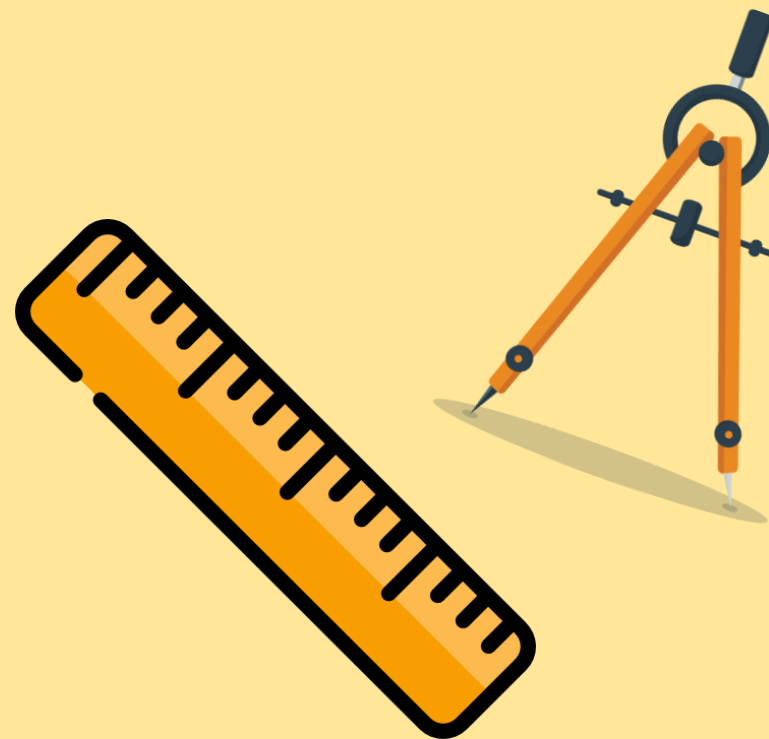


성균관대학교 수학과 이호준

# 수, 작도, 그리고 방정식



M I M I C

# 수 체계

- 수 + 연산
- 연산(+,  $\times$ )
- 항등원(identity): +에서는 0,  $\times$ 에서는 1
- 역원(inverse)
- $\{0,1\} \xrightarrow{+} \text{자연수} \xrightarrow{+ \text{ 역원}} \text{정수} \xrightarrow{\times \text{ 역원}} \text{유리수}$

# 체(Field)

- 집합(수학적 대상)과 연산 두 개
  - 집합에 연산 결과가 다 있음
  - 항등원 : 두 연산 모두
  - 역원 : 두 연산 모두
  - 결합법칙(associative law) : 두 연산 모두
  - 교환법칙(commutative law) : 두 연산 모두
  - 분배법칙(distributive law)
- 
- 예) 유리수와  $(+, \times)$

# 작도

- 정의 : 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용해 도형을 그리는 것

- 역할:

- 1) 눈금 없는 자 :

- 1) 두 점을 지나는 직선 그리기
- 2) 선분 연장하기

- 2) 컴퍼스 :

- 1) 한 점을 중심으로 하는 원 그리기
- 2) 두 점이 떨어진 거리를 반지름으로 하는 원 그리기

## 왜 배움?

# 유클리드 공리계

- 수학을 논리적인 체계로서(즉, 학문으로서) 다룬 최초의 체계

- 공리

1) 서로 다른 두 점을 잇는 직선을 그을 수 있다.

2) 임의의 선분은 더 연장할 수 있다.

3) 서로 다른 두 점 A, B에 대해, 점 A를 중심으로 하고 선분 AB를 한 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.

4) 모든 직각은 서로 같다.

5) 평행선의 공리

→ 눈금 없는 자

↓  
컴퍼스

고대 그리스에서 수학을 한다 <-> 작도를 한다

# 작도에 대해 잘 알려진 사실(믿고 넘어가자)

- 선분에 수직 이등분선을 그릴 수 있다.
- 직선과 직선 밖에 있는 점이 있을 때, 그 점을 지나면서 주어진 직선과 평행한 평행선을 그릴 수 있다.(평행선 공리)
- 각의 이등분선을 그릴 수 있다.

# 수와 작도

•  $\{0,1\} \rightarrow$  자연수  $\rightarrow$  정수  $\rightarrow$  유리수

•  $\{0,1\}$

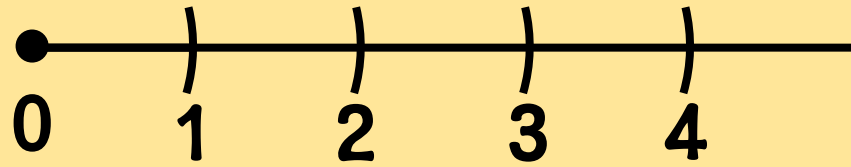
•  
0

—————  
1



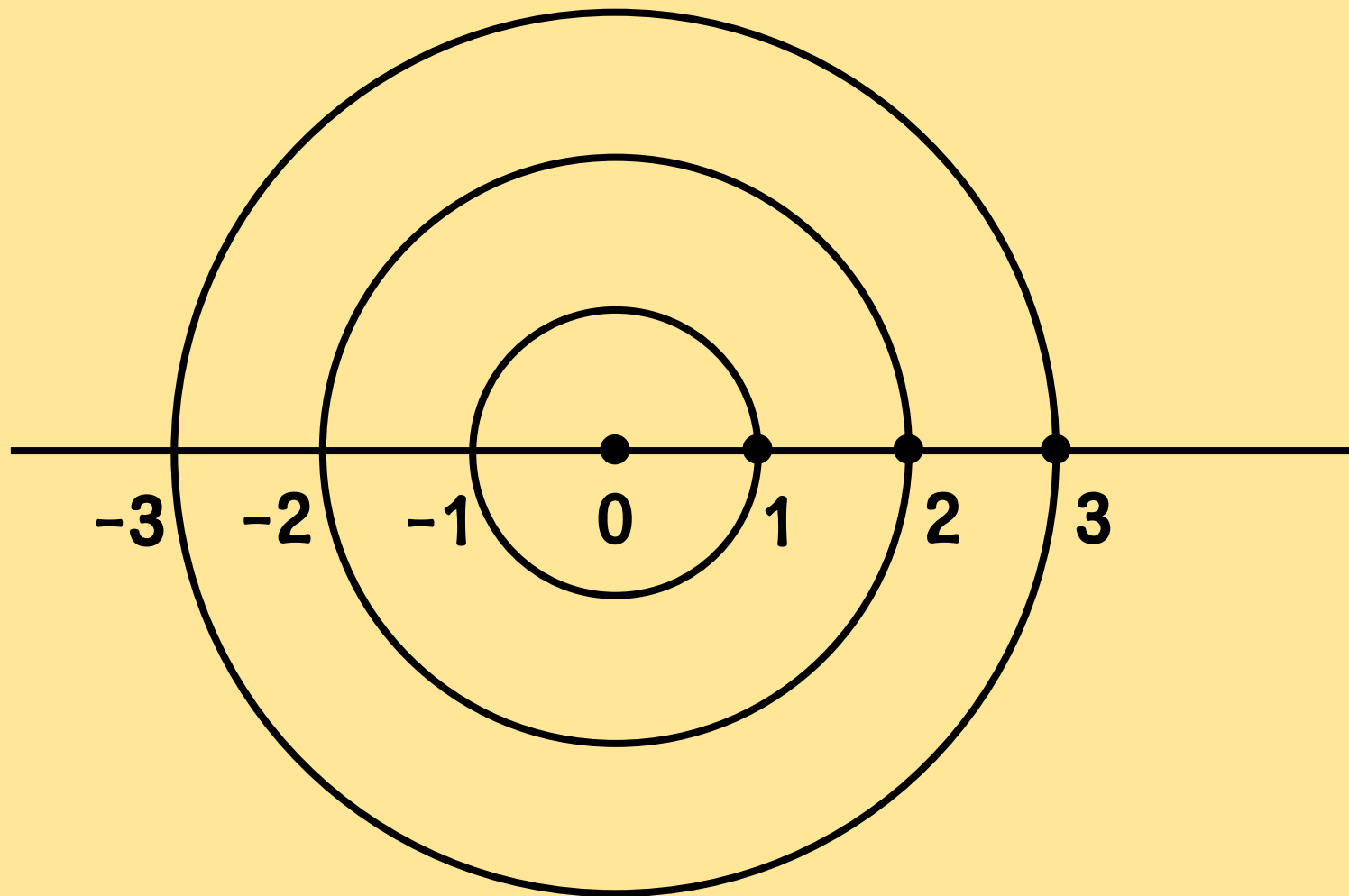
# 수와 작도

- 자연수



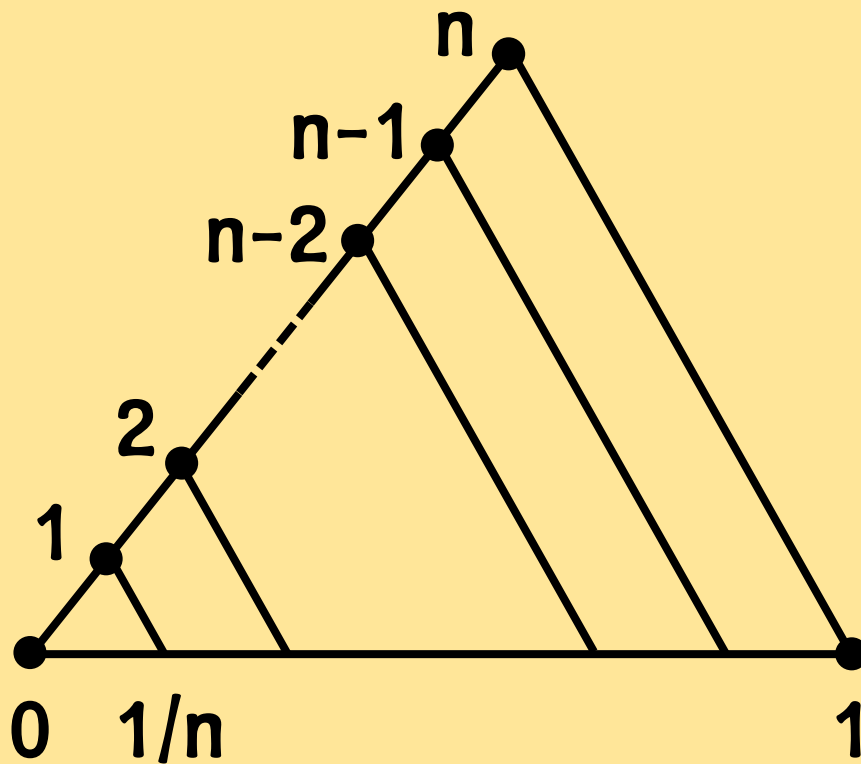
# 수와 작도

• 정수



# 수와 작도

- 유리수 :  $1/n$  만 작도할 수 있으면 끝남



**작도로 유리수 체를 다룰 수 있다!**

# 방정식

- 미지수가 포함된 식에서 그 미지수에 특정한 값을 주었을 때만 성립하는 등식

예)  $x^2 - x - 6 = 0$

- 방정식을 푼다 : 방정식을 참이 되게 하는 미지수의 값, 해를 구하는 것

예)  $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ or } x = -2$

# 작도와 방정식

- 작도를 통한 일차방정식 풀기(유리계수)

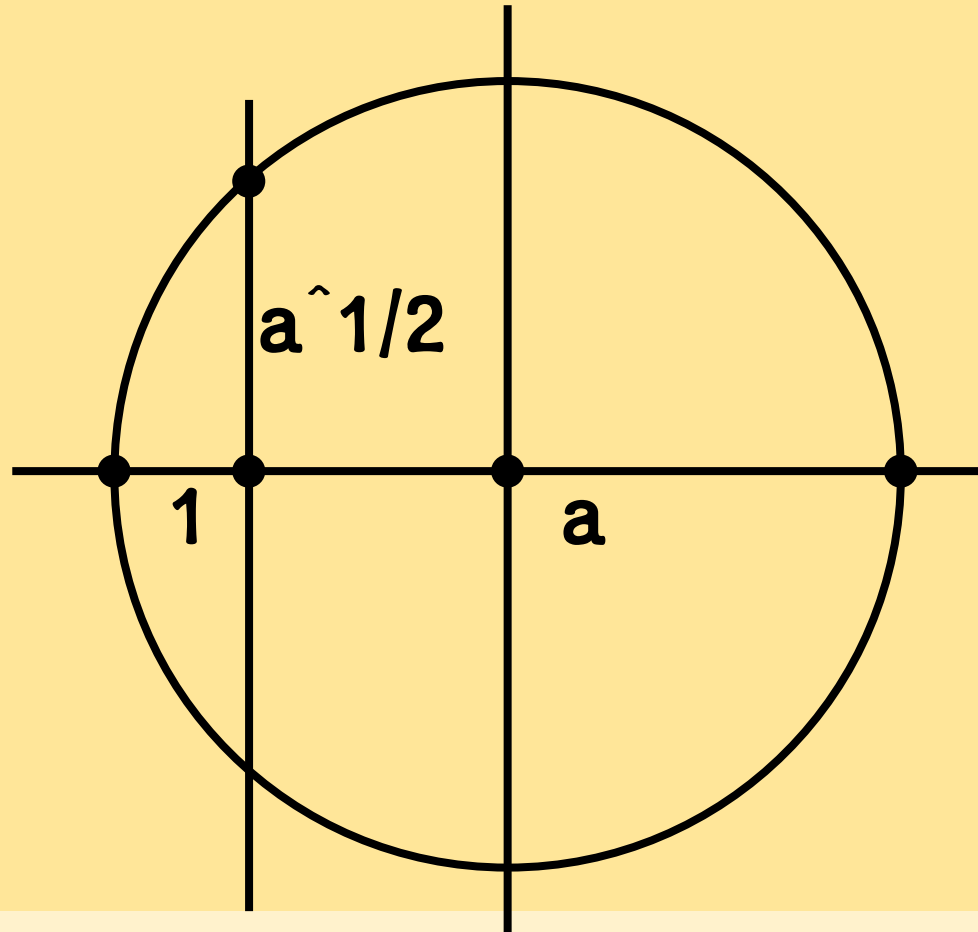
$$ax+b=0$$

-b 작도  $\rightarrow$  a등분 끝.

# 작도와 방정식

- 작도를 통한 이차방정식 풀기(유리계수)

(1)  $x^2 = a$



확인

$x^2 = 2$

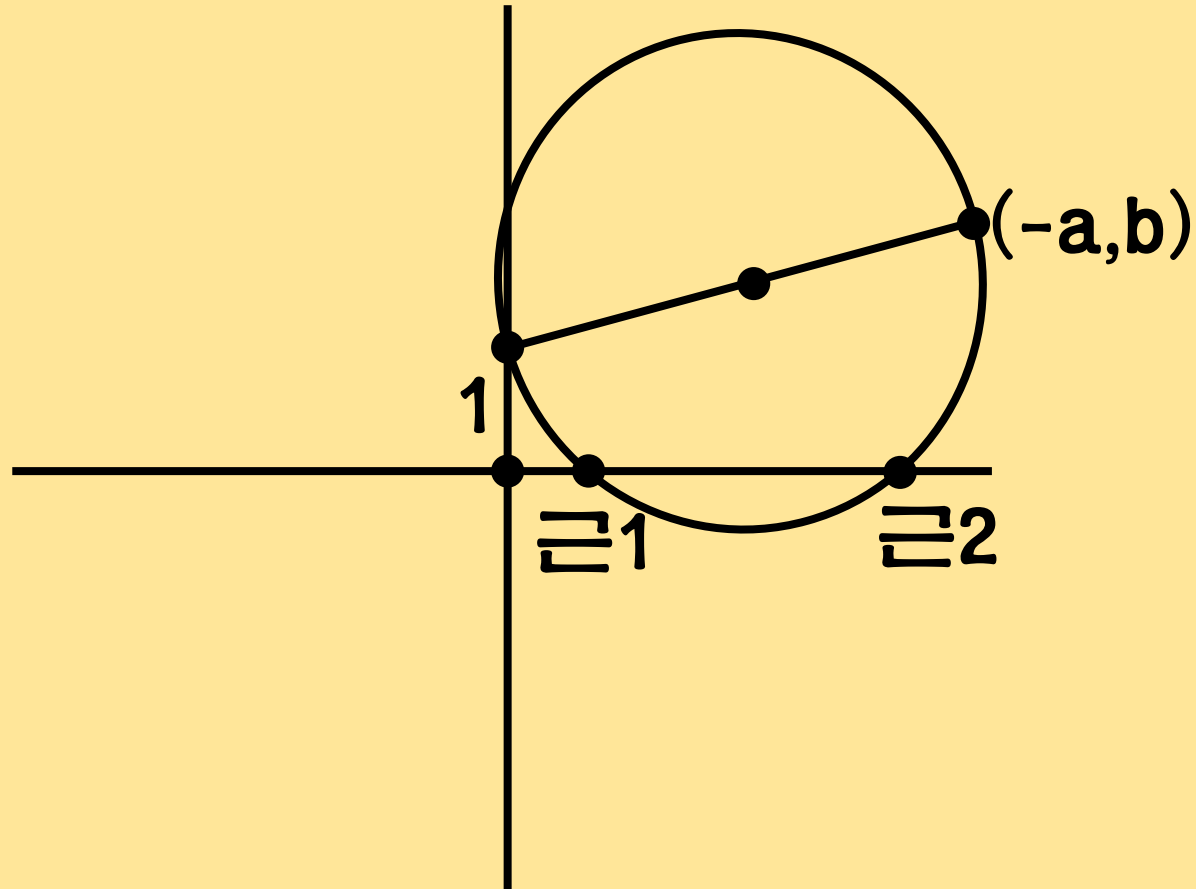
# 작도와 방정식

- 작도를 통한 이차방정식 풀기(유리계수)

(2)  $x^2+ax+b=0$

확인

1.  $x^2-3x+2=0$
2.  $x^2-2x+1=0$
3.  $x^2-x-6=0$





# 작도와 방정식

- 작도를 통한 삼차방정식 풀기

$$x^3=a$$

불가능(3대 작도 불능 문제)

왜?

# 작도

- 정의 : 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용해 도형을 그리는 것

- 역할:

- 1) 눈금 없는 자 :

- 1) 두 점을 지나는 직선 그리기  
 $x+ay+b=0$
- 2) 선분 연장하기

- 2) 컴퍼스 :

- 1) 한 점을 중심으로 하는 원 그리기  
 $x^2+y^2+ax+by+c=0$
- 2) 두 점이 떨어진 거리를 반지름으로 하는 원 그리기

도형들의 교점 = 연립방정식의 해

# 수, 작도, 그리고 방정식

- 작도가능수 :

유리수에 제곱근과 사칙연산을 유한번 적용해서 얻어지는 수

- 유리수  $\subset$  작도가능수

- 작도가능수는 체인가?

Yes!

# 체(Field)

- 집합(수학적 대상)과 연산 두 개
  - 집합에 연산 결과가 다 있음
  - 항등원 : 두 연산 모두
  - 역원 : 두 연산 모두
  - 결합법칙(associative law) : 두 연산 모두
  - 교환법칙(commutative law) : 두 연산 모두
  - 분배법칙(distributive law)
- 
- 예) 유리수와  $(+, \times)$

# 수, 작도, 그리고 방정식

- 작도가능수 :

유리수에 제곱근과 사칙연산을 유한번 적용해서 얻어지는 수

- 작도가능수의 꼴 :  $a + n_1^{1/2} + n_2^{1/2} + \dots + n_m^{1/2}$

- 역원이 있는 지만 확인하면 끝.

- 즉, 위의 꼴의 역수가 다시 저 꼴로 돌아가면 됨!

# 작도에 대한 흥미로운 사실

- 컴퍼스만을 이용해서 작도를 해도 일반적인 작도로 얻을 수 있는 모든 것을 얻을 수 있다.
- 자 = 직선을 그릴 수 있다  
-> 한 직선상에 있는 임의의 점을 작도할 수 있으면 자의 역할을 할 수 있다