# 華中科技大學

## 课程实验报告

课程名称:	物联网数据存储与管理
选题名称:	基于 Bloom Filter 的

多维数据属性表示和索引

 专业班级:
 物联网 1801 班

 学
 号:

 U201814597

 姓
 名:

 曹金羽

 指导教师:
 华宇

报告日期: 2021年6月21日

## 计算机科学与技术学院

## 目 录

1		选题背景与意义	. 1
2		总体设计	. 2
	2.1	BLOOM FILTER 原理	. 2
	2.2	BLOOM FILTER 结构设计	.4
	2.3	SCALABLE BLOOM FILTER 流程设计	.5
3	:	理论分析	. 7
4		实验测试	. 9
	4.1	实验设计	.9
	4.2	实验结果	13
5		结语	16
参	多考	文献	17

## 1 选题背景与意义

Bloom filter (布隆过滤器)是 Howard Bloom 在 1970 年提出的二进制向量数据结构,具有良好的空间和时间效率,用于检测某元素是否为集合的成员。

Bloom Filter 是一种空间效率很高的随机数据结构,它利用位数组很简洁地表示一个集合,不会漏判(召回率 100%),但可能误判。因此 Bloom Filter 不适合要求"零错误"的应用场合,但在能容忍低错误率的应用场合下,可以通过极少的错误换取存储空间的极大节省。

Bloom Filter 给出检测结果时,若判断结果为否,则该元素一定不在集合中;若判断结果为是,该元素可能并不在集合中。这种误判的情况被称为 false positive (假阳性,假正例)。当插入的元素增多到一定程度时,false positive 的概率将快速增长到不可接受的程度。

通过本课题研究,尝试设计可扩展的 Bloom Filter 结构,使 Bloom Filter 在大量元素插入的条件下能将 false positive 维持在一定的可接受范围,并给出一个具体的实验样例。

## 2 总体设计

#### 2.1 Bloom Filter 原理

#### 2.1.1 Bloom Filter 基本流程

为判断某元素是否在某集合中, Bloom filter 采用哈希函数的方法, 将一个元素映射到一个长度为 m 的阵列上的一点, 将其标志置为 1。进行判断时, 若对应点标志为 1,表明对应元素在集合内, 反之则表明其不在集合内。

该方法的缺点来自于哈希函数的特性,多个不同的元素经过哈希可能映射 到同一个点,也即哈希冲突,如图 2.1 所示。当集合插入元素逐渐增多,产生 冲突的频率将明显提高。

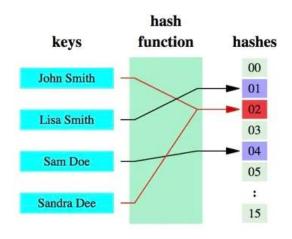


图 2.1 哈希冲突示意图

为解决上述冲突问题, Bloom Filter 采用多哈希法。

假定 Bloom Filter 通过一个大小为 m 的序列保存对应点信息。起始时,Bloom Filter 对应一个长度为 m、内部元素均为 0 的二进制向量。当一个元素 x 插入时,Bloom Filter 通过 k 个不同的哈希函数对 x 进行计算,得到多个 1 位的计算结果,将向量中对应位置的标志置 1,由此将 x 映射到 $\{1,2 \dots m\}$ 范围内的多个位置。如图 2.2 所示。

进行判断时,若某一对应点的标志值不为1,则可以确定目标元素不在集合中;所有对应点的标志值均为1时,可以认为目标元素在集合中。

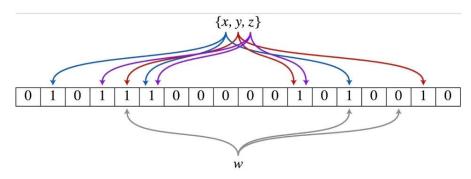


图 2.2 Bloom Filter 多哈希算法示意图

插入元素逐渐增多时,有一定概率出现以下情况:对于某个未插入的元素 y,其值通过 k 个哈希函数计算得到的多个结果,在向量中对应位置的标志均已被此前插入的元素置为 1。此时 Bloom Filter 检查 w 对应的 k 个对应位置,发现标志均为 1,认为 w 在集合内,由此产生误判,也即 false positive。

#### 2.1.2 Bloom Filter 误判率分析

考虑分析 Bloom Filter 的误判率(以下记为 FP)。

起始时,二进制向量 m 各位置均为 0,如图 2.3 所示。

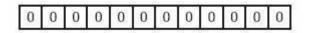


图 2.3 Bloom Filter 向量起始状态

假设哈希函数计算结果为 $\{1,2\dots m\}$ 各值的概率均等,此时对某插入元素进行一次哈希计算,某特定位置值仍为0的概率是 $\left(1-\frac{1}{m}\right)$ 。由于k个函数彼此无关,对n个元素进行k次哈希计算后,某特定位置仍为0的概率p为:

$$p = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{nk} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m \cdot \frac{nk}{m}} \approx e^{-\frac{nk}{m}}$$

考虑 Bloom Filter 发生误判的情形:某不在集合中的元素 x,其 k 个哈希计算结果对应位置值均为 1。由于 k 个哈希计算结果在 $\{1,2\dots m\}$ 随机分布,该事件概率 fp(也即插入 n 个元素后产生 false positive 的概率)等价于在向量中随机选取 k 个位置,其值均为 1 的概率,其值为:

式②中,指数函数 $e^x$ 的指数 $-\frac{m}{n} \cdot \ln(p) \cdot \ln(1-p)$ 取其最小值、也即  $\ln(p) \ln(1-p)$ 取其最大值时,误判概率 fp 有最小值。此时:

$$p = e^{-\frac{nk}{m}} = \frac{1}{2}$$

也即:

$$k = \frac{m}{n} \ln 2 \approx 0.7 \frac{m}{n}$$

此时 fp 取其最小值:

$$f = \left(\frac{1}{2}\right)^k \approx 0.6185^{\frac{m}{n}}$$

#### 2.1.3 Bloom Filter 的不足

经过前文对 Bloom Filter 结构原理的分析与误判率的计算,可以发现 Bloom Filter 误判率 fp 与哈希函数数量 k、集合容量 m、当前已插入元素数量 n 有关。在实际应用中,限制插入元素的数量是违背实际需求的。因此需要考虑 设计哈希函数数量 k 与集合容量 m。

此外,Bloom Filter 在插入元素时,若哈希函数计算结果对应位置的值已被置为 1,则不做操作。因此,向量中为 1 的标志位可能对应多个元素的映射,却无法保存这一信息。尝试删除元素时,若直接将对应位置的标志置 0,可能影响多个其他元素的判断。

#### 2.2 Bloom Filter 结构设计

#### 2.2.1 Counter Bloom Filter 结构

Counter Bloom Filter 是以 Bloom Filter 初始结构为基础设计的多维数据属性表示结构。Counter Bloom Filter 不再使用二进制向量保存元素信息,而是为向量的每一个位置维护一个计数器(Counter),用以记录该位置上元素映射的个数。每当新元素插入、进行某一次哈希函数计算后,计算结果对应位置的计数器值加一。

这一结构在总体保留了 Bloom Filter 高时间、空间效率的基础上,通过增加一定的存储空间,解决了后者难以删除已有元素的问题。

此外, 其误判率特性与传统结构的 Bloom Filter 相同。

#### 2.2.2 Scalable Bloom Filter 结构

对于传统结构的 Bloom Filter 与 Counter Bloom Filter,存储向量的长度固定;当插入元素数量 n 增大时,向量中值为 1 的位置比例增大,此时出现误判情形的概率随之上升。由 2.1.2 节式②可知,哈希函数数量 k、向量容量 m 固定时,误判率 fp 将随着插入元素数量 n 增大而以指数级速度增大。

为将误判率 fp 控制在应用场景可接受的范围内,提出可拓展容量的 Bloom Filter 结构——Scalable Bloom Filter。它能在误判率 fp 超出一定限度时,自动拓展存储向量的容量 m 以降低 fp,使其控制在预设的标准附近。

Scalable Bloom Filter 具体结构设计如下:

- 1. 起始时创建一个容量为 m 的 Bloom Filter, 限制其误判率不超过 fp, 并将该预设值带入 2.1.2 节式①, 计算出该条件下允许插入的最大元素数量 N。
- 2. 当前已插入元素数量 n 达到 N 时,认为误判率同样达到限制值 fp,于是创建一个容量为 2m、误判率限制值仍为 fp 的 BF 结构作为新一层。
- 3. 同理类推,每当此前创建的 BF 结构达到预设插入量 N 时,创建一个新的 BF 结构,其容量 m'为前一结构容量的 m 的 2 倍,误判率限制值仍为 fp。

设起始时 BF 结构层数为 0,则第 i 层 BF 结构容量为 $2^i \cdot m$ 。带入 2.1.2 节式①可知,该层最多容纳插入个数

$$N = -\frac{m}{k} \ln \left( 1 - f_p^{\frac{1}{k}} \right) \quad \cdots \quad \Im$$

#### 2.3 Scalable Bloom Filter 流程设计

#### 2.3.1 Scalable Bloom Filter 插入流程

- 1. 即将插入第 n+1 个元素时,检查 n 是否已达到当前层 BF 结构允许插入的最大元素量 N;
- 2. 若 n 达到 N, 先按照前述结构规律对 BF 进行扩容;
- 3. 在新一层 BF 结构中插入第 n+1 个新元素,也即根据 k 个哈希函数的计算结果将对应位置值置 1;

#### 2.3.2 Scalable Bloom Filter 查找流程

- 1. 根据目标元素经 k 个哈希函数的计算结果,在最顶层(最新创建的 BF 层)对应位置检验目标元素是否存在;
- 2. 若不存在,依次在前一层 BF 重复上述步骤,查找目标元素;
- 3. 若达到初始化层,仍未查找到目标元素,则判断其不在集合中。 最坏情况下,需要查找所有 i+1 层 SBF,则需要进行的哈希计算次数为:

## 3 理论分析

1. 分析经过 i 次扩展后,整个 SBF 允许容纳的元素个数。

根据 2.2.2 节式③,考虑第一次拓展 SBF 结构,添加 $SBF_1 = \{n_1, m_1, k\}$ 。

其中 $m_1 = 2m_0$ 。继而得到 $n_1 = 2n_0$ 。

经等比递推,有 $n_i = 2^i \cdot n_0$ 。

将 $n_0$ 到 $n_i$ 各层可容纳元素个数求和(等比求和),得到整个 SBF 允许容纳的元素个数 $N=2^{i+1}n_0$ .

2. 考虑分析,为表示含有 n 个元素的集合,SBF 需要经过 i 次拓展。

设最终的 SBF 包含 L 个二进制向量,其中最后一层 $SBF_i$ 代表 t 个元素,整个 SBF 占据 $M_{SBF}$ 位,对应误判率为 $f_{SBF}$ 。

$$i = [\log_2(n/n_0 + 1)]$$
 $t = n - n_0 \cdot (2^{[\log_2(n/n_0 + 1)]} - 1)$ 
 $M_{SBF} = (2^i - 1)m = (2^{[\log_2\frac{n}{n_0} + 1]} - 1)m$ 
 $f_{SBF}(m, k, n_0, n) = 1 - (1 - (1 - e^{-kn_0/m})^k)^{[\log_2(n/n_0 + 1)]}(1 - (1 - e^{-kt/m_i})^k)$ 
以下证明:

要表示 n 个元素,SBF 需要满足如下的公式,其中的 i 为需要的 SBF 拓展 次数:  $(2^i-1)n_0 = n_{i-1\_max} < n \le n_{i\_max} = (2^{i+1}-1)n_0$ 

则需要的拓展次数 i 为:  $\log_2(n/n_0+1)-1 \le i < \log_2(n/n_0+1)$  容易看出,在经过 i 次拓展之后,SBF 数组的大小变为:

$$L = i + 1 = \left[ \log_2 \frac{n}{n_0} + 1 \right] + 1$$

那么 SBF 整体需要占用的位大小为:

$$M_{SBF} = m_0 + m_1 + \dots + m_i = m + 2m + 4m + \dots + 2^i m = m(2^{i+1} - 1)$$

需要注意的是, $SBF_j$ 表示了 $(2^j)n_0$ 个元素。除去最后一层 $SBF_i$ 表示的 t 个元素之外, $t=n-n_0(2^j-1)$ ,前 j 个 SBF 误判率 f 为:

$$f^{BF}(m_j, k, n_j) = \left(1 - e^{-k(2^j n_0)/(2^j m)}\right)^k = \left(1 - e^{-kn_0/m}\right)^k = f^{BF}(m, k, n_0)$$

最后 t个元素在最后一层 $SBF_i$ 中表示, 其错误率 f为:

$$f^{BF}(m_i,k,t) = (1 - e^{-kt/m_i})^k$$

进而得到整个 SBF 误判率fSBF 为

$$f^{SBF}(m,k,n_0,n) = 1 - \prod_{j=0}^{j=i-1} (1 - f^{BF}(m_j,k,n_j)) (1 - f^{BF}(m_i,k,t))$$

## 4 实验测试

#### 4.1 实验设计

#### 4.1.1 测试参数

实验参数符号、含义、配置如表 4.1 所示。

符号	含义	配置
400	哈希数组基础长度	105~106 步进105
m		(5000一次单独测试)
fp	可容许的最大误判率	A 组限制为 0.01
		B 组限制为 0.001
n	插入元素个数	10 <sup>5</sup>
t	查找元素个数	$10^{4}$
k	哈希函数个数	5(尽量保证独立)

表 4.1 实验参数

#### 4.1.2 流程设计

考虑对比分析:基础 Bloom Filter 与 Scalable Bloom Filter 在大规模、饱和元素插入条件下的误判率(false positive)。

具体流程如下:

- 1. 对某一梯度的哈希数组长度 m,以 m 分别初始化一个 Bloom Filter 结构与一个 Scalable Bloom Filter 结构。
- 2. 对 BF 与 SBF 结构,分别插入相同数量(n)的元素;其中对于 SBF, 当其实际误判率达到预设最大误判率 fp,会自动扩容。
- 3. 对 BF 与 SBF 结构,分别查找相同数量(t)的元素,统计查找过程中的误判数 error,计算误判率 fp1、fp2。

#### 基础 Bloom Filter 类代码如下:

```
#include <vector>
using namespace std;
class BloomFilter{
private:
    vector<bool> bits;
    int len;
    static int hash1(int v, int m) {
        return (((v >> 3) ^ (v << 5)) & 0x7fffffff) % m;</pre>
```

```
static int hash2(int v, int m) {
               return (((v >> 7) ^ (v << 11)) & 0x7fffffff) % m;
          }
          static int hash3(int v, int m) {
               return (((v >> 13) ^ (v << 17)) & 0x7fffffff) % m;
          static int hash4(int v, int m) {
               return (((v >> 19) ^ (v << 23)) & 0x7fffffff) % m;
          }
          static int hash5(int v, int m) {
               return (((v >> 29) ^ (v << 2)) & 0x7fffffff) % m;
          }
     public:
          BloomFilter(int len=200000): len(len){
               bits.resize(len);
          }
          void insert(int v){
               bits[hash1(v, len)] = bits[hash2(v, len)] = bits[hash3(v, len)] = bits[hash4(v, len)] =
bits[hash5(v, len)] = true;
          bool find(int v){
               return bits[hash1(v, len)] & bits[hash2(v, len)] & bits[hash3(v, len)] & bits[hash4(v,
len)] & bits[hash5(v, len)];
          int cap() const { return len; }
     };
```

#### Scalable Bloom Filter 类代码如下:

```
#include <vector>
#include <cmath>
using namespace std;
class ScalableBloomFilter {
private:
    vector<vector<bool>> bits;
    int depth; // 过滤器层数,从 0 开始
    int len; // 第一层容量,第 i 层容量为 2^(i-1)*len
    int num; // 当前层数据量
    double fp; // 可容许 false positive rate
    static int hash1(int v, int m) {
        return (((v >> 3) ^ (v << 5)) & 0x7fffffff) % m;
}
```

```
static int hash2(int v, int m) {
               return (((v >> 7) ^ (v << 11)) & 0x7fffffff) % m;
          static int hash3(int v, int m) {
               return (((v >> 13) ^ (v << 17)) & 0x7fffffff) % m;
          static int hash4(int v, int m) {
               return (((v >> 19) ^ (v << 23)) & 0x7fffffff) % m;
          }
          static int hash5(int v, int m) {
               return (((v >> 29) ^ (v << 2)) & 0x7fffffff) % m;
          }
     public:
          ScalableBloomFilter(int len=200000, double fp=1e-2): len(len), fp(fp){
               depth = num = 0;
               bits.resize(1);
               bits[0].resize(len);
          }
          void resize(){
               depth += 1;
               bits.resize(depth+1);
               bits[depth].resize(len << depth);
               num = 0;
          }
          void insert(int v){
               if(num \ge (len \le depth) * log(1.0/(1.0 - pow(fp, 0.2)))/5)//n = -m * ln(1 - f^0.2)
/ 5
                    resize();
               int m = len \ll depth;
               bits[depth][hash1(v, m)] = bits[depth][hash2(v, m)] = bits[depth][hash3(v, m)] =
bits[depth][hash4(v, m)] = bits[depth][hash5(v, m)] = true;
               num++;
          }
          bool find(int v){
               for(int i=depth; i \ge 0; i--){
                    int m = len \ll i;
                    bool ok = bits[i][hash1(v, m)] & bits[i][hash2(v, m)] & bits[i][hash3(v, m)] &
bits[i][hash4(v, m)] & bits[i][hash5(v, m)];
                    if(ok)
                          return true;
               return false;
```

```
int cap() const { return (len << (depth + 1)) - len; }
int resizeTime() const { return depth; }
};</pre>
```

#### 测试程序 test.cpp 代码如下:

```
#include <iostream>
#include <random>
#include <unordered set>
#include "BloomFilter.cpp"
#include "ScalableBloomFilter.cpp"
using namespace std;
const int SEED = 1024;
int m = 1000000; // bloom filter 哈希数组长度
int n = 100000; // 插入元素个数
int t = 10000; // 查找元素个数
double fp = 1e-3; // 可容许 false positive rate
int main() {
    //随机创建插入元素集、查找元素集
    default_random_engine e(SEED);
    unordered set<int> insert us, find us;
    for(int i=0; i<n; i++)
         insert us.insert(e());
    for(int i=0; i<t; i++)
         find_us.insert(e());
    for(; m \ge 100000; m = 100000)
         cout << "--- m = " << m << " ---" << endl;
         // test BloomFilter
         cout << "TEST BLOOM FILTER..." << endl;
         BloomFilter bf(m);
         for(int v : insert us)
              bf.insert(v);
         int error = 0;
         for(int v : find_us){
              if(!insert us.count(v) && bf.find(v))
                  error++;
         cout << "False Positive Rate = " << 1.0 * error / t << endl;
         cout << "Capacity = " << bf.cap() << endl;
         cout << endl;
         // test ScalableBloomFilter
         cout << "TEST SCALABLE BLOOM FILTER..." << endl;
```

```
ScalableBloomFilter sbf(m, fp);

for(int v : insert_us)
    sbf.insert(v);

error = 0;

for(int v : find_us){
    if(!insert_us.count(v) && sbf.find(v))
        error++;

}

cout << "False Positive Rate = " << 1.0 * error / t << endl;

cout << "Capacity = " << sbf.cap() << endl;

cout << "Resize Time = " << sbf.resizeTime() << endl;

}

return 0;

}
```

#### 4.2 实验结果

1. 第一组测试: 预设最大误判率 fp = 0.01

测试结果如表 4.2 所示。

其中 m 为初始 BF 哈希数组容量; fp1、fp2 分别为基础 BF 结构与 SBF 结构最终查询的实际总体误判率; capacity 为 SBF 最终空间占用,对应 SBF 在插入过程中进行自动扩容的次数。

m	fp1	fp2	capacity	扩容次数
1000000	0.0099	0.0099	1000000	0
900000	0.0119	0.0088	2700000	1
800000	0.0271	0.0132	2400000	1
700000	0.0385	0.0114	2100000	1
600000	0.0576	0.0112	1800000	1
500000	0.0985	0.0105	1500000	1
400000	0. 1847	0.0133	1200000	1
300000	0.3585	0.0215	2100000	2
200000	0.6457	0.0189	1400000	2
100000	0.9666	0.0292	1500000	3
50000	0.9999	0.0405	1550000	4

表 4.2 测试结果(fp = 0.01)

2. 第二组测试: 预设最大误判率 fp = 0.001

测试结果如表 4.3 所示。各结果参数含义与第一组测试相同。

表 4.3 测试结果 (fp = 0.001)

m	fp1	fp2	capacity	扩容次数
1000000	0.0099	0.0017	3000000	1
900000	0.0119	0.0013	2700000	1
800000	0.0271	0.0009	2400000	1
700000	0.0385	0.0017	2100000	1
600000	0.0576	0.0015	1800000	1
500000	0.0985	0.0022	3500000	2
400000	0. 1847	0.0025	2800000	2
300000	0.3585	0.0028	2100000	2
200000	0.6457	0.0040	3000000	3
100000	0.9666	0.0045	3100000	4
50000	0.9999	0.0056	3150000	5

对两组测试结果,分别绘制 fp1、fp2 与 m 关系散点图。如图 4.1、图 4.2 所示。

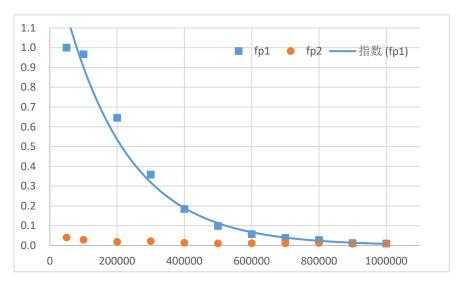


图 4.1 测试结果(fp = 0.01)

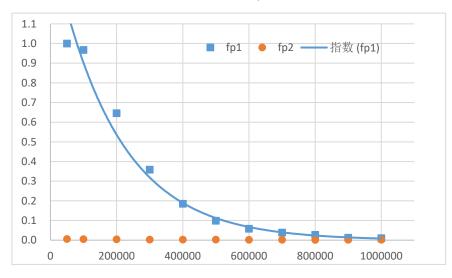


图 4.2 测试结果(fp = 0.001)

由图 4.1、图 4.2 可见,对于固定的插入元素数量与查询元素数量,随着 Bloom Filter 存储数组初始容量减小,存储数组相对饱和度增大,基础 Bloom Filter 结构的实际总体误判率 fp1 以指数级别速度增长;插入元素数量接近数组容量时,误判率 fp1 接近 1。

与之相比,存储数组初始容量减小时,Scalable Bloom Filter 结构的总体误判率 fp2 变化不明显;存储数组初始容量足够时,SBF 结构能将误判率 fp2 控制在预设最大允许误判率 fp 水平附近;预设误判率 fp 要求越严格,SBF 限制实际误判率的特性优势越明显。

另一方面,SBF 限制误判率的代价是占用更大的存储空间。当插入饱和度较高、误判率限制较严格时,SBF 在插入过程中将进行多次扩容操作,最终空间占用量 capacity 可达初始容量的数倍乃至数十倍。其中,由于 SBF 的每次扩容,其新存储层的容量均为前一层容量的 2 倍,最新层(也即容量最大的一层)往往并未达到最大容许插入量,造成大量存储空间浪费。

此外,插入元素数量接近 SBF 数组初始容量时,最终总体误判率 fp2 仍然明显超过预设容许最大误判率 fp。可能的原因是:计算当前误判率、最大容许插入量的推导过程存在近似,以及 k 个哈希函数不一定完全独立。

## 5 结语

本文分析了传统 Bloom Filter 结构原理与流程,针对其在大规模数据插入情况下误判率激增的缺点,提出改进结构 Scalable Bloom Filter,实现可自动扩容的多层数据存储与查找。

通过理论分析与实验测试,对比上述两种结构在大规模数据插入情况下实际误判率变化趋势,论证了 Scalable Bloom Filter 通过自动扩容控制误判率的有效性与优越性。

综上所述,Scalable Bloom Filter 以可接受的存储空间占用为代价,换取有效的误判率控制能力,同时基本不影响 Bloom Filter 本身在插入、删除、查找方面良好的空间和时间效率,是一种针对 Bloom Filter 性能的有效优化方案。

## 参考文献

- [1] F. Bonomi, M. Mitzenmacher, R. Panigrahy, S. Singh, and G. Varghese, "Beyond Bloom Filters: From Approximate Membership Checks to Approximate State Machines," Proc. ACM SIGCOMM, 2006.
- [2] Y. Zhu and H. Jiang, "False Rate Analysis of Bloom Filter Replicas in Distributed Systems," Proc. Int'l Conf. Parallel Processing (ICPP '06), pp. 255-262, 2006.
- [3] S. Dharmapurikar, P. Krishnamurthy, and D.E. Taylor, "Longest Prefix Matching Using Bloom Filters," Proc. ACM SIGCOMM, pp. 201-212, 2003.
- [4] L. Fan, P. Cao, J. Almeida, and A. Broder, "Summary Cache: A Scalable Wide-Area Web Cache Sharing Protocol," IEEE/ACM Trans. Networking, vol. 8, no. 3, pp. 281-293, June 2000.
- [5] B. Xiao and Y. Hua, "Using Parallel Bloom Filters for Multi-Attribute Representation on Network Services," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, vol. 21, no. 1, pp. 20-32, Jan. 2010.
- [6] Y. Hua, Y. Zhu, H. Jiang, D. Feng, and L. Tian, "Scalable and Adaptive Metadata Management in Ultra Large-scale File Systems," Proc. 28th Int'l Conf. Distributed Computing Systems (ICDCS '08), pp. 403-410, 2008.
- [7] D. Guo, J. Wu, H. Chen, and X. Luo, "Theory and Network Application of Dynamic Bloom Filters," Proc. IEEE INFOCOM, 2006.
- [8] K. Xie, Y. Min, D. Zhang, J. Wen, and G. Xie, "A Scalable Bloom Filter for Membership Queries," IEEE Global Telecommunications Conference, 2007