▶21

成本最小化

我们的目标是要研究在竞争和非竞争市场环境中，追求利润最大化的厂商的行为。在上一章，从直接分析利润最大化问题开始，我们着手考察了竞争环境下的利润最大化行为。

但是，如果采用一种更为间接的方法，我们可以得到某些重要的洞察。我们的策略是把利润最大化问题分割为两个部分。首先，我们考虑对于既定的产量实现成本最小化的问题；然后，再研究如何选择最有利可图的产量水平。本章，我们先考察第一步——对于既定的产量实现成本最小化。

21.1 成本最小化

假设存在两种生产要素 x_1 和 x_2，价格分别为 w_1 和 w_2。现在，我们要设法找到生产既定产量 y 的最经济的途径。如果 $f(x_1, x_2)$表示厂商的生产函数，那么，这个问题可以表述为

$$\min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{s.t. } f(x_1, x_2) = y$$

与上一章相仿，在分析这类问题时，应该注意：在计算成本时，应当考虑所有的生产成本，并且，确保所有的一切都是在相容的时间标度上度量的。

这类成本最小化问题的解——为实现合宜的产量水平而必需的最小成本——取决于 w_1、w_2 和 y 的值，所以，我们把它记作 $c(w_1, w_2, y)$，这个函数称作**成本函数**，我们将对它给予特别的关注。成本函数 $c(w_1, w_2, y)$度量的是当要素价格为(w_1, w_2)时，生产 y 单位产量的最小成本。

为了理解这个最小化问题的解，我们把厂商所面临的成本约束和技术约束标在同一幅图上。等产量线显示了技术约束——能够生产产量 y 的 x_1 和 x_2 的所有组合。

如果我们想要在图上标记出对应于既定成本 C 的各种投入的所有组合，我们可以把

它记为

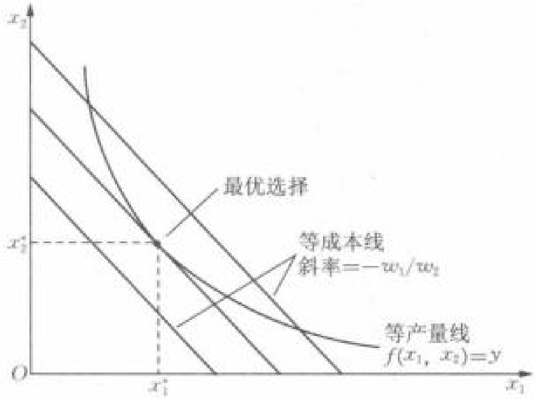
$$w_1x_1+w_2x_2=C$$

重新整理，我们得到

$$x_2=\frac{C}{w_2}-\frac{w_1}{w_2}x_1$$

很显然，这是一条直线，它的斜率为$-w_1/w_2$，纵截距为C/w_2，随着C的变动，我们可以得到一簇等成本线。同一条等成本线上的每一个点都具有相同的成本C，并且，较高的等成本线具有较高的成本。

因此，我们可以把成本最小化问题重新表述为：在等产量线上找到某个位于最低的等成本线上的点。图 21.1 就显示了这样的一个点。



使生产成本最小化的要素的选择可以通过在等产量线上找出与最低等成本线相切的那个点来决定。

图 21.1　成本最小化

注意，如果对每一种要素都要求使用一定的数量，并且，等产量线是一条非常光滑的曲线，那么，成本最小化的点就可以用相切条件来表征：等产量线的斜率必定等于等成本线的斜率。或者，按照第 19 章的术语，**技术替代率必定等于要素的价格比率：**

$$-\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)}=\mathrm{TRS}(x_1^*, x_2^*)=-\frac{w_1}{w_2} \tag{21.1}$$

（如果出现的是角点解，也就是说，此点只要求使用一定数量的一种要素，那么，相切条件就不需要得到满足。同样，如果生产函数呈现折拗形状，相切条件也就没有什么意义。这与消费者理论中的情况类似，所以，我们在本章中不会再强调这些特殊的情况。）

方程式(21.1)体现的代数思想并不复杂。考虑当产量保持不变时，生产方式的任意改变$(\Delta x_1, \Delta x_2)$。这种变化必定满足

$$MP_1(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1+MP_2(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2=0 \tag{21.2}$$

注意到，Δx_1和Δx_2一定具有相反的符号；如果增加要素 1 的使用量，为了保持产量不变，就必须减少要素 2 的使用量。

如果我们最初处在成本最小化的点上，那么，这种变动就不可能降低成本，所以，我们有

$$w_1\Delta x_1+w_2\Delta x_2\geqslant 0 \tag{21.3}$$

现在，考虑这样一种变动$(-\Delta x_1, -\Delta x_2)$。这种变动也能维持相同的产量水平，并且，它也不可能降低成本。这意味着

$$-w_1\Delta x_1-w_2\Delta x_2\geqslant 0 \tag{21.4}$$

联立方程(21.3)和方程(21.4),我们得到

$$w_1\Delta x_1+w_2\Delta x_2=0 \tag{21.5}$$

从方程(21.2)和(21.5)求解出 $\Delta x_2/\Delta x_1$,得到

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=-\frac{w_1}{w_2}=-\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)}$$

这恰好是上述几何方法推导出的成本最小化条件。

注意,图21.1与前面讨论过的消费者选择问题的处理方式具有某种相似性。虽然两者的结果看起来相同,但实际上它们不属于同一类问题。在消费者问题中,直线表示预算约束,消费者沿这条预算约束线移动以寻求其最偏好的位置。而在生产者问题中,等产量线是技术约束,生产者沿着这条等产量线移动以寻求最优的位置。

通常,使厂商的生产成本最小的要素选择取决于要素的价格和厂商计划的产出量,因此,我们把这种要素选择记为 $x_1(w_1, w_2, y)$ 和 $x_2(w_1, w_2, y)$,这就是所谓的*有条件的要素需求函数*或*派生的要素需求*。它度量的是,在厂商生产某个既定产量 y 的条件下,价格、产量以及厂商的最优要素选择之间的关系。

特别需要注意的是,有条件的要素需求与上一章所讨论的实现利润最大化的要素需求之间的区别。有条件的要素需求给出的是既定产量水平下的成本最小化选择;实现利润最大化的要素需求则给出了既定产出品价格下的利润最大化选择。

通常,有条件的要素需求是观察不到的,它们是一个假设的定义。它回答的是这样一个问题:如果厂商想以最经济的方式生产某个既定的产量,它们将如何选择每种要素的使用量。但是,有条件的要素需求是一种非常有用的方法,它可以使得最优产量水平的确定问题与最经济有效的生产方式的确定问题分离开。

例子:特定技术下的成本最小化

假定我们考虑要素为完全互补品情况下的技术,即 $f(x_1, x_2)=\min\{x_1, x_2\}$,显然,当厂商要生产的产量为 y 时,它就需要 y 单位的 x_1 和 y 单位的 x_2。因此,最小生产成本为

$$c(w_1, w_2, y)=w_1y+w_2y=(w_1+w_2)y$$

在完全替代的技术下,即 $f(x_1, x_2)=x_1+x_2$,情况又会如何?在生产过程中,由于要素1和要素2是完全替代品,厂商显然会使用价格较低的要素。因此,当产量为 y 时,最小成本是 w_1y 和 w_2y 中较小的那个,也就是说

$$c(w_1, w_2, y)=\min\{w_1y, w_2y\}=\min(w_1, w_2)y$$

最后,我们考察柯布-道格拉斯技术,它的表达式为 $f(x_1, x_2)=x_1^a x_2^b$,这里,我们可以运用微积分把成本函数整理为

$$c(w_1, w_2, y)=Kw_1^{\frac{a}{a+b}}w_2^{\frac{b}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}$$

式中,K 是常数,它取决于 a、b 的取值。计算的详细过程可参见附录。

21.2 显示的成本最小化

厂商选择生产要素的使用量，以实现生产成本的最小化。这个假定蕴涵着观察到的选择是如何随着要素价格的变化而变化的。

假定我们观察到两组要素价格(w_1^t, w_2^t)和(w_1^s, w_2^s)，与此相应的厂商的选择分别为(x_1^t, x_2^t)和(x_1^s, x_2^s)。假定这两个选择都生产相同的产量 y。如果每一种选择按相应的价格都是成本最小化的选择，那么，我们一定有

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leqslant w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$

和

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leqslant w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t$$

如果厂商总是选择成本最小化的方法生产 y 单位的产量，那么，它在 t 期和 s 期的选择必定满足上述不等式。我们把这些不等式称作*成本最小化的弱公理*(Weak Axiom of Cost Minimization，WACM)。

把第二个不等式变形为

$$-w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leqslant -w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s$$

再将它与第一个不等式相加，得到

$$(w_1^t - w_1^s)x_1^t + (w_2^t - w_2^s)x_2^t \leqslant (w_1^t - w_1^s)x_1^s + (w_2^t - w_2^s)x_2^s$$

然后，重新整理，得

$$(w_1^t - w_1^s)(x_1^t - x_1^s) + (w_2^t - w_2^s)(x_2^t - x_2^s) \leqslant 0$$

用符号“Δ”表示两种要素需求的变动，我们可以得到

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leqslant 0$$

这个不等式是从成本最小化行为的假设推导出的。在要素价格变动而产量保持不变时，此不等式隐含着对厂商行为变化的限制。

例如，如果第一种要素的价格上涨，而第二种要素的价格保持不变，即 $\Delta w_2 = 0$，那么，上述不等式就变为

$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leqslant 0$$

如果要素 1 的价格上涨，那么，该不等式就表明对要素 1 的需求必定减少，因此，有条件的要素需求曲线必定是向下倾斜的。

当我们变动参数时，最小的生产成本会如何变化呢？不难发现，如果任意一种要素的价格上涨，成本肯定会增加；如果一种要素变得更昂贵而另一种要素的价格不变，那么，最小成本就不可能下降而只会上升。同样，如果厂商选择生产更多的产量，而要素价格保持不变，那么，成本肯定会上升。

21.3 规模报酬和成本函数

在第 19 章，我们讨论过生产函数的规模报酬问题。回顾前面的分析，当对于所有的 $t>1$，$f(tx_1, tx_2)$ 大于、小于或等于 $tf(x_1, x_2)$ 时，相应地，我们分别称这种技术是规模报酬递增、递减或不变的。可见，由生产函数显示的规模报酬类型与成本函数的变化之间存在着密切的联系。

首先，我们考察一种合乎常规的情形，即规模报酬不变。假定我们已经解决了生产 1 单位产量的成本最小化问题，从而也就得到了单位成本函数 $c(w_1, w_2, 1)$。那么，用什么方法可以使生产 y 单位产量的成本最小呢？很简单，只需把生产 1 单位产量所使用的每一种要素乘以 y 即可，这就是说，生产 y 单位产量的最小成本恰好是 $c(w_1, w_2, 1)y$。在规模报酬不变的情况下，成本是产量的线性函数。

在规模报酬递增的条件下，情况又会如何呢？这里，可以证明，成本的增长幅度小于产量的增长幅度。如果厂商决定使产量翻番，只要要素的价格保持不变，那么，厂商的成本增长小于 1 倍就可以得到这些产量。从规模报酬递增的定义可以很自然地推出这个结论：要素的使用量增长 1 倍，产量的增长就会超过 1 倍。因此，厂商要想使产量翻番，只要使每一种要素的增长幅度小于 1 倍，就可以实现目标。

由于每种要素的使用量增加 1 倍就会使成本恰好也增加 1 倍，所以，每种要素增加小于 1 倍就会使成本增加也小于 1 倍。这就是说，成本函数的增长幅度小于产量的增长幅度。

同样，如果技术显示规模报酬递减，那么，成本函数的增长幅度大于产量的增长幅度。如果产量增加 1 倍，成本增加就大于 1 倍。

这些结论可以用平均成本函数的变化来说明。平均成本函数是生产 y 单位产量的单位成本：

$$AC(y)=\frac{c(w_1, w_2, y)}{y}$$

如果技术显示出规模报酬不变，那么，由上述分析可知成本函数的形式为 $c(w_1, w_2, y)=c(w_1, w_2, 1)y$。这意味着，平均成本函数为

$$AC(w_1, w_2, y)=\frac{c(w_1, w_2, 1)y}{y}=c(w_1, w_2, 1)$$

即不论厂商生产多少，产品的单位成本保持不变。

如果技术显示出规模报酬递增，那么，成本的增长幅度就会小于产量的增长幅度，所以，平均成本相对产量将下降：随着产量的增加，平均成本将趋于下降。

同样，如果技术显示规模报酬递减，那么平均成本将随产量增加而上升。

如前文所述，一种技术可能同时包括了规模报酬递增、不变和递减的区域——在不同的产量水平上，产量的增长可能会快于、等于或慢于厂商经营规模的增长。相应的，在不同的产量水平上，成本函数的增长可能慢于、等于或快于产量的增长。这意味着，平均成

本函数在不同的产量水平上可能会递减、不变或递增。在下一章，我们将更深入地探讨这些可能性。

从现在起，我们将特别关注成本函数随产量变化而发生的变化。在大多数情况下，我们把要素价格看作维持在某个事先确定的水平上，从而成本只取决于厂商的产量选择。因此，在下文，我们把成本函数表述为仅仅是产量的函数，即 $c(y)$。

21.4 长期成本和短期成本

成本函数定义为生产既定产量时的最小成本。通常，把厂商能够调整所有生产要素时实现的最小成本，与厂商仅仅能调整部分生产要素时实现的最小成本区分开，是非常重要的。

我们曾经把短期定义为这样一个时期，在这个时期内，某些生产要素的使用量必须是固定不变的。而在长期内，所有的生产要素都可以自由变动。**短期成本函数**定义为在只有可变生产要素可以调整的情况下，生产既定产量时的最小成本，**长期成本函数**则表示在一切生产要素都可以自由调整的情况下，生产既定产量时的最小成本。

假定在短期内，要素 2 固定在某个事先确定的水平 $\bar{x}_2$ 上，虽然在长期内它是可以自由变动的。那么，短期成本函数就定义为

$$c_s(y,\ \bar{x}_2)=\min_{x_1} w_1x_1+w_2\bar{x}_2$$

$$\text{s.t. } f(x_1,\ \bar{x}_2)=y$$

注意，在短期内，生产 y 单位产量的最小成本取决于不变要素的使用数量和成本。

在只存在两种要素的情况下，这种最小化问题很容易解决：我们只需要求出使得 $f(x_1,\ \bar{x}_2)=y$ 的 x_1 的最小值即可。但是，如果有许多种要素短期内可以变动，成本最小化问题的计算就会变得非常复杂。

要素 1 的短期要素需求函数指的是实现成本最小化的要素 1 的需求量。它一般取决于该要素的价格和不变要素的数量，所以，我们可以把短期的要素需求记为

$$x_1=x_1^s(w_1,\ w_2,\ \bar{x}_2,\ y)$$
$$x_2=\bar{x}_2$$

上述方程仅仅表明，如果工厂规模在短期内是固定的，那么，在任何既定的价格和产量选择下，厂商想要雇用的工人数量通常取决于工厂规模。

注意，根据短期成本函数的定义，我们有

$$c_s(y,\ \bar{x}_2)=w_1x_1^s(w_1,\ w_2,\ \bar{x}_2,\ y)+w_2\bar{x}_2$$

这表明，生产 y 单位产量的最小成本就是与成本最小化的要素选择有关的成本。依据定义，这是正确的，也是非常有用的。

这里，长期成本函数定义为

$$c(y)=\min_{x_1,\ x_2} w_1x_1+w_2x_2$$

$$\text{s.t. } f(x_1, x_2)=y$$

式中,两种要素都可以自由变动,长期成本仅与厂商在既定要素价格下的产量有关。我们用 $c(y)$ 表示长期成本函数,并把长期的要素需求记为

$$x_1=x_1(w_1, w_2, y)$$
$$x_2=x_2(w_1, w_2, y)$$

我们也可以把长期成本函数记为

$$c(y)=w_1x_1(w_1, w_2, y)+w_2x_2(w_1, w_2, y)$$

如前文所述,该方程表明,最小成本就是厂商利用成本最小化的要素选择所产生的成本。

短期成本函数和长期成本函数之间存在着一种有趣的关系,我们在下一章将运用这种关系。为简化起见,假定要素价格固定在某个事先确定的水平上,则长期的要素需求可以记为

$$x_1=x_1(y)$$
$$x_2=x_2(y)$$

那么,长期成本函数也可以记为

$$c(y)=c_s(y, x_2(y))$$

要理解为什么这是正确的,只需思考一下该方程的含义。该方程表示,在所有要素都可自由变动时的最小成本,恰好就是要素 2 固定在使长期成本最小化的水平上时的最小成本。由此,可变要素的长期需求——成本最小化选择——就可以表示为

$$x_1(w_1, w_2, y)=x_1^s(w_1, w_2, x_2(y), y)$$

这个式子表明,在长期内,使成本最小化的可变要素的使用量就是厂商在短期内所选择的使用量——如果厂商的固定要素使用量恰好是实现长期成本最小化的数量。

21.5 不变成本和准不变成本

在第 20 章,我们曾经区分过不变要素和准不变要素。不变要素是指不论生产与否都必须支付成本的要素。准不变要素是指只有在厂商决定生产一定单位的产量时才需要支付成本的要素。

很自然,我们可以用同样的方法来定义不变成本和准不变成本。不变成本是与不变要素相关的成本,这种成本与产出水平无关。特别值得注意的是,厂商不论是否生产都必须支付这种成本。准不变成本也是与产量水平无关的成本,但只要厂商生产一定单位的产量,它就必须支付这种成本。

根据长期的定义,在长期内不存在不变成本。但在长期内很容易产生准不变成本。如果厂商在生产前必须支付一定数量的货币,准不变成本就产生了。

21.6 沉没成本

沉没成本是另外一类不变成本。通过一个例子，这个概念可以获得最好的解释。假定你已经决定租赁一间办公室，期限是一年。你承诺每个月支付的租金就是一种不变成本，因为你有义务进行这笔支付，而不论你的产出如何。现在，假定你决定将办公室粉刷一新，并添置新家具。油漆的成本是一种不变成本，并且它也是一种沉没成本，这是因为这种成本一旦支出就不能再收回。另一方面，购买家具的成本不完全是沉没的，因为你在添置新家具后可以再将它卖掉。只有新家具和旧家具之间的成本差异才是沉没的。

为了更详细地说明上述情况，假定你在年初按10%的利率借入20 000美元。你签订一份租赁办公室的合同，并事先支付一年的租金12 000美元。你又支出6 000美元购买家具，花费2 000美元粉刷办公室。在年末，你偿还20 000美元的借款以及2 000美元的利息，并按5 000美元的价格将旧家具出售。

你的全部沉没成本包括12 000美元的租金、2 000美元的利息、2 000美元的粉刷费用，以及仅仅1 000美元的家具费用，这是因为在家具的最初支出中有5 000美元已收回。

沉没成本和可收回成本之间可能有很大的差异。为购买5辆轻型卡车而支付的100 000美元看起来是一大笔钱，但是，如果它们以后能够在旧卡车市场上按80 000美元的价格被出售，实际的沉没成本就只有20 000美元。为定制用来压制机械的机器设备而支出100 000美元的情况有所不同：这种机器设备的转售价值为零；在这种情况下，全部支出都是沉没成本。

使这些问题变得显而易见的最佳方式是确保所有的支出都是一种流量：例如，业务维持1年需要支出多少？这样，你就不太可能忘记资本设备的转售价值，并更有可能记住沉没成本与可收回成本之间的差异。

小　结

1. 成本函数 $c(w_1, w_2, y)$ 度量的是按既定要素价格生产既定产量的最小成本。
2. 成本最小化行为给厂商的选择施加了某些可观察到的限制。特别是，有条件的要素需求函数具有负的斜率。
3. 在由技术显示的规模报酬和成本函数的变化之间存在着密切的关系，规模报酬递增意味着平均成本递减，规模报酬递减意味着平均成本递增，规模报酬不变意味着平均成本不变。
4. 沉没成本指的是不可收回的成本。

复习题

1. 证明一家利润最大化的厂商总是成本最小化的。
2. 一家在 $MP_1/w_1 > MP_2/w_2$ 情况下生产的企业如何降低成本而又维持相同产量？

3. 假定一个成本最小化的厂商使用两种完全替代的投入。如果这两种投入的价格相同,它们的有条件要素需求会是什么样子?

4. 一家成本最小化的厂商所使用纸的价格上涨。企业对此的反应是改变对某些要素的需求量,但维持产量不变。在这种情况下,企业的用纸量会发生怎样的变化?

5. 设一家厂商使用 n 种投入($n>2$),对于一个既定的产出水平,关于要素价格变化(Δw_i)和要素需求变化(Δx_i),显示的成本最小化理论会导出什么不等式?

附录

我们运用第5章介绍的最优化技术来研究正文中提出的成本最小化问题。这个问题是一个形式如下的受约束的最小化问题

$$\min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{s.t. } f(x_1, x_2) = y$$

回想一下,我们有几种技术可以求解这类问题。一种方法是把约束条件代入目标函数。当我们拥有 $f(x_1, x_2)$的具体函数形式时,我们仍然可以运用这种方法,但这种方法在一般场合却很少被使用。

第二种方法是拉格朗日乘数法,这种方法很起作用,为了应用这种方法,我们建立拉格朗日函数

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - y)$$

将其对 x_1、x_2 和 λ 微分,从而得到一阶条件

$$w_1 - \lambda\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$w_2 - \lambda\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$f(x_1, x_2) - y = 0$$

最后一个条件就是约束条件。我们可重新整理前两个方程,并用第二个方程除第一个方程以得到

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

注意,这同我们在正文中导出的一阶条件是一样的:技术替代率必须等于要素价格比率。

我们将这个方法应用于柯布-道格拉斯生产函数:

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

成本最小化问题于是成为

$$\min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{s.t. } x_1^a x_2^b = y$$

这里，我们有一个具体的函数形式，所以，我们可以用代入法，也可以用拉格朗日法来求解。代入法包括首先解出作为 x_1 的函数的 x_2 的约束条件。

$$x_2 = (yx_1^{-a})^{1/b}$$

然后，把这个解代入目标函数得到不受约束的最小化问题

$$\min_{x_1} w_1x_1 + w_2(yx_1^{-a})^{1/b}$$

现在，我们对 x_1 求微分并令所得的导数像通常一样等于零。从导出的方程中可以解出作为 w_1、w_2 和 y 的函数的 x_1，从而得到 x_1 的有条件的要素需求。这并不难理解，只是代数表示比较繁杂，所以这里不再详尽写出。

但是，我们可以解拉格朗日问题。它的三个一阶条件分别是

$$w_1 = \lambda a x_1^{a-1} x_2^b$$
$$w_2 = \lambda b x_1^a x_2^{b-1}$$
$$y = x_1^a x_2^b$$

第一个方程乘上 x_1，第二个方程乘上 x_2，可以得到

$$w_1x_1 = \lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y$$
$$w_2x_2 = \lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y$$

结果

$$x_1 = \lambda \frac{ay}{w_1} \tag{21.6}$$

$$x_2 = \lambda \frac{by}{w_2} \tag{21.7}$$

现在，用第三个方程求解 λ。把 x_1 和 x_2 的解代入第三个一阶条件，我们得到

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y$$

我们可以从这个方程求解 λ，并得到一个相当复杂的表达式

$$\lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}}$$

联立式(21.6)和式(21.7)，我们得到 x_1 和 x_2 的最终解。这些要素需求函数将取得如下形式

$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

写下厂商作出成本最小化选择时的成本，就可得到成本函数：

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y)$$

经过冗长乏味的代数演算可以证明

$$c(w_1, w_2, y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

（不用担心，这个公式不会出现在期末考试中，这里无非在演示如何利用拉格朗日乘数法来获得成本最小化问题的明确答案。）

注意，当 $a+b$ 小于、等于或大于 1 时，成本的增加会线性地大于、等于或小于产量的增加。这是讲得通的，因为柯布-道格拉斯技术显示，规模报酬的递减、不变或递增取决于 $a+b$ 的值。