Notation)

Def1) Simply Normal Number to base 'r' (단순 r진 정규수)

: 실수 $x \in [0,1)$을 r진법으로 $x = 0.x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ 와 같이 전개했을 때

임의의 $b \in \{0,1,...,r-1\}$에 대해

$$`\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(b, X_n) = \frac{1}{r}' \text{ (단, } X_n = x_1 x_2 \cdots x_n)$$

를 만족하면 x를 **'Simply Normal Number to base r(=단순 r진 정규수)'** 라 부른다.

ex1) $0.12345678901234567890\cdots$은 단순 10진 정규수이다.

ex2) $0.123456789123456789\cdots$은 단순 10진 정규수가 아니다.

※ *단순 r진 정규수를 정의할 때 x를 r진법으로 전개한 상태에서 하기 때문에*
r진법의 표현의 중의성에 대해서 문제가 될 수 있다.
가령 10진법에서 $0.3 = 0.29999999\cdots$와 같은 표현을 예로 들 수 있다.
하지만 이렇게 표현되는 모든 실수는 어떤 표현으로 전개하든 명백하게 단순 정규수가 될 수 없기 때문에 큰 문제가 되지 않는다. 아래 정규수를 정의할 때에도 마찬가지이다.

Def2) Normal Number to base 'r' (r진 정규수)

: 실수 $x \in [0,1)$을 r진법으로 $x = 0.x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ 와 같이 전개했을 때

X_n을 구성하는 임의의 block B_k에 대해

$$`\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(B_k, X_n) = \frac{1}{r^k}' \text{ (단, } X_n = x_1 x_2 \cdots x_n \text{ and } k = 1,2,3...)$$

를 만족하면 x를 **'Normal Number to base r(=r진 정규수)'** 라 부른다.

ex1) $0.12345678901234567890\cdots$은 단순 10진 정규수이지만 10진 정규수는 아니다.

ex2) $0.01234567891011121314151 6\cdots$은 10진 정규수이다.
(이를 Champernowne's Constant라 부른다.)

ex3) $0.2357111317192329\cdots$은 10진 정규수이다.
(이를 Copeland-Erdős Constant라 부른다.)

Def3)

: 임의의 실수 x에 대해 x가 r진 정규수임을

$x - \lfloor x \rfloor$이 r진 정규수임과 동치가 되게끔 정의한다.

Remark)

$$\sum_k N(B_k, X_n) = n+1-k$$

Lemma)

: 실함수 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\{f_1(x)+\cdots+f_n(x)\}=1$과

'$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,M_\varepsilon\in\mathbb{R}$ such that $x>M_{(\varepsilon,\,i)}\ \Rightarrow\ f_i(x)\ge\dfrac{1}{n}-\varepsilon$' (각 $i=1,2,\ldots,n$에 대해)

을 모두 만족하면 $\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}f_2(x)=\cdots=\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{n}$이 성립한다.

Proof)

: $\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\dfrac{1}{n}$임만 보이면 나머지는 귀납법에 의해 쉽게 해결된다.

임의로 양수 ε을 택해 고정하자. 그러면 주어진 두 번째 조건에 의해

'$x\ge M\ \Rightarrow\ f_i(x)\ge\dfrac{1}{n}-\dfrac{\varepsilon}{2n}$ (for all $i=1,\ldots,n$)' 이 성립하는 실수 M이 존재한다.

따라서 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{\varepsilon}{2n}\le f_1(x)$ and $1-(f_2(x)+\cdots+f_n(x))\le 1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+\dfrac{n-1}{2n}\varepsilon$ 을 얻는다.

이때 $1=f_1(x)+(f_2(x)+\cdots+f_n(x))+\varepsilon_1(x)$로 두면 $\lim_{x\to INF}\varepsilon_1(x)=0$ 이므로 x가 충분히 크면

$|\varepsilon_1(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 이 성립한다. 즉, 일반성을 잃지 않고 '$x\ge M\ \Rightarrow\ |\varepsilon_1(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$' 라 두자.

따라서 4째줄 부등식은 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{\varepsilon}{2n}\le f_1(x)\le\dfrac{1}{n}+\dfrac{n-1}{2n}\varepsilon+\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow\ \left|f_1(x)-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$ 가 되어 증명이 끝난다.

proof of ex2)

:주어진 상수를 α로 두고 임의의 자연수 n을 고정하여 α의 n번째 소수점 이하의 자리까지 전개한 묶음 X_n을 생각하자. 그리고 X_n을 각 자연수가 달라질 때마다 쉼표를 찍어 아래와 같이 표시하자.

$$X_n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,..........,d_1 \cdots d_m, d_{m+1} \cdots .$$

이때 $u := d_1 \cdots d_m$은 10진법 전개로 나타낸 수이다. (즉, $10^{m-1}d_1 + 10^{m-2}d_2 + \cdots + d_m$)

예를 들면 $X_{14} = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,1. \Rightarrow u = 11$

$X_{1000} = 1,2,3,.........,365,366. \Rightarrow u = 366$

이때 쉼표로 나누어진 덩어리의 수는 기껏해야 $u+1$개이고 각 덩어리의 자릿수는 기껏해야 m 이므로 부등식 $n \le m(u+1)$ $\cdots$ (ㄱ)을 얻는다.

그리고 각 $j = 1,...,m-1$에 대해 u_j를 $u_j = \lfloor u10^{-j} \rfloor$로 정의하자.

이제 X_n상에 속한 임의의 block B_k를 생각하자. (물론 B_k의 자릿수는 k)

그리고 X_n에서 B_k가 몇 번 나타나는 지를 셀 것인데 이때 위 4째 줄에서 각 , , 안에 있는 덩어리에서 B_k의 빈도수를 우선 셀 것이다.

(즉 ,를 넘어가는 부분에서 나타나는 B_k는 일단 세지 않는다.)

그러면 이제 4째 줄에서 각 , ,안에 들어가는 수를 $A_s B_k C_t$꼴로 나타내자. $(s+k+t \le m)$

우선 A_s로 가능한 경우의 수를 먼저 구해보자.

$A_s B_k C_t \le u$ 이므로 $A_s = a_1 \cdots a_s$로 나타냈을 때, 만약

$$a_1 10^{s-1} + a_2 10^{s-2} + \cdots + a_s < d_1 10^{m-1-(k+t)} + d_2 10^{m-2-(k+t)} + \cdots + d_{m-(k+t)}$$ 와

좌변이 0이 아님을 동시에 만족한다면 $A_s B_k C_t$는 각 , ,안에 들어가는 덩어리로 가능하 다.

왜냐하면 X_n에서 , ,안에 들어가는 덩어리 중 u보다 작은 자연수는 무조건 존재하고 위 부등식을 만족시킨다면 $A_s B_k C_t < u$이기 때문이다.

이때 $d_1 10^{m-1-(k+t)} + d_2 10^{m-2-(k+t)} + \cdots + d_{m-(k+t)} = u_{k+t}$이므로 A_s로 가능한 경우의 수는 적 어도 $u_{k+t} - 1$개 이다.

이때 A_s와 B_k가 정해진다면 C_t로 가능한 경우의 수는 각 t에 대해 10^t이므로,

(C_t가 길이 t 만큼의 block이라고 할 때 각 자릿수를 정하는 경우의 수)

B_k의 빈도수는 적어도 $\sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t (u_{k+t} - 1)$이다. 즉, $N(B_k, X_n) \ge \sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t (u_{k+t} - 1)$.

따라서 $N(B_k, X_n) \geq \sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t (u_{k+t} - 1)$

$$\geq \sum_{t=0}^{m-k-1} 10^t (u10^{-(k+t)} - 2) \ (\because \ \ u_{k+t} = \lfloor u10^{-(k+t)} \rfloor > u10^{-(k+t)} - 1)$$

$$= \sum_{t=0}^{m-k-1} u10^{-k} - \sum_{t=0}^{m-k-1} 2 \cdot 10^t$$

$$> u(m-k)10^{-k} - 10^{m-k} = m(u+1)10^{-k} - uk10^{-k} - m10^{-k} - 10^{m-k}$$ 이고

양 변에 n을 나누면,

$$\frac{N(B_k, X_n)}{n} \geq \frac{m(u+1)}{n} 10^{-k} - \frac{uk+m}{n} 10^{-k} - \frac{10^{m-k}}{n}$$

$$\geq 10^{-k} - \frac{uk}{m(u+1)} 10^{-k} - \frac{m}{m(u+1)} 10^{-k} - \frac{10^{m-k}}{u(m+1)}$$ ($\because$ (ㄱ)) 이다.

이때 k는 상수이고 $\frac{uk}{m(u+1)} \leq \frac{(u+1)k}{m(u+1)} = \frac{k}{m}$ 인데 $n \to \infty$ 이면 $u \to \infty$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{uk}{m(u+1)} 10^{-k} = 0$이고 비슷하게 $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{m(u+1)} 10^{-k} = 0$.

그리고 $\frac{10^{m-k}}{u(m+1)} = \frac{10^{m-1}}{u(m+1)} 10^{1-k} \leq \frac{10^{m-1}}{10^{m-1}(m+1)} 10^{1-k} = \frac{10^{1-k}}{m+1}$ and $n \to \infty$ 이면

$m \to \infty$ 이므로 역시 $\lim_{n\to\infty} \frac{10^{m-k}}{u(m+1)} = 0$이다.

따라서 임의로 양수 ε을 고정하면, $n \geq N \Rightarrow \frac{N(B_k, X_n)}{n} \geq 10^{-k} - \varepsilon$인 $N \in \mathbb{N}$이 존재한다.

한편 $\sum N(B_k, X_n) = n + 1 - k$이므로 Lemma에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{N(B_k, X_n)}{n} = \frac{1}{10^k}$ 를 얻는다.