1-(1) 두 무리수의 합과 곱은 무리수가 아닐 수 있다.

: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$.

1-(2) (무리수)$^{(\text{무리수})}$는 무리수가 아닐 수 있다.

: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$는 유리수이거나 무리수이다. 만약 전자라면 증명이 끝난다. 후자라고 하자.

그러면 $\left\{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=2\in\mathbb{Q}$이므로 증명이 끝난다.

2. π는 무리수이다. (By Mary Cartwright)

: $\pi=p/q$라 가정하자. (p,q는 서로소인 자연수) 그리고 $I_n(x):=\int_{-1}^{1}(1-y^2)^n\cos(xy)dy$.

x를 0이 아닌 양수로 고정하자. 그리고 부분적분을 두 번 하면,

$$\int_{-1}^{1}(1-y^2)^n\cos(xy)dy=\frac{\left[\sin(xy)(1-y^2)^n\right]_{-1}^{1}}{x}-\int_{-1}^{1}\frac{\sin(xy)}{x}n(1-y^2)(-2y)dy$$

$$=\frac{2n}{x}\int_{-1}^{1}\sin(xy)y(1-y^2)^{n-1}dy\ ,$$

$$\frac{2n}{x}\int_{-1}^{1}\sin(xy)y(1-y^2)^{n-1}dy=\frac{2n}{x}\left[-\frac{\cos(xy)y(1-y^2)^{n-1}}{x}\right]_{-1}^{1}$$

$$+\frac{2n}{x}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(xy)}{x}\left\{(1-y^2)^{n-1}-2(n-1)y^2(1-y^2)^{n-2}\right\}dy$$

$$=\frac{2n}{x^2}I_{n-1}(x)-\frac{4n(n-1)}{x^2}\int_{-1}^{1}\cos(xy)y^2(1-y^2)^{n-2}dy$$

이므로, $I_n(x)=\frac{2n}{x^2}I_{n-1}(x)-\frac{4n(n-1)}{x^2}\int_{-1}^{1}\cos(xy)y^2(1-y^2)^{n-2}dy$이다.

그런데 $-\int_{-1}^{1}\cos(xy)y^2(1-y^2)^{n-2}dy+I_{n-2}(x)=I_{n-1}(x)$이므로 이를 대입하여

$$I_n(x)=\frac{2n}{x^2}I_{n-1}(x)-\frac{4n(n-1)}{x^2}(I_{n-1}(x)-I_{n-2}(x))$$

$$=-\frac{2n(2n-1)}{x^2}I_{n-1}(x)+\frac{4n(n-1)}{x^2}I_{n-2}(x)$$ 를 얻을 수 있다.

마지막으로 $x^{2n+1}I_n(x)=J_n(x)$로 치환하여 위 식에 대입하면

$J_n(x)=-2n(2n-1)J_{n-1}(x)+x^2 4n(n-1)J_{n-2}(x)$라는 점화관계를 얻는다. (for $n\geq 2$)

이때 $J_0(x)=2\sin x$, $J_1(x)=-4x\cos x+4\sin x$이므로 수학적 귀납법을 이용하면

임의의 자연수 n에 대해 $J_n(x)=n!(P_n(x)\cos x+Q_n(x)\sin x)$를 만족하는 차수가 n이하인

두 정수계수 다항식 $P_n(x)$, $Q_n(x)$가 존재함을 알 수 있다. 이제 $x=\pi/2$를 대입하면

$\left(I_n(p/2q)p^{2n+1}/(2q)^{2n+1}\right)=n!P_n(p/2q) \Leftrightarrow (p^{2n+1}/n!)\cdot I_n(p/2q)=(2q)^{2n+1}P_n(p/2q)$이다.

그런데 $0<I_n(p/2q)\leq 2$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{p^{2n+1}}{n!}=0$이므로 적당한 n에 대해 좌변이 0과 1

사이의 값을 가지게끔 할 수 있는데, 이는 우변이 항상 정수인 것에 모순이다. ■

3. 대수적 수 (Algebraic Number) vs 초월수 (Transcendental Number)

대수적 수: 일차이상의 정수계수 다항식의 근이 될 수 있는 복소수
초월수: 대수적 수가 <u>아닌</u> 복소수, 즉, 일차이상의 정수계수 다항식의 근이 될 수 없는 복소수

ex) $\sqrt{2}$는 정수계수 다항식 x^2-2의 근 이므로 대수적 수이다.
e는 어떠한 정수계수 다항식의 근도 될 수 없으므로 초월수이다.

4. 초월수는 무리수이다.
: 임의의 유리수 p/q는 정수계수 다항식 $qx-p$의 근이므로 초월수는 유리수가 아니다.

5. 초월수인 실수의 존재성
: 실수는 uncountable이므로 대수적 수의 개수가 countable임을 보이면 충분하다.
$U_i=\{a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0 : a_0,a_1,\ldots,a_i\in\mathbb{Z}\text{ and }a_i\neq 0\}$으로 정의하면 임의의 대수적 수 α는, 어떤 $i\in\mathbb{N}$가 존재하여 U_i의 어떤 원소의 근이 되어야 한다. 따라서 대수적 수의 cardinality는 $U:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i$의 cardinality를 넘지 않는다. 각 $i\in\mathbb{N}$에 대해 U_i의 원소의 개수는 각 성분이 정수인 순서쌍 $(a_0,a_1,\ldots,a_i)$의 개수를 넘지 않으므로 countable개이다. 또한 각 $p(x)\in U_i$에 대해 $p(x)=0$의 서로 다른 근의 개수는 대수학의 기본정리에 의해 기껏해야 i개 이므로 U_i의 원소의 근이 될 수 있는 복소수의 개수는 역시 countable개이다. 마지막으로, countable set의 countable union 역시 countable이므로 U는 countable.■

6. e는 초월수이다. (By Herstein)
: $a_ne^n+\cdots+a_1e^1+a_0=0$인 $a_i\in\mathbb{Z}$들이 존재한다고 가정하자. 그리고 아래를 관찰하자.
임의의 m차 실계수 다항식 $f(x)$에 대해 $F(x)=f(x)+f^{(1)}(x)+\cdots+f^{(m)}(x)$로 두자.
그러면 $F'(x)=f^{(1)}(x)+\cdots+f^{(m)}(x)$ and $(e^x)'=e^x$ 이므로, $(F(x)e^{-x})=-e^{-x}f(x)$이다.
따라서 평균값의 정리에 의해 $\forall x_1,x_2\,(x_1<x_2)$,

$$F(x_2)e^{-x_2}-F(x_1)e^{-x_1}=-e^{-(x_1+\theta(x_2-x_1))}f(x_1+\theta(x_2-x_1))$$

$\Leftrightarrow$ $F(x_2)-F(x_1)e^{(x_2-x_1)}=-e^{(x_2-x_1)-\theta(x_2-x_1)}f(x_1+\theta(x_2-x_1))$인 $\theta\in(0,1)$가 존재한다.
이때 $x_2=k$, $x_1=0$을 대입하면 아래를 만족하는 $\theta_k\in(0,1)$을 얻는다. $(k=1,\ldots,n)$

$$\begin{aligned}
F(1)-F(0)e^1 &= -e^{(1-\theta_1)}f(\theta_1):=b_1\\
F(2)-F(0)e^2 &= -e^{2(1-\theta_2)}f(2\theta_2):=b_2\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots(\text{ㄱ})\\
F(n)-F(0)e^n &= -e^{n(1-\theta_n)}f(n\theta_n):=b_n
\end{aligned}$$

여기서 (ㄱ)의 i번째 변에 a_i를 곱하고 변변합하면,

$a_nF(n)+\cdots+a_1F(1)-F(0)(a_ne^n+\cdots+a_1e^1)=a_nb_n+\cdots+a_1b_1$이고 $a_ne^n+\cdots+a_1e^1=-a_0$ 이므로 $a_nF(n)+\cdots+a_1F(1)+a_0F(0)=a_nb_n+\cdots+a_1b_1\ \cdots$ (ㄴ).

이때 위 (ㄴ)의 관계는 임의의 실계수 다항식에 대해 성립해야 함에 주목하자.

이제 적당한 $f(x)$를 찾아서 위 (ㄴ)이 성립한다는 것에 모순을 보일 것이다.

소수는 무한하므로 $p>n$인 소수 p에 대해 (물론 n은 맨 첫 줄에서의 n이다.)

$$f(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p \text{로 두자.}$$

그러면 $i\geq p$일 때 $f^{(i)}(k)$는 p의 배수가 됨을 알 수 있다. $(k=0,1,\ldots,n)$

그리고 $k=1,\ldots,n$이면 이때 $f(x)$의 $x=k$의 중복도가 p이므로, $0\leq i\leq p-1$인 모든 i에 대해 $f^{(i)}(k)=0$이다. 이때 $F(k)=f(k)+\cdots+f^{(p-1)}(k)+f^{(p)}(k)+\cdots+f^{(np+p-1)}(k)$임을 생각하면 $F(k)$는 p의 배수가 되어야 함을 알 수 있다.

$k=0$일 때도 위와 비슷하게 $\forall i,(0\leq i\leq p-2)$ $f^{(i)}=0$이고 $f^{(p-1)}(0)$의 값은 f의 x^{p-1} 항의 계수에 $(p-1)!$을 곱한 값과 같으므로 $n!$이다. 그리고 $p>n$이므로 p는 $n!$의 약수가 아니어서 $f^{(p-1)}(0)$은 p의 배수가 아니다. 따라서 $F(0)$의 각 term 중 하나만 p의 배수가 아니므로 $F(0)$은 p의 배수가 아니다. 즉, (ㄴ)의 좌변은 정수이다.

한편, (ㄱ)에 주목하면 각 k에 대해,

$$\left|a_kb_k\right|\leq\left|a_k\right|\cdot e^{k(1-\theta_k)}\cdot\left|k\theta_k\right|^{p-1}\cdot\left|(1-k\theta_k)\cdots(n-k\theta_k)\right|^p\cdot 1/(p-1)!$$

$$\leq\left|a_k\right|e^nn^p(n!)^p/(p-1)! \text{ 이 성립하고 } \lim_{p\to\infty}\left(\left|a_k\right|e^nn^p(n!)^p\right)/(p-1)\neq 0 \text{ 이다.}$$

이때 (ㄴ)의 좌변이 정수이므로 우변도 정수여서 충분히 큰 소수 p에 대해 0이 된다.

그렇게 되면 (ㄴ)의 좌변은 p의 배수가 아닌데 우변은 p의 배수가 되어 모순이다.

이러한 모순은 e가 대수적 수라고 가정해 발생했으므로 귀류법에 의해 e는 초월수이다. ■

7. Gelfond-Schneider theorem

: a,b가 대수적 (복소)수이고, $a\neq 0,1$이며 b가 유리수가 아니라고 하자.
  그러면 a^b는 초월수이다.

ex) $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}=(-1)^i$ (적당한브랜치컷에서) 등은 모두 초월수이며 또한 무리수이다.

8. $e+\pi$와 $e\pi$ 중 적어도 하나 이상은 무리수이다.

: 이차다항식 $x^2-(e+\pi)x+e\pi=(x-e)(x-\pi)$을 생각하면 e,π가 모두 초월수이므로
  저 다항식은 유리계수 다항식이 아니어야 하기 때문에 성립한다.

But.. $e+\pi$가 유리수인지 무리수인지 우리는 알지 못한다..