위상(Topology)이란?...

우리는 해석학에서 R 혹은 R^n의 부분집합 중 'open set' 이라는 집합을 공부했습니다.
이때 "집합 A가 open set $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A, \exists \varepsilon_0 > 0 \; s.t. \; B_{\varepsilon_0} \subseteq A$" 이었죠.

그리고 이 정의로부터 여러 가지 따라나오는 성질도 같이 공부했었고요.

하지만 우리는 고작해야 전체집합이 R 혹은 R^n인 경우만 공부했었는데, 이제 이 open set이라는 성질을 전체집합이 일반적인 경우로 확장시켜서 다룰거에요.

그래서 R 혹은 R^n에서 '정리(Theorem)' 였던 것을 일반적인 집합에서 '정의(definition)' 으로 받아들이게 됩니다.

먼저 위상의 정의를 소개하는 것으로부터 시작하겠습니다.

전체집합 X에서의 '위상'이란 X의 부분집합들을 원소로 하는 하나의 집합 T인데,
T는 아래의 세 조건을 모두 만족한다. (즉, T는 X의 멱집합의 한 부분집합)
$i)$ $\varnothing \in T$ **and** $X \in T$
$ii)$ **T의 원소들을 유한번 혹은 무한번 합집합 한 집합도 T의 원소이다.**
$iii)$ **T의 원소들을 '유한번' 교집합 한 집합도 T의 원소이다.**

그리고 T의 임의의 원소 A를 전체집합 X에서의 'open set' 이라고 하고,
$X-A$를 전체집합 X에서의 'closed set'이라고 한다.

$ii)$와 $iii)$을 좀 더 수학적인 언어로 표현하면 아래와 같습니다.

$ii)$ $\forall T_1 \subseteq T, \; \bigcup_{x \in T_1} x \in T$

$iii)$ $A \in T$ and $B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$ (귀납법을 이용하면 유한번에 대해서 성립)

ex1)
$X=\{a,b,c\}$일 때 $T=\{\varnothing, X\}$로 정의하면 T는 X상에서 잘 정의된 위상이 됩니다.

ex2)
$X=\{a,b,c\}$일 때 $T=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$로 정의하면
T는 X상에서 잘 정의된 위상이 됩니다.

ex3)
$X=\{a,b,c\}$일 때 $T=\{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, X\}$로 정의하면
T는 X상에서 잘 정의된 위상이 됩니다.

ex4)
$X=R$일 때, $T=\{\varnothing, R, (0,x) \mid x>0\}$으로 두면 T는 X상에서 잘 정의된 위상이 됩니다.

위의 4개의 예시를 잘 살펴보시면 아래와 같은 몇 가지 특징을 발견할 수 있습니다.

1) 하나의 nonempty set X가 주어졌을 때 그 X로부터 만들 수 있는 위상은 유일하지 않다.
2) 하나의 nonempty set X에 대해 $\{\varnothing, X\}$와 PX(X의 멱집합)은 항상 X상에서 잘 정의된 위상이 된다. (예시 2번과 3번)
3) X상에서 잘 정의된 어떤 위상 T에 대해 T의 원소들의 무한교집합은 T의 원소가 아닐 수 있다. (예시 4번)

특히 1)에서 어떤 집합 X에 대해 그 X로부터 만들 수 있는 위상은 여러 가지가 있기 때문에 X라는 집합을 탐구할 때 그 X로부터 적당한 위상을 만들어서 살펴볼 수 있습니다.
그래서 우리는 X로부터 적당한 위상을 만든다는 것을 X에게 “적당한 위상적 구조를 준다“고 표현하기도 합니다. 즉, X에게 새로운 의미를 부여하는 것이죠.
그리고 X에 위상 T가 주어졌을 때 (X, T)로 나타내고 이를 위상공간이라 부릅니다.

그럼 이제 위상수학을 공부하면서 쉽게 오해할 수 있는 두 가지 주의사항을 살펴보겠습니다.

1) X상의 어떤 closed set은 T의 원소가 될 수도 있다.
2) X상의 어떤 set은 open set도 closed set도 아닐 수가 있다.

처음 위상수학을 공부하게 되면 closed를 여집합이 open인 set으로 정의했으니 closed set은 항상 T의 원소가 아닐 것이라는 생각이 들 수도 있고 또한 X상의 모든 set은 closed와 open으로 분류할 수 있다는 생각이 들 수도 있습니다.
이는 잘못된 생각으로 아래와 같은 예시를 통해서 반증할 수 있습니다.

ex)
$X=\{a,b,c\}$일 때 $T=\{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, X\}$로 두면 T는 X상에서 잘 정의된 위상이 됩니다.
그러면 $\{a\}$는 X상에서 open set이니 $X-\{a\}=\{b,c\}$는 X상에서 closed set입니다.
그런데 $\{b,c\}\in T$이니 이 closed set은 T 안에 있게 됩니다.
이건 X의 어떤 부분집합은 open set이면서 동시에 closed set일 수 있다는 말과 같습니다.
한편 X상의 한 부분집합 $\{a,c\}$를 생각하면 $\{a,c\}\notin T$이므로 open set이 아니고,
$X-\{a,c\}=\{b\}\notin T$이므로 closed set도 아닙니다.

problems)

1. 실수집합 R에서 $T=\{\varnothing, R, (q,\infty)|q$는 유리수$\}$는 R에서 위상이 될 수 없음을 보이시오.

2. 양수 k에 대해, $A_k=\{x\in Z|\,|x|\le k\}$로 정의했을 때, ($Z$는 정수전체의 집합)
   $T=\{\varnothing, Z, A_k|k\in N\}$은 Z상에서 위상이 될 수 있는가? 왜 그렇게 생각하는가?

이제 위상이라는 녀석을 더 탐구하기 위해서 우리는 몇 가지의 용어를 정의하게 됩니다.

근방계(neighborhood system): X상에 위상 T가 주어졌을 때, 어떤 $x \in X$에 대해
$N_x = \{U \in T \mid x \in U\}$를 x의 근방계라고 하고
N_x의 원소를 x의 근방이라고 한다.

이는 R^n에서 정의했던 '근방‘을 모든 위상의 공간에서도 사용할 수 있도록 더 일반적으로 정의한 것입니다. 아래의 두 예시를 살펴보도록 하겠습니다.

ex1)
$X = \{a, b, c\}$일 때 $T = \{\varnothing, \{a,b\}, \{c\}, X\}$로 두면 T는 X상에서 잘 정의된 위상이 된다.
그러면 $N_a = \{\{a,b\}, X\}$, $N_b = \{\{a,b\}, X\}$, $N_c = \{\{c\}, X\}$이다.
(여기서 $\{a, c\}$같은 집합을 a의 근방으로 착각하지 않도록 주의!)

ex2)
2페이지 problem 2)에서 소개한 T는 실제로 Z상의 위상이 되게 되는데 이때
어떤 $a \in Z$에 대해 $N_a = \{A_k \mid k \geq |a|\}$이다.

이러한 근방에 대한 유용한 정리(Theorem)들이 있는데요. 아래와 같습니다.

1) $U \in N_x \Rightarrow x \in U$
2) $U \in N_x,\ U \subseteq V$ and $V \in T \Rightarrow V \in N_x$
3) $U, V \in N_x \Rightarrow U \cap V \in N_x$
4) $U \in T \Leftrightarrow \forall y \in U,\ U \in N_y$

특히 4)번은 R 혹은 R^n에서의 open set의 정의였죠.
4개 다 간단하게 증명할 수 있으므로 스스로 증명 해보세요.

근방계가 ‘열린 집합(open set)’을 탐구하는 데 필요한 용어라고 했다면 이제는
‘닫힌 집합(closed set)’을 좀 탐구해볼건데요. 우선 닫힌 집합이 가지는 성질에 대해서 간단하게 소개해보도록 하겠습니다.

T가 전체집합 X상에서 잘 정의된 위상이라고 하면 아래 세 가지 명제는 항상 참이다.

i) $\varnothing, X$는 닫힌집합이다.
ii) 닫힌집합들을 유한번 혹은 무한번 교집합 한 집합은 닫힌집합이다.
iii) 닫힌집합들은 ‘유한번’ 합집합 한 집합은 닫힌집합이다.

이 세 가지 역시 닫힌집합의 정의와 위상의 정의를 이용하면 쉽게 증명할 수 있습니다.

그렇다면 닫힌집합을 탐구하기 위해서 용어를 몇 개 정의해보도록 하겠습니다.

부분공간(subspace): 전체집합 X상에서 위상 T가 잘 정의되었다고 하고 $A \subseteq X$라 하자.
$T_A = \{A \cap U \mid U \in T\}$로 정의하면 T_A는 A를 전체집합으로 하는
잘 정의된 위상이 된다. 이때 (A, T_A)를 (X, T)의 부분공간이라 한다.

집적점(limit point): 전체집합 X상에서 위상 T가 잘 정의되었다고 하자. 이때 각 $x \in X$와
x의 임의의 근방 U에 대해 만약,
$A \cap (U - \{x\}) \neq \varnothing$ 이라면 x를 A의 집적점이라고 한다.

도집합(derived set): $A' = \{x \mid x \text{는} A \text{의 집적점}\}$을 A의 도집합이라고 한다.

닫힌포(closure): $\overline{A} = A \cup A'$을 X안에서의 A의 닫힌포라고 한다.

ex1)
$X = \{a, b, c, d\}$일 때 $T = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$라 하면 T는 X상에 잘 정의된 위상이다.
$A = \{b, c, d\}$라고 하면 $A \subseteq X$이고 $T_A = \{A \cap U \mid U \in T\}$로 정의하면
$T_A = \{\varnothing, \{b\}, A\}$, T_A는 A상에서 잘 정의된 위상이고 (A, T_A)는 (X, T)의 부분공간이다.
$N_a = \{\{a\}, \{a, b\}, X\}$에서 $\{a\}$는 a의 근방인데 $A \cap (\{a\} - \{a\}) = \varnothing$이므로
a는 A의 집적점이 <u>아닙니다.</u>
$N_b = \{\{b\}, \{a, b\}, X\}$에서 $\{b\}$는 b의 근방인데 $A \cap (\{b\} - \{b\}) = \varnothing$ 이므로
b는 A의 집적점이 <u>아닙니다.</u>
$N_c = \{X\}$이므로 c의 임의의 근방은 X로 유일하다. 이때 $A \cap (X - \{c\}) = \{b, d\} \neq \varnothing$이므로
c는 A의 집적점이다.
$N_d = \{X\}$이므로 d의 임의의 근방은 X로 유일하다. 이때 $A \cap (X - \{d\}) = \{b, c\} \neq \varnothing$이므로
d는 A의 집적점이다.
따라서 $A' = \{c, d\}$이고 $\overline{A} = \{b, c, d\}$이다.

ex2)
$X = R$일 때, $T = \{\varnothing, R, (0, x) \mid x > 0 \text{인 실수}\}$로 정의하면 T는 X상에 잘 정의된 위상이다.
$A = (0, 1)$이라고 하면 $A \subseteq X$이고 $T_A = \{A \cap U \mid U \in T\}$라 하면
$T_A = \{\varnothing, (0, x) \mid 0 < x \leq 1\}$은 A상에서 잘 정의된 위상이고 (A, T_A)는 (X, T)의 부분공간.
임의의 $x \in A$에 대해 $N_x = \{(0, y) \mid y \text{는 실수이고} \, y > x\}$ 이므로 임의의 $U \in N_x$에 대해
$U = (0, x + \varepsilon)$꼴이고 $(\varepsilon > 0)$ 이때 $A \cap (U - \{x\})$는 $x < t \leq \min\{x + \varepsilon, 1\}$인 모든 t를 원소로
가지므로 $A \cap (U - \{x\}) \neq \varnothing$이다. $x \geq 1$이면 $A \subseteq (U - \{x\})$이므로 $A \cap (U - \{x\}) \neq \varnothing$이다.
$x \leq 0$이면 임의의 $U \in N_x$는 $U = R$뿐이고 $A \subseteq (R - \{x\})$이므로 $A \cap (R - \{x\}) \neq \varnothing$이다.
따라서 $A' = R$이고 $\overline{A} = R$이다.

그럼 이제 닫힌포에 대한 중요한 정리를 하나 소개해보도록 하겠습니다.

'위상공간 (X, T)에서 집합 A가 X상에서 닫힌집합임과 $A=\overline{A}$임은 동치이다.'

pf) $(\Rightarrow)$: $x\notin A$이고 $x\in A'$인 어떤 $x\in X$가 존재한다고 가정하자.
$x\in X-A$이고 가정으로부터 $X-A$가 열린집합이므로 x의 임의의 근방 U에 대해 $U\subseteq X-A$이다. 그러면 $U-\{x\}\subseteq X-A$이므로 $A\cap(U-\{x\})=\varnothing$이다. 이는 $x\in A'$라는 가정에 모순이다.
따라서 $x\in A'\Rightarrow x\in A$이어야 하므로 $A'\subseteq A$에서 $\overline{A}=A$이다.

$(\Leftarrow)$: 임의의 $x\in X-A$를 고정하고 x의 임의의 근방 U를 생각하자.
만약 $U\subseteq X-A$가 아니라면 $U\cap A\neq\varnothing$이다. 그런데 $x\notin A$이므로 $A\cap(U-\{x\})\neq\varnothing$이어서 $x\in A'$이어야 하는데 이러면 $A=\overline{A}$라는 가정에서 $A\supseteq A'$ 이어야 하므로 $x\in A$이어야 한다. 이는 $x\in X-A$라는 가정에 모순이다.
따라서 $U\subseteq X-A$이어야 하여 $X-A$가 열린집합이므로 A는 닫힌집합이다.

이 정리에 대한 따름정리(Corollary)로 아래도 역시 성립함을 알 수 있습니다.

'위상공간 (X, T)에서 $F=\{P\,|\,A\subseteq P\subseteq X \text{ and } P\text{는 } X\text{안에서 닫힌집합}\}$로 정의하면,

$\overline{A}=\bigcap_{Y\in F}Y$이다. '

즉, A의 닫힌 포는 A를 포함하는 닫힌집합 중 '가장 작은' 집합이라는 것을 알 수 있습니다.
증명은 한 번 스스로 해보세요.
이제 닫힌 포에 대한 여러 가지 성질을 정리하도록 하겠습니다. 스스로 증명도 해보세요.

1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$
2) $A\subseteq A'$
3) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$
4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
5) $F=\{A\subseteq X\,|\,A=\overline{A}\}$일 때 $T=\{U\subseteq X\,|\,U=X-P \text{ and } P\in F\}$는 X상의 위상이다.

problems)

1. 실수집합 R상에서의 한 위상 $T=\{\varnothing, R, B_{\varepsilon}(0)\,|\,\varepsilon\in R \text{ and } \varepsilon>0\}$에서 $A=(-1,2)$로 정의하자. 이때 $\overline{A}$를 구하여라.

2. B는 R상에서 정의된 한 수열의 각 항을 모두 원소로 가지는 집합이다.
즉, $B=\{a_n\}_{n\in N}$이다. 그리고 R상에 위상을 $T=\{\varnothing, R, (a,b)\,|\,a,b\in R \text{ and } a<b\}$로 주자.
임의의 자연수 m이 주어졌을 때 $|B'|=m$이 되도록 하는 B의
예시를 항상 찾을 수 있겠는가? 더욱이, $m=\infty$인 경우에도 그렇게 할 수 있겠는가?

이제 또 몇 가지 용어를 정의해보도록 하겠습니다.

위상공간 (X, T)가 잘 정의되어있고 $A \subseteq X$라 하자.

내부(interior): $i(A) := \bigcup_{U \subseteq A \text{ and } U \in T} U$ **를 A의 내부라고 한다.**
더욱이 $i(A)$의 원소를 A의 내점(interior point)이라 한다.

외부(exterior): $e(A) := i(X-A)$**를 A의 외부라고 한다.**
더욱이 $e(A)$의 원소를 A의 외점(exterior point)이라 한다.

경계(boundary): $b(A) := X-(i(A) \cup e(A))$**를 A의 경계라고 한다.**
더욱이 $b(A)$의 원소를 A의 경계점(boundary point)이라 한다.

간단한 예시를 몇 가지 살펴봅시다.

ex1)
5page problem 1)의 상황에서 $i(A) = (-1, 1)$, $e(A) = \varnothing$, $b(A) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$이다.

ex2)
실수집합 R상에서 정의된 위상 $T = \{\varnothing, R, (a, b) | a, b \in R \text{ and } a < b\}$을 생각했을 때,
$A = (0, 2]$로 두면 $i(A) = (0, 2)$, $e(A) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $b(A) = \{0, 2\}$이다.

ex3)
R^2상에서 정의된 위상 $T = \{\varnothing, R^2, (x, y) \in R^2 | \ \}$을 생각했을 때,
$A = \{(x, y) \in R^2 | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$로 두면,
$i(A) = \{(x, y) \in R^2 | 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}$, $e(A) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 > 1\}$,
$b(A) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 이다.

그럼 이제 좋은 정리 두 개를 소개해보도록 하겠습니다. 한 번 스스로 증명해보세요.

1) A가 open $\Leftrightarrow$ $i(A) = A$
2) A가 closed $\Leftrightarrow$ $b(A) \subseteq A$

problem)

1. R^2상에 위상을 ex3)처럼 줬을 때 $A = \{(x, y) \in R^2 | 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$,
$B = \left\{(x, y) \in R^2 | y = \dfrac{3}{2}\right\}$라 하자.
이때 $i(A \cup B), e(A \cup B), b(A \cup B)$를 구하여서 그림으로 나타내시오.

다음으로 소개할 내용은 'basis'에 관한 내용입니다.
선형대수학에서 배우셨던 basis를 기억하시나요?
가령 $P_n := \{P(x) \mid P(x)\text{는 } n\text{차 이하의 다항식}\}$ 와 같이 정의하면 P_n은 하나의 벡터공간이 되는데 이때 이 벡터공간의 basis 중 하나는 $\{1, x, \cdots, x^n\}$이었죠.
저 예시를 보면 알 수 있듯이 basis에 대한 직관적인 단상은
"공간을 가장 경제적으로 구성할 수 있는 뼈대" 라고 할 수 있습니다.
위상에서도 이와 비슷하게 받아들이시면 되는데요. 우선 아래의 정의를 살펴보겠습니다.

위상공간 (X, T)가 잘 정의되어 있다고 하자.

기저(basis): 부분집합족 $B \subseteq T$가 각 $U \in T$에 대해 아래를 만족하는 $B_1 \subseteq B$가 존재한다면, 이 부분집합족 B를 T에 대한 하나의 '기저(basis)'라 한다.

$$“U = \bigcup_{B_\alpha \in B_1} B_\alpha”$$

또한 B의 각 원소를 '기저열린집합(basic open set)'이라 한다.

**부분기저(subbasis): 부분집합족 $S \subseteq T$가 S의 원소들의 유한 교집합으로 T에 대한 기저를 형성할 수 있다면 이 S를 T에 대한 부분기저(subbasis)라 한다. 이는 임의의 $U \in T$는 S의 원소들의 유한 교집합들의 합집합으로 나타낼 수 있다는 말을 의미한다.
또한 S의 각 원소를 '부분기저열린집합(subbasic open set)'이라 한다.**

국소기저(local basis): 각 $x \in X$에 대해 근방계 N_x를 생각하자. N_x의 부분집합 B_x가 아래를 만족할 때 이 B_x를 N_x의 한 국소기저라 한다.

"각 $U \in N_x$에 대해 $V \subseteq U$인 $V \in B_x$가 존재한다."

그럼 몇 가지의 예시를 살펴보도록 하겠습니다.

ex1)
$X = \{a, b, c\}$에 대해 $T = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, X\}$라 할게요.
그러면 $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$는 T의 기저가 되는데, 예를 들어 $\{a, b\} \in T$에 대해 $B_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$로 두면 $\bigcup_{B_\alpha \in B_1} B_\alpha = \{a, b\}$가 되죠. 이런 식으로 임의의 $U \in T$에 대해 저런 B_1을 항상 잡을 수가 있으므로 B는 T의 한 기저입니다.
그리고 $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$로 두면 이는 T의 부분기저가 되는데, 예를 들어 $\{c\} \in T$에 대해 $\{c\} = \{b, c\} \cap \{c, a\}$이고 이를 합집합 하면 $\{c\}$가 되죠. 이런 식으로 모든 $U \in T$에 대해 S의 원소들의 유한 교집합의 합집합으로 U를 쓸 수 있으므로 S는 T의 부분기저가 됩니다.
마지막으로 $a \in X$와 근방계 $N_a = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$에 대해 $B_a = \{\{a\}\}$로 두면 B_a는 N_a의 국소기저가 됨을 정의를 통해서 쉽게 확인할 수 있습니다.