习　题　一

1. 设λ为A的任一特征值,则因 $\lambda^2-2\lambda$ 为A^2-2A 的特征值, 故 $\lambda^2-2\lambda=0$.　即λ=0 或 2.

2. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{D}$时, 分别存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{CQ}=\boldsymbol{D}$.令

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$是可逆矩阵,且

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

3. 设$\boldsymbol{x}_i$是对应于特征值λ_i的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$, 用$\boldsymbol{A}^{-1}$左乘得 $\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_i$.即

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i^{-1}\boldsymbol{x}_i$$

故 λ_i^{-1}是$\boldsymbol{A}$的特征值, i=1,2,$\cdots$,n.

4. (1) 可以. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$,

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}.$$

(2) 不可以.

(3) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

5. (1) $\boldsymbol{A}$的特征值是 0, 1, 2. 故$|\boldsymbol{A}|$=－$(b-a)^2$=0. 从而 b=a.又

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-3\lambda-2a^2+2)$$

将λ=1, 2 代入上式求得 A=0.

(2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$， $\boldsymbol{A}$ 有特征值 2, 2, －1.

λ=2 所对应的方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 有基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

λ=－1 所对应的方程组 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 有基础解系

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&3&0\\-4&1&4\\16&-4&-4\end{pmatrix}$. 于是有

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2^{100}&&\\&2^{100}&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-2^{100}&2^{100}-1&2^{100}-1\\0&3\cdot 2^{100}&0\\4-4\cdot 2^{100}&2^{100}-1&4\cdot 2^{100}-1\end{pmatrix}.$$

7. (1) $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda+1)=D_3(\lambda)$，$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 有 2 阶子式

$$\begin{vmatrix}-1&-1\\\lambda-21&-17\end{vmatrix}=\lambda-4$$

$\lambda-4$ 不是 $D_3(\lambda)$的因子， 所以 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$， $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为$\lambda-1$，λ^2. $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的相似变换矩阵为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 得

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=-\boldsymbol{p}_1\\\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2\end{cases}$$

解出

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&-3&-2\\1&4&2\end{pmatrix};$$

(2) 因为 $\boldsymbol{D}_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$， $\boldsymbol{D}_2(\lambda)=\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1$，故

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

设变换矩阵为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则

$$\begin{cases} A p_1 = p_1 \\ A p_2 = p_1 + p_2 \\ A p_3 = 2 p_3 \end{cases} \Rightarrow P=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) $D_3(\lambda)=|\lambda I - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-2), \quad D_2(\lambda)=\lambda+1, \quad D_1(\lambda)=1$. A 的不变因子是

$$d_1=1, \quad d_2=\lambda+1, \quad d_3=(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$A \sim J=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

因为 A 可对角化，可分别求出特征值－1，2 所对应的三个线性无关的特征向量：

当 λ=－1 时，解方程组 $(I+A)x=0$,求得两个线性无关的特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当 λ=2 时，解方程组 $(2I-A)x=0$,得

$$p_3=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 因 $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$，故

$$A \sim J=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设变换矩阵为 P=(p_1, p_2, p_3)，则

$$\begin{cases} A p_1 = p_1 \\ A p_2 = p_2 \\ A p_3 = p_2 + p_3 \end{cases}$$

p_1, p_2 是线性方程组 $(I-A)x=\mathbf{0}$ 的解向量，此方程的一般解形为

$$p=\begin{pmatrix} -s+3t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

取

$$
\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}
$$

为求满足方程 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_2$ 的解向量 $\boldsymbol{p}_3$，再取 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}$，根据

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&-6&s-3t\\1&1&-3&-s\\1&1&-3&-t\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-3&-s\\0&0&0&3s-3t\\0&0&0&s-t\end{array}\right)
$$

由此可得 $s=t$，从而向量 $\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 的坐标应满足方程

$$
x_1+x_2-3x_3=-s
$$

取 $\boldsymbol{p}_3=(-1,\ \ 0,\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，最后得

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.
$$

8. 设 $f(\lambda)=2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4$． $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^3-2\lambda+1$，作带余除法得

$$
f(\lambda)=(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)\,m_A(\lambda)+24\lambda^2-37\lambda+10,
$$

于是

$$
f(\boldsymbol{A})=24\boldsymbol{A}^2-37\boldsymbol{A}+10\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{pmatrix}.
$$

9. $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+7$，

$$
f(\lambda)=2\lambda^4-12\lambda^3+19\lambda^2-29\lambda+37,
$$

则 $f(\lambda)=(2\lambda^2+5)m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)+\lambda+2$．于是 $[f(\boldsymbol{A})]^{-1}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.由此求出

$$
[f(\boldsymbol{A})]^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}7&1\\-2&3\end{pmatrix}.
$$

10. (1) $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{pmatrix}$的标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$；

(2) $(\lambda-1)(\lambda+1)$；

(3) λ^2.

11. 将方程组写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$, 将原方程组改写成 : $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Jy}$, 则

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_1+y_2\\ \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=-y_3\end{cases}$$

解此方程组得: $\boldsymbol{y}_1=c_1\mathrm{e}^t+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{t}\mathrm{e}^t$, $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{c}_2\mathrm{e}^t$, $\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{c}_3\mathrm{e}^{-t}$. 于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}=\begin{pmatrix}c_1\mathrm{e}^t+c_2t\mathrm{e}^t\\2c_1\mathrm{e}^t+c_2(2t+1)\mathrm{e}^t\\4c_1\mathrm{e}^t+c_2(4t+2)\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.$$

12. (1) $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-10)(\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{A}$ 有特征值 10, 1, 1. 当 $\lambda=10$ 时. 对应的齐次线性方程组 $(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此求出特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,\ -2, 2)^{\mathrm{T}}$, 单位化后得 $\boldsymbol{e}_1=(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=1$ 时, 对应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此求出特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 单位化后得

$\boldsymbol{e}_2=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_3=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\ \frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{5}{3\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 是 Hermit 矩阵. 同理可求出相似变换矩阵

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

13. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermit 正定矩阵,则由定理 1.24 可知存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0, \quad \boldsymbol{I}=1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

$$=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

则 $\boldsymbol{B}$ 是 Hermit 正定矩阵且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

反之,当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$ 且 $\boldsymbol{B}$ 是 Hermit 正定矩阵时,则因可交换的 Hermit 正定矩阵的乘积仍为 Hermit 正定矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermit 正定的.

14. (1)$\Rightarrow$(2). 因 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermit 矩阵,则存在酉矩阵 U,使得

$$U^{\mathrm{H}}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_k$. 则 $\boldsymbol{x}\neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})\boldsymbol{y}=\lambda_k \geqq 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

(2)$\Rightarrow$(3).

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

令 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}$.

(3)$\Rightarrow$(1). 任取 $\boldsymbol{x}\neq 0$, 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_2^2 \geqq 0.$$

习 题 二

1. $\|\boldsymbol{x}\|_1=|1+\mathrm{i}|+|-2|+|4\mathrm{i}|+1+0=7+\sqrt{2}$,

$\|x\|_2=\sqrt{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+(-2)^2+4\mathrm{i}(-4\mathrm{i})+1}=\sqrt{23}$,

$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|1+\mathrm{i}|,\ \ |-2|,\ \ |4\mathrm{i}|,\ \ 1\}=4$.

2. 当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时, 有 $\|\boldsymbol{x}\|>0$; 当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 显然有 $\|\boldsymbol{x}\|=0$. 对任意 $\lambda\in\mathbf{C}$, 有

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\omega_k|\lambda\xi_k|^2}=|\lambda|\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\omega_k|\xi_k|^2}=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|.$$

为证明三角不等式成立, 先证明 Minkowski 不等式:

设 $1\leqq p<\infty$, 则对任意实数 x_k, y_k $(k=1, 2, \cdots, n)$有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证 当 $p=1$ 时，此不等式显然成立. 下设 $p>1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqq \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

对上式右边的每一个加式分别使用 Hölder 不等式, 并由 $(p-1)q=p$, 得

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

再用 $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 除上式两边,即得 Minkowski 不等式.

现设任意 $\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\boldsymbol{n}})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，则有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}\omega_{\boldsymbol{k}}|\xi_{\boldsymbol{k}}+\eta_{\boldsymbol{k}}|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\omega_k}|\xi_k+\eta_k|)^2}\leqq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\omega_k}|\xi_k|+\sqrt{\omega_k}|\eta_k|)^2}$$

$$\leqq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\omega_k}|\xi_k|)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\omega_k}|\eta_j|}^2=\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

3. (1) 函数的非负性与齐次性是显然的，我们只证三角不等式. 利用最大函数的等价定义:

$$\max(a,\ b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

$$\max(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_a,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_b)\leqq\max(\|\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{y}\|_a,\|\boldsymbol{x}\|_b+\|\boldsymbol{y}\|_b)$$
$$=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{x}\|_b+\|\boldsymbol{y}\|_a+\|\boldsymbol{y}\|_b+\big|\|\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{y}\|_a-\|\boldsymbol{x}\|_b-\|\boldsymbol{y}\|_b\big|)$$
$$\leqq\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{x}\|_b+\|\boldsymbol{y}\|_a+\|\boldsymbol{y}\|_b+\big|\|\boldsymbol{x}\|_a-\|\boldsymbol{x}\|_b\big|+\big|\|\boldsymbol{y}\|_a-\|\boldsymbol{y}\|_b\big|)$$
$$=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{x}\|_b+\big|\|\boldsymbol{x}\|_a-\|\boldsymbol{x}\|_b\big|)+\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{y}\|_a+\|\boldsymbol{y}\|_b+\big|\|\boldsymbol{y}\|_a-\|\boldsymbol{y}\|_b\big|)$$
$$=\max(\ \|\boldsymbol{x}\|_a,\|\boldsymbol{x}\|_b)+\max(\ \|\boldsymbol{y}\|_a,\|\boldsymbol{y}\|_b)$$

(2) 只证三角不等式.

$$k_1\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_a+k_2\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_b\leqq k_1\|\boldsymbol{x}\|_a+k_1\|\boldsymbol{y}\|_a+k_2\|\boldsymbol{x}\|_b+k_2\|\boldsymbol{y}\|_b$$
$$=(k_1\|\boldsymbol{x}\|_a+k_2\|\boldsymbol{x}\|_b)+(k_1\|\boldsymbol{y}\|_a+k_2\|\boldsymbol{y}\|_b).$$

4. $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_1}=|1+\mathrm{i}|+3+5+|4\mathrm{i}|+2+3+1=18+\sqrt{2}$;

$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{|1+\mathrm{i}|^2+3^2+5^2+|4\mathrm{i}|^2+2^2+3^2+1}=\sqrt{66}$; $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_\infty}=15$;

$\|\boldsymbol{A}\|_1=$列和范数(最大列模和)$=7+\sqrt{2}$;$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$=行和范数(最大行模和)=9;

5. 非负性: $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\neq\boldsymbol{O}$, 于是 $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\|_{\mathrm{m}}>0$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，显然 $\|\boldsymbol{A}\|=0$;

齐次性: 设 $\lambda\in\mathbf{C}$, 则 $\|\lambda\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{S}^{-1}(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}\|_{\mathrm{m}}=|\lambda|\,\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\|_{\mathrm{m}}=|\lambda|\,\|\boldsymbol{A}\|$;

三角不等式: $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|=\|\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{S}\|_{\mathrm{m}}=\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}+\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BS}\|_{\mathrm{m}}$

$$\leqq\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\|_{\mathrm{m}}+\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BS}\|_{\mathrm{m}}=\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|;$$

相容性: $\|\boldsymbol{AB}\|=\|\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{S}\|_{\mathrm{m}}=\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{ASS}^{-1}\boldsymbol{BS}\|_{\mathrm{m}}\leqq\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\|_{\mathrm{m}}\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BS}\|_{\mathrm{m}}=\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$.

6. 因为 $\boldsymbol{I}_n\neq\boldsymbol{O}$, 所以$\|\boldsymbol{I}_n\|>0$.从而利用矩阵范数的相容性得:

$$\|\boldsymbol{I}_n\|=\|\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n\|\leqq\|\boldsymbol{I}_n\|\,\|\boldsymbol{I}_n\|,\text{即}\|\boldsymbol{I}_n\|\geqq1.$$

7. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$， $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$， 且 $\boldsymbol{A}=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$， 则

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\sum_{\boldsymbol{i}}\left|\sum_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{ik}}\xi_{\boldsymbol{k}}\right|\leqq\sum_i\sum_k|a_{ik}||\xi_k|=\sum_k[|\xi_k|\sum_i|a_{ik}|]\leqq n\boldsymbol{A}\sum_k|\xi_k|=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_\infty}\|\boldsymbol{x}\|_1;$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}}\left|\sum_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{ik}}\xi_k\right|^2}\leqq\sqrt{\sum_i[\sum_k|a_{ik}||\xi_k|]^2}=\sqrt{\sum_i a^2[\sum_k|\xi_k|]^2}$$

$$=\sqrt{n}\,\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{x}\|_2\leqq n\boldsymbol{A}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_\infty}\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

8. 非负性与齐次性是显然的, 我们先证三角不等式和相容性成立.
$\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$,

$\boldsymbol{C}=(c_{st})\in\mathbf{C}^{n\times l}$ 且 $\boldsymbol{A}=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, $\boldsymbol{B}=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, $\boldsymbol{C}=\max\limits_{s,t}|c_{st}|$. 则

$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{M}}=\max\{m,n\}\max\limits_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|\leqq\max\{m\ ,n\ \}\max\limits_{i,j}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)\leqq\max\{m\ ,n\ \}$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

$$=\max\{m\ ,n\ \}\boldsymbol{A}+\max\{m\ ,n\ \}\boldsymbol{B}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}+\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{M}};$$

$$\|\boldsymbol{AC}\|_{\mathrm{M}}=\max\{m\ ,l\ \}\max_{i,t}\left|\sum_k a_{ik}c_{kt}\right|\leqq\max\{m\ ,n\ \}\max_{i,t}\{\sum_k|a_{ik}||c_{kt}|\}$$

$$\leqq\max\{m\ ,n\ \}\max_{i,t}\{\sqrt{\sum_k|a_{ik}|^2}\cdot\sqrt{\sum_k|c_{kt}|^2}\}\qquad\text{(Minkowski 不等式)}$$

$$=\max\{m\ ,n\ \}n\boldsymbol{AC}\leqq\max\{m\ ,n\ \}\max\{n\ ,l\ \}\boldsymbol{AC}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{C}\|_{\mathrm{M}}.$$

下证与相应的向量范数的相容性.

设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$, $d=\max\limits_k\{|\xi_k|\}$, 则有

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\sum_{\boldsymbol{i}}\left|\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a_{ik}\xi_k}\right|\leqq\sum_i\sum_k|a_{ik}||\xi_k|=\sum_k(|\xi_k|\sum_i|a_{ik}|)$$
$$\leqq\sum_k na|\xi_k|=n\boldsymbol{A}\sum_k|\xi_k|\leqq\max\{m\ ,n\}\boldsymbol{A}\sum_k|\xi_k|$$
$$=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{x}\|_1;$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_i\left|\sum_k a_{ik}\xi_k\right|^2}\leqq\sqrt{\sum_i(\sum_k|a_{ik}||\xi_k|)^2}\leqq\sqrt{\sum_i(\sum_k|a_{ik}|^2\sum_k|\xi_k|^2)}\quad\text{(Hölder 不等式)}$$

$$=\sqrt{\sum_i\sum_k|a_{ik}|^2}\cdot\sqrt{\sum_k|\xi_k|^2}\leqq\sqrt{mn}\,\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{x}\|_2$$
$$\leqq\max\{m\ ,n\}\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{x}\|_2;$$
$$\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty=\max_{\boldsymbol{i}}\{\left|\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}a_{\boldsymbol{ik}}\xi_{\boldsymbol{k}}\right|\}\leqq\max_i\{\sum_{k=1}^n|a_{ik}||\xi_k|\}$$

$$\leqq \max_i\{\sqrt{\sum_k |a_{ik}|^2}\cdot\sqrt{\sum_k |\xi_k|^2}\}\leqq \max_i\{\sqrt{na^2}\cdot\sqrt{nd^2}\}$$

$$=n\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\leqq \max\{m,n\}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{x}\|_\infty .$$

9. 只证范数的相容性公理及与向量 2－范数的相容性. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{st})\in\mathbf{C}^{n\times l}$,

$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\boldsymbol{A}=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, $\boldsymbol{B}=\max\limits_{s,t}|b_{st}|$, 则

$$\|\boldsymbol{AB}\|_{\mathrm{G}}=\sqrt{ml}\max_{1\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{m},1\le t\le \boldsymbol{l}}\left|\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}a_{\boldsymbol{ik}}b_{\boldsymbol{kt}}\right|\leqq\sqrt{ml}\max_{i,t}\{\sum_k|a_{ik}||b_{kt}|\}$$

$$\leqq\sqrt{ml}\max_{i,t}\{\sqrt{\sum_k|a_{ik}|^2}\cdot\sqrt{\sum_k|b_{kt}|^2}\}\quad \text{(Minkowski 不等式)}$$

$$\leqq\sqrt{ml}\ \mathrm{n}ab=(\sqrt{mn}a)(\sqrt{nl}b)=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{G}}\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{G}} .$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}}\left|\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}a_{\boldsymbol{ik}}\xi_{\boldsymbol{k}}\right|^2}\leqq\sqrt{\sum_i(\sum_k|a_{ik}||\xi_k|)^2}$$

$$\leqq\sqrt{\sum_i(\sum_k|a_{ik}|^2\cdot\sum_k|\xi_k|^2)}\qquad \text{（Hölder 不等式）}$$

$$\leqq\sqrt{\sum_i(na^2\cdot\sum_k|\xi_k|^2)}=\sqrt{mn}\,\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

$$=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{G}}\|\boldsymbol{x}\|_2 .$$

10. 利用定理 2.12 得

$$\|\boldsymbol{U}\|_2=\|\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\|_2=\|\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}\|_2=1 .$$

11.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1=5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$; $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty=5\cdot 2=10$.

12．设 $\boldsymbol{x}$ 是对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}=\lambda^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}$.又设 $\|\cdot\|_v$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上与矩阵范数$\|\cdot\|$相容的向量范数,那么

$$|\lambda|^{\boldsymbol{m}}\|\boldsymbol{x}\|_v=\|\lambda^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}\|_v=\|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}\|_v\leqq\|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\|\|\boldsymbol{x}\|_v$$

因 $\|\boldsymbol{x}\|_v>0$, 故由上式可得 $|\lambda|^{\boldsymbol{m}}\leqq\|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\|\Rightarrow|\lambda|\leqq\sqrt[\boldsymbol{m}]{\|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\|}$.

习　题　三

1. $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2c)(\lambda+c)^2$，当 $\rho(\lambda)=|c|<1$ 时，根据定理 3.3, $\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

2. 令 $\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}$，$\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{S}$，则

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\lim_{k\to+\infty}(\boldsymbol{S}^{(k)}-\boldsymbol{S}^{(k)})=0.$$

反例：设 $\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^k$，则因 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}$ 发散，故 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 发散，但 $\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{O}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$，则 $\rho(\boldsymbol{A})\leqq\|\boldsymbol{A}\|_\infty=$行和范数=0.9＜1，根据定理 3.7,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}.$$

4. 我们用用两种方法求矩阵函数 e^{A}:
相似对角化法. $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2+a^2$，$\lambda=\mathrm{i}a,-\mathrm{i}a$

当 $\lambda=\mathrm{i}a$ 时，解方程组 $(\mathrm{i}a-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得解向量 $\boldsymbol{p}_1=(\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-\mathrm{i}a$ 时，解方程组 $(\mathrm{i}a+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得解向量 $\boldsymbol{p}_2=(-\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}}$.令

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$，于是

$$\mathrm{e}^{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{i}a & 0\\ 0 & -\mathrm{i}a\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}.$$

利用待定系数法. 设 $\mathrm{e}^{\lambda}=(\lambda^2+a^2)q(\lambda)+r(\lambda)$，且 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda$，则由

$$\begin{cases}b_0+b_1\mathrm{i}a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\\ b_0-b_1\mathrm{i}a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\end{cases}$$

$\Rightarrow b_0=\cos a$, $b_1=\frac{1}{a}\sin a$.于是

$$\mathrm{e}^{A}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}=\cos a\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}+\frac{1}{a}\sin a\begin{pmatrix}&-a\\a&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos a\end{pmatrix}.$$

后一求法显然比前一种方法更简便，以后我们多用待定系数法. 设

$$f(\lambda)=\cos\lambda,\ 或\ \sin\lambda$$

则有

$$\begin{cases}b_0+b_1\mathrm{i}a=\sin\mathrm{i}a\\b_0-b_1\mathrm{i}a=-\sin\mathrm{i}a\end{cases}\quad 与\quad\begin{cases}b_0+b_1\mathrm{i}a=\cos\mathrm{i}a\\b_0-b_1\mathrm{i}a=\cos\mathrm{i}a\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}b_0=0\\b_1=-\dfrac{\mathrm{i}}{a}\sin\mathrm{i}a\end{cases}\quad 与\quad\begin{cases}b_0=\cos\mathrm{i}a\\b_1=0\end{cases}$$

故

$$(\frac{\mathrm{i}}{2a}\sin\mathrm{i}a)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\sin\mathrm{i}a\\-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}a&0\end{pmatrix}=\sin\boldsymbol{A}\ 与$$

$$(\cos\mathrm{i}a)\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\cos\mathrm{i}a&0\\0&\cos\mathrm{i}a\end{pmatrix}=\cos\boldsymbol{A}.$$

5. 对 $\boldsymbol{A}$ 求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

根据 p69 方法二,

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{t},\mathrm{e}^{2t})\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\mathrm{e}^{2t}&4\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}&2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\\0&3\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{-t}&3\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{-t}\\0&3\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{-t}&3\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\sin(-1),\sin1,\sin2)\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sin2&4\sin2-2\sin1&2\sin2-4\sin1\\0&0&6\sin1\\0&6\sin1&0\end{pmatrix}$$

6. $D_3(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$, $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

现设

$r(\lambda,t)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$，则有

$$\begin{cases} b_0+b_1+b_2=\mathrm{e}^t \\ \quad b_1+2b_2=t\,\mathrm{e}^t \\ \qquad b_0=1 \end{cases} \Rightarrow b_0=1,\ b_1=2\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^t-2,\ b_2=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+1.$$ 于是

$\mathrm{e}^{At}=r(\boldsymbol{A},t)=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}+(2\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^t-2)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+(t\mathrm{e}^t-$

$\mathrm{e}^t+1)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^t-1&t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+1\\0&1&\mathrm{e}^t-1\\0&0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$

同理,由

$$\begin{cases} b_0+b_1+b_2=\cos t \\ \quad b_1+2b_2=-t\sin t \\ \qquad b_0=1 \end{cases} \Rightarrow b_0=1,\ b_1=t\sin t+2\cos t-2,\ b_2=1-t\sin t-\cos t.$$ 将

其代入 $\cos\boldsymbol{A}t=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2$，求出

$$\cos\boldsymbol{A}t=\begin{pmatrix}\cos t&\cos t-1&1-t\sin t-\cos t\\0&1&\cos t-1\\0&0&\cos t\end{pmatrix}$$

7. 设 $f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$,$\boldsymbol{S}^N=\sum_{k=0}^{N}a_k\boldsymbol{A}^k$. 则 $f(\boldsymbol{A})=\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{S}^N$，并且由于

$$(\boldsymbol{S}^N)^{\mathrm{T}}=(\sum_{k=0}^{N}a_k\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=\sum_{k=0}^{N}a_k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k$$

所以，$f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\lim_{N\to+\infty}(\boldsymbol{S}^N)^{\mathrm{T}}=f(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$.

8, (1) 对 $\boldsymbol{A}$ 求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$$

则有

$$\mathrm{e}^{At}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&t\mathrm{e}^t&\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t&\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t\\&\mathrm{e}^t&t\,\mathrm{e}^t&\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t\\&&\mathrm{e}^t&t\,\mathrm{e}^t\\&&&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&0&0&0\\t\,\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^t&0&0\\\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t&t\,\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^t&0\\\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t&\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t&t\,\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

$$
\sin \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \sin t & t\cos t & -\frac{t^2}{2}\sin t & -\frac{t^3}{6}\cos t \\ & \sin t & t\cos t & -\frac{t^2}{2}\sin t \\ & & \sin t & t\cos t \\ & & & \sin t \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \sin t & & & \\ t\cos t & \sin t & & \\ -\frac{t^2}{2}\sin t & t\cos t & \sin t & \\ -\frac{t^3}{6}\cos t & -\frac{t^2}{2}\sin t & t\cos t & \sin t \end{pmatrix}
$$

$$
\cos \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \cos t & -t\sin t & -\frac{t^2}{2}\cos t & \frac{t^3}{6}\sin t \\ & \cos t & -t\sin t & -\frac{t^2}{2}\cos t \\ & & \cos t & -t\sin t \\ & & & \cos t \end{pmatrix}\boldsymbol{P}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 & 0 \\ -t\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -\frac{t^2}{2}\cos t & -t\sin t & \cos t & 0 \\ \frac{t^3}{6}\sin t & -\frac{t^2}{2}\cos t & -t\sin t & \cos t \end{pmatrix}
$$

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 求出

$$
\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ & -2 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}
$$

则有

$$
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & & \\ & \mathrm{e}^{-2t} & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\sin\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -\sin 2t & t\cos 2t & & \\ & -\sin 2t & & \\ & & 0 & t \\ & & & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} -\sin 2t & t\cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \cos 2t & t\sin 2t & & \\ & \cos 2t & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos 2t & t\sin 2t & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. (1) $\sin^2\boldsymbol{A}+\cos^2\boldsymbol{A}=[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}})]^2=[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}})]^2$

$=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\boldsymbol{A}}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\boldsymbol{A}}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}})+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\boldsymbol{A}}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\boldsymbol{A}}+\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}})$

$=\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{I}$

(2) $\sin(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\sin\boldsymbol{A}\cos(2\pi\boldsymbol{I})+\cos\boldsymbol{A}\sin(2\pi\boldsymbol{I})$

$=\sin\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I}-\frac{1}{2!}(2\pi\boldsymbol{I})^2+\frac{1}{4!}(2\pi\boldsymbol{I})^4-\cdots]+\cos\boldsymbol{A}[2\pi\boldsymbol{I}-\frac{1}{3!}(2\pi\boldsymbol{I})^3+\frac{1}{5!}(2\pi\boldsymbol{I})^5-\cdots]$

$=\sin\boldsymbol{A}[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^2+\frac{1}{4!}(2\pi)^4-\cdots]\boldsymbol{I}+\cos\boldsymbol{A}[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^3+\frac{1}{5!}(2\pi)^5-\cdots]\boldsymbol{I}$

$=\sin\boldsymbol{A}\cos2\pi+\cos\boldsymbol{A}\sin2\pi$

（3）的证明同上.

(4) 因为 $\boldsymbol{A}(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I})=(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}$,所以根据定理 3.10 可得

$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{I}+(2\pi\boldsymbol{I})+\frac{1}{2!}(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I})^2+\frac{1}{3!}(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I})^3+\cdots]$

$=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\{[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^2+\frac{1}{4!}(2\pi)^4-\cdots]+\mathrm{i}[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^3+\frac{1}{5!}(2\pi)^5-\cdots]\}\boldsymbol{I}$

$=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\{\cos2\pi+\mathrm{i}\sin2\pi\}\boldsymbol{I}$

$=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$

此题还可用下列方法证明:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} & & & \\ & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{PIP}^{-1}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$$

用同样的方法可证: $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{I}}$.

10. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 根据第 7 题的结果得 $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}$，于是有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{I}$$

11. 因 A 是 Hermite 矩阵，$(\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{A}$，于是有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}})^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{I}$$

12. 根据定理 3.13, $\boldsymbol{A}^{-1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，利用定理 3.14 得

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau=\int_0^t \boldsymbol{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{A}^{-1}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I}).$$

13. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\boldsymbol{A}(t))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1)=0$, $\det(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t))=1$,

$$\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}$$

14. $$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t \tau\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t \tau^2\mathrm{d}\tau\\ \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t 2\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau & 0\\ \int_0^t 3\tau\mathrm{d}\tau & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1) & t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t}+1 & \frac{1}{3}t^3\\ 1-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t}-1 & 0\\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

15. 取 $m=2$, $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}t^2 & t\\ 0 & t\end{pmatrix}$, 则

$\boldsymbol{A}^2(t)=\begin{pmatrix}t^4 & t^3+t^2\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t))^2=\begin{pmatrix}4t^3 & 3t^2+2t\\ 0 & 2t\end{pmatrix}\neq$

$2\boldsymbol{A}(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}4t^3 & 2t^2+2t\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)]^m=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}(t)\cdots\boldsymbol{A}(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}+\boldsymbol{A}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{A}(t)]^{m-2}+\cdots$$
$$+[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$$

所以当$(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)]^m=[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)+[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)+\cdots[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$$
$$=m[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$$

16. (1) 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}=(\xi_{ij})_{n\times m}$，则 $\boldsymbol{BX}=(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\xi_{kj})_{m\times m}$,于是有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})=\sum_{k=1}^{n}b_{1k}\xi_{k1}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\xi_{kj}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}b_{mk}\xi_{km}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})}{\partial\xi_{ij}}=b_{ji}\qquad(i=1,2,\cdots,n\,;j=1,2,\cdots,m)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{m1}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ b_{1n}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

由于 $\boldsymbol{BX}$ 与 $(\boldsymbol{BX})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的迹相同，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}))=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$f=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{AX})$，则有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\xi_{11}&\cdots&\xi_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ \xi_{1m}&\cdots&\xi_{nm}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}\sum_{k}a_{1k}\xi_{k1}&\cdots&\sum a_{1k}\xi_{km}\\ \vdots&&\vdots\\ \sum_{k}a_{nk}\xi_{k1}&\cdots&\sum_{k}a_{nk}\xi_{km}\end{pmatrix}$$

$$f=\sum_{l}\xi_{l1}\sum_{k}a_{lk}\xi_{k1}+\cdots+\sum_{l}\xi_{lj}\sum_{k}a_{lk}\xi_{kj}+\cdots+\sum_{l}\xi_{lm}\sum_{k}a_{lk}\xi_{km}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\xi_{ij}}&=\frac{\partial}{\partial\xi_{ij}}[\sum_{l}\xi_{lj}\sum_{k}a_{lk}\xi_{kj}]=\sum_{l}[\frac{\partial\xi_{lj}}{\partial\xi_{ij}}\cdot(\sum_{k}a_{lk}\xi_{kj})+\xi_{lj}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_{ij}}(\sum_{k}a_{lk}\xi_{kj})]\\&=\sum_{k}a_{ik}\xi_{kj}+\sum_{k}a_{li}\xi_{lj}\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_{ij}}\right)_{n\times m}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$$

17. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}a_{k1},\sum_{k=l}^{n}\xi_{k}a_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}a_{kn})$,且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\xi_{1}}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\xi_{2}}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{d\xi_{n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

18.

$$\left(\mathrm{e}^{At}\right)'=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{At}=\begin{pmatrix}4\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}\\ 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&4\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}\\ 6\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}&6\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}&3\mathrm{e}^{t}-4\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$$

在上式中令 t=0, 则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{O}}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{pmatrix}$$

19. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda+1)^2$. 记 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}$,并设 $f(\lambda)=g(\lambda)\varphi(\lambda)+(b_0+b_1\lambda)$, 则

$$\begin{cases}b_0-b_1=\mathrm{e}^{-t}\\ \quad\ b_1=t\,\mathrm{e}^{-t}\end{cases}\Rightarrow\ b_0=(1+t)e^{-t},b_1=t\,\mathrm{e}^{-t}$$

于是

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=(1+t)\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{I}+t\,\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1+4t&0&8t\\3t&1&6t\\-2t&0&1-4t\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1+12t\\1+9t\\1-6t\end{pmatrix}$$

20. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\\mathrm{e}^{t}-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\varphi(\lambda)=\det(\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A})=\lambda^3-\lambda^2$.

根据 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,可得; $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^2,\cdots$.于是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+(\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots)\boldsymbol{A}^2\\&=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+(\mathrm{e}^{t}-1-t)\boldsymbol{A}^2\\&=\begin{pmatrix}1-2t&t&0\\-4t&2t+1&0\\1+2t-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{t}-t-1&\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}[\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau]=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}[\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau]=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\2t\\0\end{pmatrix}]=\begin{pmatrix}1\\1\\(t-1)\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}$$

习 题 四

1. Doolite 分解的说明,以 3 阶矩阵为例:

$$\begin{array}{ccc|l} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 第\ 1\ 框\\ l_{21} & r_{22} & r_{23} & 第\ 2\ 框\\ l_{31} & l_{32} & r_{33} & 第\ 3\ 框\end{array}$$

计算方法如下:
（i）先 i 框,后 i+1 框,先 r 后 l. 第 1 框中行元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素;
（ii）第 2 框中的 r_{2j} 为 $\boldsymbol{A}$ 中的对应元素 a_{2j} 减去第 1 框中同行的 l_{21} 与同列的 r_{1j} 之积. 第 3 框中的 r_{33} 为 $\boldsymbol{A}$ 中的对应元素 a_{33} 先减去第 1 框中同行的 l_{31} 与同列的 r_{13} 之积，再减去第 2 框中同行的 l_{32} 与同列的 r_{23} 之积;
（iv）第 2 框中的 l_{32} 为 $\boldsymbol{A}$ 中的对应元素 a_{32} 先减去第 1 框中同行的 l_{31} 与同列的 r_{12} 之积，再除以 r_{22}.
计算如下:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -6 \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Crout 分解的说明, 以 3 阶矩阵为例:

$$\begin{array}{cccl} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \text{第 1 框} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \text{第 2 框} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \text{第 3 框} \end{array}$$

（i）先 i 框, 后 i+1 框. 每框中先 l 后 r. 第 1 框中的列元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列的对应元素;
(ii)第 2 框中的 l_{i2} 为 $\boldsymbol{A}$ 中对应元素 a_{i2} 减去第 1 框中同行的 l_{i1} 与同列的 u_{12} 之积;
(iv)第 2 框中的 u_{23} 为 $\boldsymbol{A}$ 中的对应元素 a_{23} 减去第 1 框中同行的 l_{21} 与同列的 u_{13} 之积,再除以 l_{22}.第 3 框中的 l_{33} 为 $\boldsymbol{A}$ 中的对应元素 a_{33} 先减去第 1 框中同行的 l_{31} 与同列的 u_{13} 之积,再减去第 2 框中同行的 l_{32} 与同列的 u_{23} 之积.
计算如下:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & -6 \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & -6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2．先看下三角矩阵的一种写法:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0\\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}}{a_{22}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix},\quad a_{ii}\neq 0$$

对本题中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求得 Crout 分解为

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 2 & \dfrac{1}{5} & 0\\ -4 & -\dfrac{2}{5} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{2}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

利用下三角矩阵的写法对上面的分解变形可得

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{2}{5} & 1 & 0\\ -\dfrac{4}{5} & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{2}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{2}{5} & 1 & 0\\ -\dfrac{4}{5} & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{2}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.对 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列向量 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$，构造 Householder 矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 使得

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\|_2\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_1\in\boldsymbol{C}^3$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}^{(1)}-\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\|_2\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{\beta}^{(1)}-\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\|_2\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}-\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\|_2\boldsymbol{e}_1\right\|_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc}1&1&1\\\hline 0&4&1\\0&3&2\end{array}\right),\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}$$

对$\boldsymbol{A}_1$的第 1 列向量$\boldsymbol{\beta}^{(2)}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，类似构造 Householder 矩阵$\boldsymbol{H}_2$:

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{\beta}^{2)}-\left\|\boldsymbol{\beta}^{(2)}\right\|_2\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{\beta}^{(2)}-\left\|\boldsymbol{\beta}^{2)}\right\|_2\right\|_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1\in\boldsymbol{C}^2,$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{I}_2-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

令$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\boldsymbol{H}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{H}_1$，则有 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$ 并且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{H}_1^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&\boldsymbol{H}_2\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\boldsymbol{H}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\1&0&0\\0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

4. 对$\boldsymbol{A}$的第 1 列向量$\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$，构造 Givens 矩阵$\boldsymbol{T}_{13}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc}2\sqrt{2}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}\\\hline 0&2&2\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}2\sqrt{2}&\cdots\\\hline \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_1\end{array}\right)$$

对$\boldsymbol{A}_1$的第 1 列向量$\boldsymbol{\beta}^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，构造 $\tilde{\boldsymbol{T}}_{12}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$,

$$\widetilde{T}_{12}\boldsymbol{\beta}^{(2)}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \widetilde{T}_{12}A_1=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{2}} & \dfrac{7}{3\sqrt{2}}\\0 & \dfrac{4}{3}\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{T}}_{12}\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}}\\0 & \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \dfrac{7}{3\sqrt{2}}\\0 & 0 & \dfrac{4}{3}\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_{12}{}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_{13}{}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3}\\0 & \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}}\\0 & \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \dfrac{7}{3\sqrt{2}}\\0 & 0 & \dfrac{4}{3}\end{pmatrix}=\boldsymbol{QR}$$

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & \mathrm{i} & 0\\-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 施行正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\0\\\mathrm{i}\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}-1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\\dfrac{1}{2}\\\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{i}}{3}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\\dfrac{1}{2}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\-\dfrac{2\mathrm{i}}{3}\\-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{\mathrm{i}}{3}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3\end{cases}$$

写成矩阵行式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{\mathrm{i}}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{K}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & & \\ & \frac{3}{\sqrt{6}} & \\ & & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

最后得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & & \\ & \frac{3}{\sqrt{6}} & \\ & & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\boldsymbol{K}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{QR}$$

6. 令

$$\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{5}} & 0 & 2\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

再令

$$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_{13}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{10}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$$

最后令

$$\boldsymbol{T}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{10}{\sqrt{30}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{10}{\sqrt{30}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{QR}$$

7. $\boldsymbol{\beta}^{(1)}=(0,1)^{\mathrm{T}}$, $\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\|_2=1$, $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}^{(1)}-\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}-\boldsymbol{e}_1\right\|_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}_2-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{H}_1\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{HAH}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{H}\text{ 是 Householder 矩阵.}$$

同理, 对 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$, 取 $c=0, s=1$, $\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T}_{12}\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{TAT}'=\boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{T}\text{ 是 Givens 矩阵.}$$

8. 对 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}$，计算

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{\beta}^{(1)}-20\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{\beta}^{(1)}-20\boldsymbol{e}_1\right\|_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\boldsymbol{H}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{QAQ}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&20&0\\20&600&75\\0&75&0\end{pmatrix}$$

同理，对 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$,为构造 Givens 矩阵，令 $c=\frac{3}{5}$，$s=\frac{4}{5}$，$\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$，

则

当 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\boldsymbol{T}_{12}\end{pmatrix}$ 时，$\boldsymbol{TAT}'=\begin{pmatrix}0&20&0\\20&600&-75\\0&-75&0\end{pmatrix}$.

1.（1）对 A 施行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&2&3&0&1&0&0\\0&2&1&-1&0&1&0\\-2&4&-2&-4&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&2&1&1&-1&0\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&2&-4&1\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&0\\2&-4&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(2) $$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&-1&1&1&1&0&0&0\\-1&1&-1&-1&0&1&0&0\\-1&-1&1&1&0&0&1&0\\1&1&-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

（3）$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&6&1&0&0&0\\2&4&6&12&0&1&0&0\\1&2&3&6&0&0&1&0\\2&4&6&12&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&6&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right)$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&6\end{pmatrix}$$

10. (1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值是 5，0，0. 分别对应特征向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，

从而 V=I, $\boldsymbol{V}_1=(\boldsymbol{p}_1)$, $\boldsymbol{\Sigma}=(\sqrt{5})$, $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. 令$\boldsymbol{U}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1\ \vdots\ \boldsymbol{U}_2)$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{I}$$

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$的特征值是$\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$, 对应的特征向量分别为

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.于是

$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\qquad \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0\end{pmatrix}$

取 $\boldsymbol{U}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，构造正交矩阵$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1\ \vdots\ \boldsymbol{U}_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

‘

所以，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

11.根据第一章定理 1.5，$A^{\mathrm{H}}A$ 的特征值之和为其迹，而由第二章 2.7 F－范数的定义

$$\|A\|_{\mathrm{F}}^2=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=A^{\mathrm{H}}A\text{的特征值之和}=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2$$

习 题 五

1．设 $x=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n)^{\mathrm{T}}$ 为对应于特征值 λ 的单位特征向量，即

$$(QD)x=\lambda x$$

两边取转置共轭：$x^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}Q^{\mathrm{H}}=\bar{\lambda}x^{\mathrm{H}}$ 与上式左乘得

$$x^{\mathrm{H}}D^{\mathrm{H}}Dx=|\lambda|^2$$

即 $|\lambda|^2=|d_1|^2|\eta_1|^2+|d_2|^2|\eta_2|^2+\cdots+|d_n|^2|\eta_n|^2$,由此立即有

$$\min_i|d_i|^2\leqslant|\lambda|^2\leqslant\max_i|d_i|^2$$

从而 $\min_i|d_i|\leqslant|\lambda|\leqslant\max_i|d_i|$.

后一不等式的另一证明：根据定理 2.13，

$$|\lambda|\leqslant\rho(QD)\leqslant\|QD\|_2\ \underline{\underline{\text{定理2.11}}}\ \|D\|_2=\sqrt{D^{\mathrm{H}}D\text{的最大特征值}}=\max_i|d_i|$$

2. A 的四个盖尔园是 G_1：$|z-9|\leqslant 6$，G_2：$|z-8|\leqslant 2$，G_3：$|z-4|\leqslant 1$，G_4：$|z-1|\leqslant 1$.

由于 G_4 是一个单独的连通区域，故其中必有一个实特征值.

$G_1\cup G_2\cup G_3$ 是连通区域，其中恰有三个特征值，因而含有一个实特征值.

3. A 的四个盖尔园

$$G_1:\ |z-1|\leqslant\frac{13}{27},\ G_2:\ |z-2|\leqslant\frac{13}{27},\ G_3:\ |z-3|\leqslant\frac{13}{27},\ G_4:\ |z-4|\leqslant\frac{13}{27}$$

是互相隔离的，并且都在右半平面，从而每个盖尔园中恰有一个特征值且为正实数.

4．设 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为 A 的待征值，则有盖尔园 G_k,使得 $\lambda\in G_k$.若 $\alpha\leqslant 0$, 则

$$|\alpha-a_{kk}|\leqslant|(\alpha-a_{kk})+\mathrm{i}\beta|\leqslant R_k$$

故 $(-\alpha)+a_{kk}\leqslant R_k$,即 $a_{kk}\leqslant R_{kk}+\alpha\leqslant R_{kk}$，这与 A 是严格对角占优的条件矛盾.

5. （1）当两个盖尔园的交集中含有两个特征值时;

(2) 当两个盖尔园相切且切点是 A 的单特征值时.

6. $\boldsymbol{A}$ 的盖尔园 $G_1:|z-2|\leqslant 3$，$G_2:|z-10|\leqslant 2$，$G_3:|z-20|\leqslant 10$. 因 G_1 是与 $G_2\cup G_3$ 分离

的，故 G_1 中恰有一个实特征值 $\lambda_1\in[-1, 5]$.

$\boldsymbol{A}$ 的列盖尔园 $G_1':|z-2|\leqslant 9$，$G_2':|z-10|\leqslant 4$，$G_3':|z-20|\leqslant 2$. 因 G_3' 是与 $G_1'\cup G_2'$ 分离

的，故 G_3' 中恰有一个实特征值 $\lambda_3\in[18, 22]$.

选取 $\boldsymbol{D}$=diag(1, 1, $\frac{1}{2}$)，则 $\boldsymbol{DAD}^{-1}$ 的盖尔园 G_1'' ：$|z-2|\leqslant 4$，G_2''：$|z-10|\leqslant 3$，G_3''：

$|z-20|\leqslant 5$. 这三个盖尔园是相互独立的，故必然有

$$\lambda_1\in[-2, 6],\qquad \lambda_2\in[7, 13],\qquad \lambda_3\in[15, 25]$$

与上面所得的结果对照可知利用 Gerschgorin 定理，特征值的最佳估计区间为

$$\lambda_1\in[-1, 5],\qquad \lambda_2\in[7, 13],\qquad \lambda_3\in[18, 22]$$

7. 因为

$$\det(\lambda\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda & -\lambda-2\\ -\lambda-2 & 4\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(3\lambda+2)$$

所以广义特征值为 λ_1=2，$\lambda_2=-\frac{2}{3}$.分别求解齐次线性方程组

$$(\lambda_1\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\quad,\quad(\lambda_2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

可得对应于 λ_1 与 λ_2 的特征向量分别为

$$k_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(k_1\neq 0),\qquad k_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad(k_2\neq 0)$$

8. 先证明一个结果：若 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermit 矩阵，λ_1,λ_n 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的最大、最小特征值，则

$$\lambda_1=\max_{x\neq 0}R(x)=\max_{\|x\|_2=1}R(x),\qquad \lambda_n=\max_{x\neq 0}R(x)=\max_{\|x\|_2=1}R(x)$$

事实上，$\max\limits_{x\neq 0}R(x)=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}}{\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}$

下证 $\lambda_1>\mu_1$，$\lambda_n>\mu_n$. 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，则

$$\lambda_1=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Qx})>\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Bx}=\mu_1$$

$$(\ \boldsymbol{Q}\text{ 正定，}\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Qx}>0\ )$$

同理可证 $\lambda_n > \mu_n$.

现在设 $1<s<n$, 则根据定理 5.10 及上面的结果,有

$$\lambda_s=\min_{P_1x=0}\max_{\|x\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\min\max(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) > \min_{P_1x=0}\max_{\|x\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mu_s$$

9. 显然，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征值. 设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_j=\lambda_j\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_j,\quad \boldsymbol{q}_j\neq\boldsymbol{0},\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 是按 $\boldsymbol{B}$ 标准正交的广义特征向量.

当 $\rho(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})<1$ 时，对任意 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{q}_1+c_2\boldsymbol{q}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{q}_n\neq\boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right| &=\left|(\bar{c}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}}+\bar{c}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{H}})\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{q}_1+c_2\boldsymbol{q}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{q}_n)\right| \\
&=\left|(\bar{c}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}}+\bar{c}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\bar{c}_n\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{H}})(c_1\lambda_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_2+\cdots+c_n\lambda_n\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_n)\right| \\
&=\left|\lambda_1|c_1|^2+\lambda_2|c_2|^2+\cdots+\lambda_n|c_n|^2\right| \\
&\leqslant\max_i|\lambda_i|\cdot(|c_1|^2+|c_2|^2+\cdots|c_n|^2) \\
&=\rho(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

反之，若对任意 $\boldsymbol{x}\neq0$, $\left|\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right|<\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 成立，并且 $|\lambda|=\rho(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}=\lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{0}$,则取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}$, 于是有

$$\left|\boldsymbol{q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}\right|=|\lambda|<\boldsymbol{q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}=1$$

10. 若 λ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值，$\boldsymbol{q}$ 是对应于 λ 的特征向量，即

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{q}=\lambda\boldsymbol{q}=\lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{q}$$

由此可知，λ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的相对于单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的广义特征值 ，因此

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\boldsymbol{BA}) &=\max_{\|x\|_2=1}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x})=\max_{\|x\|_2=1}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}}=\max_{\|x\|_2=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&=\max_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\leqslant\max_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})\max_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&=\lambda_1(\boldsymbol{B})\lambda_1(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\boldsymbol{BA}) &=\min_{\|x\|_2=1}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x})=\min_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&\geqslant\min_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})\min_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\
&=\lambda_n(\boldsymbol{B})\lambda_n(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

11. 由于 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})=\underset{\|x\|_2=1}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})}$，从而 5.24 式等价于

$$\lambda_r=\max_{P_2\in\mathbf{C}^{n\times(n-r)}}\min\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\mid \|\boldsymbol{x}\|_2=1,\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=0\}$$

我们约定，下面的最小值都是对$\|\boldsymbol{x}\|_2=1$来取的. 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 则

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

由于 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\in\mathbf{C}^{(n-r)\times n}$, 则在齐次线性方程组 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$中，方程的个数小于未知量的个数，根据 Cramer 法则，它必有非零解. 设 $\widetilde{\boldsymbol{y}}=(0,\cdots,0,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n)$，($\|\widetilde{\boldsymbol{y}}\|_2=1$)为满足方程的解(容易证明这种形式的解必存在)，则

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}} \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}}(\lambda_r|\eta_r|^2+\lambda_{r+1}|\eta_{r+1}|^2+\cdots\lambda_n|\eta_n|^2)\leqslant\lambda_r$$

注意到 $\{\widetilde{\boldsymbol{y}}|\ \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0},\ \|\widetilde{\boldsymbol{y}}\|_2=1\}\subseteq\{\boldsymbol{y}|\ \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{y}\|_2=1\}$,从而

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})\leqslant\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{y}})=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}} \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}\leqslant\lambda_r$$

特别地，取$\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{q}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{q}_n)$时，根据定理 5.9

$$\lambda_r=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

故(5.24)式成立.

12. 我们约定：以下的最小值是对单位向量来取的，即证

$$\lambda_r=\max_{\boldsymbol{P}_2\in\mathbf{C}^{n\times(n-r)}}\min\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})|\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1,\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

成立. 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 则有

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=0} \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$有形如 $\widetilde{\boldsymbol{y}}=(0,\cdots,0,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n),\|\widetilde{\boldsymbol{y}}\|_2=1$的解（不难证明这样的解一定存在），则因

$$\{\widetilde{\boldsymbol{y}}|\ (\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q})\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}\}\subseteq\{\boldsymbol{y}|\ (\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\}$$

所以

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})\leqslant\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}} \widetilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{y}}=\lambda_r|\eta_r|^2+\lambda_{r+1}|\eta_{r+1}|^2+\cdots+\lambda_n|\eta_n|^2\leqslant\lambda_r$$

特别地，取 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{q}_{r+1},\boldsymbol{q}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{q}_n)$时，根据定理 5.12 可得

$$\min_{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})=\lambda_r$$

由此即知（5.44）成立.

习　题　六

求广义逆矩阵{1}的一般方法：

1）行变换、列置换法

利用行变换矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和列置换矩阵 $\boldsymbol{P}$, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成

$$\boldsymbol{SAP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

则

$$A^{(1)}=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & L \end{pmatrix}S，其中 L 可取任意矩阵；$$

2）标准形法

利用行、列的初等变换将 A 化成标准形

$$SAT=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

则

$$A^{(1)}=T\begin{pmatrix} I_r & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}S，其中 \ L_{ij} 为任意适当阶的矩阵.$$

3） 行变换法

利用行变换将 A 化成

$$SA=\begin{pmatrix} D_{r\times n} \\ O_{(m-r)\times n} \end{pmatrix}$$

其中 D 为行满秩矩阵. 则

$$A^{(1)}=(D^{\mathrm{H}}(DD^{\mathrm{H}})^{-1},O_{n\times(m-r)})S$$

1. 根据 A 有形如

$$X=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & L \end{pmatrix}S$$

的{1}逆，其中 P 和 S 均为可逆矩阵，于是只要取 L 为任意可逆矩阵即可.

2.当 A 是 $m\times n$ 零矩阵时，容易验证任意 $n\times m$ 矩阵 X 都满足矩阵方程

$$AXA=A$$

3. 设 $A^{(1)}=(x_{ij})\in A\{1\}$，则由 $AXA=A$ 可得 $x_{ji}=1$,其余元素任意.

4. （1）$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$，

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$$

(2) $\left(\begin{array}{cccc:ccc} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 8 & -11 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\\0&0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-1&0&2\\-2\alpha&\alpha&-\alpha\\-2\beta&\beta&-\beta\end{pmatrix}$$

(3) $$\left(\begin{array}{ccc:cccc}1&0&2&1&0&0&0\\2&1&5&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1&0\\1&3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc:cccc}1&0&0&3&-1&1&0\\0&1&0&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1&0&-3&1\end{array}\right)$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1&0\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-1&0&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1&0\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

(4) $$\left(\begin{array}{ccc:cccc}0&0&2&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&-2&0\\0&0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right)$$

取

$$P=(e_1,e_3,e_2),\ S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&-2&0\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

则 $$A^{(1)}=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\alpha&\beta\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\\alpha&-\beta&-2\alpha-\beta&\beta\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

5. (1) 取 $A^{(1)}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\1&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，容易验证 $AA^{(1)}b=b$ 成立，故方程组有解.

通解是

$$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y=\begin{pmatrix}4\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

(2) 取 $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，因 $AA^{(1)}b=b$，故方程组有解. 通解是

$$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y=\begin{pmatrix}4\\ \frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

求 Moore-Penrose 逆的一般方法：

1） 若 F 是列满秩矩阵，则 $F^{+}=(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$;

2） 若 G 是行满秩矩阵，则 $G^{+}=G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}$;

3） 设 A 的满秩分解为 $A=FG$, 则 $A^{+}=G^{+}F^{+}=G^{\mathrm{H}}(F^{\mathrm{H}}AG^{\mathrm{H}})^{-1}F^{\mathrm{H}}$;

4） 设 A 的奇异值分解为

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma&O\\O&O\end{pmatrix}V^{\mathrm{H}}$$

则 $A^{+}=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&O\\O&O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}}$

4. 用定义直接验证：

1） $\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1^{+}&&&\\&d_2^{+}&&\\&&\ddots&\\&&&d_n^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}$, (注意 $d_i^{+}=\begin{cases}\frac{1}{d_1}, & d_1\neq 0\\ 0, & d_1=0\end{cases}$)

2)～4)的证明类似.

7. 当 $A=O$ 时，结论显然成立. 设 $A\neq O$, A 的满秩分解是 $A=FG$, 则

$$B=\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}FG\\O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F\\O\end{pmatrix}G=\widetilde{F}G$$

就是 B 的满秩分解. 于是 $B^{+}=G^{+}\widetilde{F}^{+}$.

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{+}&=(\widetilde{F}^{\mathrm{H}}\widetilde{F})^{-1}\widetilde{F}^{\mathrm{H}}=[(F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ O^{\mathrm{H}})\begin{pmatrix}F\\O\end{pmatrix}]^{-1}\left(F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ O^{\mathrm{H}}\right)\\&=(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}\left(F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ O^{\mathrm{H}}\right)\\&=\left(F^{+}\ \vdots\ O^{\mathrm{H}}\right)\end{aligned}$$

所以

$$B^{+}=G^{+}\left(F^{+}\;\vdots\;O^{\mathrm{H}}\right)=\left(G^{+}F^{+}\;\vdots\;O^{\mathrm{H}}\right)=\left(A^{+}\;\vdots\;O^{\mathrm{H}}\right)$$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $T=(1)$. A 是列满秩的，则

$$A^{+}=(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix},\ S^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},\ T^{-1}=T,\ SAT=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$(SAT)^{+}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix},\quad T^{-1}A^{+}S^{-1}=\frac{1}{2}(1)\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$$

可见，$(SAT)^{+}\neq T^{-1}A^{+}S^{-1}$.

9. (1) 在第 4 题中已求出 A 的行最简形，由此得出 A 的满秩分解

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}=FG$$

由此根据 A^{+} 的满秩分解计算法得

$$A^{+}=G^{\mathrm{H}}(F^{\mathrm{H}}AG^{\mathrm{H}})^{-1}F^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\3&-2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\2&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\3&-2\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18&-1\\10&8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}8&19&9\\-10&34&8\\44&-11&11\end{pmatrix}$$

(2) A 的满秩分解为

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&8&-11\\0&1&-5&7\end{pmatrix}=FG$$

$$A^{+}=G^{\mathrm{H}}(F^{\mathrm{H}}AG^{\mathrm{H}})^{-1}F^{\mathrm{H}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\8&-5\\-11&7\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}2&5&1\\3&8&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1&-1\\5&8&0&1\\1&2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\8&-5\\-11&7\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}2&5&1\\3&8&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\8&-5\\-11&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-36&90\\-81&159\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&5&1\\3&8&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1566}\begin{pmatrix}159 & -90\\ 81 & -36\\ 867 & -540\\ -1182 & 738\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1566}\begin{pmatrix}48 & 75 & -21\\ 54 & 117 & 9\\ 114 & 15 & -213\\ -150 & -6 & 294\end{pmatrix}=\frac{1}{522}\begin{pmatrix}16 & 25 & -7\\ 18 & 39 & 3\\ 38 & 5 & -71\\ -50 & -2 & 98\end{pmatrix}$$

(3) 因 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的，故

$$\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 11\\ 5 & 11 & 1\\ 11 & 1 & 31\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 5 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}340 & -144 & -116\\ -144 & 65 & 49\\ -116 & 49 & 41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 5 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}108 & -44 & -28 & 24\\ -46 & 22 & 16 & 2\\ -34 & 22 & 8 & -10\end{pmatrix}==\frac{1}{22}\begin{pmatrix}54 & -22 & -14 & 12\\ -23 & 11 & 8 & 1\\ -17 & 11 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

(4) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$$

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -1 & 5\\ -2 & 6 & -1 & 5\\ 8 & -2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

5. (1) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\\3&-1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1&3\\1&1&1&2\\3&5&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\\3&-1\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}86&-4\\133&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}=\frac{1}{102}\begin{pmatrix}2&-1&5\\-8&-47&31\\12&45&-21\\14&44&-16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{17}(22,48,-4,18)^{\mathrm{T}}$$

注：书中的答案可能错了！

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-12\\-12&60\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\-4&-1&2\\6&3&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{6}(8,1,-7,9)^{\mathrm{T}}$$

6. (1) 方程组的系数矩阵的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\2&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-2&6&-1&5\\-2&6&-1&5\\8&-2&4&2\end{pmatrix}$$

方程组的极小最小二乘解是

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) 方程组的系数矩阵的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 60 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的极小最小二乘解是

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ -13 \\ 27 \end{pmatrix}$$

习 题 七

1．设 $A=(a_{ij})_{m\times m}$，$B=(b_{ij})_{p\times p}$，则

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1m}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2m}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mm}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

由此可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=a_{11}\mathrm{tr}(B)+a_{22}\mathrm{tr}(B)+\cdots+a_{mm}\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

2．$\|\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\|_2^2=(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\otimes\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x})\otimes(\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y})=1\otimes1=1.$

3. 根据直积的性质，有

① $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$

② $(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})=(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})\otimes(\boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+})=\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+}$

③ $[(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})]^{\mathrm{H}}=[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+})]^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+})^{\mathrm{H}}$

$$=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})$$

同理 ④ $[(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})]^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})$ ，故 Penrose 方程成立，从而

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+}$$

3. 设 rank$(\boldsymbol{A})=r_1$, rank$(\boldsymbol{B})=r_2$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{i,}\ \boldsymbol{Q}_i$ ， i=1,2 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1,\quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$

于是有

$$(\boldsymbol{P}_1\otimes\boldsymbol{P}_2)(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{Q}_1\otimes\boldsymbol{Q}_2)=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{r_1r_2} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{P}_1\otimes\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{Q}_1\otimes\boldsymbol{Q}_2$ 都是可逆矩阵，故 $\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的标准形. 所以

$$\text{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\text{rank}(\boldsymbol{A})\text{rank}(B)=r_1r_2.$$

4. 只要 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_s$ 及 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_t$ 是线性无关的向量，都可证明

$$\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j,\quad i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,t$$

是线性无关的向量组. 事实上

若记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_s)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_t)$， 则

$$\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{Q},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_s\boldsymbol{Q})$$
$$=(\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{y}_1,\ \cdots\ \boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{y}_t,\ \boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{y}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{y}_t\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_s\otimes\boldsymbol{y}_1\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_s\otimes\boldsymbol{y}_t)$$

由第四题的结论可知，$r(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})=st$, 上式说明 $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ 是列满秩的，从而本题的结论成立.

6. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{J},\qquad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}=\tilde{\boldsymbol{J}}$$

则有

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\otimes(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ})=(\boldsymbol{P}^{-1}\otimes\boldsymbol{Q}^{-1})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{J}\otimes\widetilde{\boldsymbol{J}}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{m}}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix} \qquad =$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1\widetilde{\boldsymbol{J}} & & & \\ & \lambda_2\widetilde{\boldsymbol{J}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{m}}\widetilde{\boldsymbol{J}}\end{pmatrix}$$

最后的矩阵为对角阵，说明结论成立.

7. $|\lambda \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\underbrace{0,\ 0,\ \cdots\ 0}_{(n-1)\text{个}}$ ，n. 根据定理 7.1 可知 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_i n$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $\underbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0}_{(n-1)m\text{个}}$.

8. $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2，2，$\boldsymbol{B}$ 的特征值是－1，－2. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有互为相反的特征值，故矩阵方程有无穷多解. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$, 将矩阵方程拉直得

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 2\\ -4\end{pmatrix}$$

可求得通解为 $x_1=-c-4,\quad x_2=c,\quad x_3=4,\quad x_4=-6$. 于是矩阵方程的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 4 & -6\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad c\text{是任意常数}.$$

2. 将矩阵方程两端拉直得

$$[2\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{O}}$$

即

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解之得 $x_1=-c, x_2=-c, x_3=c, x_4=c$. 从而

$$\boldsymbol{X}=c\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad c\text{是任意常数}.$$

3. 根据 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-1)=m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$, 设 $r(t)=b_1\lambda+b_0$, 可求得

$$\begin{cases}r(0)=b_0=1\\ r(1)=b_1+b_0=\mathrm{e}^{t}\end{cases}$$

所以

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = b_1 \boldsymbol{A} + b_0 \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同理求得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 1 - \mathrm{e}^{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最后利用公式（7.17）得

$$\boldsymbol{X}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{X}_0 \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{I} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 1 - \mathrm{e}^{t} \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -(\mathrm{e}^{t} - 1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$