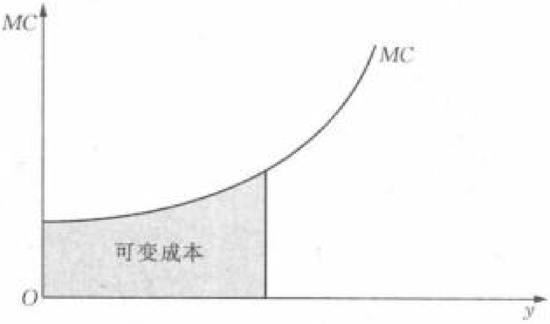
在产出品为离散商品的情况下,这个结论严格成立。首先,我们注意到

$$c_v(y)=[c_v(y)-c_v(y-1)]+[c_v(y-1)-c_v(y-2)]+\cdots+[c_v(1)-c_v(0)]$$

由于 $c_v(0)=0$,并且,上式中的所有中间项可以相互抵消,即第2项可以与第3项抵消,第4项可以与第5项抵消,等等,所以上述结论是正确的。但是,上式的每一项都是不同产量水平下的边际成本,即

$$c_v(y)=MC(y-1)+MC(y-2)+\cdots+MC(0)$$

因此,上式的每一项都表示以 $MC(y)$ 为高,以1为底的矩形的面积。把所有这些矩形加总起来得到了边际成本曲线以下的面积,如图22.3所示。



边际成本曲线以下的面积表示可变成本。

图 22.3 边际成本和可变成本

例子:具体的成本曲线

考察成本函数 $c(y)=y^2+1$,从中,我们可以推导出以下的成本曲线:

- 可变成本:$c_v(y)=y^2$
- 不变成本:$c_f(y)=1$
- 平均可变成本:$AVC(y)=\frac{y^2}{y}=y$
- 平均不变成本:$AFC(y)=\frac{1}{y}$
- 平均成本:$AC(y)=\frac{y^2+1}{y}=y+\frac{1}{y}$
- 边际成本:$MC(y)=2y$

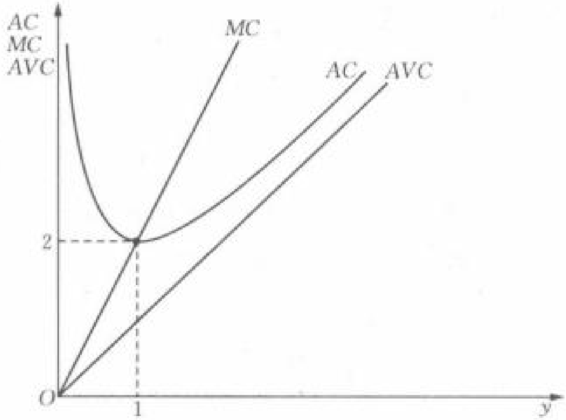
除边际成本曲线以外,这些成本曲线都很明显,但如果熟悉微积分,边际成本曲线也很容易理解。如果成本函数为 $c(y)=y^2+F$,那么,边际成本函数就是 $MC(y)=2y$。如果你还不理解这一点,那就记住它,因为在练习题中你会用到它。

这些成本曲线的形状如何呢?绘制上述成本曲线的最简单方法是先画出平均可变成本曲线,它是一条斜率为1的直线。然后,再画一条斜率为2的直线,即边际成本曲线。

平均成本曲线在最低点处与边际成本曲线相交,即

$$2y=\frac{1}{y}+y$$

求解上式，得到 $y_{\min}=1$。当 $y=1$ 时，平均成本等于 2，这也就是边际成本。图 22.4 显示了绘制好的成本曲线图。



$c(y)=y^2+1$ 的成本曲线。

图 22.4 成本曲线

例子：两家工厂的边际成本曲线

假定存在两家工厂，它们具有不同的成本函数，分别表示为 $c_1(y_1)$ 和 $c_2(y_2)$。现在，要用最经济的方式生产 y 单位的产量。通常，你会让每家工厂分别生产一定数量的产出。问题是，每家工厂应该分别生产多少？

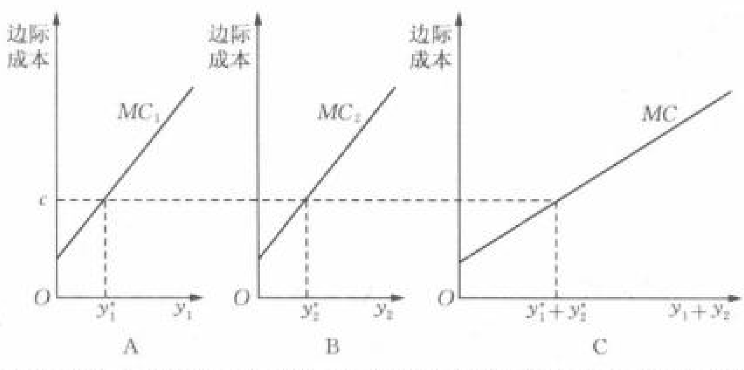
构造最小化问题：

$$\min_{y_1, y_2} c_1(y_1)+c_2(y_2)$$
$$\text{s.t. } y_1+y_2=y$$

现在，如何求解这个问题？在产量的最优分配点上，工厂 1 的边际成本必须等于工厂 2 的边际成本。为了证明这一点，假定两家工厂的边际成本不相等，那么，把边际成本较高的厂家的一部分产量转移到边际成本较低的工厂就是值得的。如果产量分配已经实现了最优，那么，把产量从一家工厂转移到另一家工厂生产就不可能降低成本。

令 $c(y)$ 表示以最经济的方式生产 y 单位产量时的成本函数——即已经按最优方式在两家工厂分配产量时，生产 y 单位产量时的成本。因此，不论选择哪一家工厂生产额外的 1 单位产量，所产生的边际成本都相同。

在图 22.5 中，我们绘制出了两家工厂的边际成本曲线 $MC_1(y_1)$ 和 $MC_2(y_2)$。把两家工厂看作一个整体时的边际成本曲线等于这两条边际成本曲线在水平轴上的加总，如图 22.5C 所示。



右侧的总边际成本曲线是左侧所示的两家工厂的边际成本曲线在水平方向上的加总。

图 22.5 拥有两家工厂的厂商的边际成本

对于边际成本的任意水平 c，两家工厂将分别生产 y_1^* 和 y_2^*，使得 $MC_1(y_1^*)=MC_2(y_2^*)=c$，从而最终得到 $y_1^*+y_2^*$ 单位的总产出。因此，在边际成本的任意水平 c 上的产出量，就是工厂 1 的边际成本等于 c 时的产量与工厂 2 的边际成本等于 c 时的产量之

和:边际成本曲线的水平加总。

22.4 在线拍卖的成本曲线

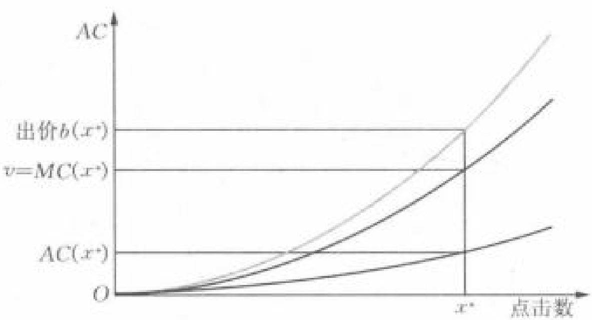
我们在第 18 章讨论了搜索引擎广告的拍卖模型。回想一下模型设定。在用户向搜索引擎输入查询项时,该查询项会被与广告商选择的关键词相互进行配对。关键词与查询项相互配对成功的那些广告商将进入拍卖过程。出价最高者获得最显著的位置,出价次高者获得次佳的显著位置,其他依此类推。在广告质量等其他因素相同时,位置越显著,广告越容易吸引用户的点击。

在已经讨论的拍卖模型中,假设每个广告商都能对每个关键词分别出价。在实践中,广告商在他们参与的所有拍卖中都选择单一的报价。对广告商而言,拍卖决定价格的事实并非那么重要。问题的关键在于,广告商获得的点击数 x 与获得这些点击数的成本 $c(x)$之间的关系。

这只不过是我们的总成本函数的原有形式而已。一旦广告商知道了这个成本函数,它就知道自己希望购买多少点击数了。令 v 表示一次点击的价值,利润最大化问题就是

$$\max_{x} vx - c(x)$$

我们已经知道,最优解保证每次点击的价值等于边际成本。只要广告商知道利润最大化的点击数,广告商就能选择实现利润最大化的点击数的拍卖出价。



利润最大化的点击数要求每次点击的价值等于边际成本,这也决定了适当的拍卖出价和每次点击的平均成本。

图 22.6 点击成本曲线

图 22.6 说明了平均成本和边际成本的标准形式,也显示了利润最大化的过程。在图 22.6 中,新增加的曲线显示了广告商的出价。

广告商如何发现自己的成本曲线呢?一种答案是广告商可以试行不同的出价,并记录各种出价对应的点击数和成本。此外,搜索引擎也可以利用从拍卖过程中收集的信息提供估算的成本函数。

例如,设想我们希望估算广告商将每次点击的出价从 50 美分提高到 80 美分时,可能出现何种结果。搜索引擎可以关注涉及广告商参与如何改变广告位置、广告商期待在新的广告位置可以获得多少新的点击数的每次拍卖。

22.5 长期成本

在前面的分析中,我们把不变成本看作厂商对短期内不能调整的要素所支付的成本。在长期内,厂商可以选择"不变"要素的水平,这些要素不再保持不变。

当然，长期内仍然会存在准不变要素。也就是说，技术可能显示这样的特征：要生产一定数量的产出，厂商必须支付某种成本。但长期内不存在不变成本，这是因为厂商总是有可能生产零单位产出，从而不产生任何成本，也就是说，厂商要停止生产总是可能的。如果长期内存在准不变成本，那么，与短期内的情形相同，平均成本曲线也呈现U形。但是，由长期的定义可知，在长期内以零成本生产零产量总是可能的。

当然，长期的时间跨度取决于我们所分析的具体问题。如果考虑的不变要素是工厂规模，那么，长期的时间跨度就要视厂商需要多久才能改变工厂规模而定。如果考虑的不变要素是薪资合同，那么，长期的时间跨度就要取决于厂商需要多久才能改变雇佣规模。

进一步具体化，我们把工厂规模看作不变要素，并用 k 表示。假定厂商拥有一家 k 平方英尺的工厂，短期成本函数表示为 $c_s(y, k)$，这里，下标 s 表示短期(k 相当于第21章中的 $\bar{x}_2$)。

对于任意给定的产量水平，都存在一种最优的工厂规模，用 $k(y)$ 表示。这就是厂商对作为产量函数的工厂规模的有条件的要素需求(当然，这还要取决于工厂规模和其他生产要素的价格，但在这里，我们不考虑这些因素)。因此，如同第21章的分析，厂商的长期成本函数由 $c_s(y, k(y))$ 给出。这是在厂商能把工厂规模调整到最优的条件下，生产 y 单位产量的总成本。厂商的长期成本函数就是在不变要素最优选择上的短期成本函数：

$$c(y)=c_s(y, k(y))$$

我们转向它的几何解释。选择某个产量 y^*，令 $k^*=k(y^*)$ 表示厂商生产产量 y^* 时的最优规模。如上文所述，一家规模为 k^* 的工厂，其短期成本函数可以由 $c_s(y, k^*)$ 给出，长期成本函数可以由 $c(y)=c_s(y, k(y))$ 给出，恰好同上述一样。

现在，注意这样一个重要事实：生产 y 单位产量的短期成本总是至少等于生产相同产量的长期成本。为什么呢？在短期内，厂商的工厂规模是固定的，而在长期内，厂商可以任意调整工厂规模。由于厂商的长期选择之一是选择工厂规模 k^*，所以，生产 y 单位产量的最优选择所产生的成本至多等于 $c(y, k^*)$。这就是说，通过调整生产规模，厂商至少能够做到和规模固定时一样好。因此，对于所有的产量 y，我们有

$$c(y)\leqslant c_s(y, k^*)$$

事实上，在某个特定的产量水平 y^* 上，

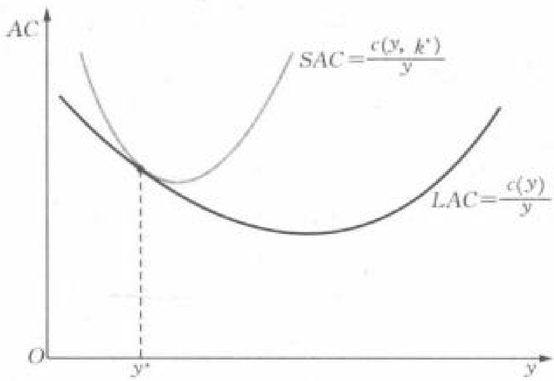
$$c(y^*)=c_s(y^*, k^*)$$

为什么呢？因为在产量 y^* 上，工厂规模的最优选择是 k^*。因此，在产量 y^* 上，长期成本等于短期成本。

如果短期成本总是大于长期成本，并且在某个产量水平上两者相等，那么，这就意味着短期与长期平均成本具有相同的特征：$AC(y)\leqslant AC_s(y, k^*)$，$AC(y^*)=AC_s(y^*, k^*)$。这两个式子意味着，短期平均成本曲线总是位于长期平均成本曲线之上，并且两者仅仅在 y^* 点接触，也就是说，长期平均成本曲线(LAC)与短期平均成本曲线(SAC)必定

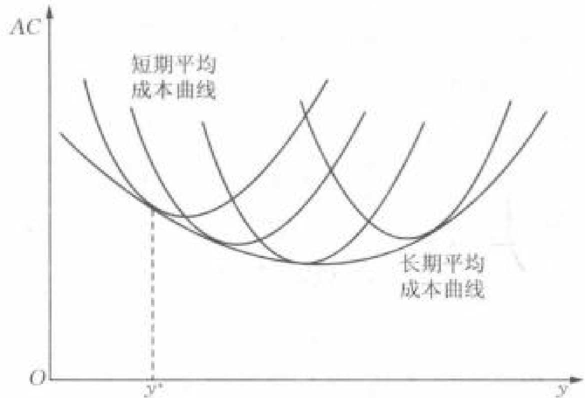
在该点相切,如图 22.7 所示。

对于除 y^* 之外的其他产量,我们也可以进行相同的分析。假定我们选择一组产量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,相应地,工厂规模分别为 $k_1=k(y_1), k_2=k(y_2), \cdots, k_n=k(y_n)$,那么,我们就可以得到图 22.8 所示的曲线。考察图 22.8,我们发现,长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的下包络线。



短期平均成本曲线必定与长期平均成本曲线相切。

图 22.7 短期平均成本和长期平均成本



长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的包络线。

图 22.8 短期平均成本和长期平均成本

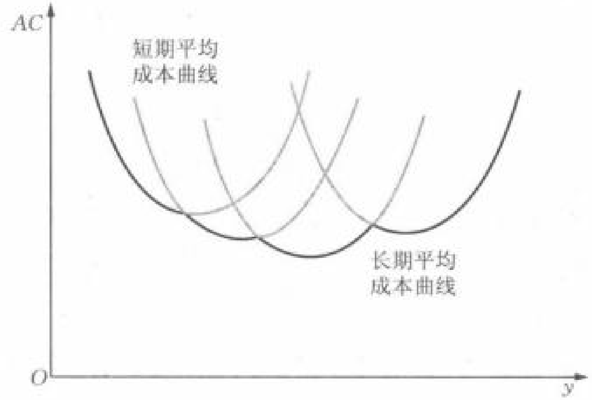
22.6 离散的工厂规模水平

在上面的讨论中,我们隐含地假定,可以连续地选择一系列不同的工厂规模。因此,每一个不同的产量都有唯一一个与之相适应的最佳工厂规模。但是,如果只能选择少数几个不同的工厂规模,情况又会如何呢?

例如,假定我们只能选择 4 种不同的工厂规模 k_1、k_2、k_3 和 k_4。我们可以绘制出与这些工厂规模相对应的 4 条不同的平均成本曲线,如图 22.9 所示。

我们怎样描绘长期平均成本曲线呢?回顾一下,长期平均成本曲线是通过调整 k 实现最优化而得到的成本曲线。在这种情况下,要做到这点并不难,由于只有 4 种不同的工厂规模,我们只需要找出成本最低的工厂规模即可。这就是说,对于任意的产量,我们只需要选择那种使生产该产量的成本最小的工厂规模即可。

因此,长期平均成本曲线将是短期平均成本曲线的下包络线,如图 22.9 所示。注意,图 22.9 和图 22.8 在性质上完全相同。短期平均成本总是至少等于长期平均成本,并且在两者相等的产量上,厂商对不变要素的长期需求恰好等于不



与前面一样,长期成本曲线是短期成本曲线的下包络线。

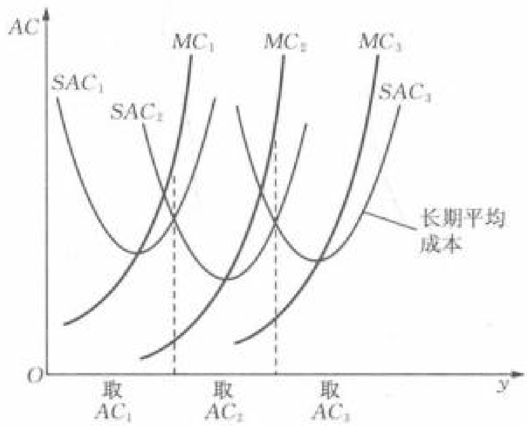
图 22.9 离散的工厂规模水平

变要素的使用量。

22.7 长期边际成本

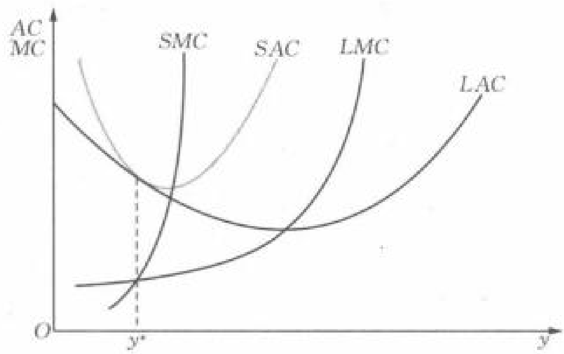
在上一节，我们已经阐明，长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的下包络线。这对边际成本有什么意义呢？我们首先考虑离散的工厂规模水平的情形。在这种情况下，长期边际成本曲线包含了短期边际成本曲线的相应部分，如图22.10所示。在任意产量水平上，我们可以找到正在经营的短期平均成本曲线，然后再找出相应的边际成本。

不论存在多少不同的工厂规模，这种方法都是适用的。因此，连续工厂规模的情形就如图22.11所示。任意产量水平 y 上的长期边际成本必须与生产该产量的最优工厂规模所对应的短期边际成本相等。



当不变要素的水平离散时，厂商就会选择使平均成本最小的不变要素的数量，因此，长期边际成本曲线由各条与每种不同的不变要素水平相联系的短期边际成本曲线的线段组成。

图22.10 长期边际成本



具有连续的不变要素水平的长期边际成本和短期边际成本之间的关系。

图22.11 长期边际成本

小 结

1. 平均成本由平均可变成本加平均不变成本组成。平均不变成本总是随产量增加而下降，而平均可变成本却趋于上升。净结果是U形的平均成本曲线。
2. 当平均成本下降时，边际成本曲线位于平均成本曲线下方；当平均成本上升时，边际成本曲线位于平均成本曲线上方。在最小平均成本点上，边际成本一定等于平均成本。
3. 边际成本曲线下的面积是对可变成本的度量。
4. 长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的下包络线。

复习题

1. 下面哪些话正确?(1)平均不变成本决不会随产量增加而提高;(2)平均总成本始终大于或等于平均可变成本;(3)边际成本下降时,平均成本不可能上升。

2. 一厂商在两家工厂生产相同的产品。如果第一家工厂的边际成本大于第二家工厂的边际成本,这厂商该如何减少成本并维持相同的产出水平?

3. 对或错?在长期内,厂商总是在最优工厂规模的最小平均成本水平上经营,以生产既定数量的产品。

附录

在正文中,我们分析过,对于第1个单位的产出,平均可变成本等于边际成本。用微积分表示,这就是

$$\lim_{y\to 0}\frac{c_v(y)}{y}=\lim_{y\to 0}c'(y)$$

这个表达式的左边在 $y=0$ 处没有定义,但它的极限有定义。因此,我们可以利用洛必达第一法则来对它进行计算。依据洛必达第一法则,分子和分母都趋于零的分数的极限,可以由分子和分母的导数的极限之比给出。运用这个法则,我们有

$$\lim_{y\to 0}\frac{c_v(y)}{y}=\frac{\lim_{y\to 0}\mathrm{d}c_v(y)/\mathrm{d}y}{\lim_{y\to 0}\mathrm{d}y/\mathrm{d}y}=\frac{c'(0)}{1}$$

这就证明了上面的判断。

我们也讨论过,边际成本曲线下方的面积给出了可变成本。应用微积分的基本定理,可以很容易地证明这个结论。由于

$$MC(y)=\frac{\mathrm{d}c_v(y)}{\mathrm{d}y}$$

所以,我们发现,边际成本曲线下方的面积等于

$$c_v(y)=\int_0^y\frac{\mathrm{d}c_v(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=c_v(y)-c_v(0)=c_v(y)$$

有关长期边际成本和短期边际成本的讨论,从几何图形上非常容易理解,但是,它的经济意义是什么呢?可以证明,微积分的论证给予人们最佳的直觉。论证是简洁的,生产的边际成本就是由产量变化引起的成本变化。在短期内,我们必须使工厂规模(或诸如此类的东西)保持不变,而在长期内,我们却可以对它作随意的调整。因此,长期边际成本由两部分构成:工厂规模固定时的边际成本变动,加上工厂规模自由调整时的边际成本变动。但是,在工厂规模的最优选择上,这最后一项一定等于零!因此,长期边际成本和短期边际成本一定相等。

这里的数学证明要用到连锁法则，依据正文中的定义

$$c(y) \equiv c_s(y, k(y))$$

对上式求关于 y 的微分，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}c(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial c_s(y, k)}{\partial y}+\frac{\partial c_s(y, k)}{\partial k}\frac{\partial k(y)}{\partial y}$$

如果我们取某个特定的产量水平 y^* 以及相应的最优工厂规模 $k^*=k(y^*)$，来对上式估值，我们就有

$$\frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial k}=0$$

这是因为，它是使 k^* 成为在产量 y^* 上的成本最小化的工厂规模的一阶必要条件。因此，略去表达式中的第 2 项后，我们剩下的就只有短期边际成本：

$$\frac{\mathrm{d}c(y^*)}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial y}$$