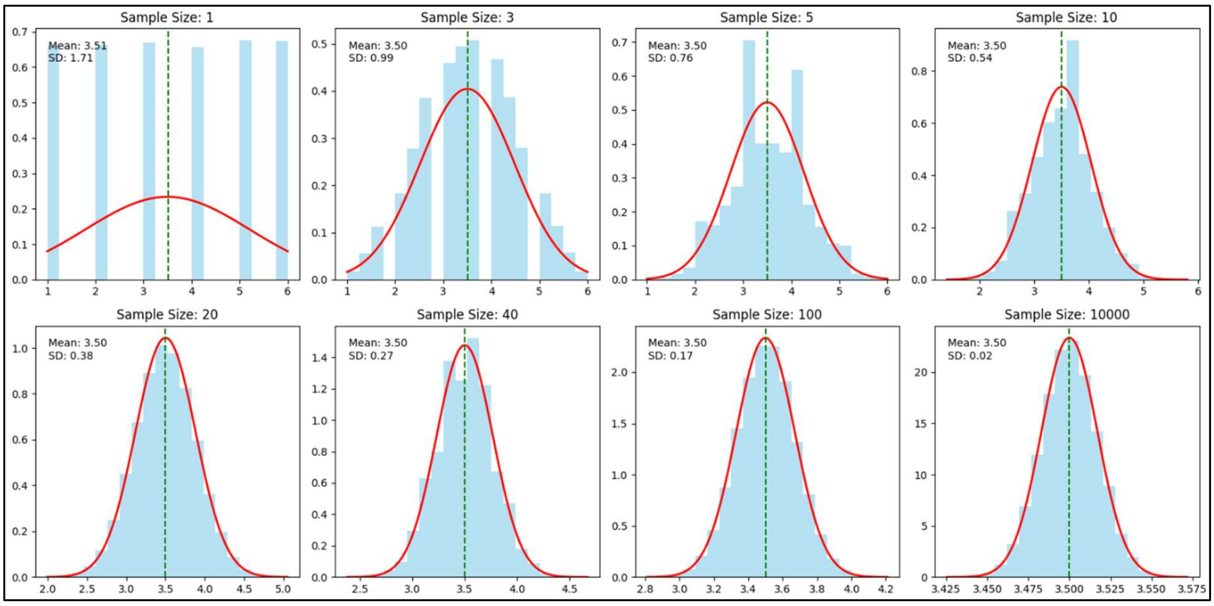
การพิสูจน์: ทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

ทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (The Central Limit Theorem; CLT) กล่าวว่า

สำหรับประชากรใด ๆ แล้ว หากเราเก็บตัวอย่างในจำนวนที่มากพอ การกระจายของค่าเฉลี่ยตัวอย่างดังกล่าวจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติ (Normal distribution) เสมอ โดยไม่คำนึงถึงรูปร่างการกระจายที่แท้จริงของประชากรนั้น

สรุปโดยย่อ ถ้าเราสุ่มตัวอย่างซ้ำเรื่อย ๆ และบันทึกค่าเฉลี่ยที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างแต่ละครั้ง แล้วนำค่าเหล่านั้นมาสร้างแผนภูมิอิสโทแกรม (Histogram) จะได้ว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกตินั่นเอง



ตัวอย่าง CLT โดยให้ *X* แทนค่าเฉลี่ยของหมายเลขที่เกิดจากการทอยลูกเต๋า 6 หน้าเที่ยงตรง

ที่มา: [*Statistics-and-ML/Central_Limit_Theorem.ipynb at main · SKY-TKP/Statistics-and-ML*]

ประเด็นสำคัญ

- ทฤษฎีบทนี้ระบุถึงความสำคัญที่ว่าการกระจายของค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่โดยไม่คำนึงถึงการแจกแจงของประชากรที่แท้จริง
- การสุ่มตัวอย่างต้องเป็นไปอย่างสุ่ม (Random Sampling)
- เราจะเรียก ค่าเฉลี่ยจากการสุ่มตัวอย่างเหล่านั้นว่า “ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง (Sample Mean; $\bar{x}$)” และเรียก ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยเหล่านั้นว่า “ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง” (Sample Standard Deviation; $s_{\bar{x}}$)

ทบทวนคณิตศาสตร์ที่จำเป็น

[1] ตัวแปรสุ่ม *(Random Variable)* และคุณสมบัติพื้นฐาน

ตัวแปรสุ่ม X คือ ฟังก์ชันจากปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่ม (S) ไปยัง เซตของจำนวนจริง (ℝ)

$$X: S \to \mathbb{R}$$

โดยที่

- $E[X] =$ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- $Var[X] =$ ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$
- สมบัติเพิ่มเติม
    1. $E[aX + b] = aE[X] + b$
    2. $E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots + a_nE[X_n]$
    3. $Var[aX + b] = a^2Var[X]$
    4. $Var[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n]$
       $= a_1^2Var[X_1] + a_2^2Var[X_2] + \cdots + a_n^2Var[X_n] + 2\sum_{j \neq i}\sum_{i} a_ia_jCov(X_i, X_j)$

[2] ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ *(Probability Density Func.)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

เมื่อ $\mu = E[X]$ และ $\sigma = \sqrt{Var[X]}$

เขียนแทนด้วย $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$

หมายเหตุ: เมื่อ $\mu = 0$ *และ* $\sigma = 1$ เราจะเรียกการแจกแจงดังกล่าวเป็น **การแจกแจงปกติมาตรฐาน**
(Standard Normal Distribution)

[3] ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ *(Moment Generating Function; MGF)*

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

โดยที่

- เมื่อ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน จะได้ว่า

$$M_Z(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z=-\infty}^{\infty} e^{\frac{z^2}{2}+tz}dz = e^{\frac{t^2}{2}}$$

- $M_X^{(n)}(t = 0) = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$
- ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้ว่า $M_{X+Y}(t) = M_Y(t)M_Y(t)$
- ถ้า X และ Y มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์เดียวกันแล้ว X และ Y มีการแจกแจงเดียวกัน

$$M_X(t) = M_Y(t); \forall t \in \mathbb{R} \implies X, Y \ are\ same\ distribution.$$

[4] เพิ่มเติม

- นิยามของเลขออยเลอร์ *(Euler's number; e)*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = e^{k};\ e \approx 2.71828\ldots$$

- อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง *(Taylor's series of exponential function)*

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

- อนุกรมแมคคลอรินของฟังก์ชันลอการิทึม *(Maclaurin's series of logarithmic function)*

$$\ln\,(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n$$

ขั้นตอนการพิสูจน์

ข้อกำหนด: [1]

[1] พิจารณาจากตัวแปรสุ่ม X ที่มีการกระจายแบบหนึ่ง ๆ (ที่เราไม่รู้) โดยมี $\mu_X = \mu = E[X]$ และ $\sigma_X^2 = Var[X]$

[2] การเลือกตัวอย่างของเราจากค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดในตัวแปรสุ่ม X จะต้องมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(2.1) การเลือกตัวอย่างแบบสุ่ม (Random Sampling)

(2.2) การสุ่มแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระต่อกัน (Independent)

(2.3) การสุ่มแต่ละครั้งต้องมาจากประชากรในการแจกแจงเดิม

[3] จากผลของ [2] เขียนรวบรัดเป็น X_i เป็น $i.i.d.$ $(independent\ and\ identically\ distributed)$

โดย X_i คือ ตัวแปรสุ่มของค่าเป็นไปได้จากปริภูมิตัวอย่างในทั้งหมดในตัวแปรสุ่ม X

ตัวที่ $i = 1, 2, 3, \dots n$ จากการสุ่มมา n ครั้ง

[4] การสุ่มตัวอย่าง ควรใช้ขนาดกลุ่มตัวอย่าง n จำนวนมาก ๆ

การพิสูจน์:

[1] กำหนดให้ $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

ดังนั้น

เราบอกได้ว่า Y_n คือ ตัวแปรสุ่ม<u>ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง</u>จากการสุ่มในประชากร X

จะได้ว่า

$$E[Y_n] = E\left[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \tfrac{1}{n}([X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n])$$
$$= \tfrac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu)$$
$$= \tfrac{1}{n}(n\mu) = \mu \dots (1.1)$$

$$Var[Y_n] = Var\left[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}\left[Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n] + 2\sum_i \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)\right]$$

จาก ข้อกำหนด (2.2) ทำให้ $Cov(X_i, X_j) = 0;$

$$Var[Y_n] = \tfrac{1}{n^2}[\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2] = \tfrac{1}{n^2}(n\sigma_X^2) = \sigma_X^2/n \dots (1.2)$$

[1] ด้วยข้อกำหนดที่จะนำไปสู่การพิสูจน์เหล่านี้จึงเป็นสิ่งสืบเนื่องที่ต้องตรวจสอบเสมอ หลังทำการใช้สถิติเชิงอนุมานในหลาย ๆ ส่วน

จากข้อ [1]

- เมื่อเราสุ่มตัวอย่างจากประชากร X แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย เราเชื่อว่าค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ได้มานั้นมีโอกาสเป็นค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของประชากรดังกล่าว ในขณะที่ถ้าหาความแปรปรวนแทนจะกลายเป็น ความแปรปรวนของประชากรหารขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เราเลือกมาสุ่ม
- $E[Y_n] = \bar{x}_n = \mu$ = ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่างจากการสุ่มในตัวแปรสุ่ม X
- $Var[Y_n] = s_n^2 = \sigma_X^2/n$ = ความแปรปรวนตัวอย่างจากการสุ่มในตัวแปรสุ่ม X[2]

[2] กำหนดให้

$$\begin{aligned} Z_n &= (Y_n - \mu)/s_x \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_X}\right) \end{aligned}$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} S_i \quad \text{โดย} \quad S_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma_X}$$

ทั้งนี้ $E\,[S_i] = \frac{1}{\sigma_X}E[X_i - \mu] = 0$

$$Var\,[S_i] = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 [Var[X_i] - \cancel{Var[\mu]}] = 1$$

และ $E[Z_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E[S_i] = 0$

$$Var[Z_n] = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} Var\,[S_i] = 1 = E\,[Z_n^2] - E[Z_n] = E\,[Z_n^2]$$

[2] ภายหลัง เรามีอีกชื่อให้เป็น Standard Error ของตัวแปรสุ่ม X จากการสุ่มตัวอย่างขนาด n

[3] พิจารณาที่

$$
\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= M_{\sum_{i=1}^{n} S_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= M_{S_1+S_2+\cdots+S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= M_{S_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) M_{S_2}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) \dots M_{S_n}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) \qquad \because S_i \text{ เป็นอิสระต่อกัน} \\
&= \left[M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n
\end{aligned}
$$

สนใจพจน์ $M_{S_n}(t)$

$$
\begin{aligned}
M_{S_n}(t) &= M_{(X_i-\mu)}(t) \\
&= E\left[e^{t(X_i-\mu)}\right] \\
&= E\left[1 + t(X_i-\mu) + \frac{(t)^2(X_i-\mu)^2}{2!} + \cdots + \frac{(t)^n(X_i-\mu)^n}{n!}\right] \\
&= 1 + tE[X_i-\mu] \\
&\quad + \frac{t^2}{2!}\left[E[(X_i-\mu)^2] - E[X_i-\mu] + E[X_i-\mu]\right] \qquad Var[X_i-\mu] = 1 \qquad \because E[X_i-\mu] = 0 \\
&\quad + \frac{t^3E[(X_i-\mu)^3]}{3!} \dots + \frac{t^nE[(X_i-\mu)^n]}{n!} \\
&= 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3E[(X_i-\mu)^3]}{3!} \dots + \frac{t^nE[(X_i-\mu)^n]}{n!}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
M_{Z_n}(t) = \left[1 + \frac{(t/\sqrt{n})^2}{2!} + \frac{(t/\sqrt{n})^3E[(X_i-\mu)^3]}{3!} \dots + \frac{(t/\sqrt{n})^nE[(X_i-\mu)^n]}{n!}\right]^n
$$

ทำการ *Take ln;*

$$ln[M_{Z_n}(t)] = n.\, ln\left[1 + \frac{(t/\sqrt{n})^2}{2!} + \frac{(t/\sqrt{n})^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!} \dots + \frac{(t/\sqrt{n})^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!}\right]$$

เนื่องจากเทอมฝั่งขวาของสมการสามารถขียนในรูปอนุกรมแมคลอริน ได้เป็น

$$\ln\,(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

จึงได้เป็น

$$\ln[M_{Z_n}(t)] = n.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}{2!} + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!} \dots + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!}\right)^k$$

แยกอนุกรมออกเป็น 2 ส่วน คือ k = 1 และ 2 เป็นต้นไป

$$\ln[M_{Z_n}(t)] = n.\left[\left(\frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}{2!} + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!} + \cdots + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}{2!} + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!} + \cdots + \frac{(\frac{t}{\sqrt{n}})^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!}\right)^k\right]$$

กระจายพจน์ n นอกสุดไปในวงเล็บใหญ่

$$\ln[M_{Z_n}(t)] = \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{nt^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!\, n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{nt^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!\, n^{\frac{n}{2}}}\right)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{nt^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!\, n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{nt^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!\, n^{\frac{n}{2}}}\right)^k$$

พิจารณาที่ $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\ln[M_{Z_n}(t)] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{nt^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!\, n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{nt^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!\, n^{\frac{n}{2}}}\right)$$
$$+ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{nt^3 E[(X_i-\mu)^3]}{3!\, n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{nt^n E[(X_i-\mu)^n]}{n!\, n^{\frac{n}{2}}}\right)^k$$
$$= \frac{t^2}{2} \dots \blacksquare$$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{M_{Z_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}}$$

[4]. เนื่องจาก $\mathrm{M}_{\mathrm{Z_n}}(t)$ มี MGF เดียวกับ MGF ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

เพราะฉะนั้น $Z_n \sim Normal(0, 1)$

กล่าวคือ $\frac{Y_n - \mu}{s_x}$ หรือตัวแปรสุ่มค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่างนี้มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

[5]. จากข้อ [4]. ดังนั้น

การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างมีการแจกแจงปกติ