Mathematical modeling

第十六讲 傅里叶变换模型

周毓明
zhouyuming@nju.edu.cn

南京大学计算机科学与技术系

课程内容

1. 数学概念与模型
2. 实际案例与分析
3. 计算机典型应用

1.数学概念与模型

2.实际案例与分析

Joseph Fourier

出生	1768年3月21日 法国约讷省欧塞尔
逝世	1830年5月16日 法国巴黎
居住地	法国
国籍	 法国
研究领域	数学、物理和历史
任职于	巴黎高等师范学校 巴黎综合理工学院
母校	巴黎高等师范学校
著名成就	傅里叶变换

傅里叶变换
温室效应
量纲分析

应用 [编辑]

傅里叶变换在物理学、声学、光学、结构动力学、量子力学、数论、组合数学、概率论、统计学、信号处理、密码学、海洋学、通讯、金融等领域都有着广泛的应用。例如在信号处理中，傅里叶变换的典型用途是将信号分解成振幅分量和频率分量。

变换	时间	频率
连续傅里叶变换	连续，非周期性	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

continuous Fourier transform, CFT

变换	时间	频率
连续傅里叶变换	连续，非周期性	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

Fourier series, FS

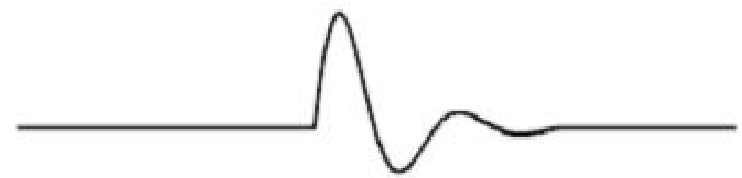
变换		频率
连续傅里叶	性	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

变换	[illegible]	频率
连续傅里叶变换	[illegible]	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

discrete time Fourier transform, DTFT

变换	时间	频率
连续傅里叶变换	连续，非周期性	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

discrete Fourier transform, DFT

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform *signals that are continious and aperiodic*	
Fourier Series *signals that are continious and periodic*	
Discrete Time Fourier Transform *signals that are discrete and aperiodic*	
Discrete Fourier Transform *signals that are discrete and periodic*	

傅里叶变换家族中各种变换的定义

×	连续时间	离散时间
时间非周期	$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{i2\pi ft}\,df$	$\bar{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\ e^{i\frac{2\pi k}{T_0}t}$
–	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-i2\pi ft}\,dt$	$\bar{X}(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\ e^{-i2\pi fnT}$
时间周期	$x[n]=T\int_{1/T}\bar{X}(f)\ e^{i2\pi fnT}\ df$	$x_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\ e^{i\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=0,\dots,N-1.$
–	$X[k]=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\bar{x}(t)\ e^{-i\frac{2\pi k}{T_0}t}\,dt$	$X_k=\sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-i\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=0,\dots,N-1.$

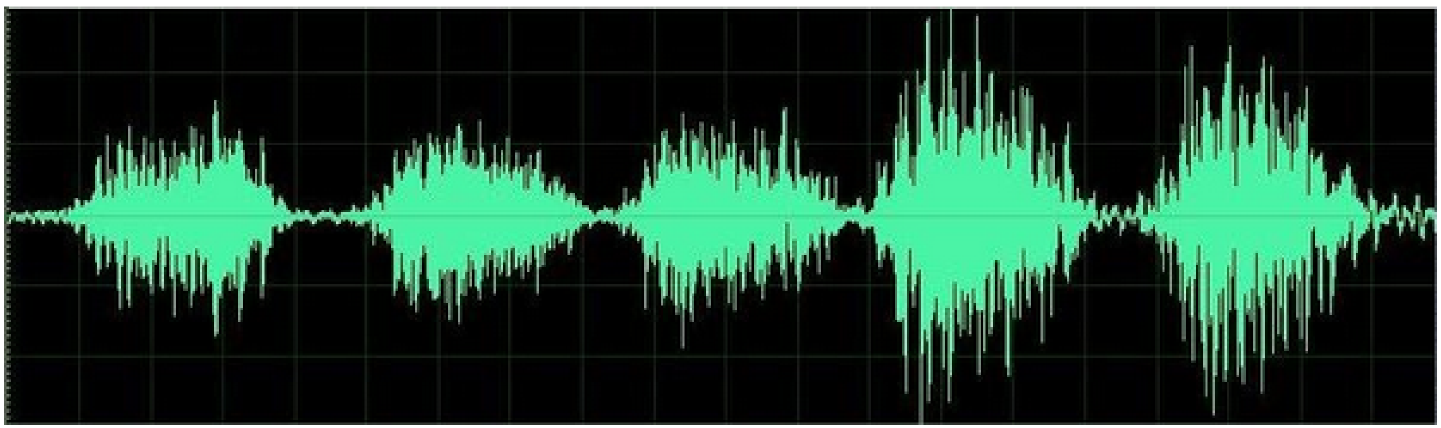
变换	时间	频率
连续傅里叶变换	连续，非周期性	连续，非周期性
傅里叶级数	连续，周期性	离散，非周期性
离散时间傅里叶变换	离散，非周期性	连续，周期性
离散傅里叶变换	离散，周期性	离散，周期性

http://www.elecfans.com/engineer/blog/20140527344277.html

深入浅出的讲解傅里叶变换

2014年05月27日 09:11　来源：知乎　作者：Heinrich　我要评论(19)

什么是音乐？

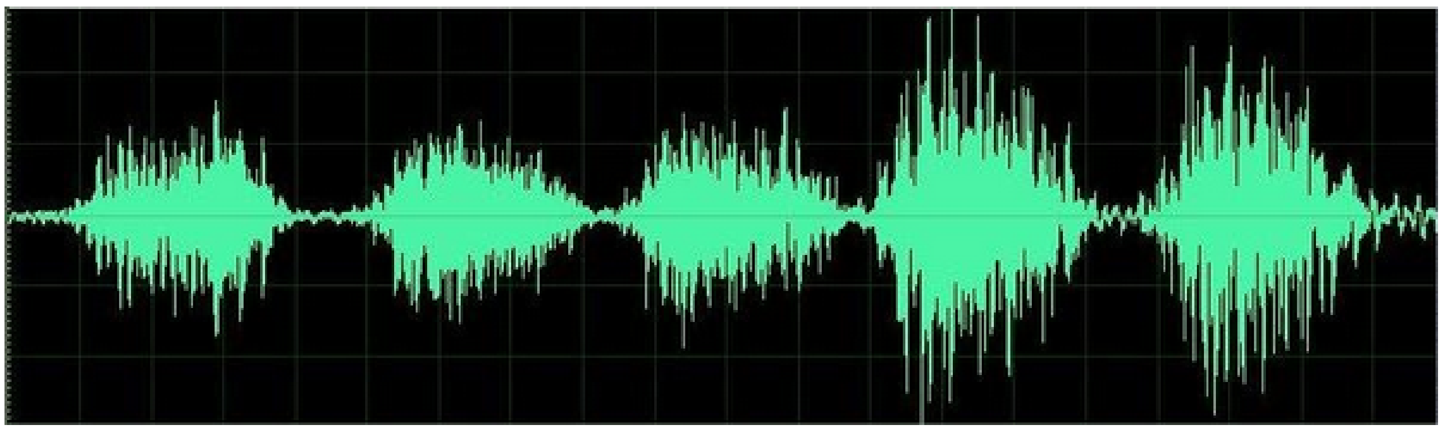


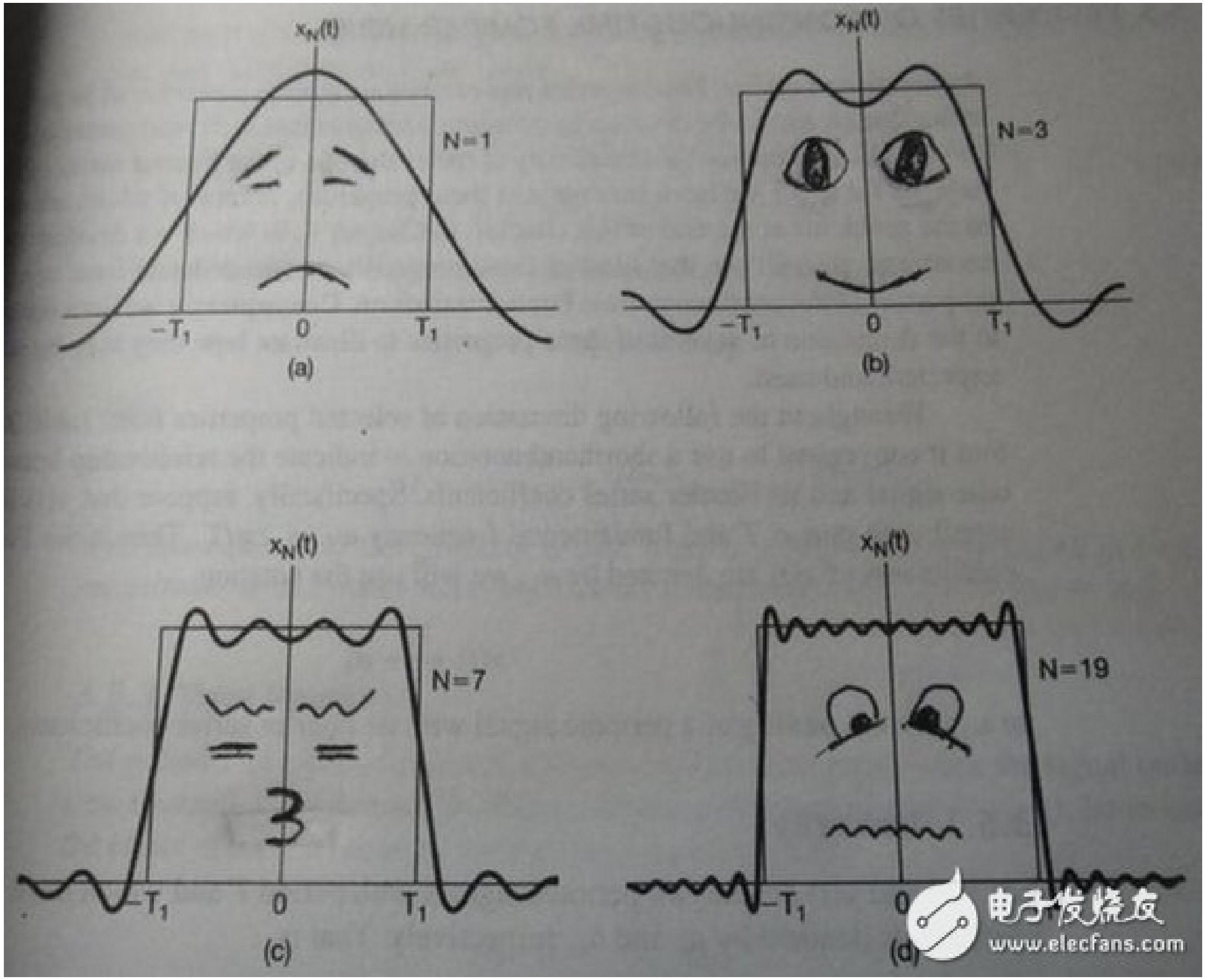
http://www.elecfans.com/engineer/blog/20140527344277.html

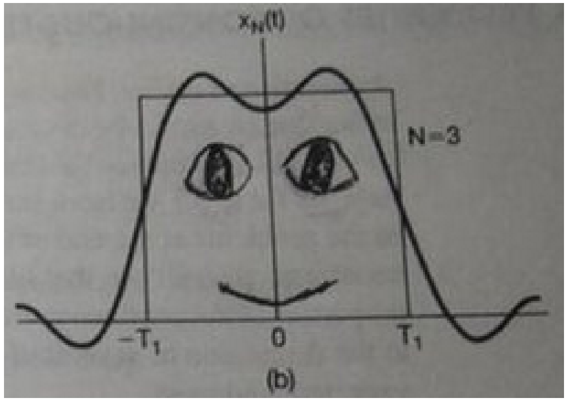
深入浅出的讲解傅里叶变换

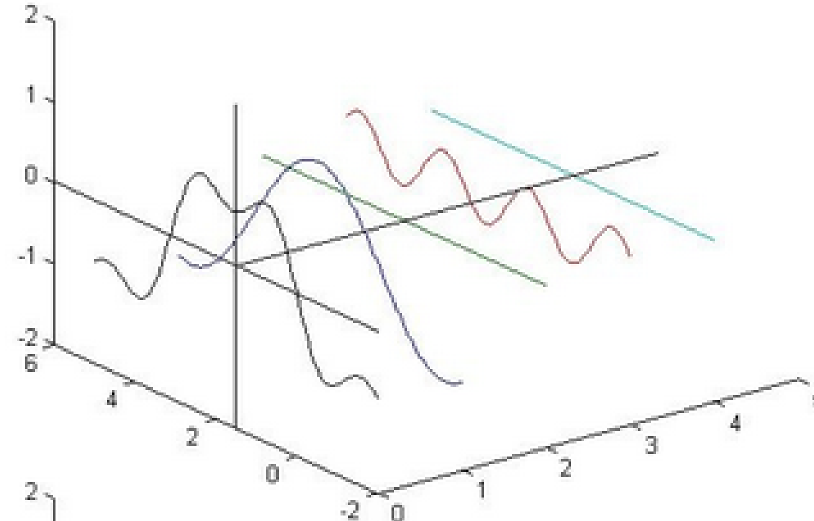
2014年05月27日 09:11　来源：知乎　作者：Heinrich　我要评论(19)

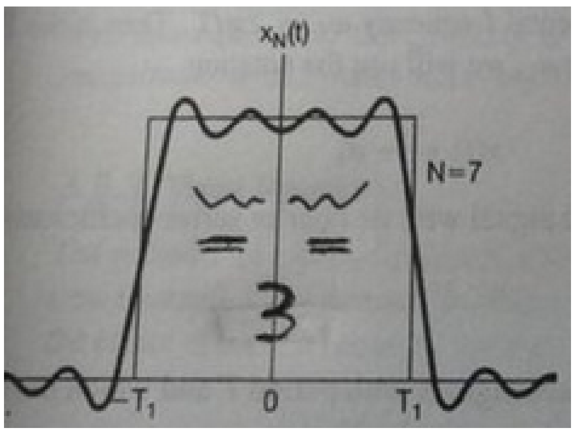
什么是音乐？

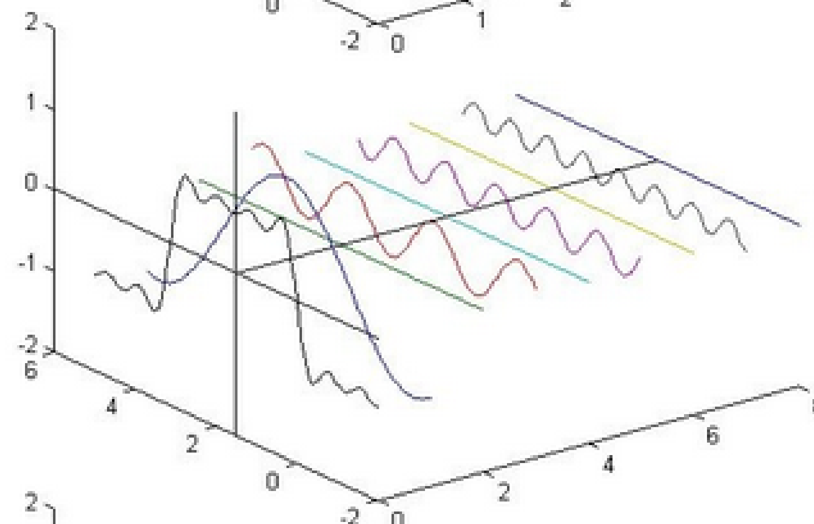


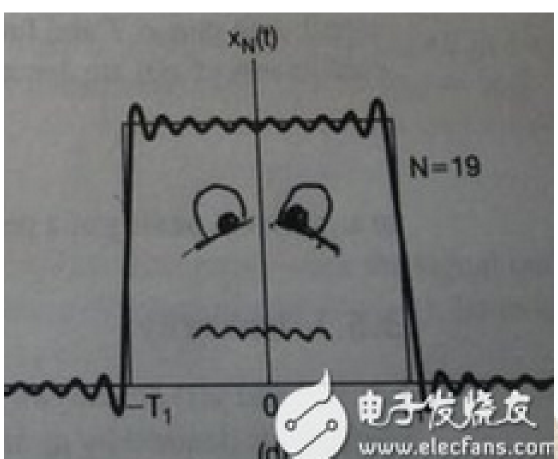

$x_N(t)$
N=1
$-T_1$
0
T_1
(a)
$x_N(t)$
N=3
$-T_1$
0
T_1
(b)
$x_N(t)$
N=7
$-T_1$
0
T_1
(c)
$x_N(t)$
N=19
$-T_1$
0
(d)
电子发烧友
www.elecfans.com

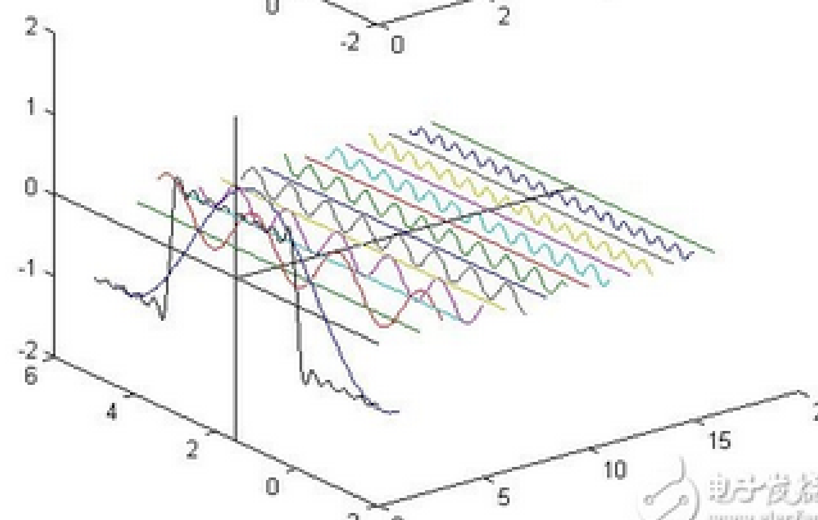

$x_N(t)$
N=3
$-T_1$
0
T_1
(b)


2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
1
2
3
4
5


$x_N(t)$
N=7
$-T_1$
0
T_1

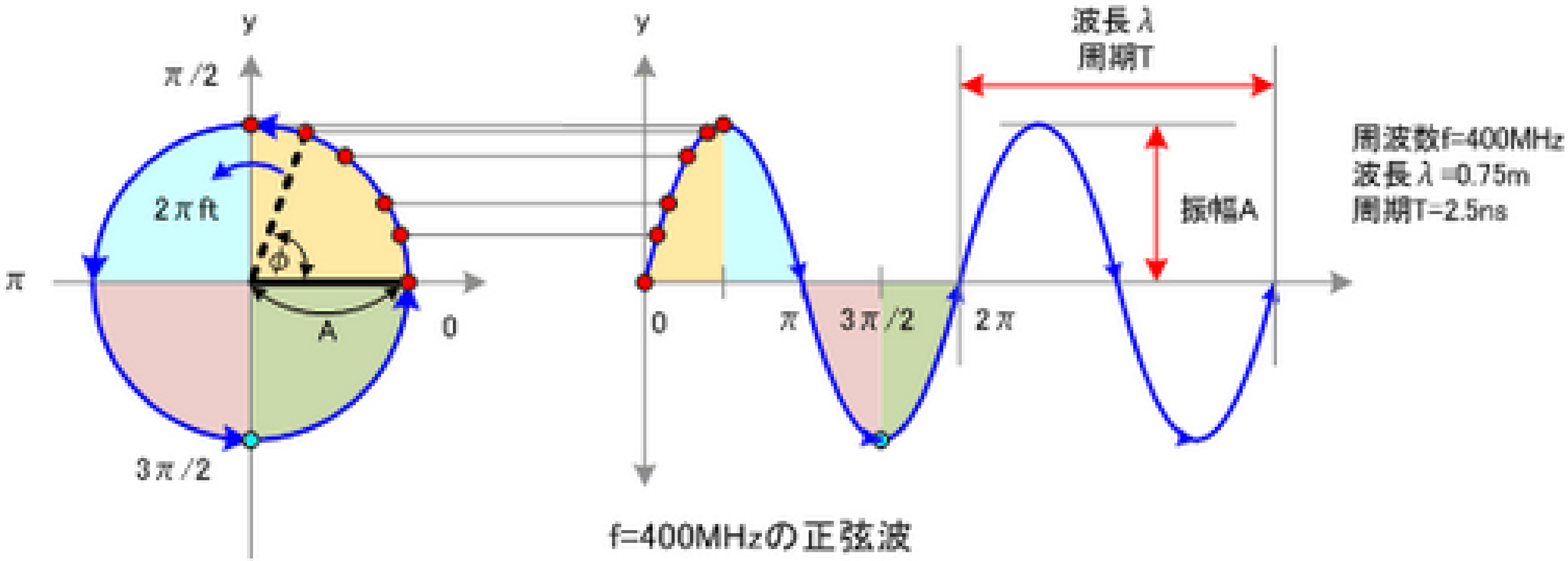

2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8


$x_N(t)$
N=19
$-T_1$
0
(d)


2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
5
10
15
20

傅立叶原理表明：任何连续测量的时序或信号，都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加

什么是正弦波？



y
π /2
2 π ft
φ
π
A
0
3 π /2
y
0
π
3 π /2
2 π
波長 λ
周期T
振幅A
周波数f=400MHz
波長 λ =0.75m
周期T=2.5ns
f=400MHzの正弦波

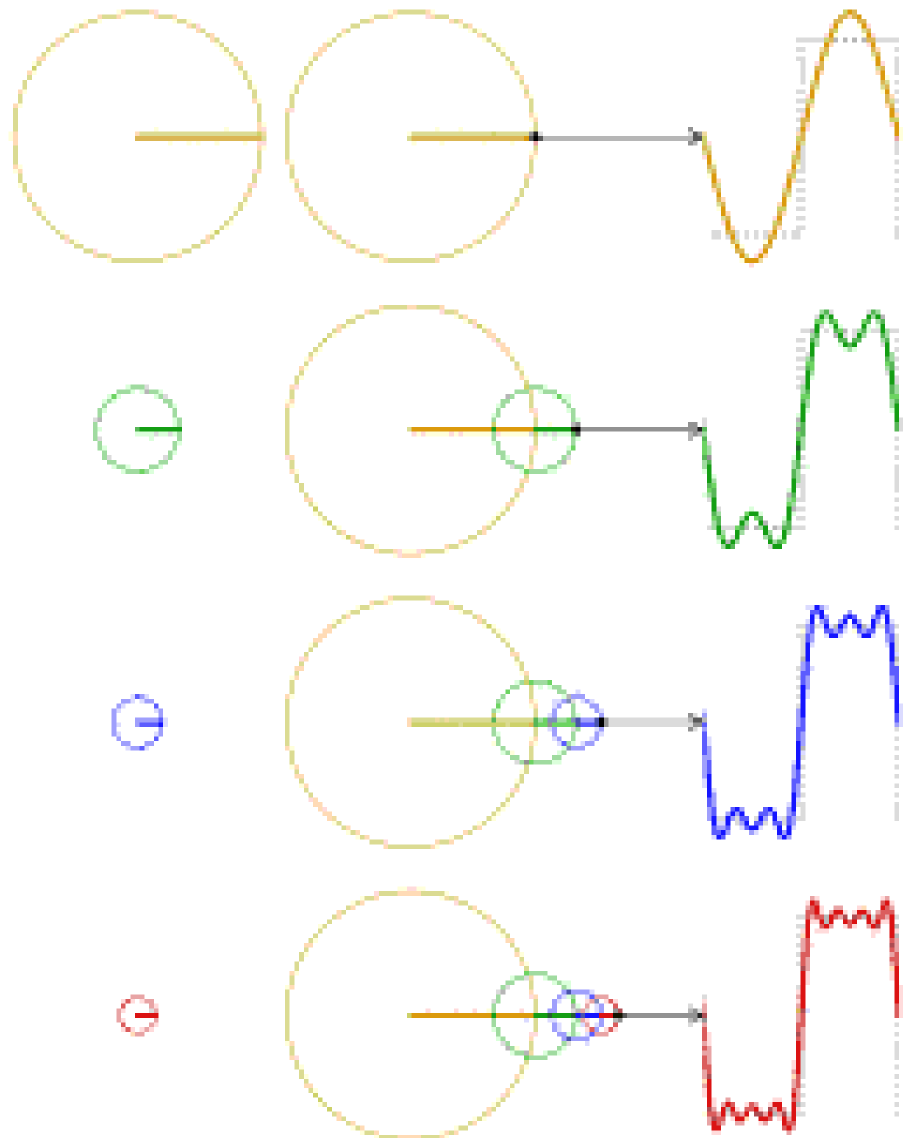
频域 ➔ 时域

$$\frac{4\sin\theta}{\pi}$$

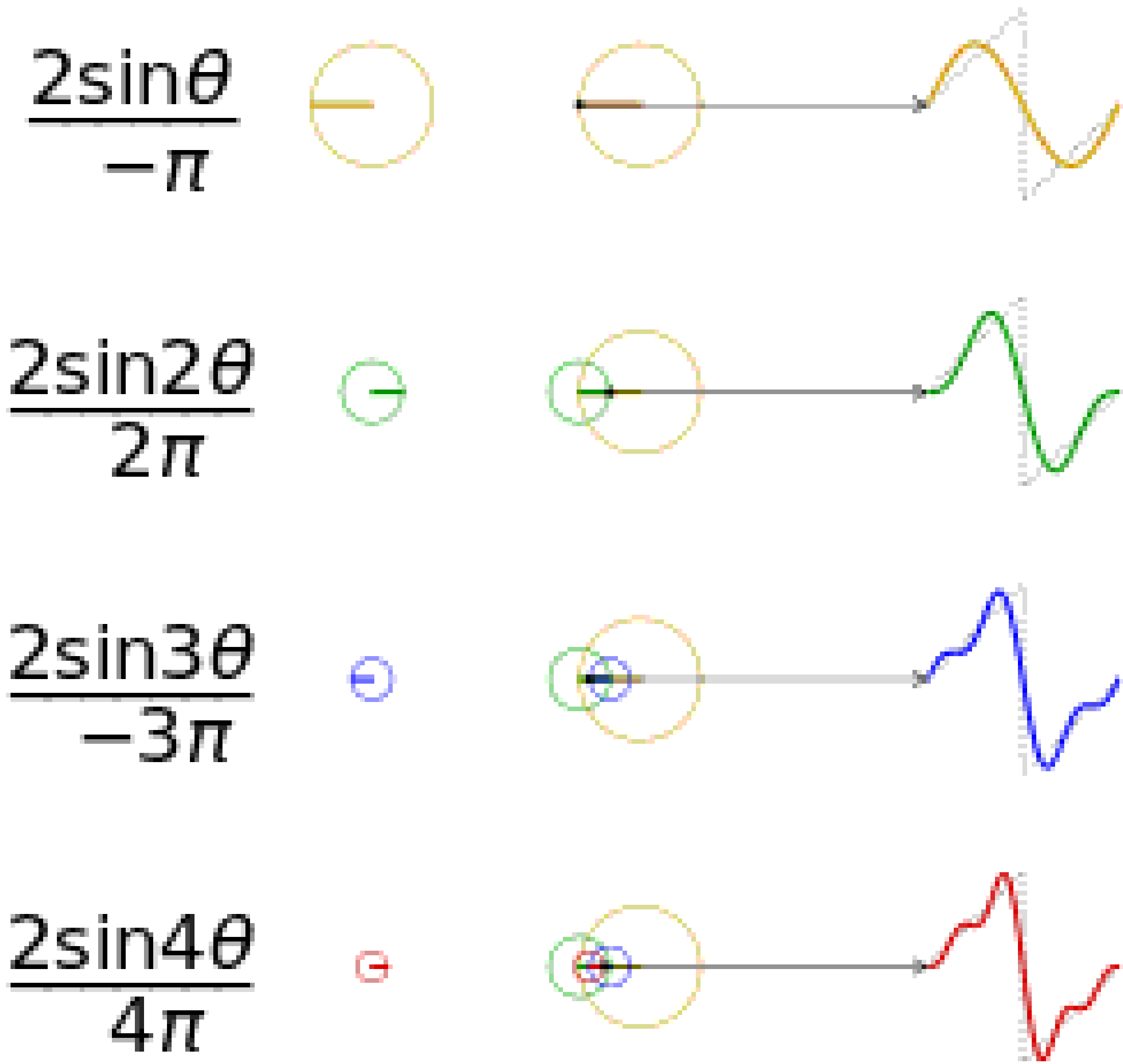
$$\frac{4\sin 3\theta}{3\pi}$$

$$\frac{4\sin 5\theta}{5\pi}$$

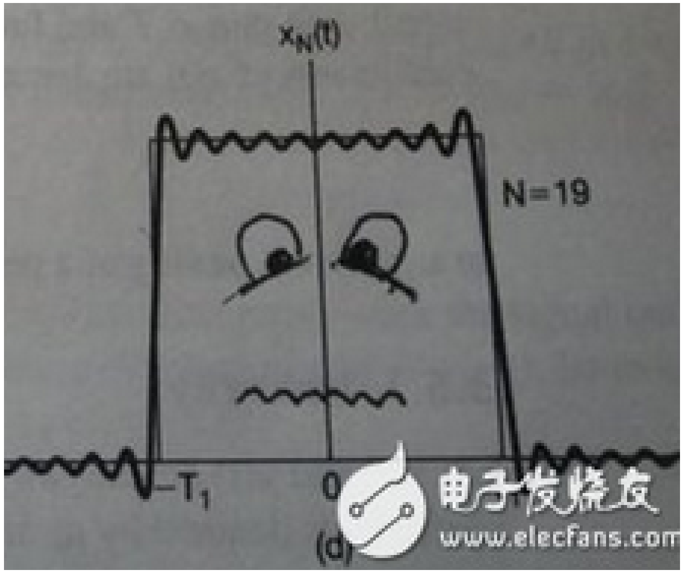
$$\frac{4\sin 7\theta}{7\pi}$$



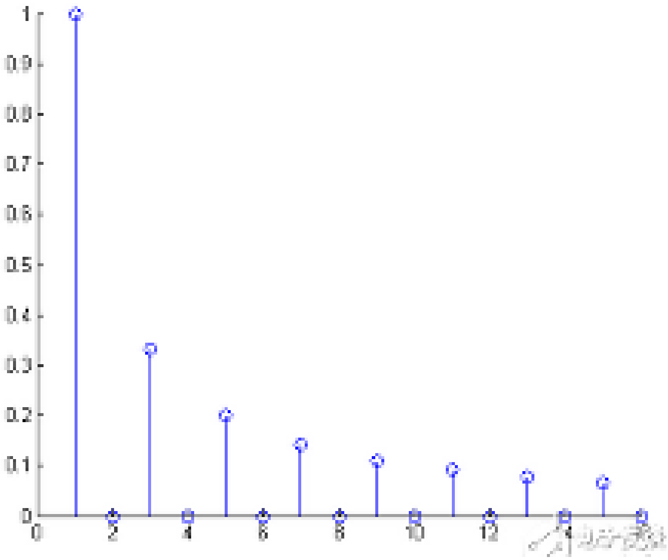
频域 ➔ 时域


$\frac{2\sin\theta}{-\pi}$
$\frac{2\sin 2\theta}{2\pi}$
$\frac{2\sin 3\theta}{-3\pi}$
$\frac{2\sin 4\theta}{4\pi}$

时域 ➔ 频域



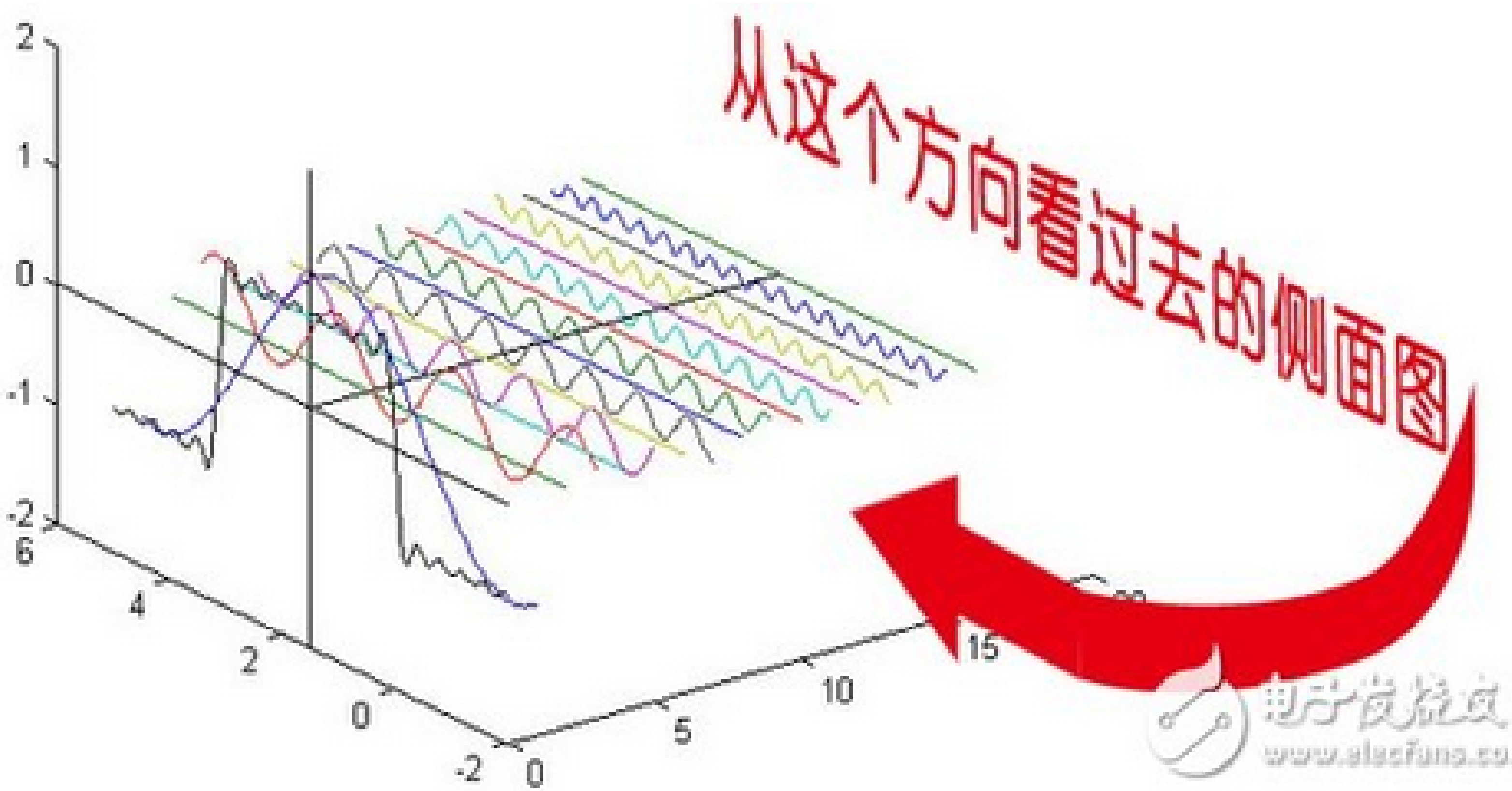
$x_N(t)$
N=19
$-T_1$
0
(d)
电子发烧友
www.elecfans.com



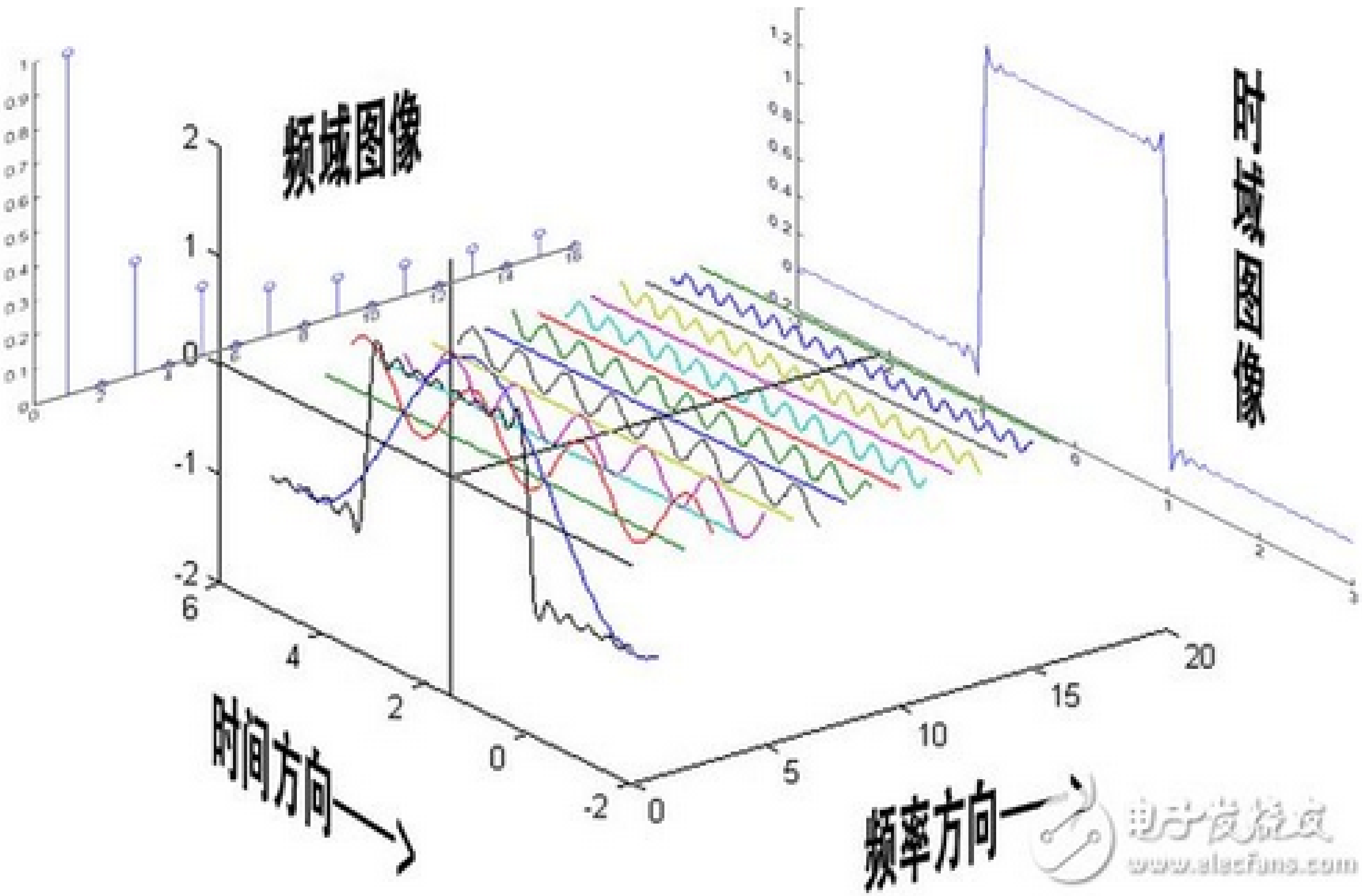
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12

傅里叶变换！

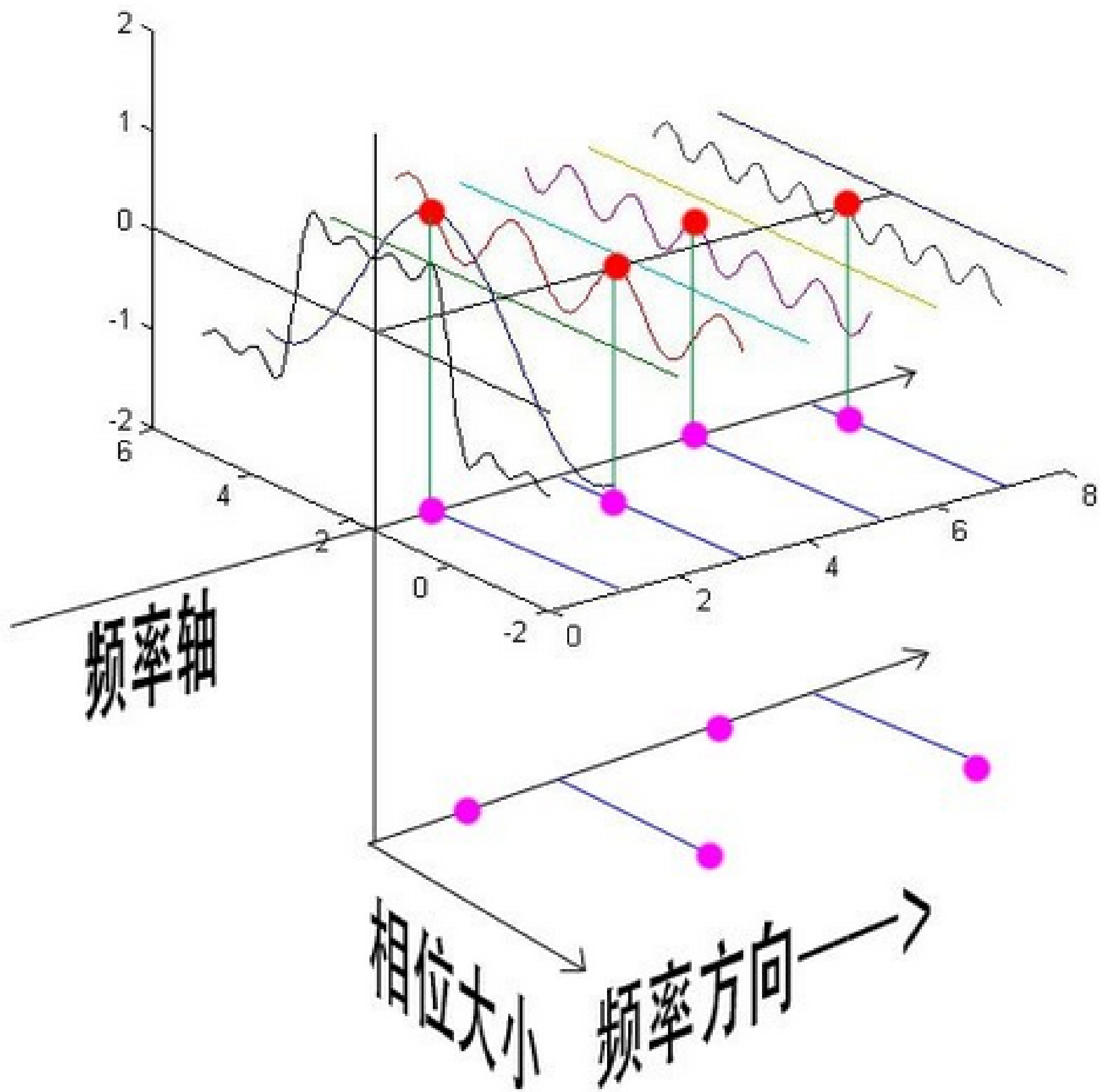
频域



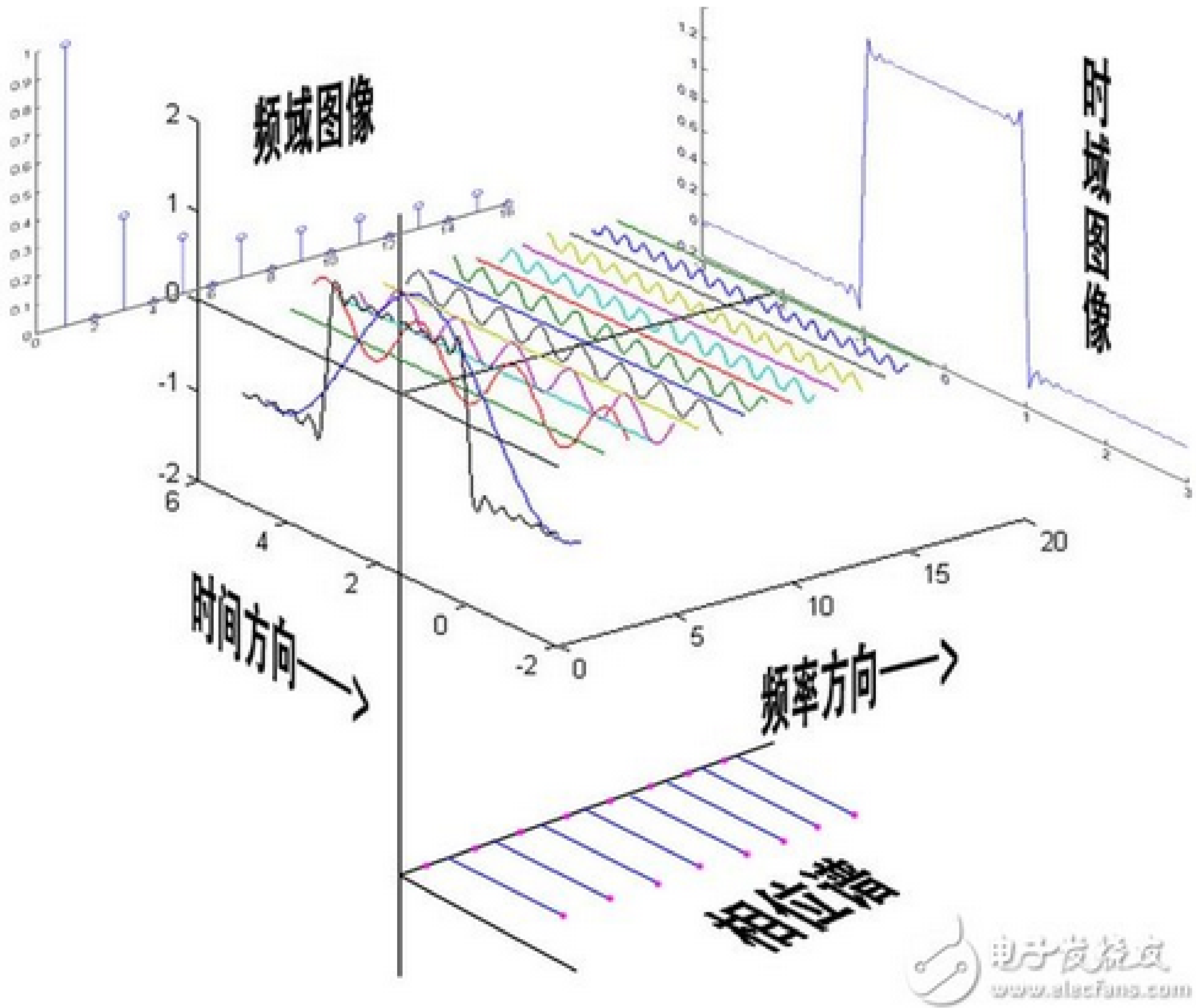
全面观察



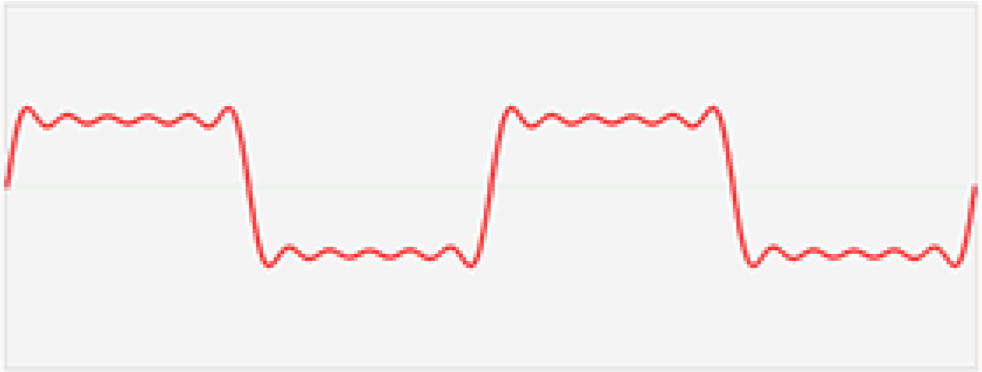
全面观察



全面观察



傅里叶变换



傅里叶变换将函数的时域（红色）与频域（蓝色）相关联。频谱中的不同成分频率在频域中以峰值形式表示。

傅里叶的最主要贡献

周期信号都可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和

非周期信号都可以用正弦信号的加权积分表示

傅里叶变换(三角函数形式)

$f(t) = f(t + nT_1)$ $n = 0, \pm 1 \cdots$ $w_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ $f_1 = \frac{1}{T_1}$

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(w_1 t) + b_1 \sin(w_1 t) + a_2 \cos(2w_1 t) + b_2 \sin(2w_1 t) + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_1 t) + b_n \sin(nw_1 t)]$$

$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$ 信号的平均值、直流分量

$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos(nw_1 t) dt$ 是nw_1的偶函数

$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin(nw_1 t) dt$ 是nw_1的奇函数

傅里叶变换更多细节

傅里叶变换介绍1

傅里叶变换介绍2

3.计算机典型应用

代码可读性模型

其他应用...

彩色照片加“水印”？

16 IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION FORENSICS AND SECURITY, VOL. 3, NO. 1, MARCH 2008

Color Image Watermarking Using Multidimensional Fourier Transforms

Tsz Kin Tsui, *Student Member, IEEE*, Xiao-Ping Zhang, *Senior Member, IEEE*, and Dimitrios Androutsos, *Senior Member, IEEE*

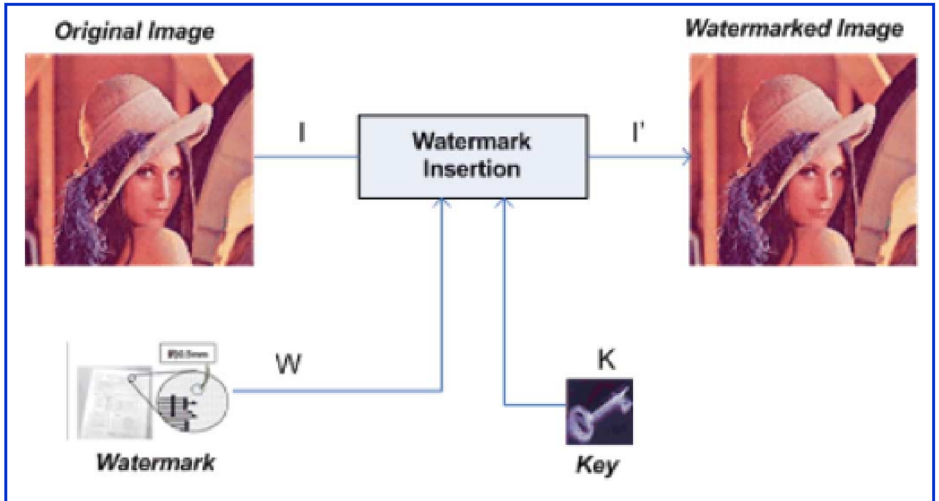


Fig. 1. Generic watermark insertion.

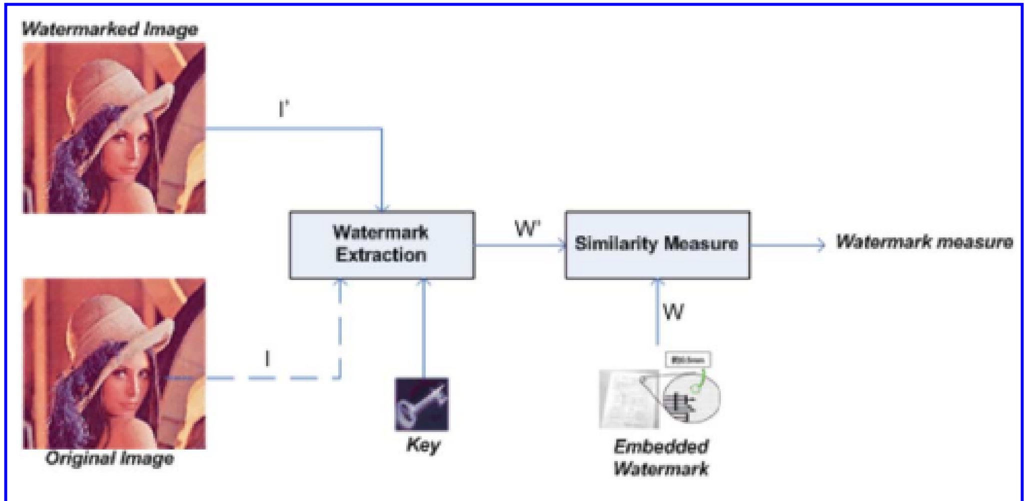


Fig. 2. Generic watermark extraction.

其他应用…

彩色图像序列中的运动估计？

168 IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, VOL. 18, NO. 1, JANUARY 2009

Estimation of Motions in Color Image Sequences Using Hypercomplex Fourier Transforms

Dimitrios S. Alexiadis, *Student Member, IEEE*, and George D. Sergiadis, *Member, IEEE*

其他应用…

图像可视化的质量评价？

3364 IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, VOL. 21, NO. 8, AUGUST 2012

Fourier Transform-Based Scalable Image Quality Measure

Manish Narwaria, Weisi Lin, *Senior Member, IEEE*, Ian Vince McLoughlin,
Sabu Emmanuel, and Liang-Tien Chia, *Member, IEEE*

其他应用…

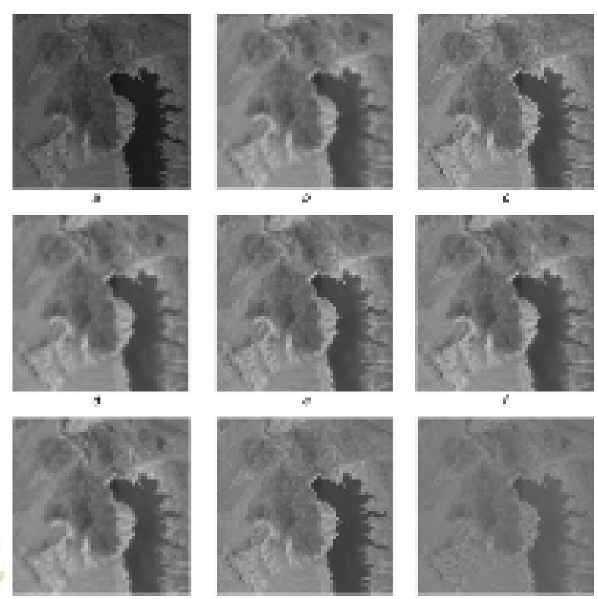
多幅图像融合？

Published in IET Image Processing
Received on 17th January 2009
Revised on 14th October 2009
doi: 10.1049/iet-ipr.2009.0104

ISSN 1751-9659

Fusion of panchromatic and multispectral images using temporal Fourier transform

A.G. Mahyari M. Yazdi



其他应用…

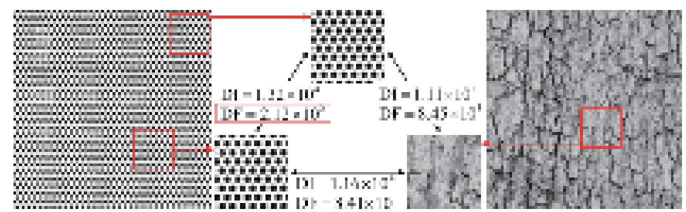
图像纹理重建？

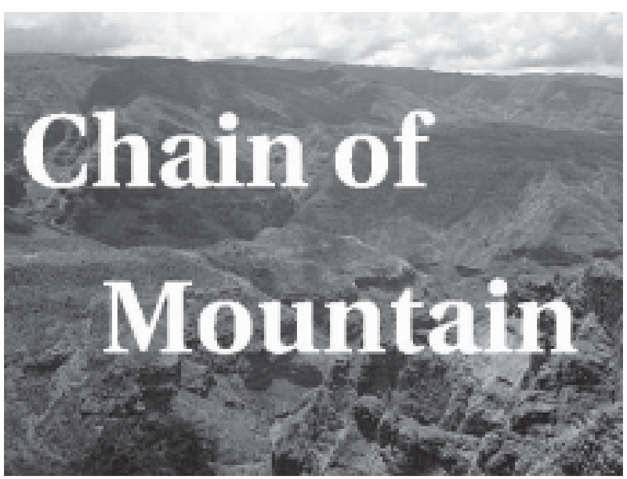
1252　　IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, VOL. 22, NO. 3, MARCH 2013

Correspondence

Missing Texture Reconstruction Method Based on Error Reduction Algorithm Using Fourier Transform Magnitude Estimation Scheme

Takahiro Ogawa, *Member, IEEE*, and
Miki Haseyama, *Senior Member, IEEE*





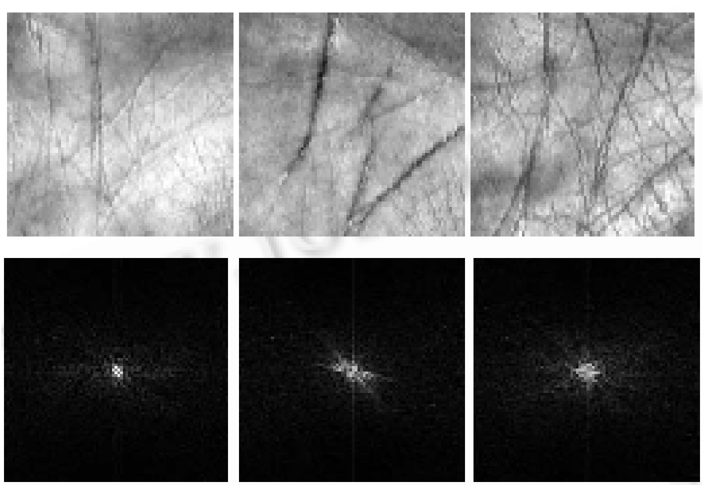
其他应用…

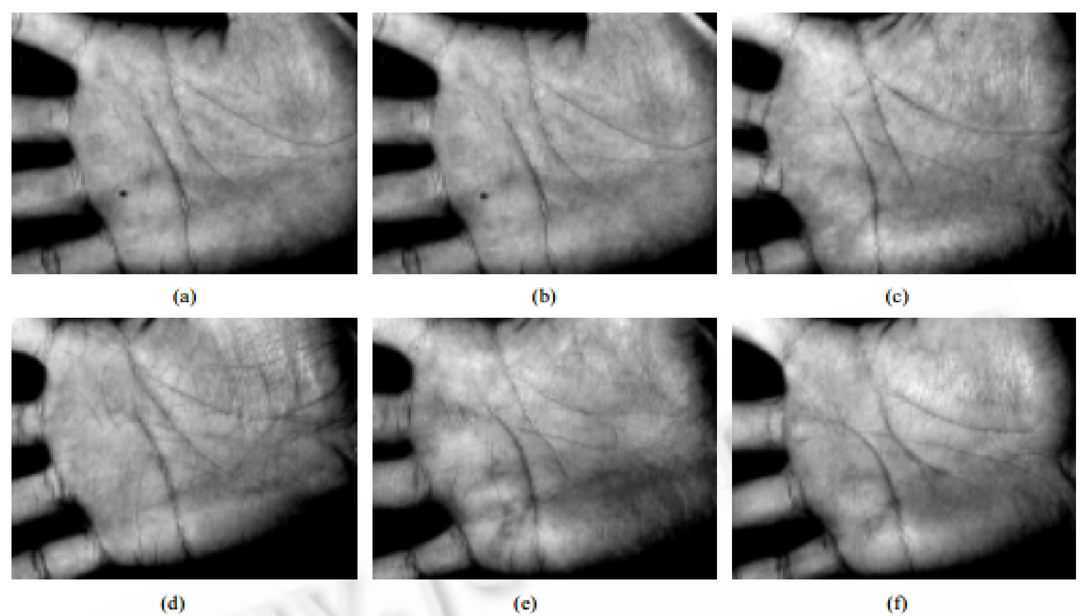
掌纹识别？

1000-9825/2002/13(05)0879-08 ©2002 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.13, No.5

Palmprint Recognition Based on Fourier Transform*

LI Wen-xin[1,2], David Zhang[2], XU Zhuo-qun[1]





小结

- 傅里叶变换基本概念

Thanks for your time and attention!