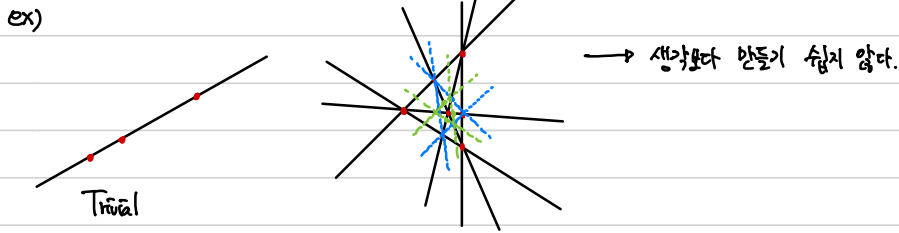


Sylvester Problem

Question) 유한개의 점으로 이루어진 집합이 다음 조건을 만족한다.

"두 점을 잇는 직선은 반드시 다른 한 점을 지난다."

그 집합은 어떻게 생겼을까?



Theorem) 위의 조건을 만족하는 유한 집합은 항상 일직선 위에 있다.

Proof of theorem) 결론을 부정하여 모든 점이 일직선 위에 있지 않은 집합이 위의 조건을 만족한다 가정하자.

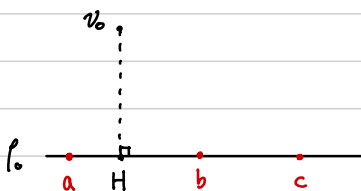
이때, 점들과 점들을 잇는 직선에 u, l 조 이들을 붙인다.

그리고 다음과 같은 조건을 만족하는 (u, l) 쌍을 모든 후 살펴보자.

" $(u, l) \in S \Leftrightarrow u$ 는 l 위에 있지 않다."

가정에 의해 S 은 공집합이 아닌 유한집합이기 때문에 u 와 l 사이의 거리가 최소인 (u_0, l_0) 가 존재한다.

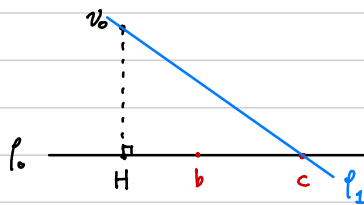
그렇게 되면 다음과 같은 상황을 생각해 볼 수 있다.



l_0 는 두 점을 잇는 직선이므로 조건에 따라 적어도 세 점 a, b, c 을 지난다.

점이 3개이므로 비틀지 않음에 의해 한 쪽 반직선에 적어도 2개의 점이 있다.

그렇상 b, c 가 된다.

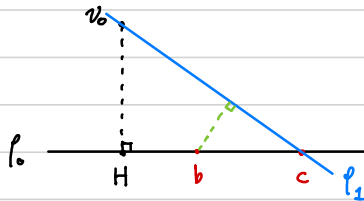


두 점 중 p_0 에서 l_0 에 내린 수선의 발 H로부터 가장 먼 점을 택한다.

위 그림에서는 c 가 될다.

c 와 p_0 는 집합의 조건을 만족하므로 두 점을 지나는 직선 l_1 이 있다.

b 는 l_1 위에 있지 않으므로 $(b, l_1) \in S$ 이다.



그러나 b 와 l_1 사이의 거리가 p_0 와 l_1 사이의 거리보다 짧을 때

이는 p_0 와 l_1 사이의 거리가 최소라는 사실에 모순이다.

따라서, 조건을 만족하는 집합은 한 직선 위에 있다.