[ISL] 4.Classification(3)

태그

4.6 Generalized Linear Models

- 3장: 종속변수 Y가 수치형데이터 일때 이를 예측하기 위해 최소제곱법을 사용하는 선형 회귀를 다룸
- 4장: 종속변수 Y가 범주형데이터인 경우를 다룸

⇒ Y가 양적,질적도 아닌경우는? 선형회귀나 분류 사용 ❌

4.6.1 Linear Regression on the Bikeshare Data

https://www.kaggle.com/c/bike-sharing-demand/

이 데이터의 종속변수는 'bikers'로, 워싱턴 DC의 자전거 공유 프로그램의 시간당 이용자 수

⇒ 질적 변수도, 양적 데이터도 아니다. 0이상의 정수값, 즉 '건수(count)'를 나타낸다

<설명변수>

변수	설명
mnth	월, 1년 중 몇 월인지
hr	시간, 0-23시
workingday	평일 여부를 나타내는 지시변수로, 주말이나 공휴일이 아니면 1
temp	섭씨 온도를 정규화한 값
weathersit	날씨 상태를 나타내는 질적 변수로 4가지 값을 가짐: 맑음, 안개/흐림, 약한 비/눈, 강한 비/눈

	Coefficient	Std. error	t-statistic	p-value
`Intercept`	73.60	5.13	14.34	0.00
`workingday`	1.27	1.78	0.71	0.48
`temp`	157.21	10.26	15.32	0.00
`weathersit[cloudy/misty]`	-12.89	1.96	-6.56	0.00
`weathersit[light rain/snow]`	-66.49	2.97	-22.43	0.00
`weathersit[heavy rain/snow]`	-109.75	76.67	-1.43	0.15

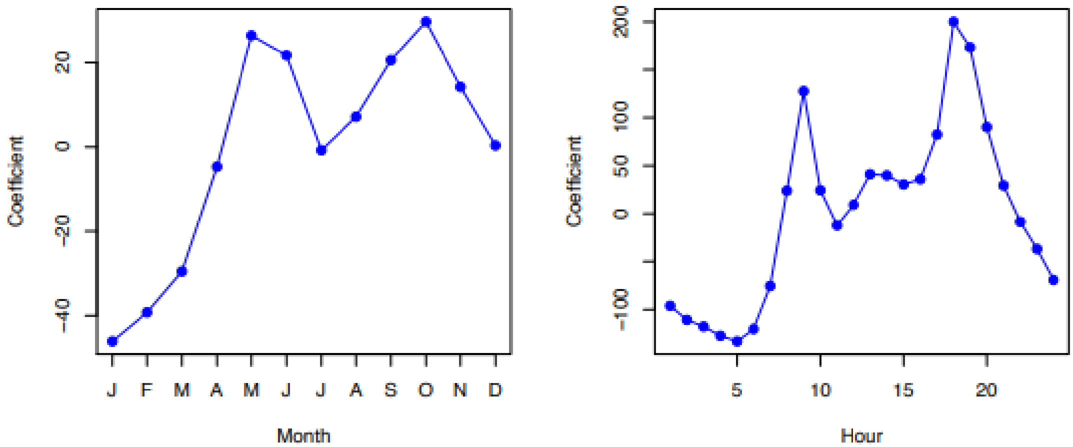
표 4.10 선형회귀를 사용하여 예측한 자전거 이용자 수

(-12.89라는 계수는 자전거 이용자가 평균적으로 12.89 감소한다 의미)

a. 날씨가 맑음에서 흐림으로 변할 때 시간당 평균 12.89명의 이용자가 감소한다.

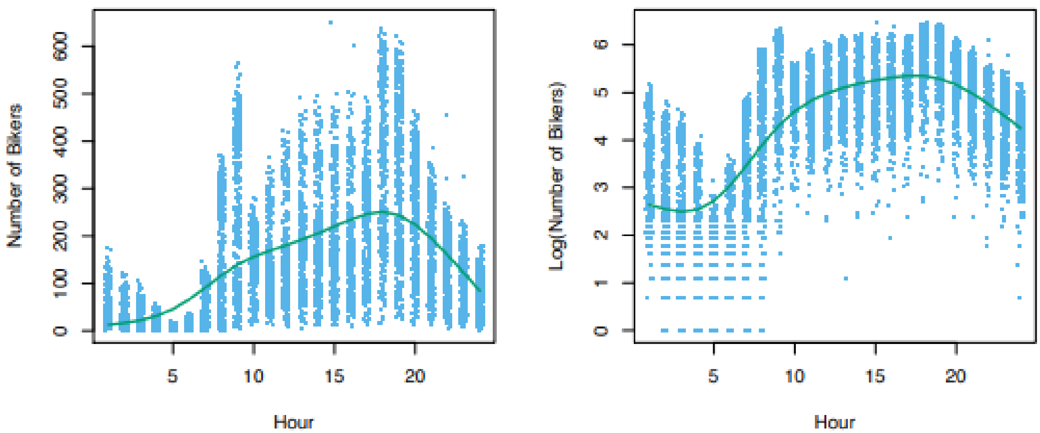
b. 날씨가 더 나빠져서 비나 눈이 올 경우 추가로 53.60명이 더 감소한다.

c.



왼쪽 그래프: 연중 월별과 관련된 계수들을 보여줌, 자전거 이용률은 봄과 가을에 가장 높고, 겨울에 가장 낮다.

오른쪽 그래프: 루 중 시간대와 관련된 계수들을 보여줍니다. 자전거 이용률은 출퇴근 시간대에 가장 높고, 야간에 가장 낮다.



선형 회귀 모델에는 몇 가지 문제점이 있음.

1. **음수 예측값 문제:**

- 전체 예측값의 9.6%가 음수로 나옴
- 자전거 이용자 수가 음수일 수 없으므로 이는 현실적이지 않은 결과

2. **분산의 불균일성(heteroscedasticity) 문제:**

- 이용자 수가 적을 때는 분산도 작아야 하는데, 데이터가 이를 보여줌
- 예시:
  - 겨울철 새벽 1-4시, 비 올 때: 평균 5.05명, 표준편차 3.73
  - 봄철 출근시간 7-10시, 맑을 때: 평균 243.59명, 표준편차 131.7
- 이는 선형 회귀의 기본 가정(오차항의 분산이 일정)을 위배 **(모든 구간에서 변동성이 비슷해야 한다)**

3. **정수값 응답변수 문제:**

- 자전거 이용자 수는 정수값이어야 함
- 하지만 선형 회귀는 연속적인 값을 예측

선형 회귀는 2.5명이나 3.7명 같은 예측값을 만들 수 있는데, 실제로는 자전거 이용자 수가 2.5명이 될 수는 없습니다. 이는 모델이 현실을 정확히 반영하지 못한다는 것을 의미

로그 변환 접근법

$$\log(Y) = \sum_{j=1}^{p} X_j \beta_j + \epsilon.$$

장점:

1. 음수 예측값이 나올 수 없음 (로그 값의 지수를 취하면 항상 양수)
2. 원본 데이터에서 보였던 분산의 불균일성 문제가 많이 해결됨 (4.14 오른쪽 그림)

단점 :

1. 응답변수가 0인 경우에는 로그 변환을 적용할 수 없음
2. 자전거 이용자가 전혀 없는 시간대의 데이터를 처리할 수 없다는 문제 발생
3. 설명변수 Xj가 한 단위 증가하면 Y의 로그 평균이 βj만큼 증가한다"라는 식의 해석은 직관적이지 않음

4.6.2 Poisson Regression on the Bikeshare Data

선형 회귀의 한계를 극복할 수 있는 포아송 회귀 존재

포아송 분포

$$\Pr(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

💡

- λ: 평균값 E(Y)
- k: 발생 횟수
- k!: k의 계승(팩토리얼)

Y는 음이 아닌 정수값만 가짐 (0, 1, 2, ...)

평균(λ)과 분산이 같음

- λ = E(Y) = Var(Y) ⇒ 평균이 클수록 분산도 커짐

포아송 분포는 개수(counts)를 모델링 하는데 사용

Bikeshare 데이터 적용 예시

```
단순 예시 (λ = 5인 경우):
- 0명 이용: 0.67% 확률
- 1명 이용: 3.4% 확률
- 2명 이용: 8.4% 확률
```

현실에서는 자전거 공유 프로그램의 평균 이용자 수 λ = E(Y)가 하루 중의 시간, 연중 월, 날씨 조건 등의 함수로 변할 것

따라서 자전거 이용자 수 Y를 λ = 5와 같은 고정된 평균값을 가진 포아송 분포로 모델링하는 대신, 평균이 공변량의 함수로 변할 수 있게해야한다.

포아송 회귀 모델의 수식

$$\log(\lambda(X_1, \ldots, X_p)) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p \quad (4.36)$$

or equivalently

$$\lambda(X_1, \ldots, X_p) = e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p}. \quad (4.37)$$

$\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p$ 형태로 모델링하면 $\lambda = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p)$가 된다.지수함수(exp)는 항상 양수값을 출력하므로 예측값 λ가 항상 양수가 됨을 보장함

(자전거 대여 수는 음수가 될 수 없으므로 이는 중요한 특성임)

ex) 날씨가 맑음(X_1=0) ⇒ 흐림(X_1=1)으로 바뀔 때

- $\lambda_2 = \lambda_1 \times \exp(\beta_1)$

즉, 원래 평균에서 $\exp(\beta_1)$배만큼 곱해져서 변화합니다

이는 항상 양수이며, 현실적인 해석이 가능

선형 회귀와의 주요 차이점

1. 변화를 배수로 해석
2. 포아송: 항상 양수 예측 / 선형: 음수 예측 가능성 있음
3. 포아송: 평균=분산 / 선형: 일정한 분산

선형회귀: 자전거 이용량이 100명이든 1000명이든 분산은 똑같음

⇒ 현실적 x, 보통 이용량이 많을 때 변동성도 더 큼

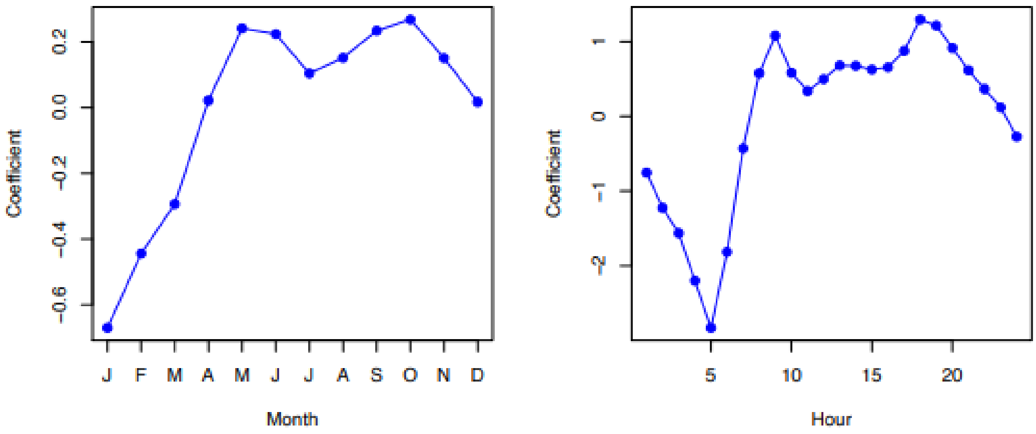
포아송 회귀: 평균 = 분산 (mean = variance) 가정

평균 이용량이 100명이면 분산도 100

평균 이용량이 1000명이면 분산도 1000

포아송 회귀 후 결과 분석

	Coefficient	Std. error	z-statistic	p-value
`Intercept`	4.12	0.01	683.96	0.00
`workingday`	0.01	0.00	7.5	0.00
`temp`	0.79	0.01	68.43	0.00
`weathersit[cloudy/misty]`	-0.08	0.00	-34.53	0.00
`weathersit[light rain/snow]`	-0.58	0.00	-141.91	0.00
`weathersit[heavy rain/snow]`	-0.93	0.17	-5.55	0.00



봄과 가을에 이용률이 가장 높고 출퇴근 시간대에 이용률이 피크를 보임

4.6.3 Generalized Linear Models in Greater Generality

세 가지 회귀 모델(선형,로지스틱, 포아송) 의 공통점

1. 각각 예측변수 X_1, ..., X_p를 사용해 반응변수 Y를 예측한다.

- 선형회귀: Y는 가우시안/정규분포
- 로지스틱 회귀: Y는 베르누이 분포
- 포아송 회귀: Y는 포아송 분포

2. 각각 Y의 평균을 예측변수의 함수로 모델링한다.

- 선형회귀

$$\mathrm{E}(Y|X_1,\ldots,X_p) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p,$$

- 로지스틱 회귀

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y|X_1,\ldots,X_p) &= \Pr(Y=1|X_1,\ldots,X_p) \\ &= \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

- 포아송 회귀

$$\mathrm{E}(Y|X_1,\ldots,X_p) = \lambda(X_1,\ldots,X_p) = e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}.$$

3. 링크함수

- 선형회귀: $\eta(\mu) = \mu$
- 로지스틱 회귀: $\eta(\mu) = \log(\mu/(1-\mu))$
- 포아송 회귀: $\eta(\mu) = \log(\mu)$

가우시안, 베르누이, 포아송 분포는 모두 지수족이라고 알려진 더 넓은 분포족의 일부

다른 잘 알려진 구성원으로는 지수분포, 감마분포, 음이항분포가 있다.

이런 모델들을 일반화 선형 모델(GLM)이라고 함