Transpose of a Linear Map

Dohyeong Han

November 1, 2022

Notation

Finite dimensional vector space V, W, U
dim(V)=n, dim(W)=m, dim(U)=r

- $\mathfrak{B}$ is a fixed basis of V
- $\mathfrak{C}$ is a fixed basis of W
- $\mathfrak{D}$ is a fixed basis of U

Notation

When $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ and $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

- $[v]_{\mathfrak{B}} = (a_1, a_2, ..., a_n)^t$
- $[\mathrm{L}]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = ([L(v_1)]_{\mathfrak{C}}, ..., [L(v_n)]_{\mathfrak{C}})$

$\mathfrak{L}(V, W)$ is the set of all linear transformation mapping a vector space V into a vector space W

선형대수학의 기본정리

함수 $\Phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathfrak{M}_{m,n}(F) \to \mathfrak{L}(V,W)$, $\Psi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathfrak{L}(V,W) \to \mathfrak{M}_{m,n}(F)$ 를

- $[\Phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(A)(v)]_{\mathfrak{C}} = A[v]_{\mathfrak{B}}, (A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F), v \in V)$
- $\Psi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(L) = [L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}, (L \in \mathfrak{L}(V,W))$

로 정의하면,

(가) $\Phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$ 와 $\Psi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$ 는 isomorphism이고, $(\Phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}})^{-1} = \Psi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$

(나) $B \in \mathfrak{M}_{r,m}(F)$ 이고 $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(F)$ 이면

$$\Phi_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}}(B) \circ \Phi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(A) = \Phi_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}}(BA)$$

가 성립하고, $L \in \mathfrak{L}(V,W)$ 이고 $M \in \mathfrak{L}(W,U)$ 이면,

$$\Psi_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}}(M) \cdot \Psi_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(L) = \Psi_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}}(M \circ L), [M]_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}} \cdot [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [M \circ L]_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}}$$

우리의 철학

- 우리의 철학1 : 같은 것은 같다(isomorphism의 철학)
- 우리의 철학2 : 같은 것은 정말로 같다(identification의 철학)
- 우리의 철학3 : 행렬과 선형사상은 같다

Change of Basis

Vector space V, W의 다른 basis $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$을 선택하면 다음 관계식을 만족한다.

- $[L]_{\mathfrak{C}'}^{\mathfrak{B}'} = [I_W]_{\mathfrak{C}'}^{\mathfrak{C}} [L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} [I_V]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$
- $[L_A]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{F}} \cdot [L_A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot [I]_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{F}} \cdot A \cdot [I]_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}}$

(단, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$는 F^n, F^m의 표준기저)

Bilinear Form

V_1, V_2가 vector space일 때, 함수 $\mu : V_1 \times V_2 \to F$가 다음 조건을 만족하면 bilinear form이라고 부른다.

- $\mu(v_1 + v_2, w) = \mu(v_1, w) + \mu(v_2, w)$
- $\mu(av, w) = a\mu(v, w)$
- $\mu(v, w_1 + w_2) = \mu(v, w_1) + \mu(v, w_2)$
- $\mu(v, aw) = a\mu(v, w)$

Bilinear Form

$B : V \times V \to F$가 bilinear form, $\mathfrak{B}$가 V의 ordered basis이고,
$[B]_{\mathfrak{B}} = (B(v_i, v_j))_{n \times n}$이면 $B(v, w) = ([v]_{\mathfrak{B}})^t \cdot [B]_{\mathfrak{B}} \cdot [w]_{\mathfrak{B}}$이다.
우리는 $[B]_{\mathfrak{B}}$를 B의 행렬이라고 부른다.

Notation

$J \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 일 때 F^n 의 bilinear form $B^J_{\mathcal{E}} : F^n \times F^n \to F$ 를

$$B^J_{\mathcal{E}}(X, Y) = X^t \cdot J \cdot Y$$

로 정의하자. 이 때 $[B^J_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}} = J$ 이다. 만일 $J = I$ 이면 $B^J_{\mathcal{E}}(X, Y)$ 는 F^n 의 보통내적이 된다.

Notation

$J \in \mathfrak{M}_{n,n}(F)$일 때 V의 bilinear form $B^J_{\mathfrak{B}} : V \times V \to F$를

$$B^J_{\mathfrak{B}}(v, w) = ([v]_{\mathfrak{B}})^t \cdot J \cdot [w]_{\mathfrak{B}}$$

로 정의하자. 이 때 $[B^J_{\mathfrak{B}}]_{\mathfrak{B}} = J$이다.

Notation

$\mathfrak{Bil}(V) = \{B : V \times V \to F : B$는 bilinear$\}$,
$(B + C)(v, w) = B(v, w) + C(v, w), (aB)(v, w) = aB(v, w)$
이면 $\mathfrak{Bil}(V)$는 vector space가 된다

Notation

- $v, w \in V$일 때, $B(v, w) = 0$이면 $v \perp w$로 표기하고, v, w는 서로 수직이다 라고 한다.
- $S^{\perp} = \{v \in V : B(w, v) = 0 \text{ for all } w \in S\}$
- 우리는 $V^{\perp} = 0$인 경우 B를 non-degenerate bilinear form 이라고 한다.

Bilinear Form의 기본정리

함수 $\Omega_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{Bil}(V) \to \mathfrak{M}_{n,n}(F)$ 를

$$\Omega_{\mathfrak{B}}(B) = [B]_{\mathfrak{B}}$$

로 정의하면 $\Omega_{\mathfrak{B}}$ 는 vector space isomorphism 이다.

Non-degenerate bilinear form

$\mathfrak{B}$가 유한차원 vector space V의 basis일 때, 다음은 동치이다.

(1) B는 non-degenerate.
(2) $det([B]_{\mathfrak{B}}) \neq 0$

Dual Space

V가 F-vector space일 때, $V^* = \mathfrak{L}(V, F)$이면 V^*는 vector space 가 되고, V^*를 V의 dual space라고 한다.

$V^{**} = \mathfrak{L}(V^*, F)$이면 V^{**}를 V의 double dual이라고 한다.

$\mathfrak{B}^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$이면 $\mathfrak{B}^*$는 V^*의 basis가 되고, 이 basis를 dual basis라고 부른다.

Natural Isomorphism

차원이 같은 두 vector space은 서로 isomorphic한데, 이 때의 isomorphism 은 basis의 선택에 의존한다. 따라서 identify에 이용하기에는 약간 무리가 있다.

만일 두 vector space사이에 basis의 선택에 무관한 ’natural isomorphism’이 존재한다면 우리는 정말 아무 거리낌없이 두 vector space를 identify할 수 있다.

Natural Isomorphism for Double Dual

V가 finite dimensional 일 때, 함수 $\psi^V : V \to V^{**}$를

$$\psi^V(v)(f) = f(v)$$

로 정의하면 ψ^V는 vector space isomorphism이고, 또한 natural isomorphism이다. 따라서 우리는 ψ^V을 통해 V과 V^{**}를 identify 할 수 있다.

Dual Map

$L : V \to W$가 linear map일 때, linear map $L^* : W^* \to V^*$를

$$L^*(g) = g \circ L$$

로 정의하고, 이 linear map을 L의 dual map이라고 부른다.
이때 commutative diagram은 다음과 같다

Matrix Expression of Dual Map

$\mathfrak{B}$는 V의 기저이고, $\mathfrak{C}$는 W의 기저라고 할 때, $[L^*]_{\mathfrak{B}^*}^{\mathfrak{C}^*} = ([L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}})^t$이고, 따라서 행렬의 transpose는 linear map의 dual에 대응한다.

B-Identification

함수 $\varphi_B^V : V \to V^*$ 를 $\varphi_B^V(v)(w) = B(w, v)$ 로 정의하면 φ_B^V 는 linear map이다. 그리고 다음 두 조건은 동치이다.

(1) B는 non-degenerate
(2) φ_B^V 는 isomorphism

B-Identification

B가 non-degenerate일 때, isomorphism φ_B^V는 natural isomorphism 이다. 따라서 이번에도 φ_B^V을 통해서 V와 V^*를 identify 할 수 있다. 우리는 이것을 B-Identification이라고 한다.

Transpose Operator

$L \in \mathfrak{L}(V, W)$라고 하자. 이 때 L의 (B와 C에 관한) transpose map $L^t \in \mathfrak{L}(W, V)$는 $L^t = L^*$로 정의된다.

식으로 표현하면 $L^t = (\varphi_B^V)^{-1} \circ L^* \circ \varphi_C^W$이다. 이 때 commutative diagram은 다음과 같다.

Matrix expression of Transpose Operator

$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$를 각각 V, W의 고정된 기저라고 하자.
$L \in \mathfrak{L}(V, W)$일 때, $J_{\mathfrak{B}} = [B]_{\mathfrak{B}}, J_{\mathfrak{C}} = [C]_{\mathfrak{C}}$로 표기하면,

$$[L^t]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = (J_{\mathfrak{B}})^{-1}([L]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}})^t J_{\mathfrak{C}}$$

이다. 특히 $V = W$이고, $J = [B]_{\mathfrak{B}}$로 표기하면

$$[L^t]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = (J)^{-1}([L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}})^t J$$

이다.