현대물리에서의 수학

아인슈타인 상대성이론 이후 현대물리는 상당히 기하학적인 이론체계를 가지게 되었다. 아인슈타인의 상대성이론에서는 공간에서의 물질, 즉 질량 또는 에너지의 분포가 공간을 휘게 하고, 그 공간의 곡률이 다시 물질의 운동을 결정하는데, 여기서 공간을 분석하는 기하학은 모두 리만기하학을 이용한 Einstein field equations로 기술된다. 상대성이론 말고도 Maxwell's equations에 기반한 전자기학 또한 field로 기술되는 전자기학 또한 마찬가지로 넓은 의미의 기하학을 기반하는 이론체계라고 볼 수 있다. 물리학자들은 이 Maxwell's equations이 U(1)-Gauge Symmetry를 가진다는 것을 발견했는데, 이 관점에서 보면 전자기장은 Gauge potential의 곡률로 해석할 수 있다. 입자물리의 standard model 역시 전자기학, 약력, 그리고 강력을 각각 U(1), SU(2), SU(3) Gauge Theory로 서술한다. 중력까지 합쳐서 통일된 물리이론을 만드려는 String Theory 역시 Gauge Theory를 사용한다.
Gauge Theory는 수학에서의 Fibre bundle, 특히 Principal bundle의 개념을 토대로 한다. 즉, Manifold에 대한 이론이다. Manifold는 Locally하게 Euclidean space와 Homeomorphic 한 공간들을 총칭하므로, 물리학에서 물체의 운동을 Euclidean space에서 자연스럽게 부여할 수 있는 몇 개의 매개변수로 표현가능하다. 물리에서는 기본적으로 모든 운동을 미분가능하다고 가정하므로 Differentiable Manifold만을 다룬다.
한편, 두 Manifold의 product는 자명히 Manifold인데, Fibre bundle이란 Locally하게 두 Manifold의 product와 Homeomorphic 한 공간들로 정의된다. 직관적인 예시를 들자면, 지구 표면상의 바람을 생각해볼 수 있다. 모든 지구 표면 위의 점에 바람의 방향을 모두 모으면, 지구 표면을 Base space, 바람의 방향을 Fibre로 하는 Fibre bundle가 된다. 이렇게 두 Manifold의 곱은 자명히 Fibre bundle가 된다. Locally하게만 두 Manifold의 product로 표현되고, Globally하게는 두 Manifold의 product로 표현되지 않는 대표적인 예시는 Möbius strip이 있다. 즉, 서로 같은 Base space와 Fibre이 주어지더라도 서로 다른 Topology를 가지는 Fibre bundle이 얼마든지 존재할 수 있다. 그래서 Fibre bundle를 이해할 때에는 두 space의 Skew product로 생각하는 것이 가장 바람직할 것이다.
Principal bundle은 Fibre bundle 중에서도 Fibre가 Lie group인 것을 말한다. Lie group은 group의 구조를 가지고 있는 Manifold를 의미하는데, Gauge Theory에서 연속적인 대칭성은 모두 Lie group으로 표현되므로, Principal bundle을 기반으로 이론이 전개된다. Connection은 Principal bundle 위에서 정의된 1-form인데, 간단히 말해 Parallel transport에 대한 정보를 가진 구조이다. 아까와 같이 Möbius strip를 생각해보면, Möbius strip 위의 한 점에서 원을 따라 Parallel transport하면 그 점이 어디로 갈지 상상해볼 수 있다.
우리가 다루는 공간이 그냥 공간이 아니라 Skew space인 만큼 Base space에서 Parallel transport을 시켜서 다시 원래 위치로 돌아온다고 해서 딸려있는 Lie group의 원소가 처음과 같은 것은 아니다. 이런 현상을 Holonomy라 한다. 사실 이런 상황은 우리가 곡면기하학에서도 많이 접한 바 있다. 구 위에 Tangent vector가 있을 때, 그것을 Transport 시켜 다

시 원래 위치로 돌아오면 Tangent vector가 약간 회전해있다. 이는 우리 공간이 Curvature을 가지기 때문에 그렇다. Principal bundle에서 Connection이 주어져있을 때, Curvature는 Connection의 미분으로 정의된다. Connection이 1-form이었으므로, Curvature는 2-form인 것이다. 즉, Connection을 A라 하면, Curvature는 $F=DA=dA+A\wedge A$로 표현된다.

Principal bundle에 Section이 주어져 있으면, Connection과 Curvature를 그 Section을 따라 Pull-back을 취해서 Base space의 1-form과 2-form으로 볼 수 있다. 그런데 Principal bundle이 Trivial bundle이 아니면, Section이 Globally하게 정의될 수 없으므로, 이렇게 Base space로 Pull-back한 Connection과 Curvature는 Locally하게 정의된다. Gauge Theory에서는 그 Base space로 Pull-back한 Connection을 Gauge potential, Base space로 Pull-back한 Curvature를 Field strength라 한다. 그리고 이것들은 Base space에서 Locally하게 정의되므로 이미 정의된 것을 다른 곳에서 정의된 것으로 옮겨가려면 일종의 좌표변환이 필요한데 이를 Gauge transformation이라 한다.

아까 위에서 전자기이론이 Gauge Theory로 표현가능하다고 했는데, 그런 관점에서 보면, A는 Vector potential이 되고, F는 Electromagnetic tensor가 된다. 모든 Curvature는 $DF=DDA=0$를 만족하는데 이는 Bianchi identity이다. 전자기이론에서는 Maxwell's equations 가운데 두 개의 Homogeneous equation에 해당된다.