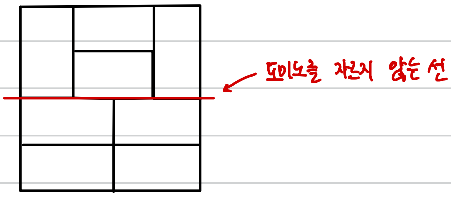
Domino Tiling

Question) $n \times n$ 타일을 2×1 도미노로 채울때, 도미노를 자르지 않는 선은 언제 존재할까?

ex)



4×4

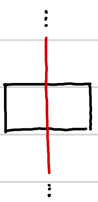
직접 몇개를 그려다 보면 6×6 까지는 2×1 도미노로 채웠을 때, 항상 그러한 선이 존재.

그렇다면 왜 6×6 까지는 가능하고 8×8 부터는 안될까?

그에대한 증명을 소개하려고 한다.

Lemma) 6×6 타일에서 어떤 직선이 도미노를 자르면, 그 직선은 적어도 두개의 도미노를 자른다.

Proof of lemma)



직선이 도미노를 자르면 그 도미노는 자르는 방향으로 1칸의 길이를 차지한다.

나머지 도미노가 전부 잘리지 않고 타일을 채우려면 한 변의 길이가 짝수칸인 것에 모순이다.

따라서 적어도 한 도미노를 더 자르게 된다.

Theorem) 6×6 타일링에는 도미노를 자르지 않는 직선이 항상 존재한다.

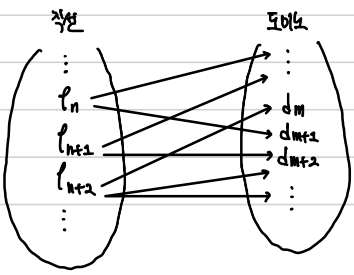
Proof of theorem) 우리는 여기서 Double counting이라는 증명 기법을 사용하고자 한다.

Double counting은 같은 대상을 서로 다른 방식으로 세는 기법이다.

먼저 결론을 부정하여, 10 개의 직선이 모두 도미노를 자른다고 가정하자.

그 후 18개의 도미노와 10개의 직선간의 다음과 같은 관계를 이용하여 연결한다.

"직선과 그 직선에 의해 잘리는 도미노를 연결한다."



그렇게 되면 연결된 화살표의 개수를 직선과 도미노의 입장에서 Double counting 할 수 있다.

화살표의 총 개수를 x 라고 하면, 모든 도미노는 최대 한 번씩 잘리므로 $x \leq 18$ 이다.

그러나 lemma 에 의해, $x \geq 2 \times 10 = 20$ 이어야 한다.

따라서 $20 \leq 18$ 이라는 모순이 발생한다.

그러므로 가정이었던 "10 개의 직선이 모두 도미노를 자른다."가 거짓이고 항상 도미노를 자르지 않는 직선이 존재한다.

Discussion) 왜 6×6 까지만 성립할까?

그에 대한 힌트는 증명과정을 보면 간단하다.

$n \times n$ 타일을 가정하면, $2(n-1)$ 개의 직선과 $(\frac{n^2}{2})$ 개의 도미노가 생긴다.

증명과정에 사용된 부등식을 통해 $4(n-1) \leq \frac{n^2}{2}$ 가 성립하게 되면 모순을 이끌어낼 수 없다. 이를 만족하는 2 이상의 짝수는 8부터이기 때문에, 8×8 부터는 가능성이

물론, 이는 완벽한 증명은 아니다. 다만 n이 커질수록 $\frac{n^2}{2}$과 $4(n-1)$ 의 차이가 커지므로 결과의 가능성을 보여준다.

이와 비슷한 방식으로 $n \times n$을 3×1 트로미노로 채울 때의 조건도 생각해 볼 수 있다.