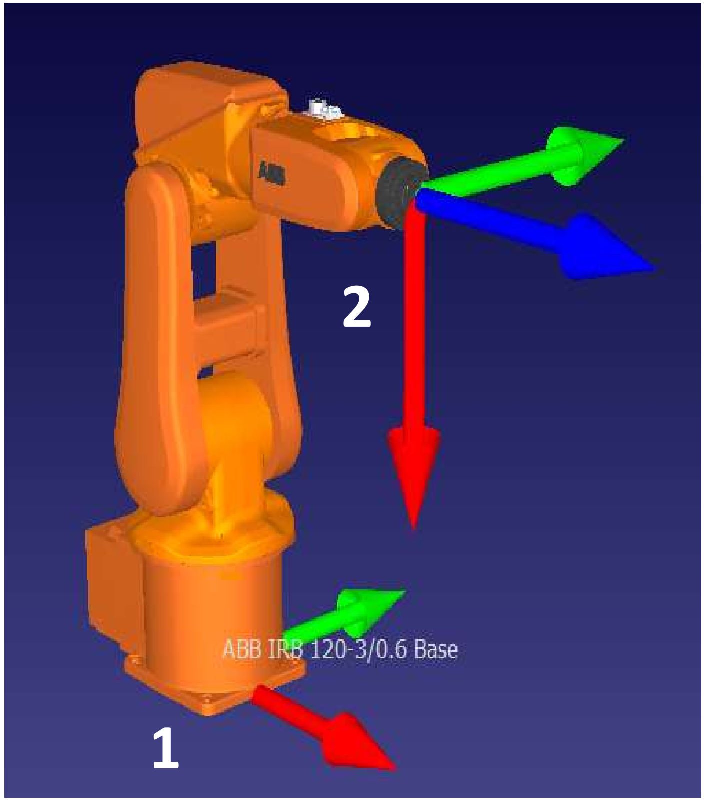
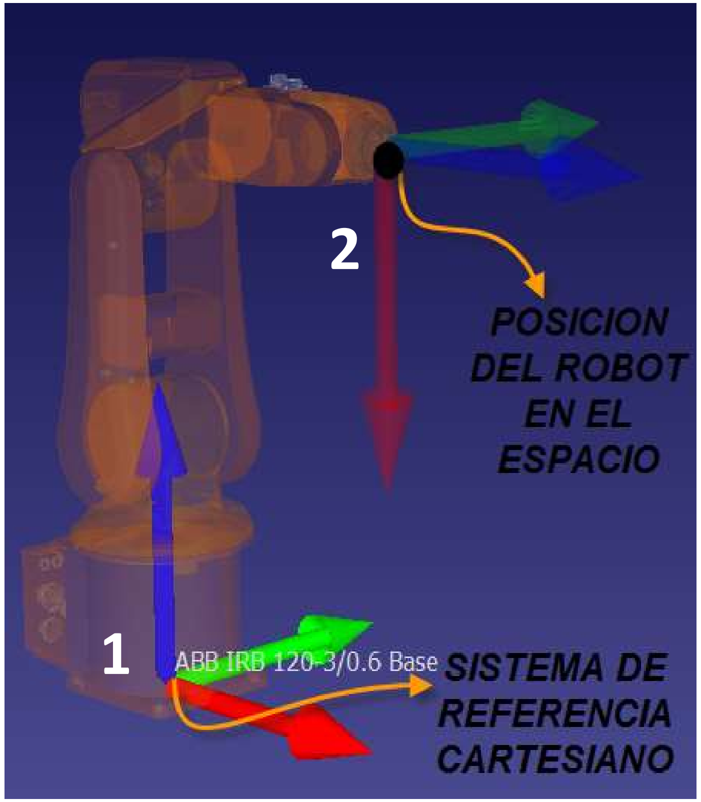
DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

- X: ROJO
- Y: VERDE
- Z: AZUL

1- Sistema de referencia WORLD (Mundo): Base del robot
2- Sistema de referencia TOOL (herramienta) o TCP

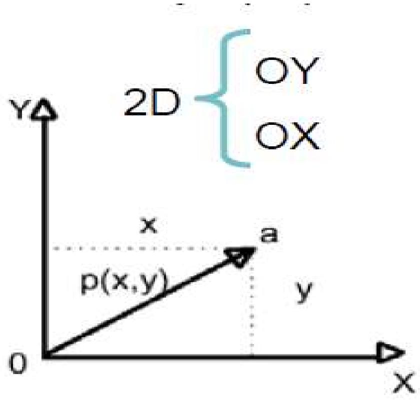




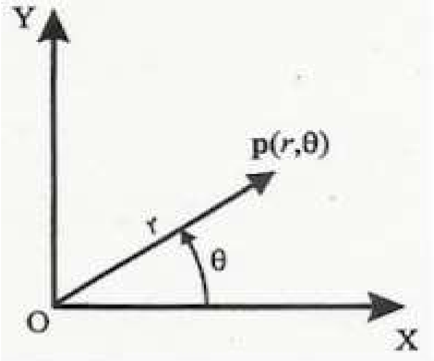
DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Sistema de 2 dimensiones:

- **Coordenadas cartesianas:** un punto en el espacio queda definido por las coordenadas **X** e **Y** respecto un origen de coordenadas



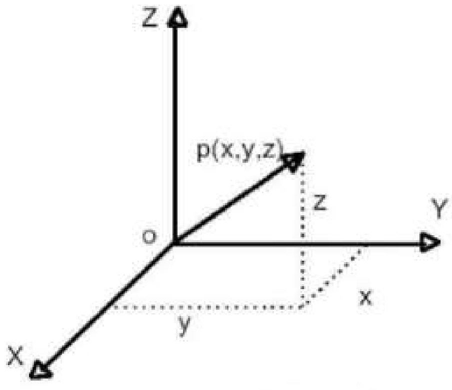
- **Coordenadas polares p(r,θ)**: En esta representación, r representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el extremo del vector p, mientras que θ es el ángulo que forma el vector p con el eje OX.



DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

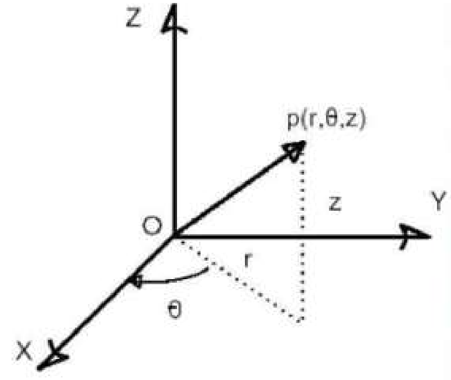
Sistema de 3 dimensiones

- **Coordenadas cartesianas: X,Y,Z.** un punto en el espacio con respecto a un sistema de referencia queda definido por las coordenadas X, Y, Z con respecto a éste.



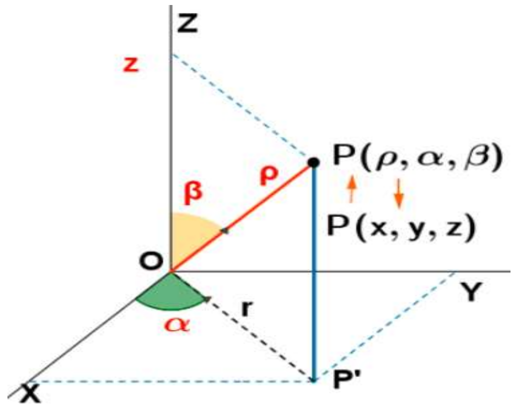
- **Coordenadas cilíndricas:**

el punto queda definido por coordenadas cilíndricas, las cuales están formada por un distancia r en un plano, la altura del punto, y 1 ángulo, tal y como se muestra en la siguiente figura.



DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

- **Coordenadas esféricas:** formadas por tres parámetros: la distancia r del punto al origen y dos ángulos con respecto a los ejes.

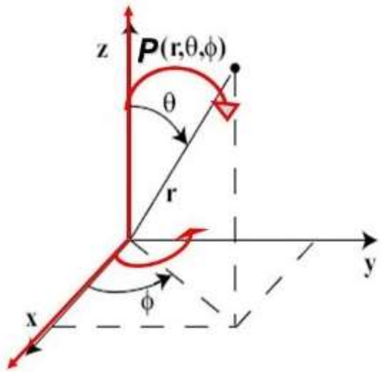


Matemáticamente es posible pasar de coordenadas cartesianas a esféricas mediante las siguientes expresiones.

relación entre coordenadas cartesianas y esféricas

$$\begin{cases} x = r\,sen(\theta)\,cos(\varphi) \\ y = r\,sen(\theta)\,sen(\varphi) \\ z = r\,cos(\theta) \end{cases}$$

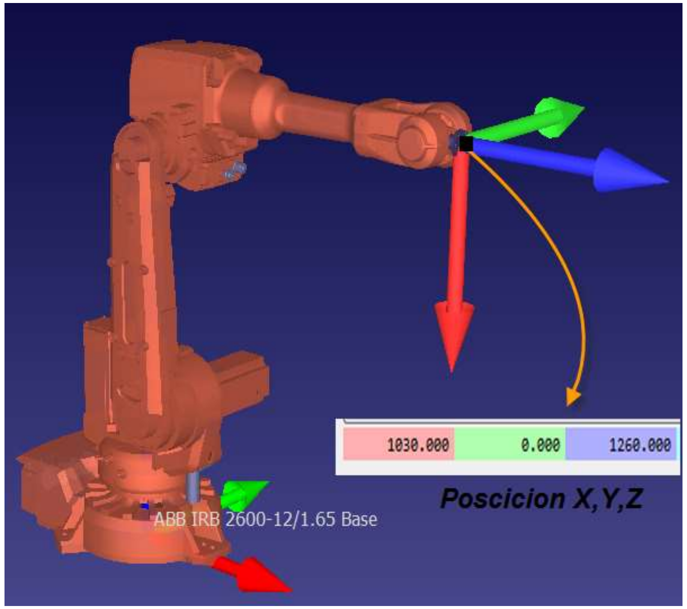
$$\begin{cases} tg(\varphi) = y/x \\ tg(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2}\,/\,z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

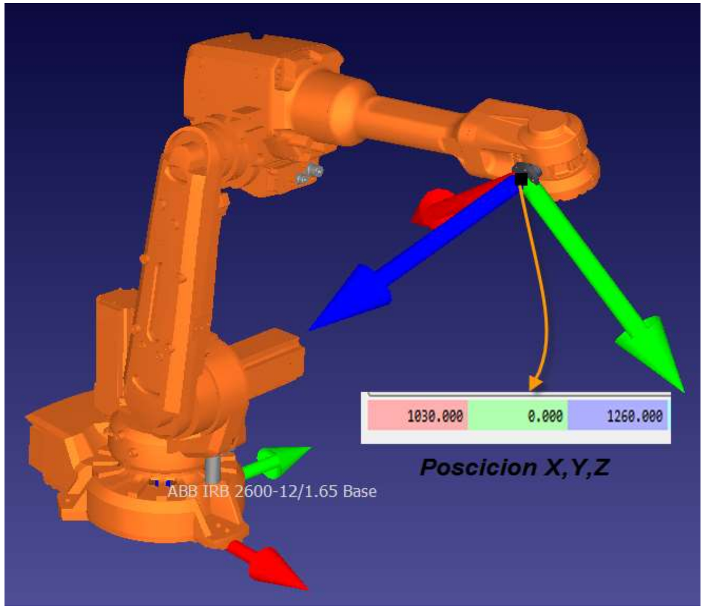


DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Definición de posición del robot:

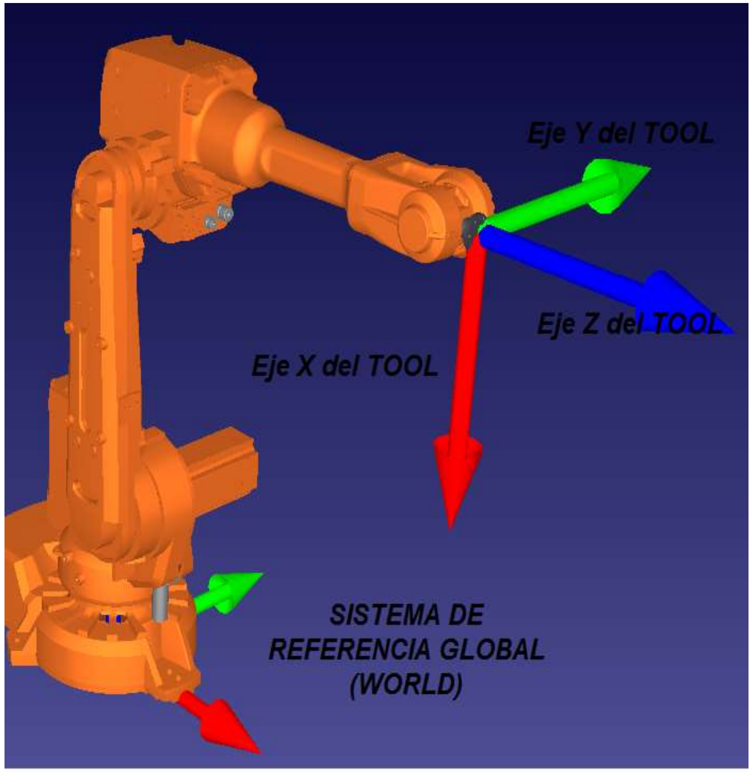
- **coordenadas X,Y,Z** del origen de la herramienta del robot respecto de un sistema de referencia
- **orientación de la herramienta:** orientación que adoptan los ejes del sistemas tool. El eje Z es perpendicular a la base del extremo, mientras que los ejes X e Y están en el propio plano de extremo.



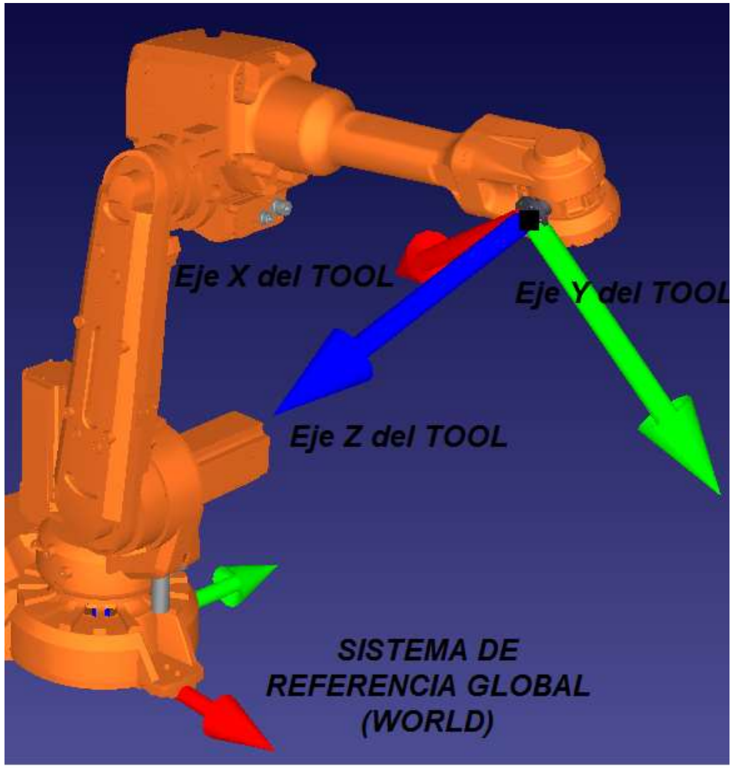


DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

En el ejemplo anterior, se muestran las coordenadas de *tool* y las orientaciones, todas referentes a WORLD



Coord. X,Y,Z tool	1030.000	0.000	1260.000
Orientacion Tool	0.000	90.000	0.000

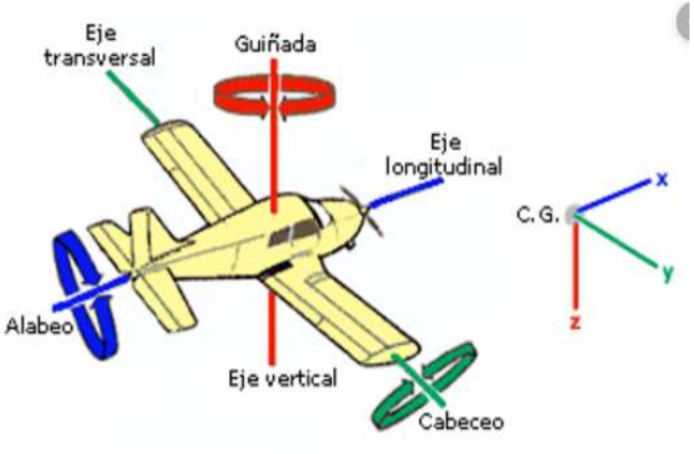


Coord. X,Y,Z tool	1030.000	0.000	1260.000
Orientacion Tool	156.629	30.071	-119.103

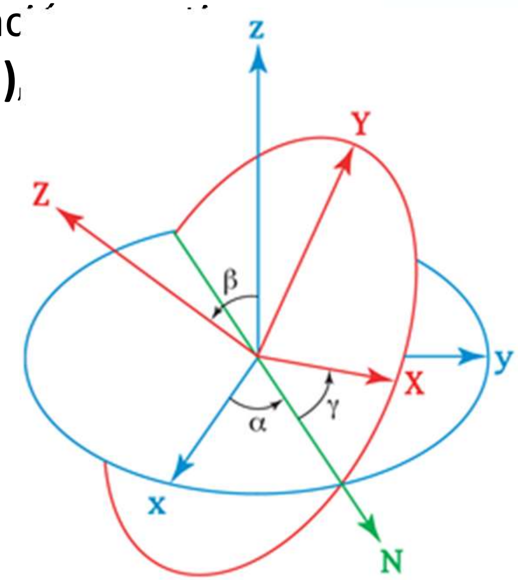
DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Para representar la orientación de *tool* se emplea el método de representación usado en aeronáutica. En campo de la aviación un aparato se representa mediante un eje de coordenadas que se desplaza y la posición de este eje (posición del avión) se represent
mediante 6 coordenadas:

- 3 coordenadas de posición X,Y,Z con respecto a un sistema de referencia global
- 3 coordenadas que indican la orientac
  el avión en el espacio: **YAW (guiñada)**,
  (alabeo) y PITCH (cabeceo).

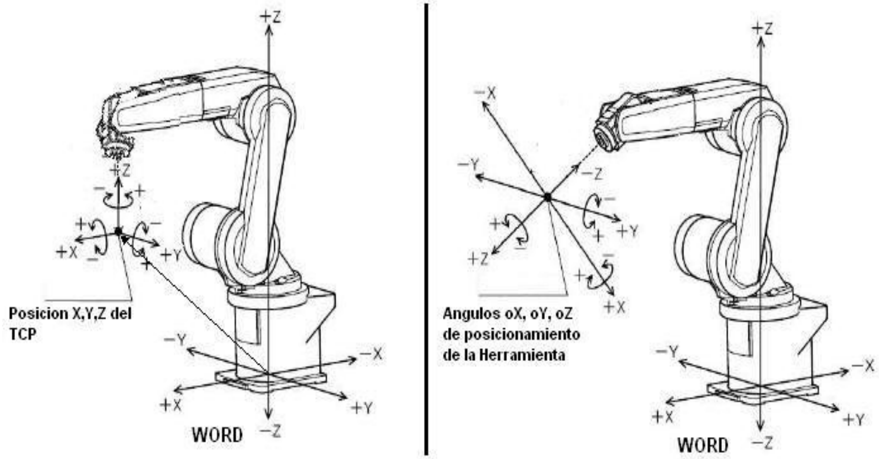


Los ángulos que determinan la orientación de un objeto se les denomina **ángulos de Euler.**



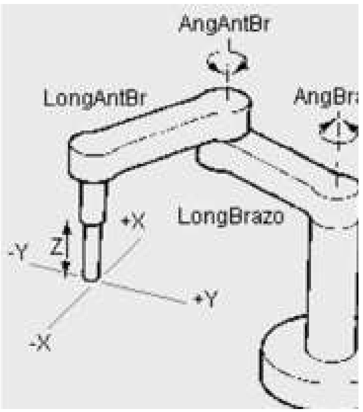
DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Un punto destino (*target*) en el espacio estará formado por las posiciones X,Y,Z del sistema punto y por la orientación de éste con respecto al sistema del robot.



En un robot de 6 ejes, 6 coordenadas:

- X,Y,Z
- Giros sobre los ejes RX, RY y RZ

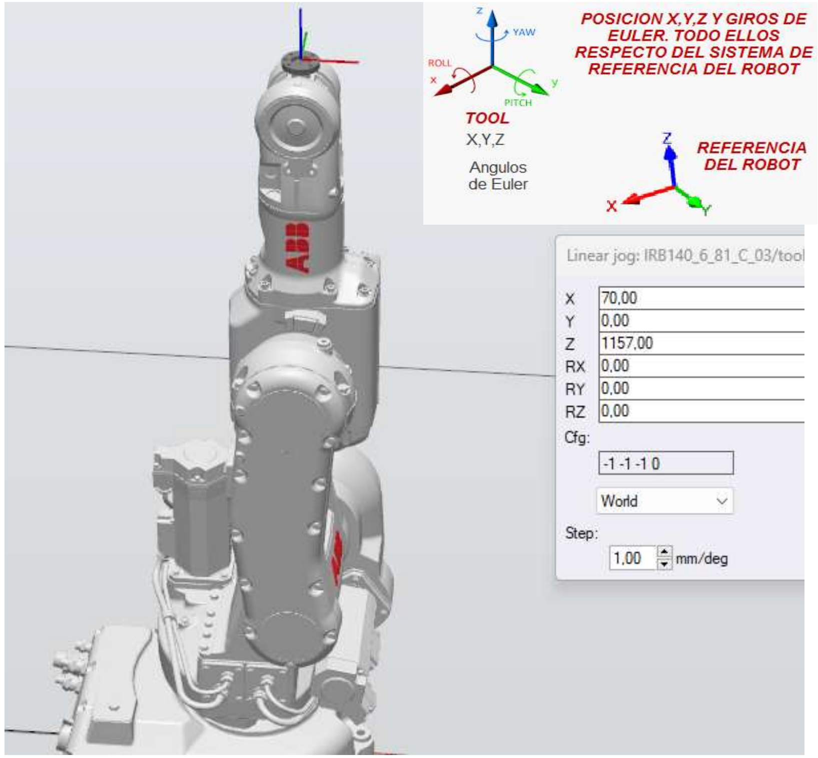


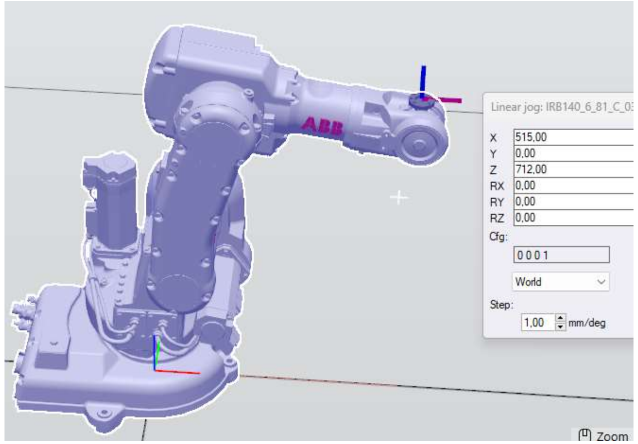
En un robot SCARA, 4 coordenadas:

- X,Y,Z
- Giro sobre Z

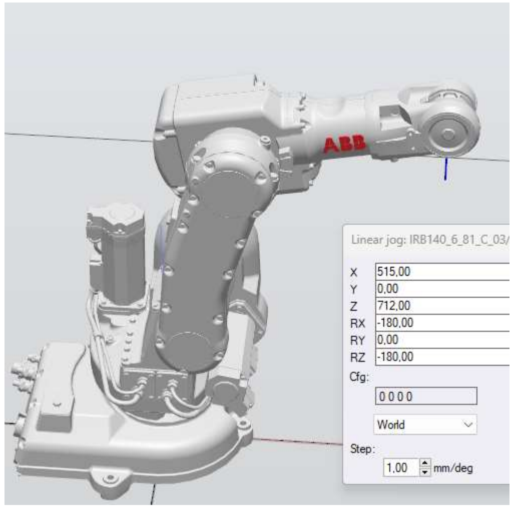
DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Por ejemplo, si ubicamos un robot de 6 ejes de tal manera que los ángulos de Euler de sus sistema *tool* sean 0, todos sus ejes serán paralelos a los ejes del sistema de referencia del robot, tal y como se ve en la siguiente figura.





Ubicación del sistema *tool* en la posición X,Y,Z (515,0,712), con orientación de 0 grados



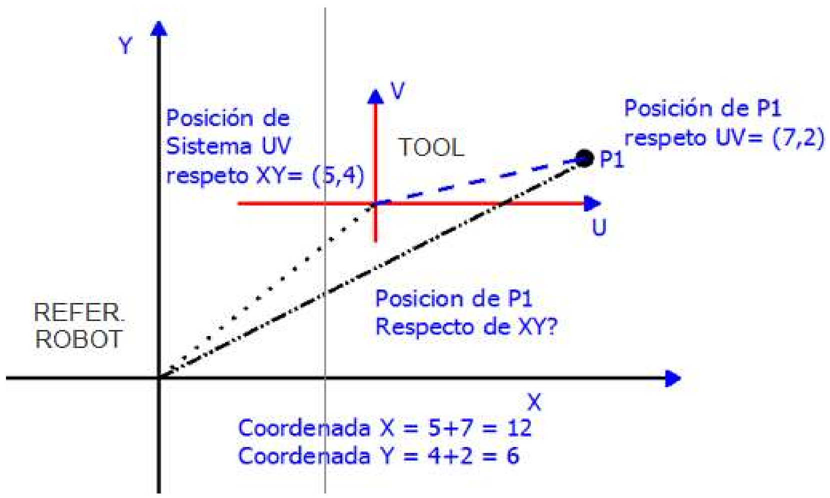
Ubicación del sistema *tool* en la posición X,Y,Z (515,0,712), con orientación de 180 grados

DEFINICION DE PUNTO EN EL ESPACIO

Si se tiene un punto en el espacio y las coordenadas respecto del sistema ***tool*** es posible obtener las coordenadas respecto el sistema de referencia del robot ***word*.**

Matemáticamente, para hacer este cálculo, se emplean matrices de rotación.

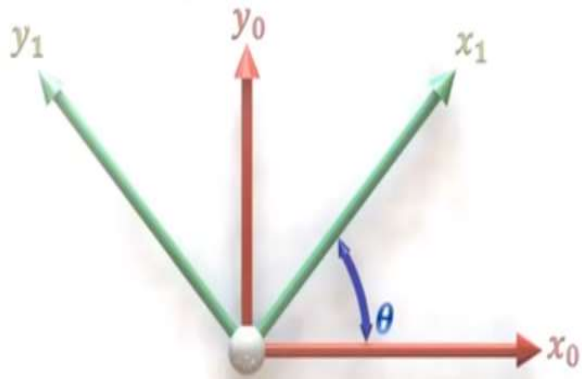
Simplificando, en este caso 2D, los ejes son paralelos y el cálculo es muy sencillo: solo hay que sumar las distancias a las coordenadas X e Y.



Hacer un cambio de sistema de coordenadas en 3D y obtener las coordenadas puede representar realizar cálculo complejos

MATRIZ DE ROTACION

Una matriz de rotación en un sistema 2D define el giro de una sistema X-Y respecto de otro sistema que esta fijo. En este caso giro del sistema de referencia respecto del fijo vendrá dada por la expresión.

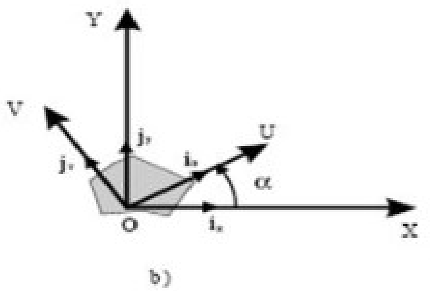


$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Si se tiene un punto cuyas coordenadas están referidas respecto un **sistema de referencia rotado** respecto uno fijo, mediante una sencilla operación matricial obtendremos estas coordenadas respecto el sistema de referencia fijo.

MATRIZ DE ROTACION

Tenemos dos sistemas de referencia en el mismo punto de origen y un punto X,Y, si giramos uno de los dos sistemas "llevándose" consigo el punto, si queremos calcular las nuevas coordenadas del punto con respecto al sistema que ha mantenido su posición tendremos que aplicar calculo matricial, en concreto una matriz de rotación.



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u cos\alpha - p_v sin\alpha \\ p_u sin\alpha + p_v cos\alpha \end{pmatrix}}$$

MATRIZ DE ROTACION

Ejemplo

Suponemos un sistema 2D *(u,v)* rotado α respecto un fijo *(x,y)*.
Encontrar las coordenadas *(u,v)=(1,2)* respecto el sistema girado*:*

- $\boldsymbol{\alpha}$ **=45º**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

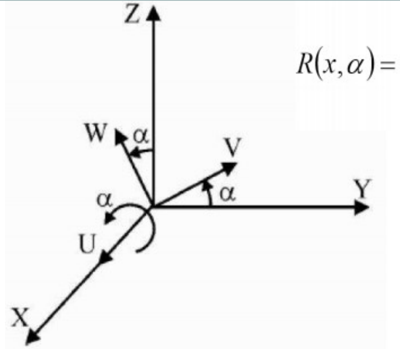
(x,y)=(-0.7071,2.1213)

- $\boldsymbol{\alpha = 90º}$

(x,y)=(-2,1)

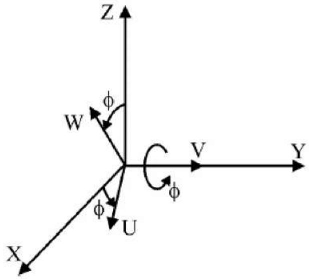
MATRIZ DE ROTACION

Rotación alrededor del eje X



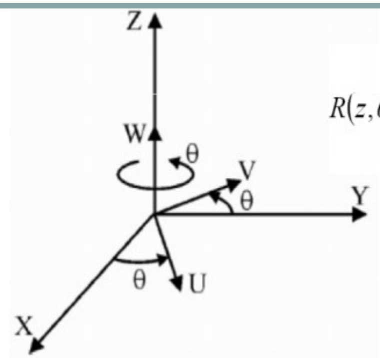
$$R(x,\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -sen(\alpha)\\ 0 & sen(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

Rotación alrededor del eje Y



$$\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix}$$

Rotación alrededor del eje Z



$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sen(\theta) & 0\\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ROTACION

Ejemplo

Suponemos un sistema 3D *(u,v,w)* rotado α respecto x en el sistema fijo *(x,y,z)*.
Encontrar las coordenadas *(u,v,w)=(1,2)* respecto el sistema girado*:*

- $\boldsymbol{\alpha = 45º}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(x,y,z)=(1, -0.7071, 3.54)

$$\vec{P}_{xyz} = R\left(y,45^0\right)\vec{P}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.828 \\ 2 \\ 1.414 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_{xyz} = R\left(z,90^0\right)\vec{P}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ROTACION

Si combinamos los tres giros en una sola matriz, obtendremos la expresión.

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta C\alpha + C\theta S\phi S\alpha & S\theta S\alpha + C\theta S\phi C\alpha \\ S\theta C\phi & C\theta C\alpha + S\theta S\phi S\alpha & -C\theta S\alpha + S\theta S\phi C\alpha \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\phi C\alpha \end{bmatrix}$$

C -> cos
S -> sin

MATRIZ DE ROTACION

Una matriz de rotación permite definir el giro de un sistema de referencia con respecto a otro y ofrece una herramienta matemática para calcular las coordenadas de los puntos respecto del sistema fijo.

Algunas equivalencias entre rotaciones y su matrices de rotación son:

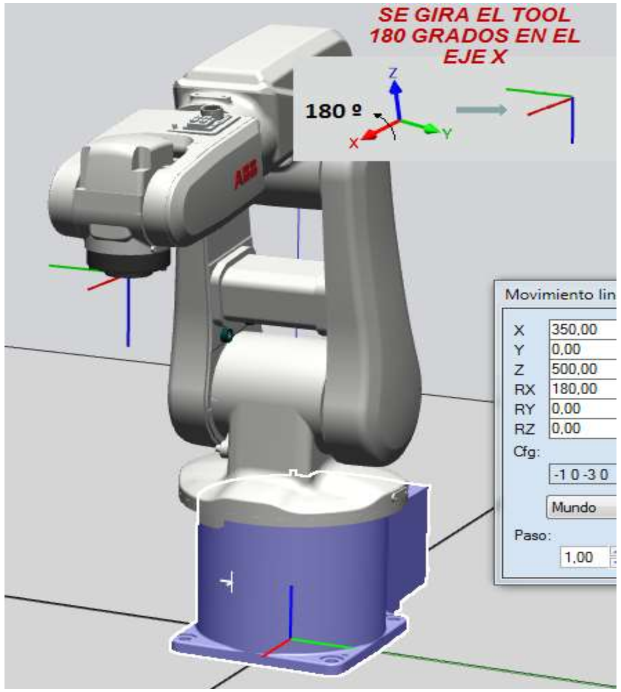
RX: 0º
RY: 0º
RZ: 0º

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RX: 180º
RY: 0º
RZ: 0º

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ROTACION



El Giro del Sistema *tool* respecto del Sistema de referencia del Robot es:

RX: 180º RY: 0º RZ: 0º

La expresión matricial es:

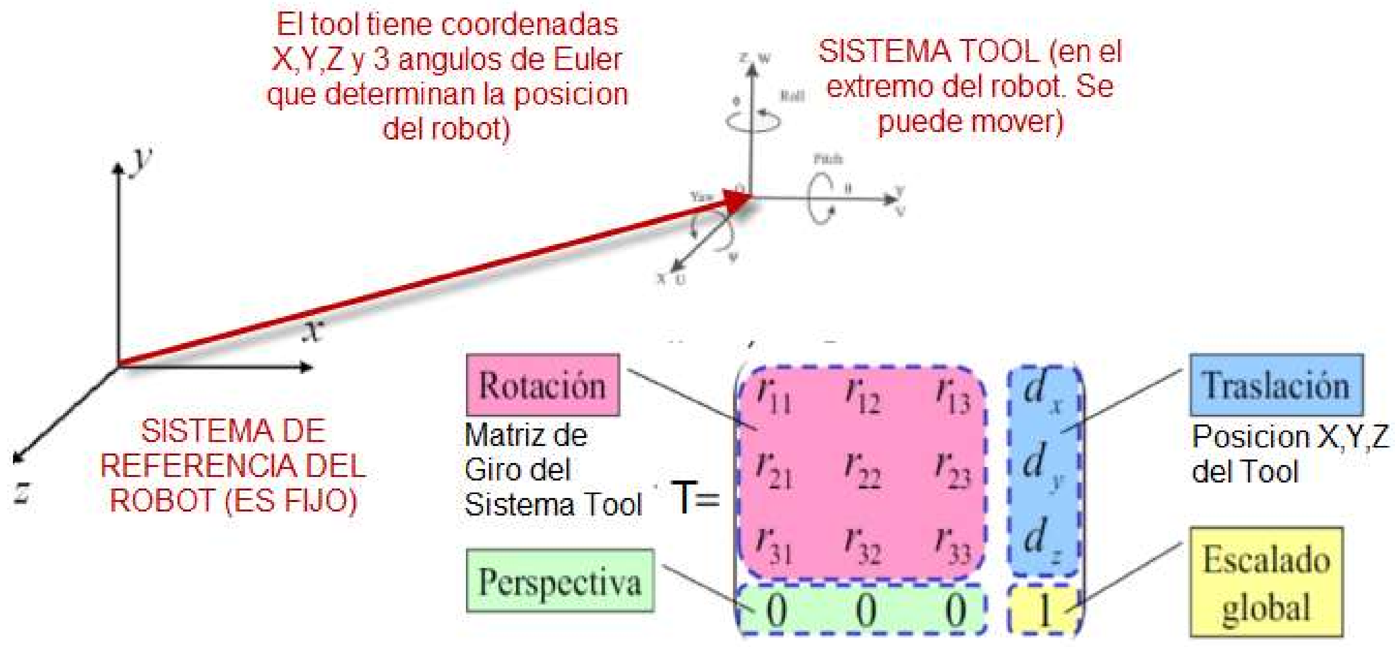
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ HOMOGENEA

MATRIZ HOMOGENEA

La **matriz homogénea** es una herramienta matemática que sirve para describir numéricamente los posicionamientos en un sistema robotizado compuesto por un sistema de referencia y un *tool*. Se tiene en cuenta la **orientación** de *tool* y la **translación respecto el sistema de referencia del robot**.

Se representa mediante una T y es un matriz de 4*4 compuesta internamente por los siguientes elementos:



MATRIZ HOMOGENEA

La matriz homogénea contiene dos partes principales:

- **Matriz de Giro de 3x3**. Define como está girado el sistema *tool* con respecto al sistema de referencia del robot que es fijo.

- **Traslación**. Son las coordenadas X,Y,Z del sistema *tool*

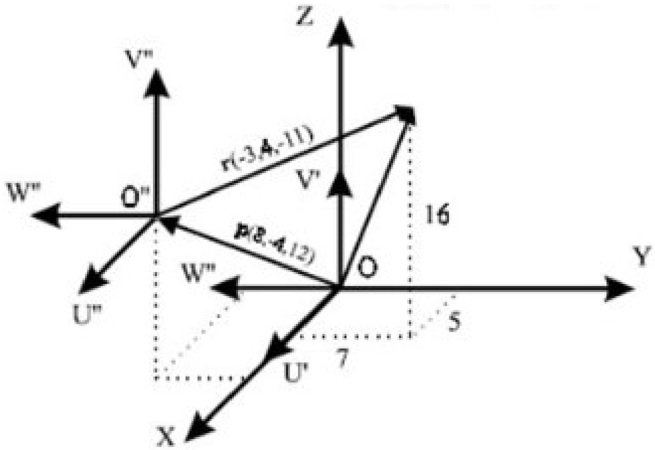
- La parte de la perspectiva y el escalado son adicionales. Se consideran los valores indicados.

La matriz homogénea permite describir la posición de un robot (*tool*) en el espacio respecto un sistema de referencia

MATRIZ HOMOGENEA

Tool quedará descrito por la matriz homogénea porque está tendrá la información de su posición y de su orientación con respecto al sistema global.

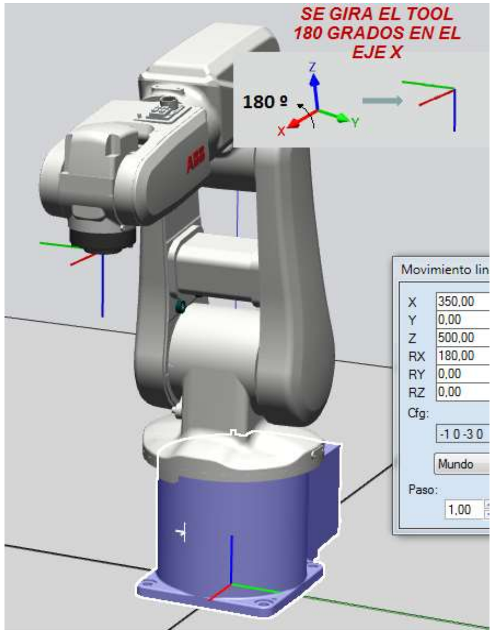
Ejemplo:
Suponemos el sistema O’ estará en la posición ***(8,-4,12)*** con respecto a O.
Si tenemos el punto ***(3,4,-11)*** respecto de O’, realizando la operación con la matriz rotacional obtendremos la posición con respecto del sistema de referencia global O



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ HOMOGENEA

Si aplicamos otro ejemplo en un robot mediante RobotStudio:



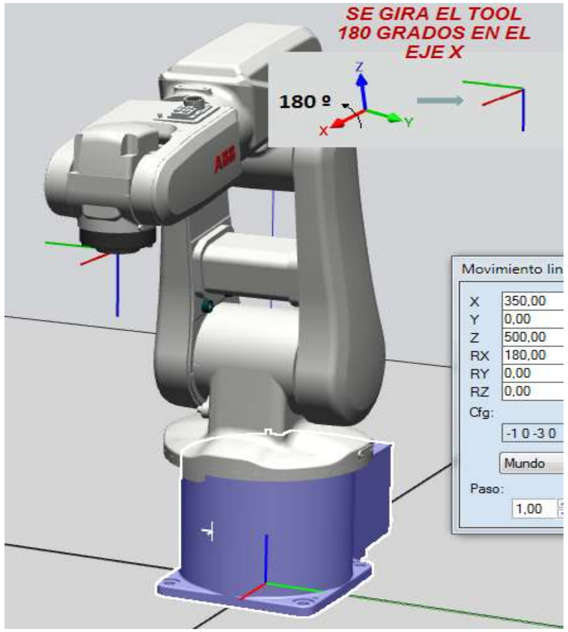
En este robot *tool* está en la posición ***(350, 0, 500)*** respecto del sistema de referencia fijo del robot, y los ángulos de Euler son *RX=180, RY=0, Rz=0* con lo que la matriz de rotación será:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz homogénea del *tool* será:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ HOMOGENEA



$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 350\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 500\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Si ahora tenemos un punto con coordenadas X= 100, Y= 50, Z=0 respecto del *tool*, si obtenemos sus coordenadas respecto del sistema de referencia del robot:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 350\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 500\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\ 50\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}450\\ -50\\ 500\\ 1\end{bmatrix}$$

Es decir: X = 450, Y = -50 y Z = 500