

# Transpose of a Linear Map

Dohyeong Han

November 1, 2022

# Notation

Finite dimensional vector space  $V, W, U$   
 $\dim(V)=n, \dim(W)=m, \dim(U)=r$

- $\mathfrak{B}$  is a fixed basis of  $V$
- $\mathfrak{C}$  is a fixed basis of  $W$
- $\mathfrak{D}$  is a fixed basis of  $U$

# Notation

When  $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  and  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$

- $[v]_{\mathfrak{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$
- $[L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = ([L(v_1)]_{\mathfrak{C}}, \dots, [L(v_n)]_{\mathfrak{C}})$

$\mathcal{L}(V, W)$  is the set of all linear transformation mapping a vector space  $V$  into a vector space  $W$

# 선형대수학의 기본정리

함수  $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathfrak{M}_{m,n}(F) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ ,  $\Psi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathfrak{M}_{m,n}(F)$  를

- $[\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}(A)(v)]_{\mathcal{C}} = A[v]_{\mathfrak{B}}, (A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F), v \in V)$
- $\Psi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}(L) = [L]_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}, (L \in \mathcal{L}(V, W))$

로 정의하면,

(가)  $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}$  와  $\Psi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}$  는 isomorphism이고,  $(\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}})^{-1} = \Psi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}$

(나)  $B \in \mathfrak{M}_{r,m}(F)$   $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F)$

$$\Phi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(B) \circ \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}(A) = \Phi_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{B}}(BA)$$

가 성립하고,  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  이고  $M \in \mathcal{L}(W, U)$  이면,

$$\Psi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(M) \cdot \Psi_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}(L) = \Psi_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{B}}(M \circ L), [M]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} \cdot [M]_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}} = [M \circ L]_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{B}}$$

# 우리의 철학

- 우리의 철학1 : 같은 것은 같다(isomorphism의 철학)
- 우리의 철학2 : 같은 것은 정말로 같다(identification의 철학)
- 우리의 철학3 : 행렬과 선형사상은 같다

# Change of Basis

Vector space  $V, W$ 의 다른 basis  $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ 을 선택하면 다음 관계식을 만족한다.

- $[L]_{\mathfrak{C}'}^{\mathfrak{B}'} = [I_W]_{\mathfrak{C}'}^{\mathfrak{C}} [L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} [I_V]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$

- $[L_A]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{F}} \cdot [L_A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot [I]_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{F}} \cdot A \cdot [I]_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}}$

(단,  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 는  $F^n, F^m$ 의 표준기저)

# Bilinear Form

$V_1, V_2$ 가 vector space일 때, 함수  $\mu : V_1 \times V_2 \rightarrow F$ 가 다음 조건을 만족하면 bilinear form이라고 부른다.

- $\mu(v_1 + v_2, w) = \mu(v_1, w) + \mu(v_2, w)$
- $\mu(av, w) = a\mu(v, w)$
- $\mu(v, w_1 + w_2) = \mu(v, w_1) + \mu(v, w_2)$
- $\mu(v, aw) = a\mu(v, w)$

# Bilinear Form

$B: V \times V \rightarrow F$ 가 bilinear form,  $\mathfrak{B}$ 가  $V$ 의 ordered basis이고,  
 $[B]_{\mathfrak{B}} = (B(v_i, v_j))_{n \times n}$ 이면  $B(v, w) = ([v]_{\mathfrak{B}})^t \cdot [B]_{\mathfrak{B}} \cdot [w]_{\mathfrak{B}}$ 이다.  
우리는  $[B]_{\mathfrak{B}}$ 를  $B$ 의 행렬이라고 부른다.



$J \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$  일 때  $F^n$  의 bilinear form  $B_{\mathcal{E}}^J : F^n \times F^n \rightarrow F$  를

$$B_{\mathcal{E}}^J(X, Y) = X^t \cdot J \cdot Y$$

로 정의하자. 이 때  $[B_{\mathcal{E}}^J]_{\mathcal{E}} = J$  이다. 만일  $J = I$  이면  $B_{\mathcal{E}}^J(X, Y)$  는  $F^n$  의 보통내적이 된다.

# Notation

$J \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$  일 때  $V$ 의 bilinear form  $B_{\mathfrak{B}}^J : V \times V \rightarrow F$ 를

$$B_{\mathfrak{B}}^J(X, Y) = X^t \cdot J \cdot Y$$

로 정의하자. 이 때  $[B_{\mathfrak{B}}^J]_{\mathfrak{B}} = J$ 이다.

# Notation

$\mathfrak{Bil}(V) = \{B: V \times V \rightarrow F: B \text{ is bilinear}\}$  ,

$(B + C)(v, w) = B(v, w) + C(v, w), (aB)(v, w) = aB(v, w)$

이면  $\mathfrak{Bil}(V)$  is vector space가 된다

# Notation

- $v, w \in V$ 일 때,  $B(v, w) = 0$ 이면  $v \perp w$ 로 표기하고,  $v, w$ 는 서로 수직이다 라고 한다.
- $S^\perp = \{v \in V : B(w, v) = 0 \text{ for all } w \in S\}$
- 우리는  $V^\perp = 0$ 인 경우  $B$ 를 non-degenerate bilinear form 이라고 한다.

# Bilinear Form의 기본정리

함수  $\Omega_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{Bil}(V) \rightarrow \mathfrak{M}_{n,n}(F)$  를

$$\Omega_{\mathfrak{B}}(B) = [B]_{\mathfrak{B}}$$

로 정의하면  $\Omega_{\mathfrak{B}}$  는 vector space isomorphism이다.

# Non-degenerate bilinear form

$\mathfrak{B}$ 가 유한차원 vector space  $V$ 의 basis일 때, 다음은 동치이다.

- (1)  $B$ 는 non-degenerate.
- (2)  $\det([B]_{\mathfrak{B}}) \neq 0$

# Dual Space

$V$ 가  $F$ -vector space일 때,  $V^* = \mathfrak{L}(V, F)$ 이면  $V^*$ 는 vector space가 되고,  $V^*$ 를  $V$ 의 dual space라고 한다.

$V^{**} = \mathfrak{L}(V^*, F)$ 이면  $V^{**}$ 를  $V$ 의 double dual이라고 한다.

$\mathfrak{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ ,  $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ 이면  $\mathfrak{B}^*$ 는  $V^*$ 의 basis가 되고, 이 basis를 dual basis라고 부른다.

# Natural Isomorphism

차원이 같은 두 vector space은 서로 isomorphic한데, 이 때의 isomorphism 은 basis의 선택에 의존한다. 따라서 identify에 이용하기에는 약간 무리가 있다.

만일 두 vector space사이에 basis의 선택에 무관한 'natural isomorphism'이 존재한다면 우리는 정말 아무 거리낌없이 두 vector space를 identify할 수 있다.



# Natural Isomorphism for Double Dual

$V$ 가 finite dimensional 일 때, 함수  $\psi^V : V \rightarrow V^{**}$  를

$$\psi^V(v)(f) = f(v)$$

로 정의하면  $\psi^V$  는 vector space isomorphism이고, 또한 natural isomorphism이다. 따라서 우리는  $\psi^V$  을 통해  $V$  과  $V^{**}$  를 identify 할 수 있다.

# Dual Map

$L : V \rightarrow W$ 가 linear map일 때, linear map  $L^* : W^* \rightarrow V^*$ 를

$$L^*(g) = g \circ L$$

로 정의하고, 이 linear map을  $L$ 의 dual map이라고 부른다.  
이때 commutative diagram은 다음과 같다

# Matrix Expression of Dual Map

$\mathfrak{B}$ 는  $V$ 의 기저이고,  $\mathfrak{C}$ 는  $W$ 의 기저라고 할 때,  
 $[L^*]_{\mathfrak{B}^*}^{\mathfrak{C}^*} = ([L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}})^t$ 이고, 따라서 행렬의 transpose는 linear map의 dual에 대응한다.

# B-Identification

함수  $\varphi_B^V : V \rightarrow V^*$  를  $\varphi_B^V(v)(w) = B(w, v)$  로 정의하면  $\varphi_B^V$  는 linear map이다. 그리고 다음 두 조건은 동치이다.

- (1)  $B$  는 non-degenerate
- (2)  $\varphi_B^V$  는 isomorphism

# B-Identification

$B$ 가 non-degenerate일 때, isomorphism  $\varphi_B^V$ 는 natural isomorphism이다. 따라서 이번에도  $\varphi_B^V$ 을 통해서  $V$ 와  $V^*$ 를 identify 할 수 있다. 우리는 이것을 B-Identification이라고 한다.

# Transpose Operator

$L \in \mathfrak{L}(V, W)$ 라고 하자. 이 때  $L$ 의 (B와 C에 관한) transpose map  $L^t \in \mathfrak{L}(W, V)$ 는  $L^t = L^*$ 로 정의된다.

식으로 표현하면  $L^t = (\varphi_B^V)^{-1} \circ L^* \circ \varphi_C^W$ 이다. 이 때 commutative diagram은 다음과 같다.

# Matrix expression of Transpose Operator

$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ 를 각각  $V, W$ 의 고정된 기저라고 하자.

$L \in \mathfrak{L}(V, W)$ 일 때,  $J_{\mathfrak{B}} = [B]_{\mathfrak{B}}, J_{\mathfrak{C}} = [C]_{\mathfrak{C}}$ 로 표기하면,

$$[L^t]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = (J_{\mathfrak{B}})^{-1}([L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}})^t J_{\mathfrak{C}}$$

이다. 특히  $V = W$ 이고,  $J = [B]_{\mathfrak{B}}$ 로 표기하면

$$[L^t]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = (J)^{-1}([L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}})^t J$$

이다.