Mathematical modeling

第十三讲 微分方程模型(2)

周毓明
zhouyuming@nju.edu.cn

南京大学计算机科学与技术系

课程内容

- 数学概念与模型
- 实际案例与分析
- 计算机典型应用

稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势 ——平衡状态是否稳定

- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性

1.捕鱼业的持续收获

捕鱼业的持续收获

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与
  非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益

问题及分析

- 在**捕捞量稳定**的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳
- 如果使捕捞量等于自然增长量，**渔场鱼量将保持不变**，则捕捞量稳定

捕鱼业的持续收获

产量模型

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

r~固有增长率, N~最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

$h(x)=Ex$, E~捕捞强度

建模

记 $F(x) = f(x) - h(x)$

捕捞情况下渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$

- 不需要求解$x(t)$, 只需知道$x(t)$稳定的条件

捕鱼业的持续收获

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x) \quad (1)$ 一阶非线性（自治）方程

$F(x)=0$的根x_0 ~微分方程的平衡点

$$\dot{x}\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$$

设$x(t)$是方程的解，若从x_0某邻域的任一初值出发，都有

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点

不求$x(t)$, 判断x_0稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程 $\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$

$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$稳定(对(2), (1))

$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$不稳定(对(2), (1))

捕鱼业的持续收获

产量模型 $\dot{x}(t)=F(x)=rx(1-\frac{x}{N})-Ex$

$F(x)=0$ 平衡点 $x_0=N(1-\frac{E}{r}),\quad x_1=0$

稳定性判断 $F'(x_0)=E-r,\quad F'(x_1)=r-E$

$E<r\Rightarrow F'(x_0)<0, F'(x_1)>0$ ⇨ x_0稳定, x_1不稳定

$E>r\Rightarrow F'(x_0)>0, F'(x_1)<0$ ⇨ x_0不稳定, x_1稳定

E~捕捞强度 *r*~固有增长率

x_0稳定, 可得到稳定产量 x_1稳定, 渔场干枯

捕鱼业的持续收获

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使产量最大

图解法

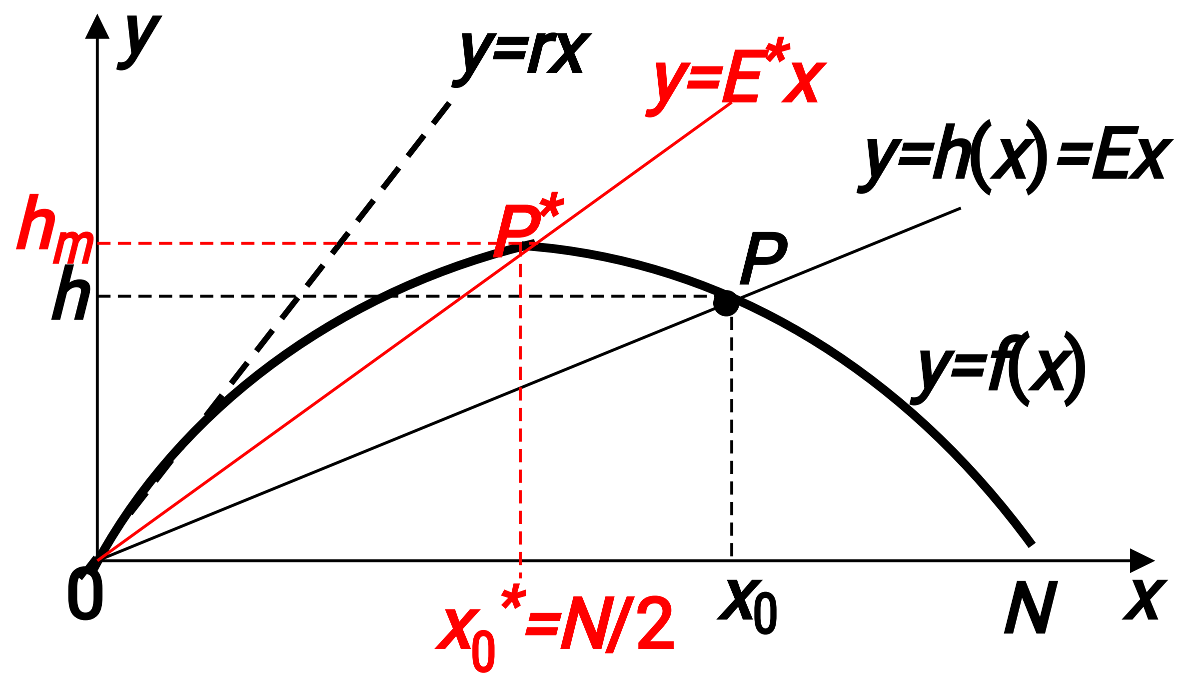
$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$h(x) = Ex$$

$F(x) = 0$ ⇨ f与h交点P

$E < r \Rightarrow x_0$稳定



P的横坐标 x_0~平衡点

P的纵坐标 h~产量

产量最大

$$P^*(x_0^* = N/2,\ h_m = rN/4) \qquad E^* = h_m / x_0^* = r/2$$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

捕鱼业的持续收获

效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.

假设

- 鱼销售价格p
- 单位捕捞强度费用c

收入 $T = ph(x) = pEx$　　支出 $S = cE$

单位时间利润

$$R = T - S = pEx - cE$$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

求E使$R(E)$最大

$$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN}) < E^* = \frac{r}{2}$$

渔场鱼量

$$x_R = N(1 - \frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$$

$$h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$$

2.种群的相互竞争

种群的相互竞争

- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。

- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。

- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

种群的相互竞争

模型假设

• 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律;

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

• 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比; 甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍。

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲

⇨ 乙的竞争力强

种群的相互竞争

模型 $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$ $\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$

模型分析 $t \to \infty$时$x_1(t)$, $x_2(t)$的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性(自治)方程

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2)$$

的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$ ~ 代数方程

$$f(x_1, x_2) = 0$$
$$g(x_1, x_2) = 0$$

的根

若从P_0某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = x_1^0$,

$\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = x_2^0$, 称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

种群的相互竞争

判断$P_0(x_1^0,x_2^0)$稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) \quad (2)$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q=\det A \end{cases}$$

$p>0$ 且 $q>0$

平衡点 P_0稳定(对2,1)

$p<0$ 或 $q<0$

平衡点 P_0不稳定(对2,1)

种群的相互竞争

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \dfrac{x_1}{N_1} - \dfrac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases}$$

平衡点： $P_1(N_1, 0)$, $P_2(0, N_2)$,

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), \quad P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1, \sigma_2 < 1$或$\sigma_1, \sigma_2 > 1$时，P_3才有意义

种群的相互竞争

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \dfrac{x_1}{N_1} - \dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \dfrac{2x_1}{N_1} - \dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1 - \dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x1} + g_{x2})\Big|_{p_i}, \quad q = \det A\Big|_{p_i}, \quad i = 1,2,3,4$$

平衡点 P_i稳定条件： $p > 0$ 且 $q > 0$

种群的相互竞争

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$，$\sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$，$\sigma_2<1$
$p_3\left(\dfrac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\dfrac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\dfrac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\dfrac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$，$\sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

P_1, P_2是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3是两种群共存的平衡点

P_1稳定的条件 $\sigma_1<1$？

种群的相互竞争

平衡点稳定性的相轨线分析

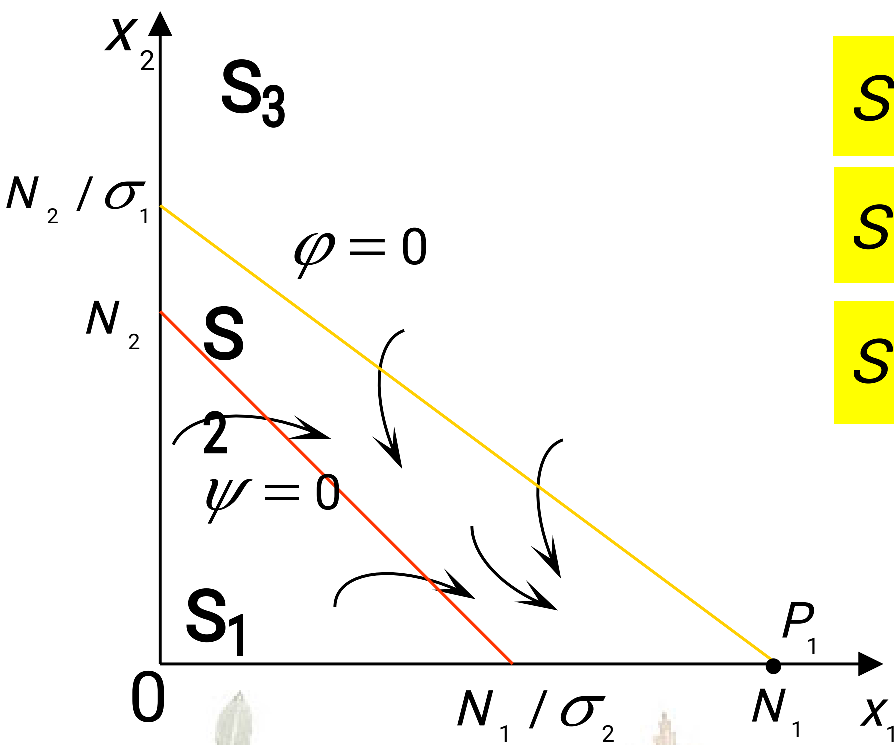
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}$$

(1) $\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 < 1$



$S_1: \varphi > 0,\ \psi > 0$

$S_1: \dot{x}_1 > 0,\ \dot{x}_2 > 0$ ⇒ $t\uparrow \rightarrow x_1, x_2\uparrow$

$S_2: \dot{x}_1 > 0,\ \dot{x}_2 < 0$ ⇒ $t\uparrow \rightarrow x_1\uparrow, x_2\downarrow$

$S_3: \dot{x}_1 < 0,\ \dot{x}_2 < 0$ ⇒ $t\uparrow \rightarrow x_1, x_2\downarrow$

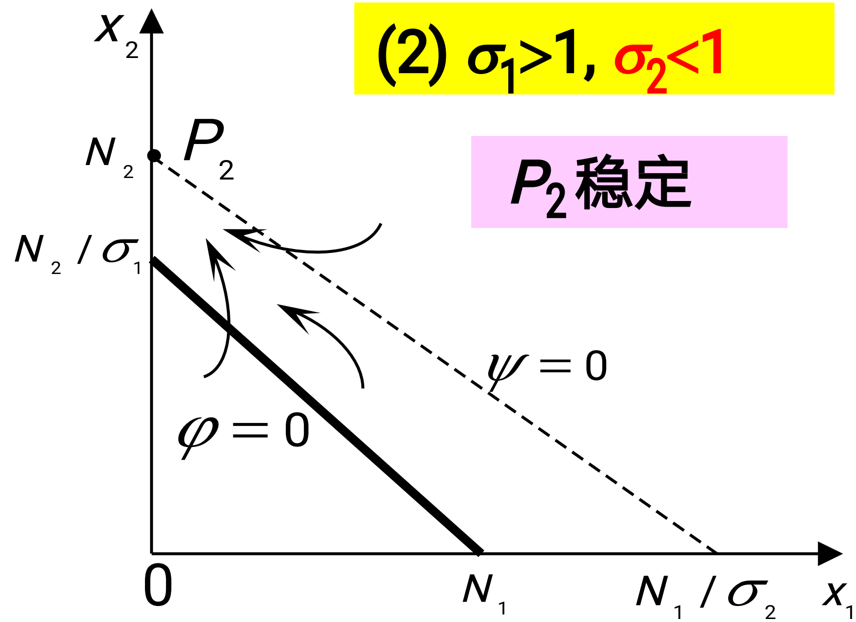
从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)$ ($t\rightarrow\infty$)

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点

种群的相互竞争

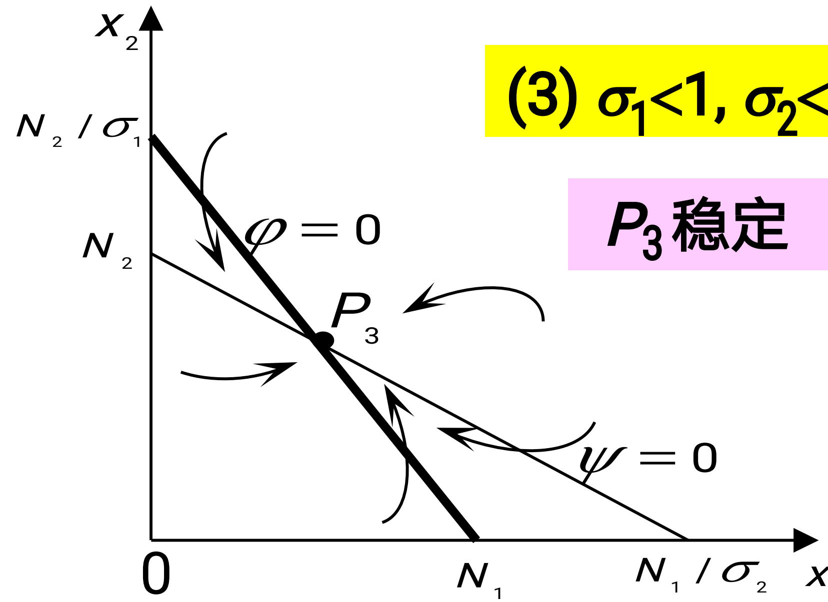
(2) $\sigma_1>1, \sigma_2<1$

P_2稳定

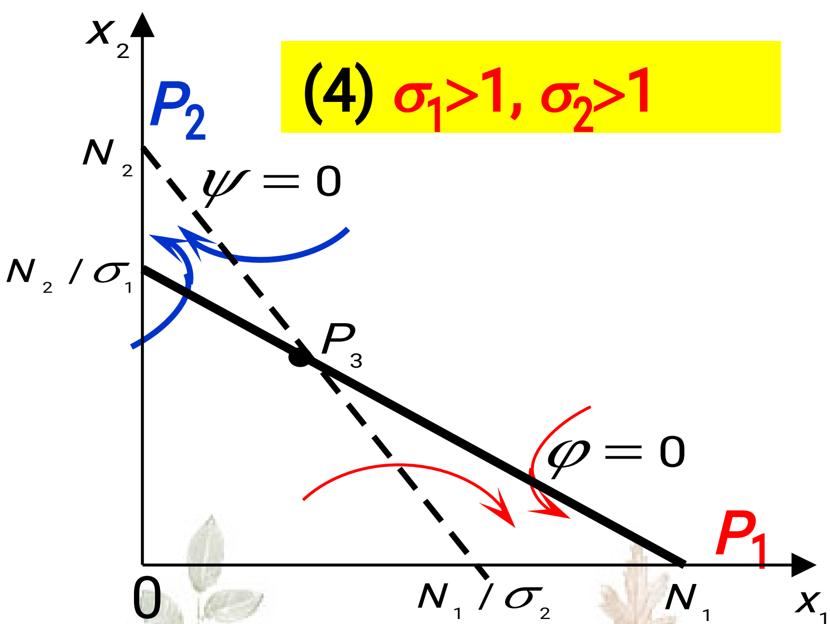


(3) $\sigma_1<1, \sigma_2<1$

P_3稳定



(4) $\sigma_1>1, \sigma_2>1$



有相轨线趋向P_1

有相轨线趋向P_2

⇒ P_1, P_2都不(局部)稳定

P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2>1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1<1$

⇒ P_1全局稳定

种群的相互竞争

结果解释

- P_1稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1倍。

$\sigma_1<1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲⇒乙的竞争力弱

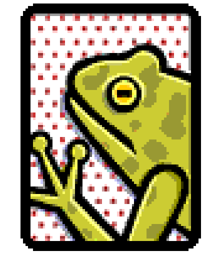
$\sigma_2>1$ ⇒甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

- P_2稳定的条件：$\sigma_1>1, \sigma_2<1$
- P_3稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2<1$

3.种群的相互依存

种群的相互依存



甲乙两种群的相互依存有三种形式

1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

种群的相互依存

模型假设

- 甲可以独自生存，数量变化服从Logistic规律; 甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。
- 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从Logistic规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙为甲提供食物是甲消耗的σ_1倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

甲为乙提供食物是乙消耗的σ_2倍

种群的相互依存

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\sigma_2-1)$	$-r_1r_2(\sigma_2-1)$	$\sigma_2<1,\sigma_1\sigma_2<1$
$P_2\left(\dfrac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\dfrac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\dfrac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\dfrac{r_1r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1,\sigma_2>1,$ $\sigma_1\sigma_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

P_2是甲乙相互依存而共生的平衡点

种群的相互依存

平衡点P_2稳定性的相轨线

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\ \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=r_1x_1\varphi(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=r_2x_2\psi(x_1,x_2)$$

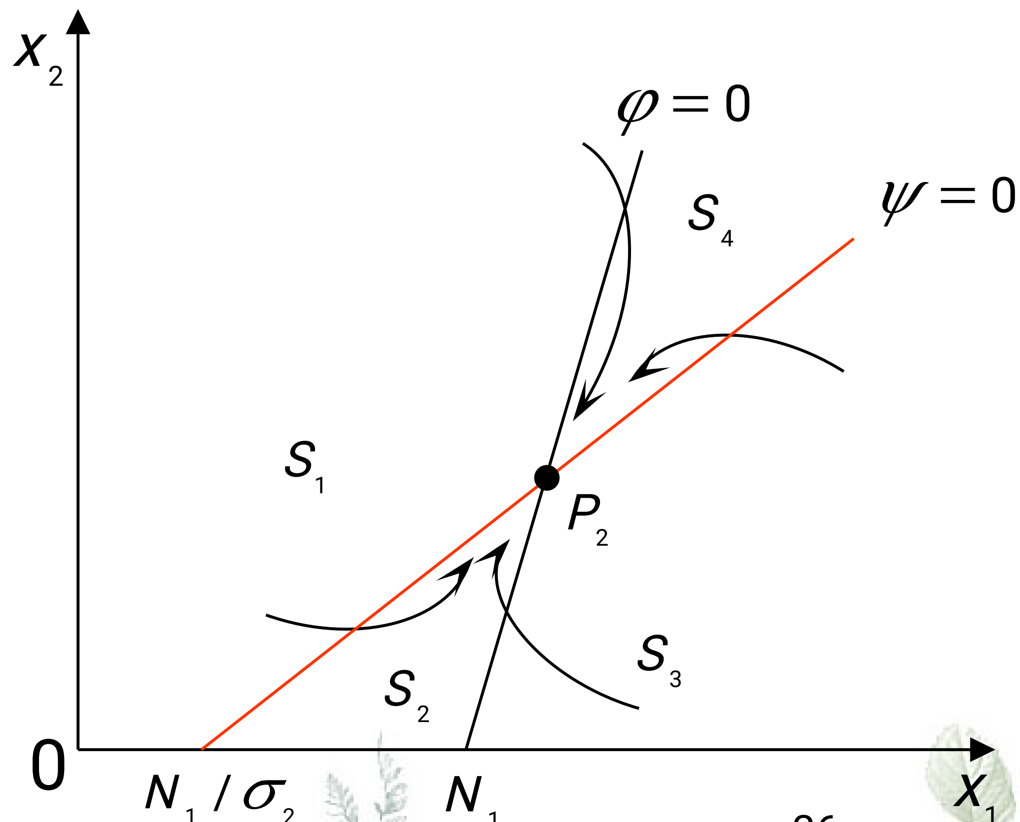
$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

$S_1:\ \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0;$

$S_2:\ \dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_3:\ \dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_4:\ \dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0.$



P_2稳定

种群的相互依存

结果解释

甲可以独自生存

乙不能独立生存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

P_2稳定条件：$\sigma_1<1$, $\sigma_2>1$, $\sigma_1\sigma_2<1$

$\sigma_2>1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——甲为乙提供的食物是乙消耗的 σ_2 倍

$\sigma_1\sigma_2<1$ ~ $\sigma_2>1$ 前提下P_2存在的必要条件

$\sigma_1<1$ ~ $\sigma_2>1$, $\sigma_1\sigma_2<1$ 的需要，且σ_1必须足够小，才能在$\sigma_2>1$条件下使$\sigma_1\sigma_2<1$ 成立

4.种群的弱肉强食

种群的弱肉强食(食饵-捕食者模型)

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。
- **模型的历史背景**——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

种群的弱肉强食

食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量 $x(t)$, 捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 r $\qquad \dot{x} = rx$

乙使甲的增长率减小，减小量与 y成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \qquad (1)$$

乙独立生存的死亡率 d $\qquad \dot{y} = -dy$

甲使乙的死亡率减小，减小量与 x成正比

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y = -dy + bxy \qquad (2)$$

a ~捕食者掠取食饵能力 $\qquad$ b ~食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解

种群的弱肉强食

Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy$$

稳定性分析

$$A = \begin{bmatrix} r - ax & -ax \\ by & -d + bx \end{bmatrix}$$

平衡点

$P(d/b, r/a)$, $P'(0,0)$

$$A\big|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p=0$, $q>0$

P: 临界状态

$$A\big|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

$q<0$

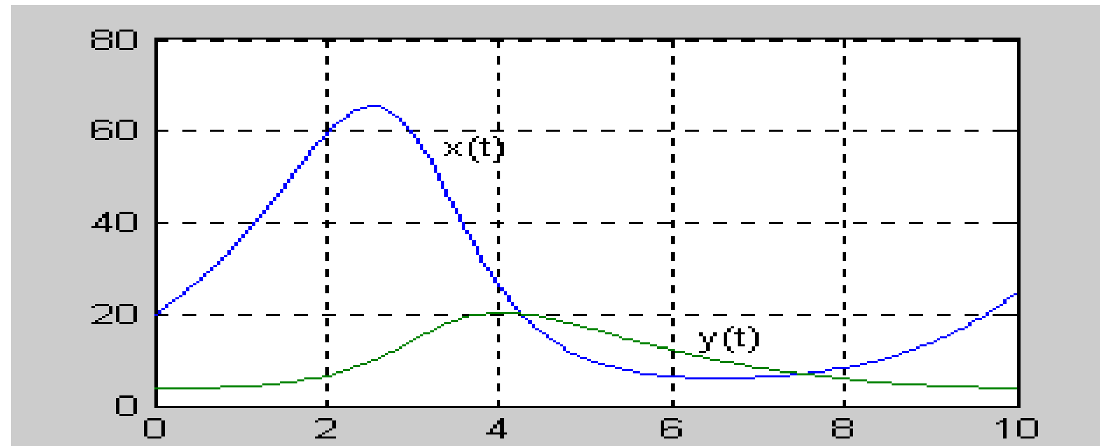
P' 不稳定

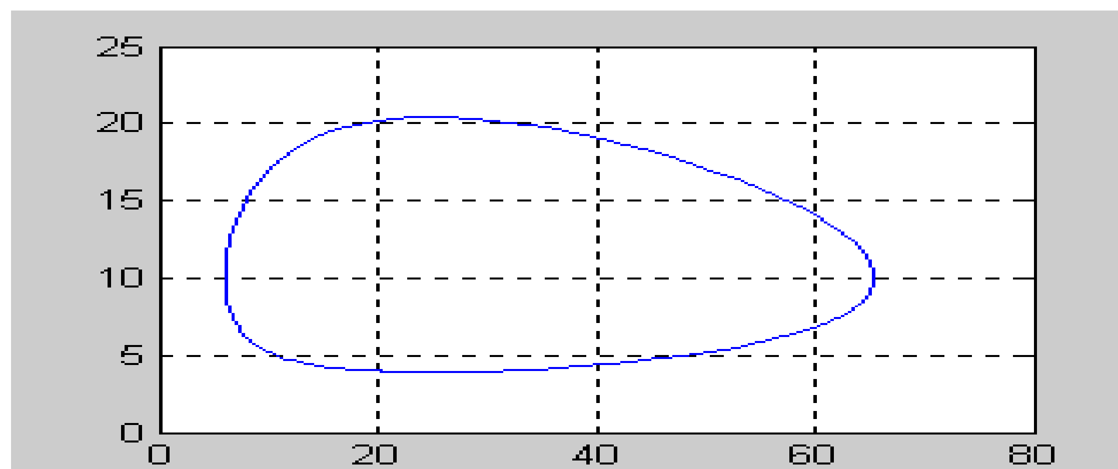
P点稳定性不能用近似线性方程分析

种群的弱肉强食

用数学软件MATLAB求微分方程数值解

t	*x*(*t*)	*y*(*t*)
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
…	…	…
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
…	…	…
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587





x~*y*平面上的相轨线

种群的弱肉强食

食饵-捕食者模型(Volterra)

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \qquad \dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

计算结果（数值，图形）

⇩ 观察，猜测

$x(t), y(t)$是周期函数，相图(x,y)是封闭曲线

$x(t), y(t)$的周期约为9.6

$x_{max} \approx 65.5, \ x_{min} \approx 6, \ y_{max} \approx 20.5, \ y_{min} \approx 3.9$

用数值积分可算出 $x(t), y(t)$一周期的平均值：

$x(t)$的平均值约为25，$y(t)$的平均值约为10。

种群的弱肉强食

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

消去 **dt**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}$$

$$\Rightarrow \frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

$$\Rightarrow -d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

$$\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

取指数

c 由初始条件确定

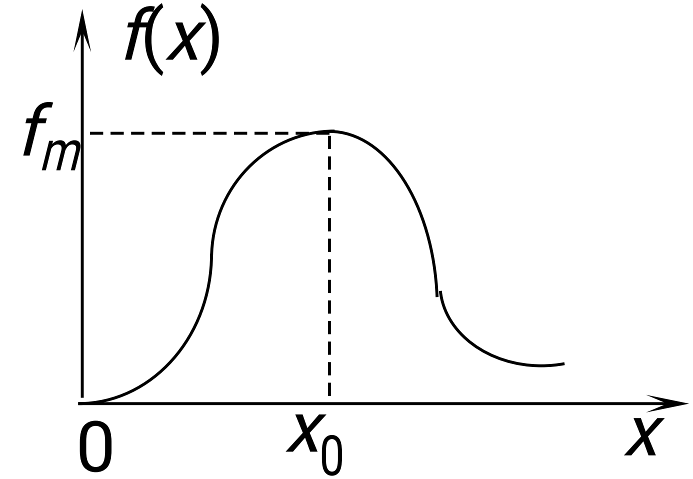
种群的弱肉强食

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

$f(x)$　　$g(y)$

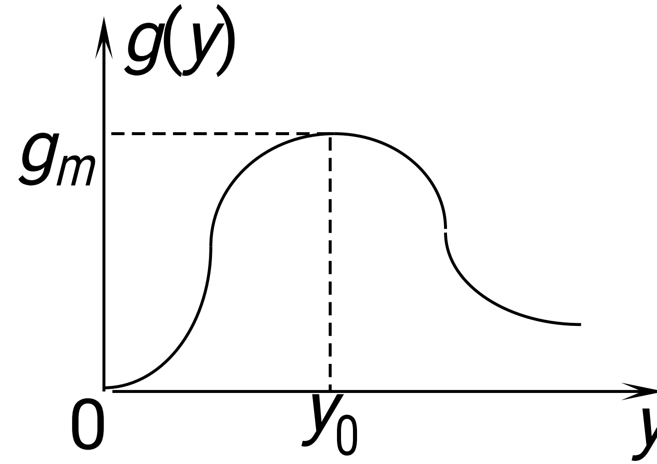
相轨线　$f(x)g(y) = c$



在相平面上讨论相轨线的图形

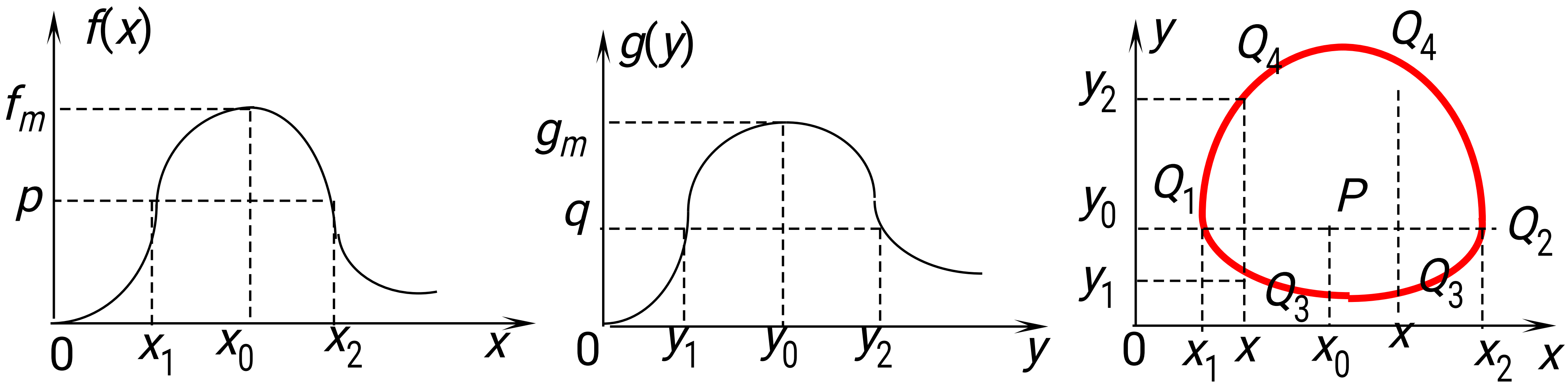
$$f(0) = f(\infty) = 0,\quad f(x_0) = f_m,\ x_0 = d/b$$

$$g(0) = g(\infty) = 0,\quad g(y_0) = g_m,\ y_0 = r/a$$



$c > f_m g_m$ 时无相轨线　　以下设 $c \le f_m g_m$

相轨线 $f(x)g(y)=c$



$c=f_m g_m$ ⇒ $x=x_0,\ y=y_0$ ⇒ **相轨线退化为*P*点** ***P*~中心**

$c<f_m g_m$ ⇒ 设$c=pg_m$ 令$y=y_0$ ⇒ $g(y)=g_m$ $f(x)=p<f_m$

⇒ 存在$x_1<x_0<x_2$, 使$f(x_1)=f(x_2)=p$ ⇒ $Q_1(x_1,y_0),Q_2(x_2,y_0)$

考察$x\in[x_1,x_2]$ $f(x)g(y)=pg_m$ $f(x)>p$ $g(y)=q<g_m$

⇒ 存在$y_1<y_0<y_2$,使$g(y_1)=g(y_2)=q$ ⇒ $Q_3(x,y_1),\ Q_4(x,y_2)$

x是$[x_1,x_2]$内任意点 ⇒ **相轨线是封闭曲线族**

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 $\Longleftrightarrow$ $x(t), y(t)$是周期函数(周期记 T)

求$x(t), y(t)$ 在一周期的平均值 $\bar{x}, \bar{y}$

$$\dot{y}(t)=(-d+bx)y$$

$$x(t)=\frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y}+d\right)$$

$$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y}+d\right)dt$$

$$=\frac{1}{T}\left(\frac{\ln y(T)-\ln y(0)}{b}+\frac{dT}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{x}=d/b$$

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow \bar{y}=r/a$$

轨线中心 $P(x_0, y_0): x_0=d/b,\ y_0=r/a \Rightarrow \bar{x}=x_0,\ \bar{y}=y_0$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

初值 $P_0(x_0', y_0')$

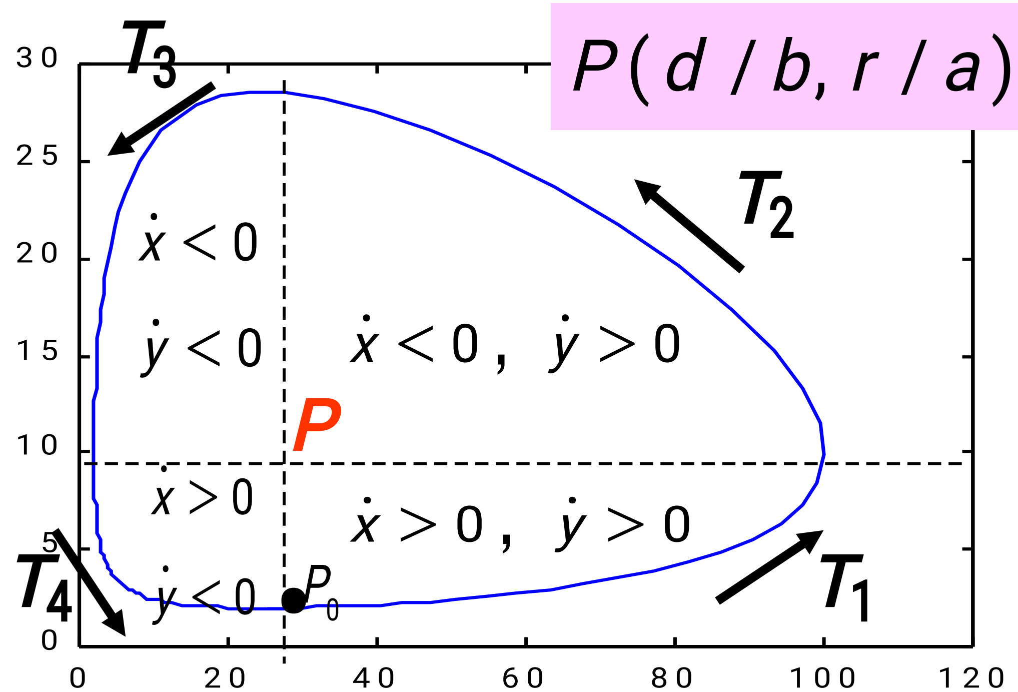
相轨线的方向

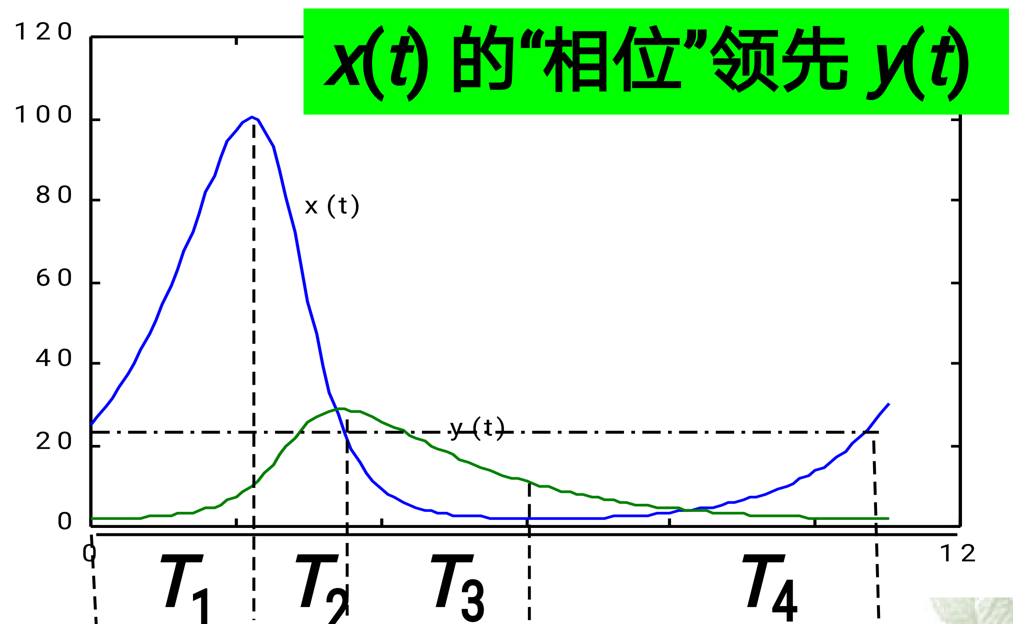
$T_1: x(t)\uparrow \quad y(t)\uparrow$

$T_2: x(t)\downarrow \quad y(t)\uparrow$

$T_3: x(t)\downarrow \quad y(t)\downarrow$

$T_4: x(t)\uparrow \quad y(t)\downarrow$





种群的弱肉强食

模型解释

捕食者数量 $\bar{y} = \dfrac{r}{a}$

r ~食饵增长率

a ~捕食者掠取食饵能力

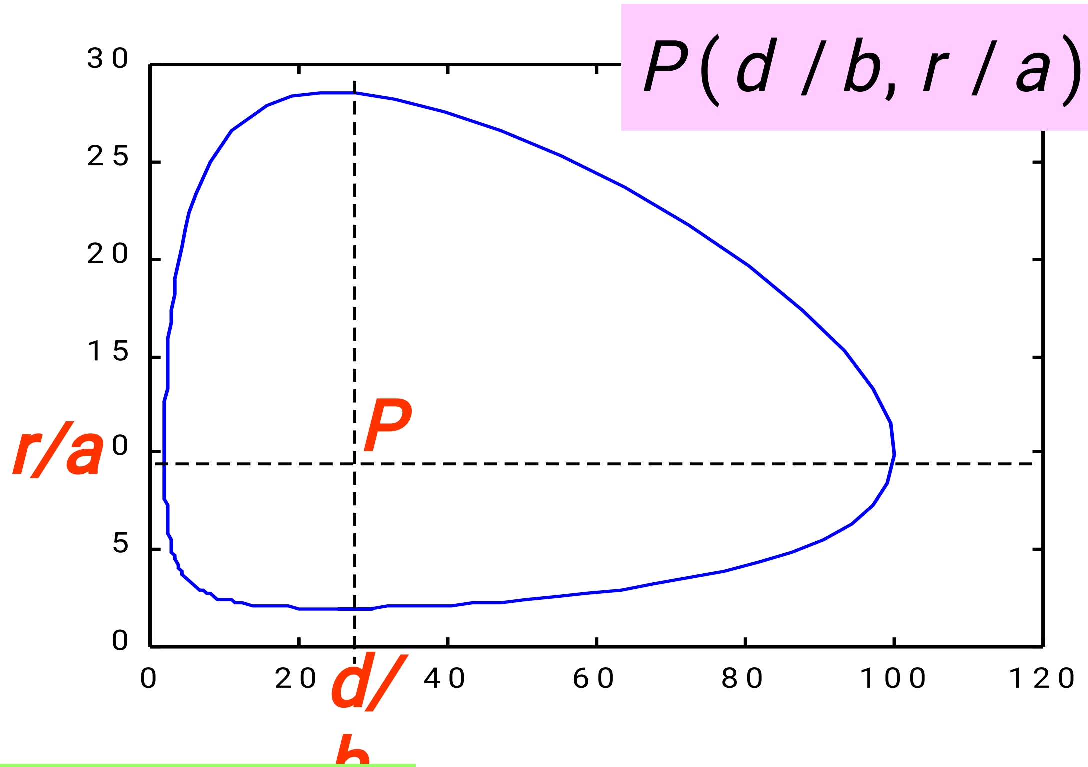
捕食者数量与r成正比, 与a成反比

食饵数量 $\bar{x} = \dfrac{d}{b}$

d ~捕食者死亡率

b ~食饵供养捕食者能力

食饵数量与d成正比, 与b成反比

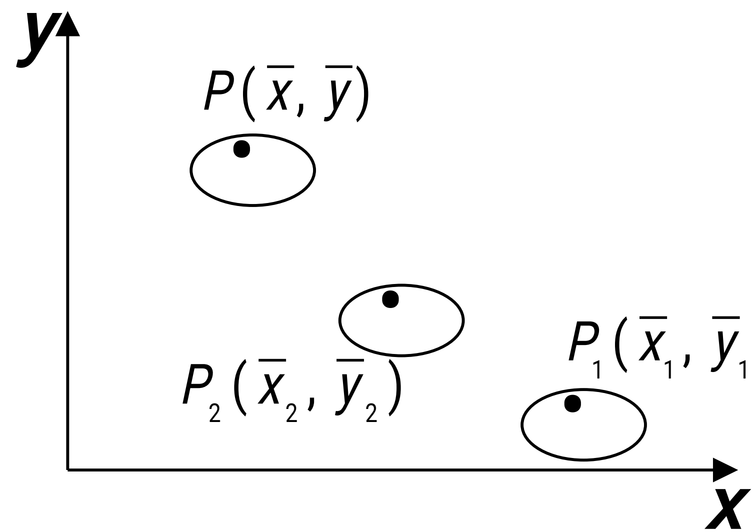


种群的弱肉强食

模型解释

一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？

自然环境 $P(\bar{x}, \bar{y})$ $\bar{x} = d/b, \ \bar{y} = r/a$



捕捞 $r \to r-\varepsilon_1, \ d \to d+\varepsilon_1$

$\Rightarrow \bar{x}_1 > \bar{x}, \ \bar{y}_1 < \bar{y}$ $P \to P_1$

战时捕捞 $r \to r-\varepsilon_2, \ d \to d+\varepsilon_2, \ \varepsilon_2 < \varepsilon_1$

$\Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_1, \ \bar{y}_2 > \bar{y}_1$ $P_1 \to P_2$

食饵(鱼)减少，捕食者(鲨鱼)增加

$P \to P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂, 会使害虫增加，益虫减少。

种群的弱肉强食

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

多数食饵—捕食者系统观察不到周期震荡,而是趋向某个平衡状态,即存在稳定平衡点

Volterra模型

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \qquad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

改写

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1}\right)$$

加Logistic项

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

有稳定平衡点

两种群模型的几种形式

相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

小结

- 微分方程的平衡点
- 平衡点稳定性的判定方法

Thanks for your time and attention!