



# 죄수 탈출 문제

김민국  
2023/09/04  
김민국

여러분은 조원들과 함께 도둑질을 하다 감옥에  
갇혔습니다.

모두가 탈출하기 위해서는 주어진 시련을 통과해야  
합니다.

---



- 각 죄수에게 1부터 차례대로 숫자를 부여합니다.
- 옆 방에는 죄수의 숫자들이 적힌 상자가 있습니다.
- 상자 안에는 죄수들의 번호가 적힌 종이가 무작위로 담겨져 있습니다.
- 죄수들은 한 번에 한 명씩 방에 들어가서 전체 상자 중 절반을 열어 번호를 확인할 수 있습니다.
- 이후 자신이 들어오기 전의 상황과 똑같이 방을 원상복구 한 후 방을 나갑니다.
- 만약 모두가 자신의 번호가 적힌 종이를 찾는 것에 성공한다면 전부 다 탈출하고 한 명이라도 실패한다면 처형당합니다.



1  
(2)

2  
(3)

3  
(4)

4  
(6)

5  
(5)

6  
(1)

- 죄수의 수가  $n$ 명일 때
- 한 명이 자신의 번호를 찾을 확률은  $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
- 그러면 모두가 성공할 확률은  $\frac{1}{2}^n$
- Ex)  $\frac{1}{2}^6 = \frac{1}{64} = 1.5\%$
- 너무 낮지 않나?... 확률을 더 높일 수 있는 방법은 없을까?

죄수들끼리 고민해봅시다!



# 성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

1

1

1



성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

2

2

2



# 성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

3

3

3



성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

4



# 성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

5

5



# 성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(1)

4  
(4)

5  
(6)

6  
(5)

6

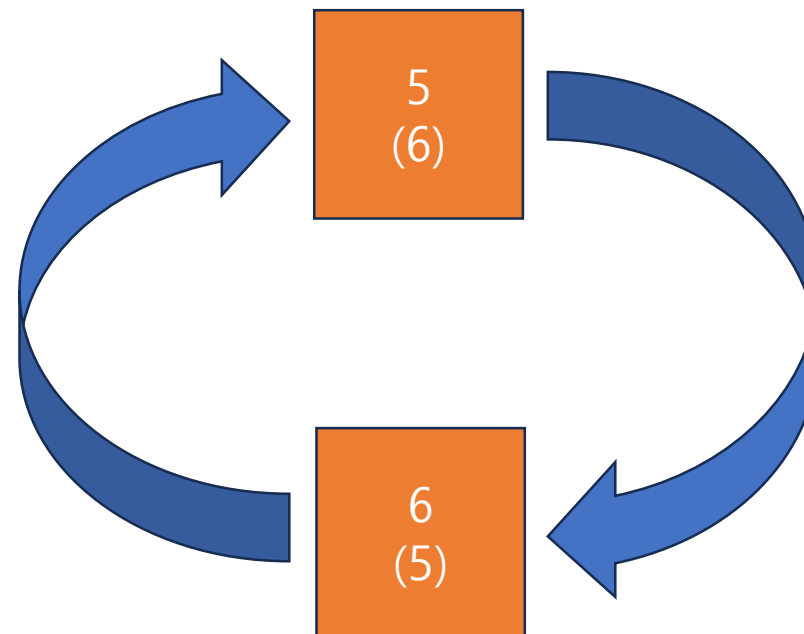
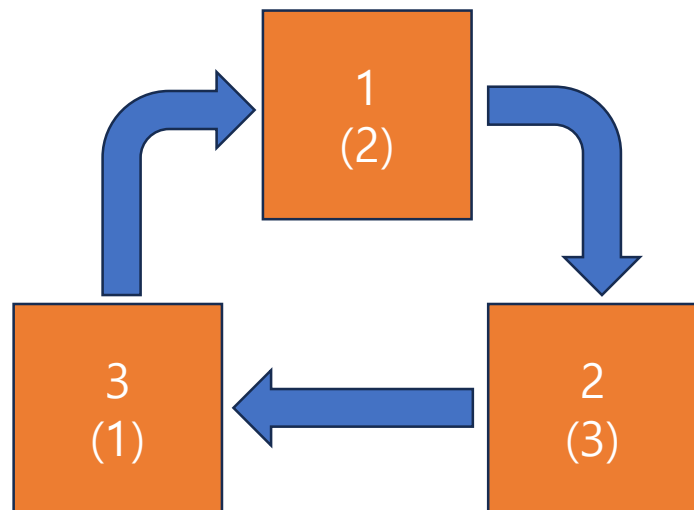
6



모두 살았다!









# Permutation

- Set  $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{N}\}$
- $f: X \rightarrow X$

Ex)

$$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1, f(4)=4, f(5)=6, f(6)=5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$



실패...

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

6  
(4)

1

1

1



실패...

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

6  
(4)

2

2

2



실패...

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

6  
(4)

3

3

3



# 성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

6  
(4)

4

4



실패...

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

6  
(4)

5

5

5



성공!

1  
(2)

2  
(3)

3  
(5)

4  
(6)

5  
(1)

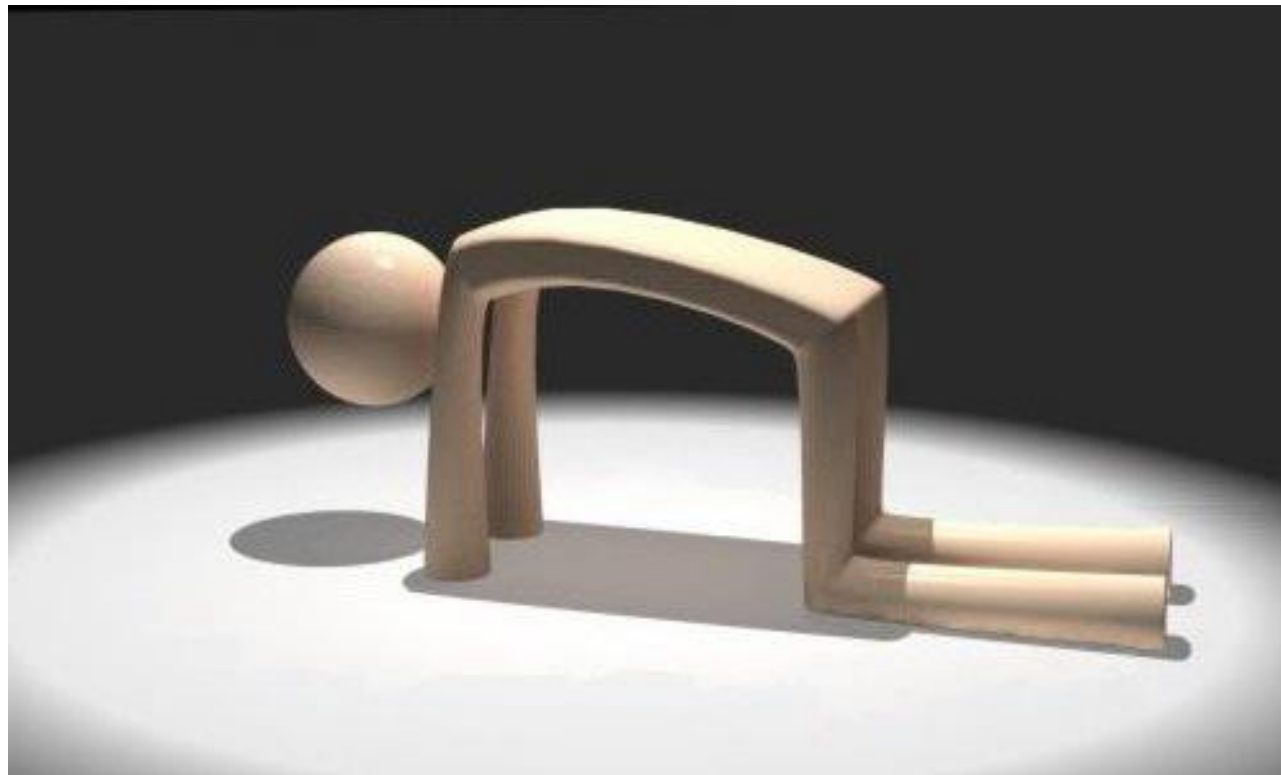
6  
(4)

6

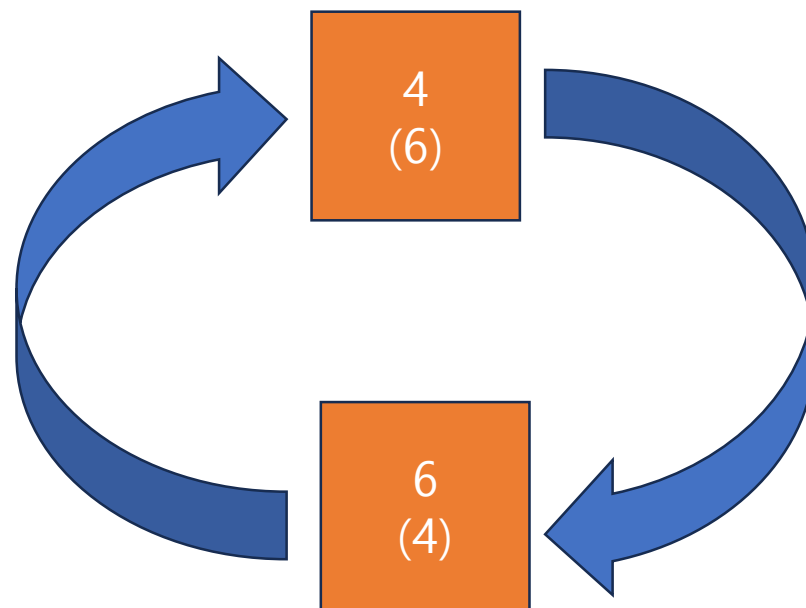
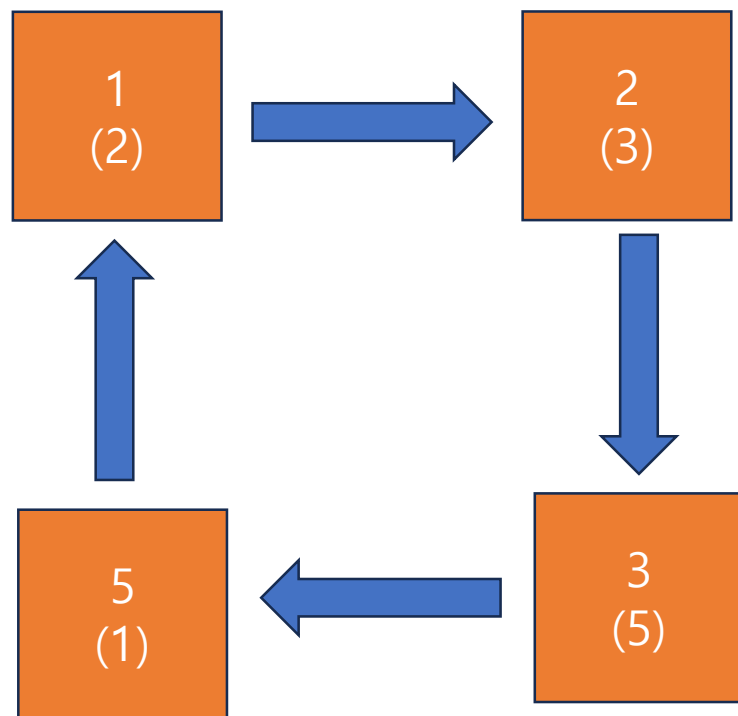
6



우린 죽었다...







$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



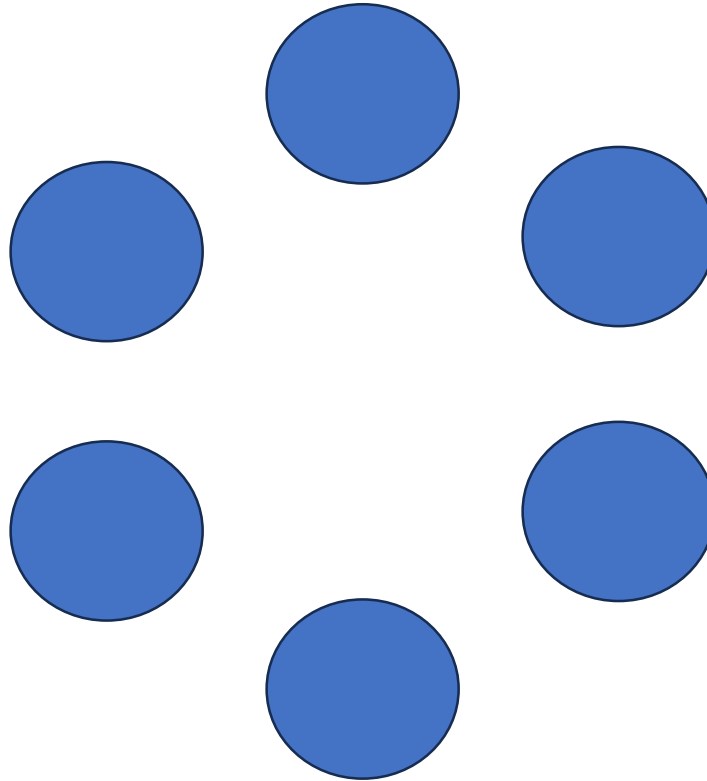
# 이 방법을 사용했을 때 성공할 확률

가장 긴 Orbit의 길이가 4개 이상이 되면 안됨.

1- (Orbit의 길이가 6일 확률)-(Orbit의 길이가 5일 확률)-(Orbit의 길이가 4일 확률)=p



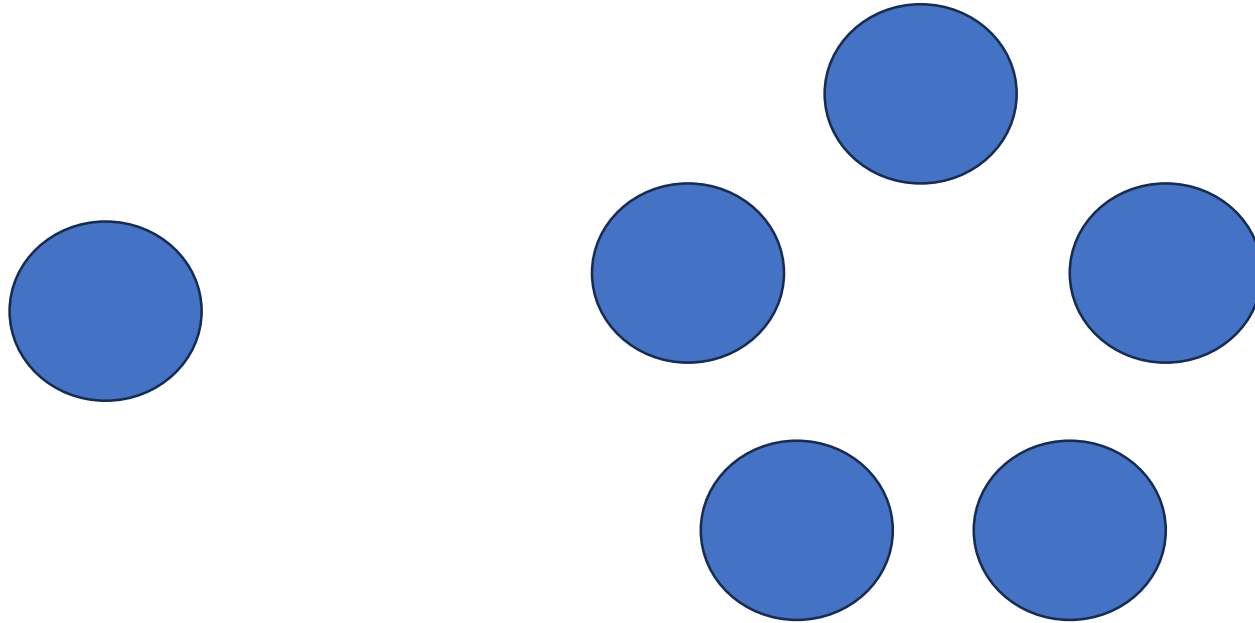
# Orbit의 길이가 6일 때



- 모든 경우의 수  $6!$
- Orbit의 길이가 6인 경우의 수  $6!/6$
- 확률은  $1/6$



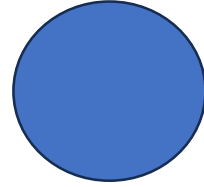
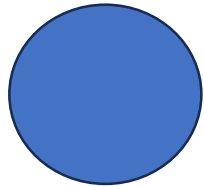
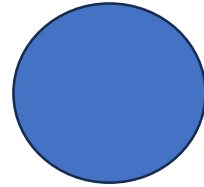
# Orbit의 길이가 5일 때



- 모든 경우의 수  $6!$
- Orbit의 길이가 5인 경우의 수  $6!/5$
- 확률은  $1/5$



# Orbit의 길이가 4일 때



- 모든 경우의 수  $6!$

- Orbit의 길이가 4인 경우의 수  $6!/4$

- 확률은  $1/4$



# 이 방법을 사용했을 때 성공할 확률

Orbit의 길이가 4개 이상이 되면 안됨.

1- (Orbit의 길이가 6일 확률)-(Orbit의 길이가 5일 확률)-(Orbit의 길이가 4일 확률)=p

$$= 1-(1/4+1/5+1/6)=23/60=38.33\%$$



# 일반화

- 짝수  $2n$ 명의 죄수가 있을 때, 이 방법을 사용하면 모두가 성공할 확률 =

$$1 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Ex) 100명의 죄수가 있으면 확률 =

$$1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 31\%$$



죄수의 수가 무한대까지 커지면?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n+1}^{2n} \frac{1}{x} dx =$$
$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(2n) - \log(n+1)) = 1 - \log 2 \approx 30.7\%$$



감사합니다