Mathematical modeling

第十五讲 智能计算模型(2)

周毓明

zhouyuming@nju.edu.cn

南京大学计算机科学与技术系

CI:人工智能的分支

- 人工神经网络
- 模糊集
- 粗糙集
- 遗传算法
- 模拟退火
- 禁忌搜索
- 演化算法
- 启发式算法
- 鱼群算法
- 粒子群算法
- 蜜蜂算法
- 细菌算法
- 猫群算法
- 蚁群算法
- …

课程内容

1. 数学概念与模型
2. 实际案例与分析
3. 计算机典型应用

1. 数学概念与模型

① 模糊集的基本概念

② 模糊集的运算

③ 模糊集的截集

模糊集的基本概念

- 模糊概念
- 模糊集定义
- 模糊集的表示法
- 模糊集举例

模糊概念

- 普通集合论中，论域U中的每个元素x，对于子集$A \subset U$，$x \in A$与$x \notin A$，二者必居其一且仅居其一，绝不允许模棱两可
- 子集A由特征函数来$C_A(u)$：$U \to \{0，1\}$刻划

$$C_A(u)=\begin{cases}1, & u \in A\\ 0, & u \notin A\end{cases}$$

- 特征函数$C_A(u)$仅取两个值，在表达概念方面有其局限性，只能表达非此即彼的现象，不能表达存在于现实中的亦此亦彼的现象

例1 设X表示全体人组成的集合，“男人” 的集合,“女人”的集合分别是X的普通子集。

设H={高个子的人}， Y={年轻人}，O={老年人}。

H， Y，O不再是普通子集。

例2 设X={全体实数}，A={所有大于1的实数}
A是X的普通子集。

设B={比1大得多的实数}，B不再是X的普通子集。

原因：“年轻”与“年老”之间，是否“比1大得多”之间不存在明确的边界，中间经历一个从量变到质变的连续过渡过程。

例3 秃头悖论：任何人都是秃头。

公设：若具有n根头发的人是秃头,则有$n+1$根头发的人亦是秃头。

证 由数学归纳法:

(1)仅有一根头发的人自然是秃头。

(2)假设有n根头发的人是秃头。

(3)由公设便知有$n+1$根头发的人也是秃头。

由数学归纳法知任何人都是秃头。

悖论出现的原因：

数学归纳法是以普通集合论为基础的数学方法，而“秃头”是个模糊概念，用一个精确的数学方法来处理这样的模糊概念是不合适的。

模糊集定义

定义1 设在论域U上给定一个映射

$$A: \quad U \to [0, 1]$$
$$u \mapsto A(u)$$

则称A为U上的模糊子集，$A(u)$称为A的隶属函数（或称为u对A的隶属度）。模糊子集简称模糊集合。

- 对模糊集A，若$A(u)$仅取0和1，则A就蜕化为普通集合。所以普通集合是模糊集的特殊情形。
- 若$A(u) \equiv 0$，则A为空集$\varnothing$。
- 若$A(u) \equiv 1$，则A为全集U。

论域U上的模糊集A由隶属函数来$A(u)$表征，$A(u)$的大小反映了u对于模糊子集的从属程度。模糊子集完全由隶属函数来描述。

定义2 设U是论域，记U上的模糊集的全集为$\mathscr{F}(U)$，即

$$F(U)=\{A \mid A: U \to [0,1]\}$$

称$\mathscr{F}(U)$为U上的模糊幂集。

模糊集表示法

模糊集合有以下的表示法：

(1)序偶表示法：

$$A=\{(u,A(u))\big|u\in U\}$$

(2)Zadeh表示法： 若 U是有限集或可数集，可表示为

$$A=\sum A(u_i)/u_i$$

若U是无限不可数集，可表示为

$$A=\int A(u)/u$$

(3)模糊向量法：

$$A=(A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n))$$

模糊集举例

例4 设$U=\{1,2,3,4,5,6\}$, A表示"靠近4"的数，则

$A\in\mathscr{F}(U)$，各数属于A的程度$A(u_i)$ 如表。

u	1	2	3	4	5	6
$A(u)$	0	0.2	0.8	1	0.8	0.2

则A可用不同方式表示如下：

(1)序偶法:

$$A=\{(1,0),(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\}$$

或舍弃隶属度为0的项, 记为

$$A=\{(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\}$$

(2)Zadeh法:

$$A=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6}$$

$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6}$$

(3) 向量法: $A=(0, 0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2)$

例5 设论域为实数域R，A表示“靠近4的数集”，则$A \in \mathscr{F}(R)$，它的隶属函数是

$$A(x)=\begin{cases} e^{-k(x-4)^2} & |x-4|<\delta \\ 0 & |x-4|\geq \delta \end{cases}$$

参数$\delta > 0, \mathrm{k} > \delta$，参见图1.1。

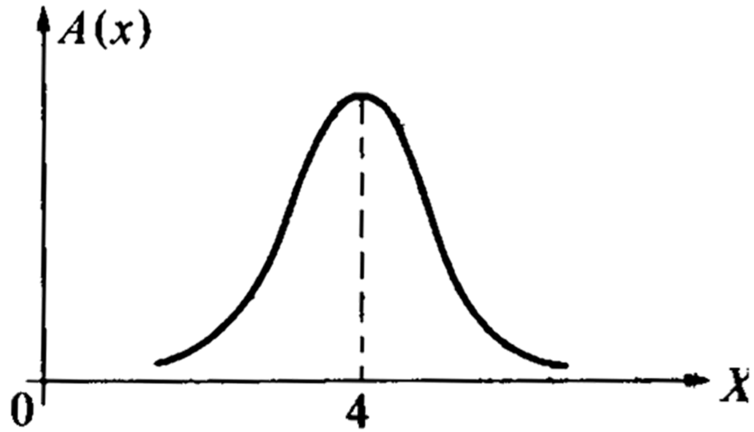


图1.1

例6 以人的年龄为论域U=[0,100],则“年老”和“年轻”可表示为U上的模糊集A和B, 隶属函数分别为：

$$A(u)=\begin{cases} 0 & 0\le u\le 50 \\ \left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\le 100 \end{cases}$$

$$B(u)=\begin{cases} 1 & 0\le u\le 25 \\ \left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\le 100 \end{cases}$$

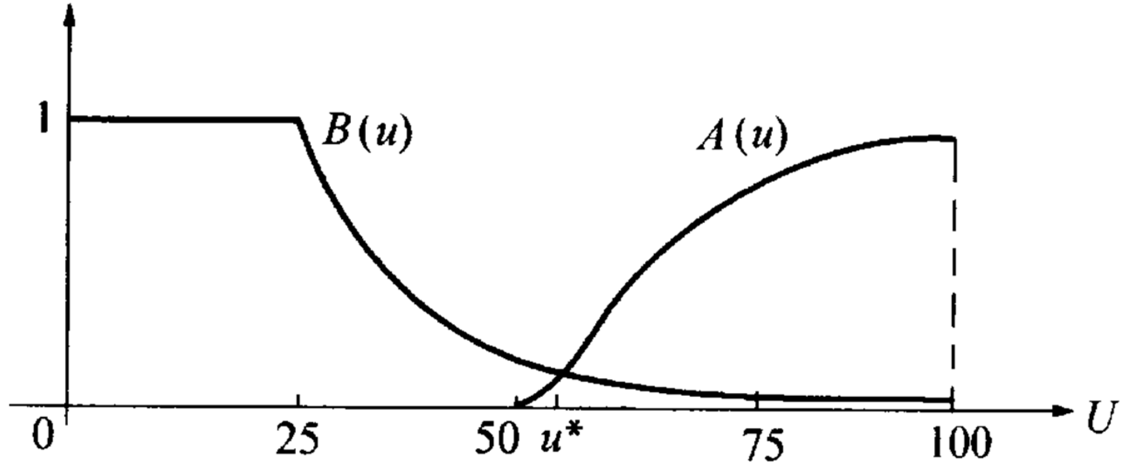


图1.2 “年轻”、“年老”隶属度曲线

$B(26)=0.962$, $B(30)=0.5$, $B(35)=0.2$, $B(40)=0.1$, $B(45) \approx 0.06$,

$A(55)=0.5$, $A(51)=0.038$, $A(60)=0.67$, $A(65)=0.9$, $A(70) \approx 0.94$

例7 设*X*是所有人的集合，

“height”＝｛ tall men、medium men、short men｝

对不同的人有不同的含义。

下图给出了普通人和篮球队员身高的两个模糊集合 。

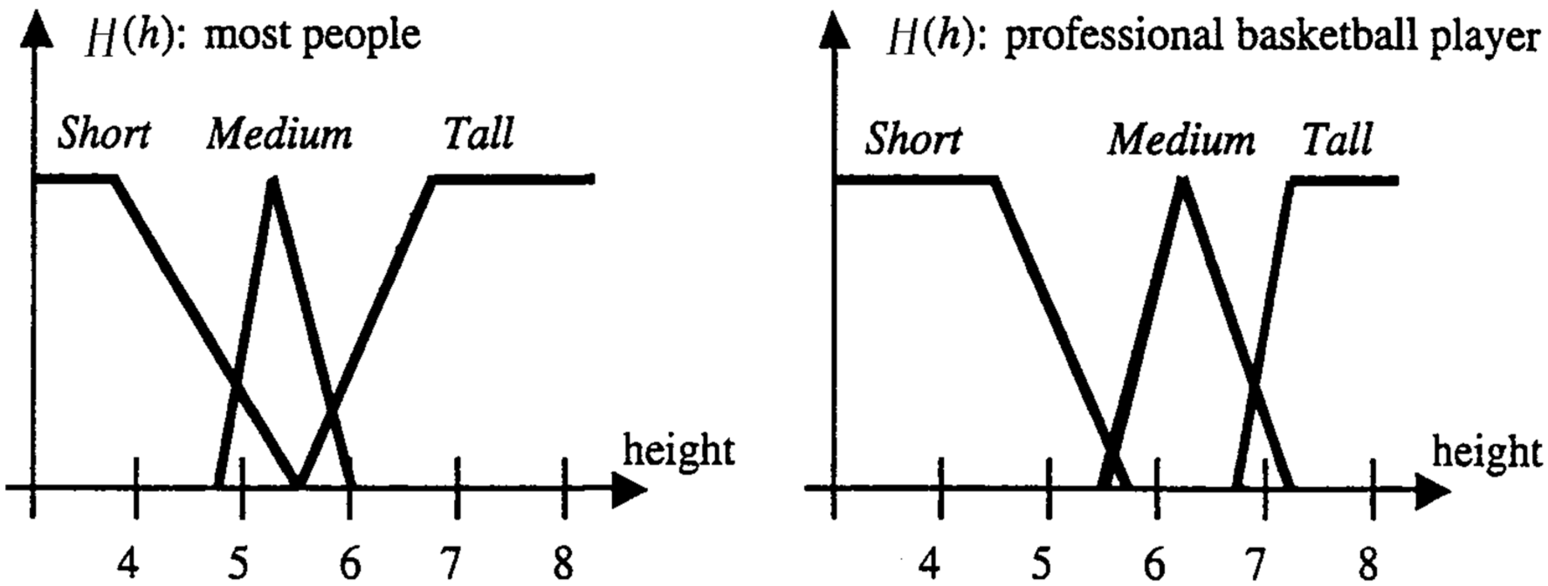


图**1.3 “height”＝｛ tall men、medium men、short men｝**

(a) 普通人的隶属函数 **(b)**篮球队员的隶属函数

模糊集的运算

- 模糊集的包含和相等关系
- 模糊集的并、交、补运算
- 模糊集运算的基本性质

模糊子集的包含和相等关系

定义1 设A、$B\in\mathscr{F}(U)$, 若$\forall u\in U, A(u)\le B(u)$, 则称$B$包含$A$，记为$A\subseteq B$

如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则称A与B相等. 记作$A=B$.

- 包含关系“$\subseteq$”是模糊幂集$\mathscr{F}(U)$上的二元关系，具有如下性质：

(1)自反性： $\forall A\in\mathscr{F}(U), A\subseteq A$

(2)反对称性： $A\subseteq B, B\subseteq A$, 则$A=B$

(3)传递性： 若$A\subseteq B, B\subseteq C$,则$A\subseteq C$

因此,（$\mathscr{F}(U), \subseteq$）是偏序集。

模糊子集的并、交、补运算

- 定义2 设A、$B\in\mathscr{F}(U)$，分别称运算$A\cup B$、$A\cap B$为A与B的并集，交集，A^C称为A的补集，也称为余集。它们的隶属函数分别为：

$$(A\cup B)(u)=A(u)\vee B(u)=\max(A(u),B(u))$$

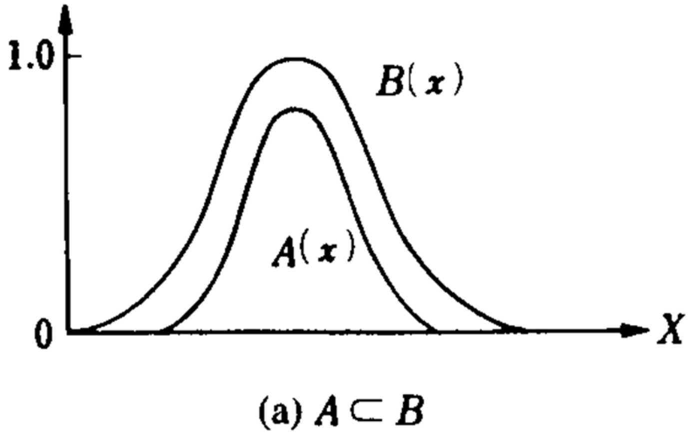
$$(A\cap B)(u)=A(u)\wedge B(u)=\min(A(u),B(u))$$

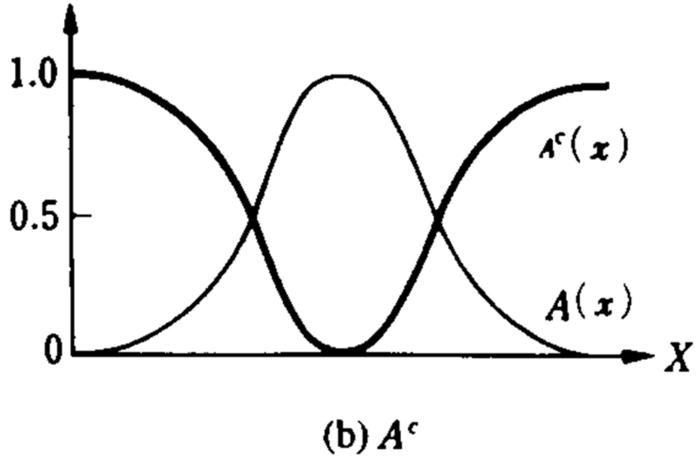
$$A^c(u)=1-A(u)$$

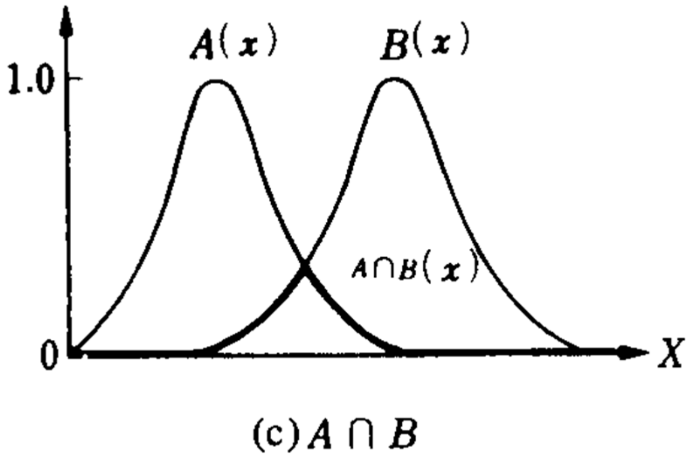
任给$A(u)=a\in[0,1]$, $B(u)=b\in[0,1]$,由于$0\le a\vee b\le 1$

$0\le a\wedge b\le 1$, $0\le 1-a\le 1$，故对A、$B\in\mathscr{F}(U)$, 有

$A\cup B$、$A\cap B$，$A^C\in\mathscr{F}(U)$.







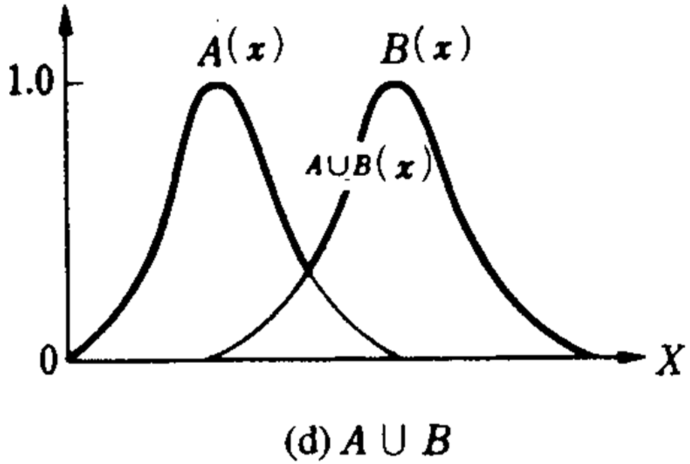


图1.4 模糊集的包含、并、交、补运算

- 例1 设 $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

$$A=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.5}{u_5},\ B=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.1}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

求$A\cup B$、 $A\cap B$， A^C

$A(u_1)\vee B(u_1)$

解：

$$A\bigcup B=\frac{0.2\vee 0.5}{u_1}+\frac{0.7\vee 0.3}{u_2}+\frac{1\vee 0}{u_3}+\frac{0\vee 0.1}{u_4}+\frac{0.5\vee 0.7}{u_5}$$

$$=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.1}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

$$A \cap B = \frac{0.2 \wedge 0.5}{u_1} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{u_2} + \frac{1 \wedge 0}{u_3} + \frac{0 \wedge 0.1}{u_4} + \frac{0.5 \wedge 0.7}{u_5}$$

$A(u_1) \wedge B(u_1)$

$$= \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0}{u_3} + \frac{0}{u_4} + \frac{0.5}{u_5} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.5}{u_5}$$

隶属度为零的项省略

$$A^c = \frac{1-0.2}{u_1} + \frac{1-0.7}{u_2} + \frac{1-1}{u_3} + \frac{1-0}{u_4} + \frac{1-0.5}{u_5}$$

$1-A(u_5)$

$$= \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.5}{u_5} = \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.5}{u_5}$$

一般地，模糊集***A***与***B***的并、交和补运算，按论域***U***为有限和无限分为两种情况：

(1) 设有限论域$U=\{u_1, u_2,\cdots,u_n\}$,且模糊集

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)}{u_i},\quad B=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(u_i)}{u_i}$$

则

$$A\bigcup B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\vee B(u_i)}{u_i}$$

$$A\bigcap B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\wedge B(u_i)}{u_i}$$

$$A^c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-A(u_i)}{u_i}$$

(2)设无限论域*U*，且模糊集

$$A=\int_{u\in U}\frac{A(u)}{u},\quad B=\int_{u\in U}\frac{B(u)}{u}$$

则

$$A\bigcup B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\vee B(u)}{u}$$

$$A\bigcap B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\wedge B(u)}{u}$$

$$A^c=\int_{u\in U}\frac{1-A(u)}{u}$$

- 例2 设模糊集$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别表示“年老”和“年轻”，隶属函数分别为：

$$A(u)=\begin{cases} 0 & 0\le u\le 50 \\ [1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1} & 50<u\le 100 \end{cases}$$

$$B(u)=\begin{cases} 1 & 0\le u\le 25 \\ [1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1} & 25<u\le 100 \end{cases}$$

求$\boldsymbol{A\cup B}$、$\boldsymbol{A\cap B}$， $\underline{\boldsymbol{A^C}}$

- 解： 令u^*为曲线$A(u)$与$B(u)$的交点坐标。

$$A \cup B = \int_{u \in U} \frac{A(u) \vee B(u)}{u}$$

$$= \int_{0 \le u \le 25} \frac{1}{u} + \int_{25 < u \le u^*} \frac{[1+(\frac{u\text{-}25}{5})^2]^{-1}}{u} + \int_{u^* < u \le 100} \frac{[1+(\frac{u\text{-}50}{5})^{-2}]^{-1}}{u}$$

$$A \cap B = \int_{u \in U} \frac{A(u) \wedge B(u)}{u}$$

$$= \int_{50 < u \le u^*} \frac{[1+(\frac{u\text{-}50}{5})^{-2}]^{-1}}{u} + \int_{u^* < u \le 100} \frac{[1+(\frac{u\text{-}25}{5})^2]^{-1}}{u}$$

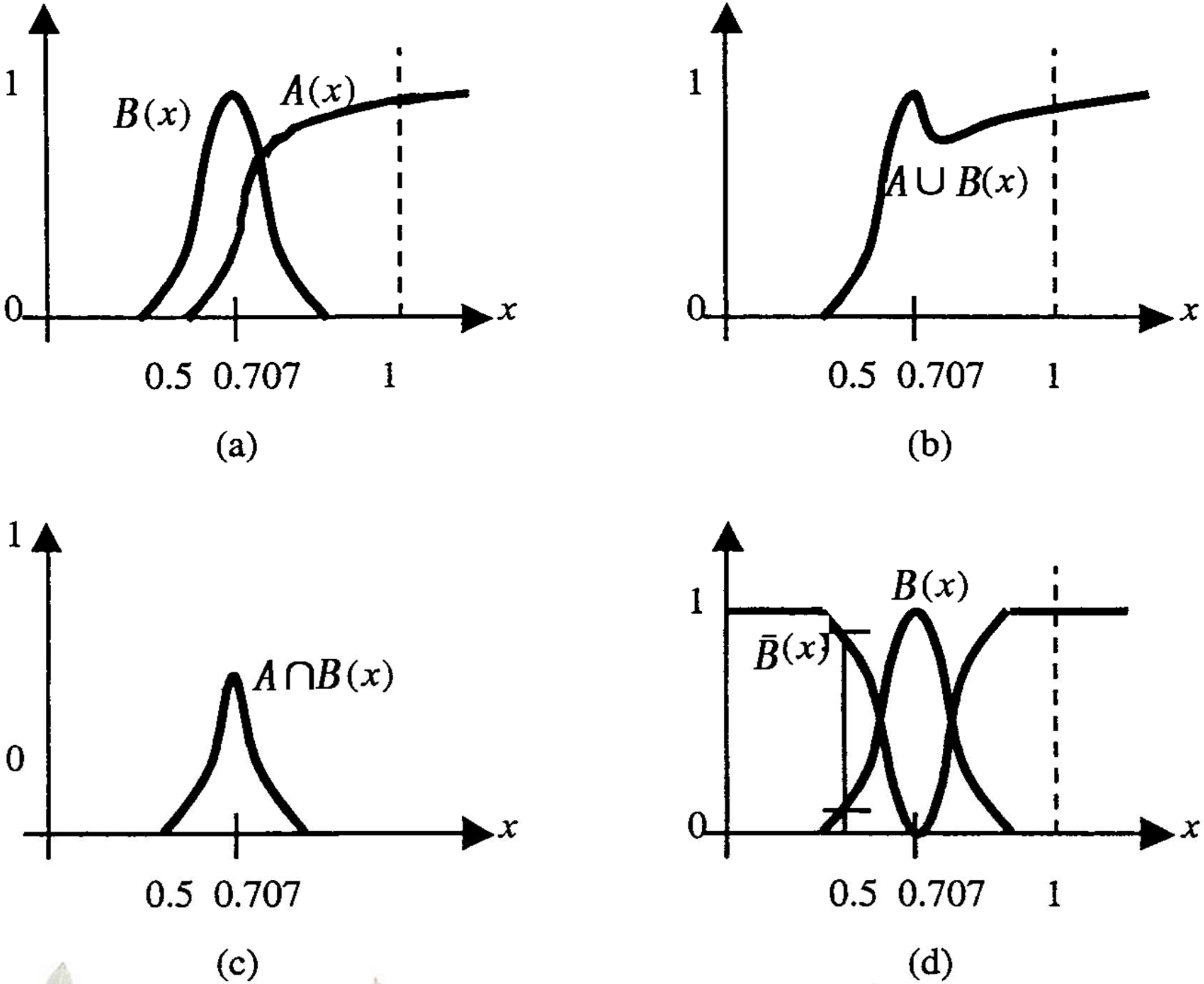
$$A^c = \int_{u \in U} \frac{1 - A(u)}{u} = \int_{0 \le u \le 50} \frac{1}{u} + \int_{50 < u \le 100} \frac{1-[1+(\frac{u\text{-}50}{5})^{-2}]^{-1}}{u}$$

- 例3 设论域X为实数域，$x \in X$为正实数，且$0 \leqslant x \leqslant 1$。考虑$X$上的两个模糊集$A$=“$x$远远大于0.5”和$B$=“大约等于0.707”。$A$和$B$的隶属函数定义为：

$$A(x)=\begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.5 \\ \dfrac{1}{[1+(x-0.5)^{-2}]} & 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

$$B(x)=\frac{1}{[1+(x-0.707)^{4}]}\ ,\quad 0 \le x \le 1$$

观察图1.5(d), 由于点x=0.5属于B和B^C 的隶属度不同，因此模糊集的互补律运算不成立。



1
0
B(x)
A(x)
x
0.5 0.707 1
(a)
1
0
A ∪ B(x)
x
0.5 0.707 1
(b)
1
0
A ∩ B(x)
x
0.5 0.707
(c)
1
0
B(x)
B̄(x)
x
0.5 0.707 1
(d)

图1.5

- 定义3 设$A_t \in \mathscr{F}(U)$, $t \in T$, T为指标集, 对$\forall u \in U$规定：

$$(\bigcup_{t \in T} A_t)(u) = \bigvee_{t \in T} A_t(u) = \sup_{t \in T} A_t(u)$$

$$(\bigcap_{t \in T} A_t)(u) = \bigwedge_{t \in T} A_t(u) = \inf_{t \in T} A_t(u)$$

称$\bigcup\limits_{t \in T} A_t$为$\{A_t\}_{t \in T}$的并集，$\bigcap\limits_{t \in T} A_t$为$\{A_t\}_{t \in T}$的交集。

例4 一组无限多个模糊集合A_i定义如下，$A_i(x) = 1 - \dfrac{1}{i+1}$ i是自然数，

$$(\bigcup_{i} A_i)(x) = \sup_{i} A_i(x) = \sup_{i} (1 - \frac{1}{i+1}) = 1$$

sup代表最小上界

模糊集运算的基本性质

- 定理　模糊集下的并、交、补具有如下性质：
- （1）幂等律：$A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- （2）交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
- （3）结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- （4）吸收律：$(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$
- （5）分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- **(6) 零壹律** $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup U=U$, $A\cap U=A$;
- **(7) 复原律** $(A^{C})^{C}=A$
- **(8) 对偶律** $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$, $(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

证明：

$$
\begin{aligned}
(A\bigcup B)^{c}(u) &= 1-(A\bigcup B)(u) \\
&= 1-(A(u)\vee B(u)) \\
&= (1-A(u))\wedge(1-B(u)) \\
&= (A^{c}\bigcap B^{c})(u)
\end{aligned}
$$

模糊集运算的基本性质

- 模糊集上的补运算不满足互补律，其原因是模糊集没有明确的边界。

$$A\cap A^{C}\neq\varnothing\Rightarrow A\text{和}A^{C}\text{交叠，}$$

但$\forall A\in\mathscr{F}(U)$, $A(u)\wedge A^{C}(u)\leq 1/2$

$$A\cup A^{C}\neq U\Rightarrow A\cup A^{C}\text{不一定完全覆盖}U,$$

但$\forall A\in\mathscr{F}(U)$, $A(u)\vee A^{C}(u)\geq 1/2$

例5 设U=[0,1]，$A(u)=u$, 则$A^C(u)=1-u$ ，

$$(A\bigcup A^c)(u)=\begin{cases}1-u & u\le\frac{1}{2}\\ u & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\bigcap A^c)(u)=\begin{cases}u & u\le\frac{1}{2}\\ 1-u & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别是

$$(A\bigcup A^c)(\frac{1}{2})=(A\bigcap A^c)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

模糊集的截集

- 截集定义
- 截集的性质

截集定义

- 定义1 设$A\in\mathscr{F}(U)$, $\lambda\in[0,1]$, 分别定义

$$A_\lambda=\{u\,|\,u\in U, A(u)\geq\lambda\}$$

$$A_{\dot{\lambda}}=\{u\,|\,u\in U, A(u)>\lambda\}$$

则称A_λ为A的一个λ—截集，称 $A_{\dot{\lambda}}$为A的一个λ—强截集。λ称为阈值（或置信水平）。

A_λ是一个普通集。对$\forall u\in U$,

当$A(u)\geq\lambda$时，就说 $u\in A_\lambda$，意即在λ水平下，

u属于模糊集A，

当 $A(u)<\lambda$时，就说$u\notin A_\lambda$，意即在λ水平下，

u不属于模糊集A。

模糊集的截集

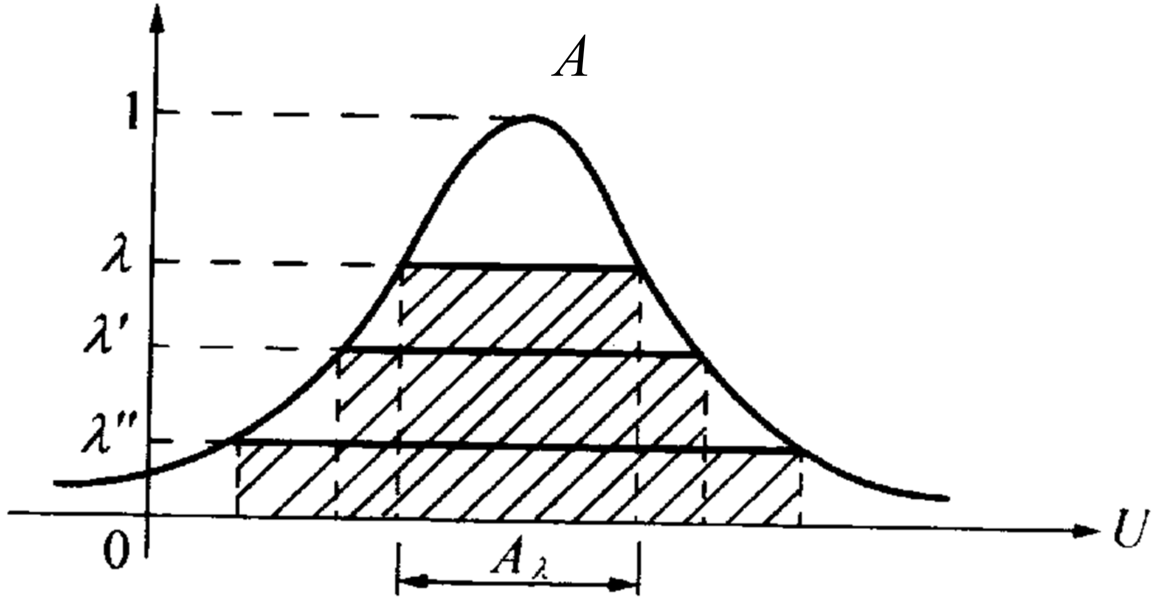


图1.9　*A*的λ截集

截集的性质

- 性质1 设A，$B \in \mathscr{F}(U)$, 对$\lambda \in [0,1]$, 则

$$(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda, \quad (A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$$

证 $$(A \cup B)_\lambda = \{u \mid (A \cup B)(u) \ge \lambda\}$$
$$= \{u \mid A(u) \vee B(u) \ge \lambda\}$$
$$= \{u \mid A(u) \ge \lambda \text{或} B(u) \ge \lambda\}$$
$$= \{u \mid A(u) \ge \lambda\} \cup \{u \mid B(u) \ge \lambda\} = A_\lambda \cup B_\lambda$$

$$(A \cap B)_\lambda = \{u \mid (A \cap B)(u) \ge \lambda\} = \{u \mid A(u) \wedge B(u) \ge \lambda\}$$
$$= \{u \mid A(u) \ge \lambda\} \cap \{u \mid B(u) \ge \lambda\} = A_\lambda \cap B_\lambda$$

- 对于$\mathscr{F}(U)$中的有限个模糊集，此结论仍然成立。

$$(\bigcup_{t=1}^{n} A_t)_\lambda = \bigcup_{t=1}^{n}(A_t)_\lambda，\quad (\bigcap_{t=1}^{n} A_t)_\lambda = \bigcap_{t=1}^{n}(A_t)_\lambda$$

- 但是，对于无限多个模糊集，等号未必成立。
- **性质2** 若$\{A_t | t\in T\} \subseteq \mathscr{F}(U)$，$T$为指标集，则

$$\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda \subseteq (\bigcup_{t\in T} A_t)_\lambda,$$

$$\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda = (\bigcap_{t\in T} A_t)_\lambda$$

■ **例2** 令 $A_n(u) \equiv \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$，则

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)(u) \equiv \frac{1}{2}$$ ，于是 $$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)_{0.5} = U$$

但是 $(A_n)_{0.5} = \phi, n \geq 1$ ，从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{0.5} = \phi$

因此 $$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{0.5} \neq (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)_{0.5}$$

说明性质2中的包含关系一般不能换为等式。

$$\bigcup_{t \in T}(A_t)_{\lambda} \neq (\bigcup_{t \in T} A_t)_{\lambda}$$

- **性质3** 设$\lambda_1,\lambda_2 \in [0,1], A \in F(U)$，若$\lambda_1 \le \lambda_2$，
- 则 $A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}$

证 对$\forall u \in A_{\lambda_2}$，有 $A(u) \ge \lambda_2 \Rightarrow A(u) \ge \lambda_2 \ge \lambda_1$

所以 $u \in A_{\lambda_1}$，即 $A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}$

- **性质4** 设$\forall t \in T, \lambda_t \in [0,1]$，则 $A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)} = \bigcap\limits_{t\in T} A_{\lambda_t}$

证

$$u \in A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)} \Leftrightarrow A(u) \ge \bigvee_{t\in T}\lambda_t$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in T, A(u) \ge \lambda_t$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in T, u \in A_{\lambda_t} \Leftrightarrow u \in \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}$$

- **定义2 设$A\in\mathscr{F}(U)$,**

(1) 称 A_0 为A的支撑集，记作Supp$A$, 即

$$\mathrm{Supp}A=\{\, u \mid u\in U,\ A(u)>0\}$$

(2) A的核记为Ker$A$： Ker$A$=$\{u \mid u\in U,\ A(u)=1\}$

(3) 若Ker$A\neq\varnothing$，则称A为正规模糊集。

支撑集与核的性质：

(1) Supp $\varnothing$ = Ker$\varnothing$= $\varnothing$， Supp U = Ker$U$= U;

(2) Supp (Supp$A$)= Supp$A$, Ker (Ker$A$)= Ker$A$;

(3) $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow \mathrm{Supp}A\cap \mathrm{Supp}B=\varnothing$

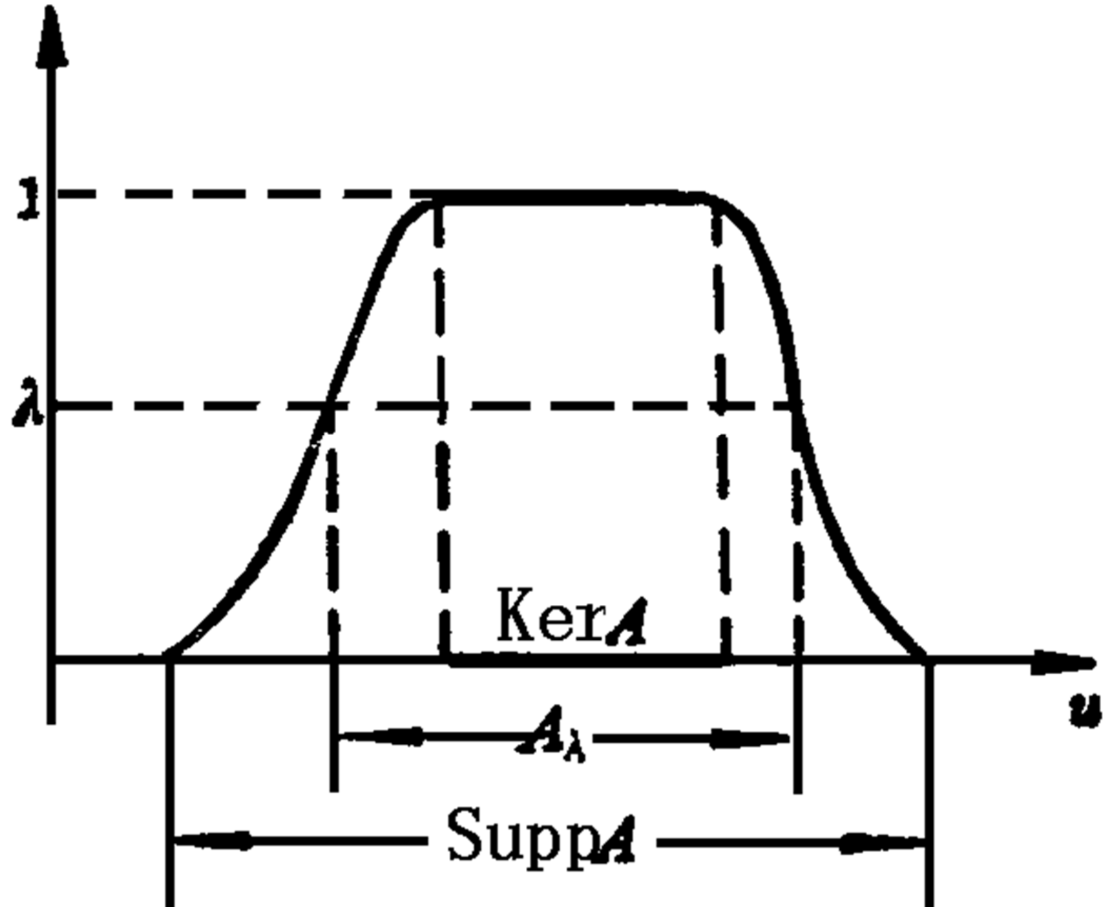


图1.10 模糊集A的SuppA,KerA

2. 实际案例与分析

① 模糊模式识别

② 模糊聚类分析

③ 模糊综合评判

④ 模糊故障诊断

模糊模式识别

- 模式识别的原理
- 模糊集的贴近度
- 模糊模式识别方法

模式识别步骤：

① 识别对象的特性指标抽取；

② 构造模糊模式的隶属函数组；

③ 构造待识别对象B的隶属函数；

④ 确定B与每个A_i的贴近度；

⑤ 按择近原则识别判断。

模糊集的贴近度

- **1 贴近度的定义**

贴近度是对两个模糊集接近程度的一种度量。

定义1 设$A,B,C\in \mathscr{F}(U)$, 若映射$N: \mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(U)\to[0,1]$满足条件:

(1) $N(A, B)=N(B, A)$

(2) $N(A, A)=1$, $N(U, \varphi)=0$

(3) 若$A\subseteq B\subseteq C$, 则 $N(A,C)\le N(A, B) \wedge N(B, C)$

则$N(A,B)$称为模糊集A与B的贴近度. N为$\mathscr{F}(U)$上的贴近度函数.

- 几种常见的贴近度类型：设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in \mathscr{F}(\boldsymbol{U})$,

(1) 海明(Haming)贴近度

若$\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$，则

$$N(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-B(u_i)\right|$$

当$\boldsymbol{U}$为实数域上的闭区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$时，则

$$N(A,B)=1-\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|A(u)-B(u)\right|du$$

(2) 欧几里德(Euclid)贴近度

若$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$，则

$$N(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(u_i)-B(u_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

当$U=[a,b]$时，有

$$N(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b (A(u)-B(u))^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

(3)最大最小贴近度

若$\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$，则

$$N(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(A(u_i)\wedge B(u_i))}{\sum_{i=1}^{n}(A(u_i)\vee B(u_i))}$$

当$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$时，有

$$N(A,B)=\frac{\int_a^b(A(u)\wedge B(u))du}{\int_a^b(A(u)\vee B(u))du}$$

（4）算术平均最小贴近度

若$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$，则

$$N\left(A,B\right)=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(A(u_i)\wedge B(u_i))}{\sum_{i=1}^{n}A(u_i)+\sum_{i=1}^{n}B(u_i)}$$

当$U=[a,b]$时，有

$$N\left(A,B\right)=\frac{2\int_a^b(A(u)\wedge B(u))du}{\int_a^b A(u)du+\int_a^b B(u)du}$$

- **例1 设*U*=[0,100]，且**

$$A(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<20\\ \dfrac{x-20}{40} & 20\le x<60\\ 1 & 60\le x\le 100\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<40\\ \dfrac{80-x}{40} & 40\le x<80\\ 0 & 80\le x\le 100\end{cases}$$

求最大最小贴近度 ***N*(*A*,*B*)**

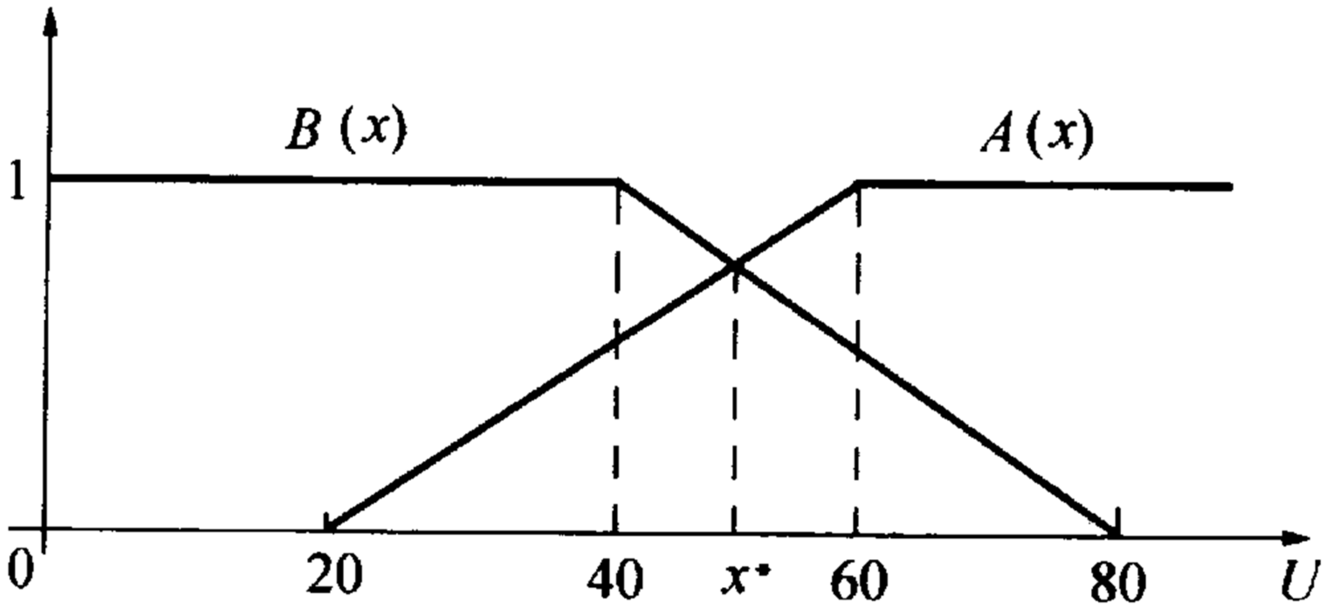


图3.1 模糊集曲线

解 不难求得$A(x)$和$B(x)$的交点坐标$x^*=50$，于是

$$A(x) \wedge B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-20}{40} & 20 \le x < 50 \\ \dfrac{80-x}{40} & 50 \le x < 80 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$A(x) \vee B(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 40 \\ \dfrac{80-x}{40} & 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-20}{40} & 50 \le x < 60 \\ 1 & 60 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$N\left(A,B\right)=\frac{\int_{0}^{100} A(x)\wedge B(x)dx}{\int_{0}^{100} A(x)\vee B(x)dx}$$

$$=\frac{\int_{20}^{50} \frac{x\text{-}20}{40}dx+\int_{50}^{80} \frac{80\text{-}x}{40}dx}{\int_{0}^{40} dx+\int_{40}^{50} \frac{80\text{-}x}{40}dx+\int_{50}^{60} \frac{x\text{-}20}{40}dx++\int_{60}^{100} dx}$$
$$\approx 0.23$$

- **2** 格贴近度

定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathscr{F}(\boldsymbol{U})$, 称

$$A \circ B = \bigvee_{u\in U}(A(u) \wedge B(u))$$

为模糊集$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$的内积。内积的对偶运算为外积。称

$$A \overset{\wedge}{\circ} B = \bigwedge_{u\in U}(A(u) \vee B(u))$$

为模糊集$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$的外积。

如果在闭区间**[0,1]**上定义“余”运算**:**

$\forall \boldsymbol{a}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]$，$\boldsymbol{a}^c=\mathbf{1}-\boldsymbol{a}$，那么有如下命题

定义 设 $A, B \in \mathscr{F}(U)$, 则称

$$\boxed{N(A,\ B) = (A \circ B) \wedge (A \,\hat{\circ}\, B)^c}$$

是模糊集A, B的贴近度，叫做A, B的格贴近度。

当U为有限论域时

$$A \circ B = \bigvee_{i=1}^{n} (A(u_i) \wedge B(u_i))$$

当U为无限论域时，

$$A \circ B = \bigvee_{u \in U} (A(u) \wedge B(u))$$

$$N(A,\ B) = (A \circ B) \wedge (A \mathbin{\hat{\circ}} B)^c$$

$$N(A,\ B) = (A \circ B) \wedge (A^c \circ B^c)$$

例1 现有茶叶等级标准样品五种：**I, II, III, IV, V**及待识别的茶叶模型A，确定A的型号。

解 取反映茶叶质量的因素集为论域U，

U ={条索、色泽、净度、汤色、香气、滋味}

假定U上的模糊集为：

I =（0.5, 0.4, 0.3, 0.6, 0.5, 0.4）

II =（0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2, 0.2）

III =（0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.2）

IV =（ 0, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1）

V =（ 0, 0.1, 0.1, 0.1 0.1, 0.1）

A **=（0.4, 0.2, 0.1, 0.4, 0.5, 0.6）**

利用格贴近度公式计算

$$
\begin{aligned}
N(A,\mathrm{I}) &= (A \circ \mathrm{I}) \wedge (A^c \circ \mathrm{I}^c) \\
&= [\mathop{\vee}_{i=1}^{6}(A(u_i) \wedge \mathrm{I}(u_i))] \wedge [\mathop{\vee}_{i=1}^{6}(A^c(u_i) \wedge \mathrm{I}^c(u_i))] \\
&= 0.5 \wedge 0.7 = 0.5
\end{aligned}
$$

同理 ***N*(*A*, II)=0.3**， ***N*(*A*, III)=0.2**， ***N*(*A*, IV)=0.2**，***N*(*A*, V)=0.1**，由择近原则，***A***为**I**型茶叶。

例2 岩体工程识别

设岩石按抗压强度可分为：很好，好的，较好的，差的，很差的五类，每类对应的模糊集分别记为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，其隶属函数见图3.4。

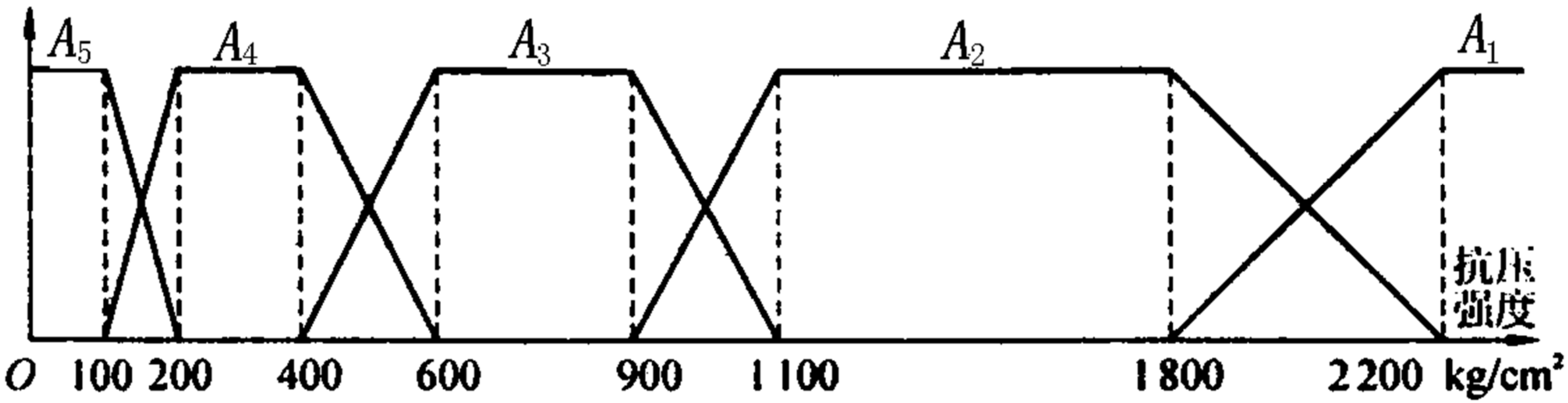


图3.4 岩石抗压强度等级

今有某项岩体工程经实地测量应用统计方法获得岩石抗压强度对应的模糊集***B***，它的隶属函数曲线见图**3.4**。

上述各模糊集的隶属函数可由图像直接写出，问此类岩石体应属于哪一类？

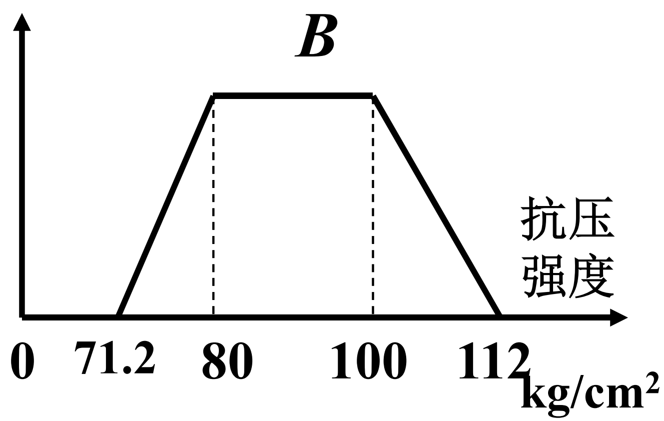


图**3.4** 某岩体岩石抗压强度

解 取论域为X，定义算法

$$N(A,B)=1-(\bigvee_{x\in X}A(x)-\bigwedge_{x\in X}A(x))+(A\circ B-A\hat{\circ}B)$$

其中可以验证N满足贴近度的三个要求，故可作为贴近度。

通过计算，有$N(B, A_1)=0$, $N(B, A_2)=0.688$, $N(B, A_3)=1$, $N(B, A_4)=0$, $N(B, A_5)=0$,而

$\max\{N(B, A_1), N(B, A_2), N(B, A_3), N(B, A_4), N(B, A_5)\}$

$=\max\{0,0.688,1,0,0,\}$

$= N(B,A_3)$

由择近原则，我们认为此岩石体应归为第三类（较好的）岩石。

3. 计算机典型应用

基于直觉模糊集的图像融合

Information Fusion 20 (2014) 21–30

Contents lists available at ScienceDirect

Information Fusion

journal homepage: www.elsevier.com/locate/inffus

ELSEVIER

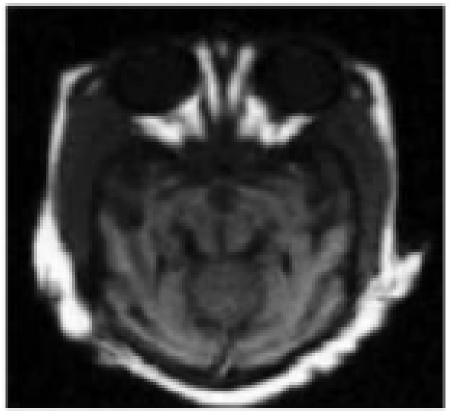
Image fusion using intuitionistic fuzzy sets

CrossMark

P. Balasubramaniam *, V.P. Ananthi

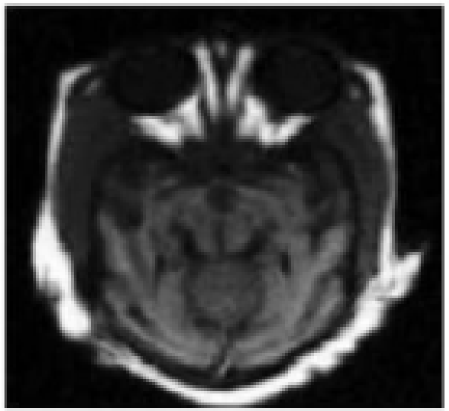
基于直觉模糊集的图像融合

核磁共振

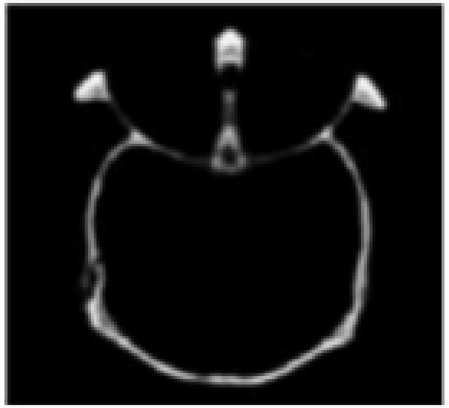


基于直觉模糊集的图像融合

核磁共振

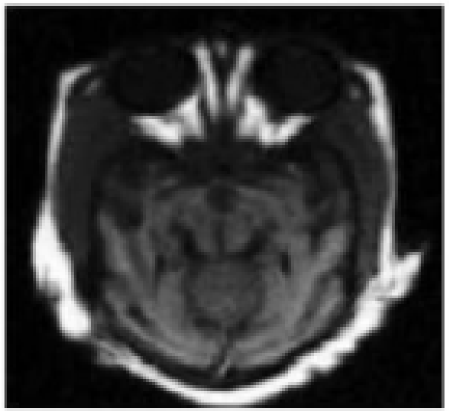


CT

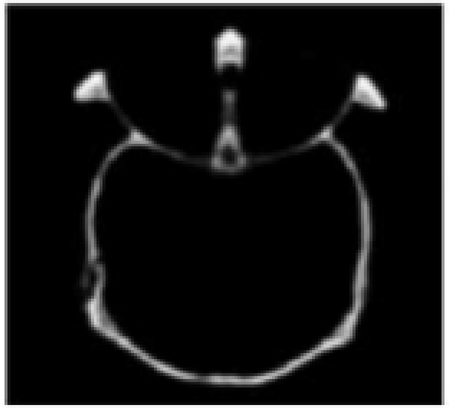


基于直觉模糊集的图像融合

核磁共振



CT

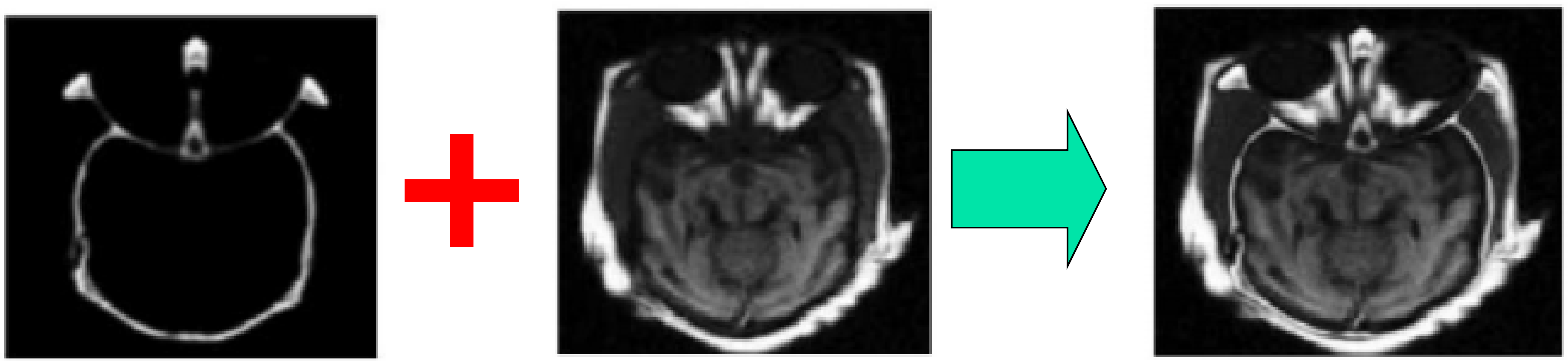


基于直觉模糊集的图像融合

问题描述

输入：两幅图像

输出：合并后的图像



基于直觉模糊集的图像融合

$$F = \{(x, \mu_F(x), \ \nu_F(x)) | x \in X\}$$

$$0 \leqslant \mu_F(x) + \nu_F(x) \leq 1.$$

$$F = \{(x, \mu_F(x), \nu_F(x), \pi_F(x)) | x \in X\}$$

$$\mu_F(x) + \nu_F(x) + \pi_F(x) = 1$$

F = {(郭家大院，0.6, 0.3), (和园宾馆, 0.5, 0.2)}

基于直觉模糊集的图像融合

灰度图像是由灰度像素组成的，所谓灰度像素就是指：在RGB颜色模型下，图像中**每个像素颜色的R、G、B三种基色的分量值相等的像素**。在RGB 颜色模型下，RGB 三原色的取值都是0～255 之间的整数。因此，灰度图像只能表现256 种颜色（或亮度）。通常把灰度图像中像素的亮度称为灰度值

基于直觉模糊集的图像融合

模糊集表示图像

P × Q维图像，**I(i, j)**特定位置处的灰度值

$$I_F = \{(I(i,j)), \mu_I(I(i,j)))|\ 0 \leqslant i \leqslant P-1,\ \ 0 \leqslant j \leqslant Q-1,\ 0 \leqslant I(i,j) \leqslant L-1,\ 0 \leqslant \mu_I \leqslant 1\}$$

$$\mu_I(I(i,j)) = \frac{g - g_{min}}{g_{max} - g_{min}} \tag{1}$$

where g_{min} and g_{max} are respectively the least and uppermost values of the gray levels of the image I.

基于直觉模糊集的图像融合

直觉模糊集表示图像

$$\begin{cases} I_{IFS} = \{(I(i,j), \mu_{IFS}(I(i,j);\lambda), \nu_{IFS}(I(i,j);\lambda), \pi_{IFS}(I(i,j);\lambda))\} \\ I(i,j) \in \{0,\ldots,L-1\} \end{cases}$$

$$\mu_{IFS}(I(i,j);\lambda) = 1 - (1 - \mu_I(I(i,j)))^{\lambda}, \quad \lambda \geqslant 0 \tag{2}$$

The degree of non-belongingness is defined as

$$\nu_{IFS}(I(i,j);\lambda) = (1 - \mu_I(I(i,j)))^{\lambda(\lambda+1)}, \quad \lambda \geqslant 0 \tag{3}$$

by using negation function $\xi(x) = (1-x)^{(\lambda+1)}$, $\lambda \geqslant 0$.

The hesitation degree is computed as

$$\pi_{IFS}(I(i,j);\lambda) = 1 - \mu_{IFS}(I(i,j);\lambda) - \nu_{IFS}(I(i,j);\lambda) \tag{4}$$

基于直觉模糊集的图像融合

基本思想

I1, I2两幅输入图像

(1) 用直觉模糊集表示 **I1**和**I2**

(2) 将**I1**和**I2**分成相同数目的**block**

(3) 对每一个**block**，计算**count(blackness)**和**count(whiteness)**，并按如下方式融合

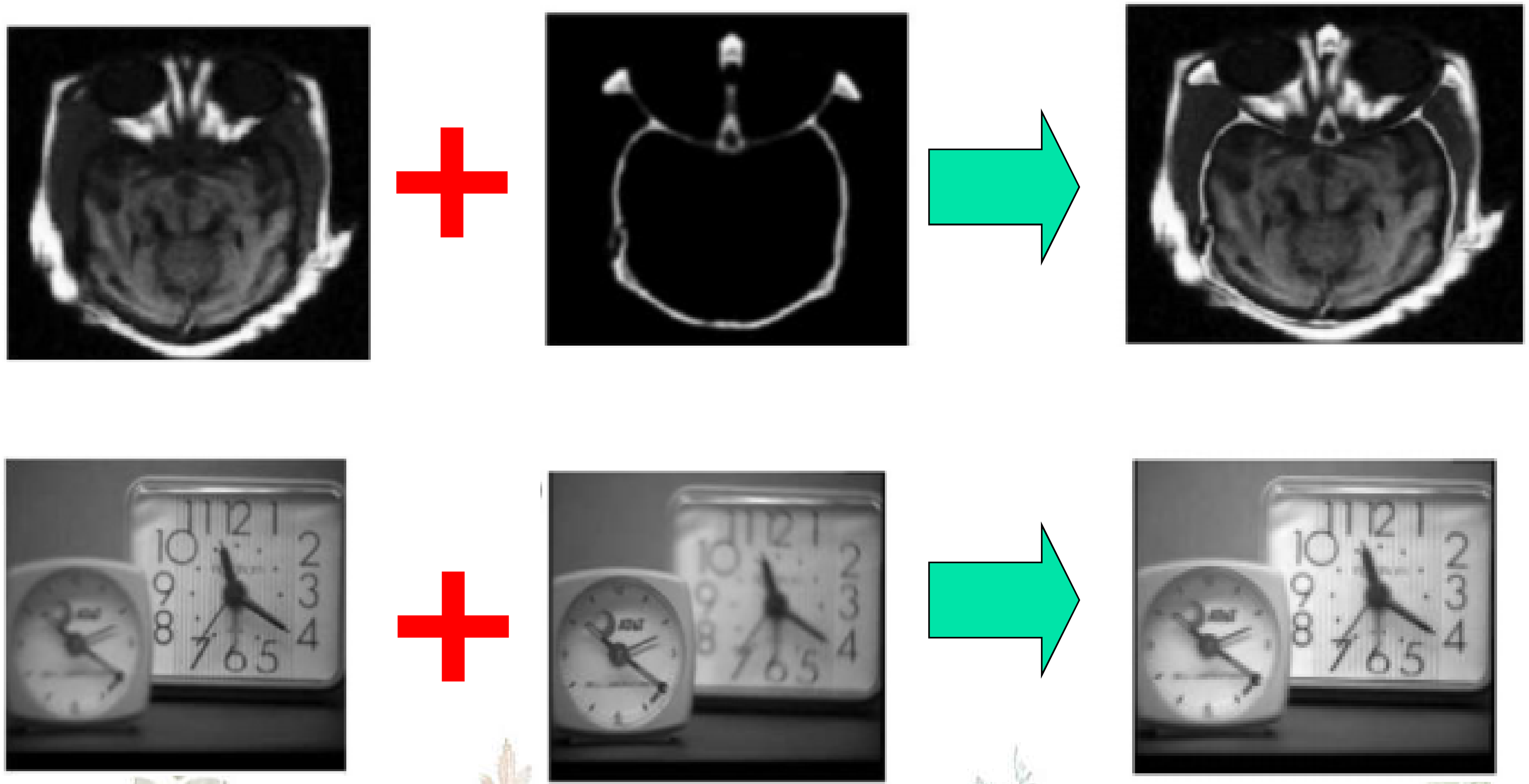
$$I_{fk}(i,j)=\begin{cases}\min\{I_{F1k}(i,j),I_{F2k}(i,j)\}, & \text{if count(blackness)} > \text{count(whiteness)}\\ \max\{I_{F1k}(i,j),I_{F2k}(i,j)\}, & \text{if count(blackness)} < \text{count(whiteness)}\\ \frac{I_{F1k}(i,j)+I_{F2k}(i,j)}{2}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(4) 得到融合图像上的灰度值

(5) 反模糊化 $I'(i,j)=(g_{max}-g_{min})*\mu_{IFS}(I(i,j))+g_{min}.$

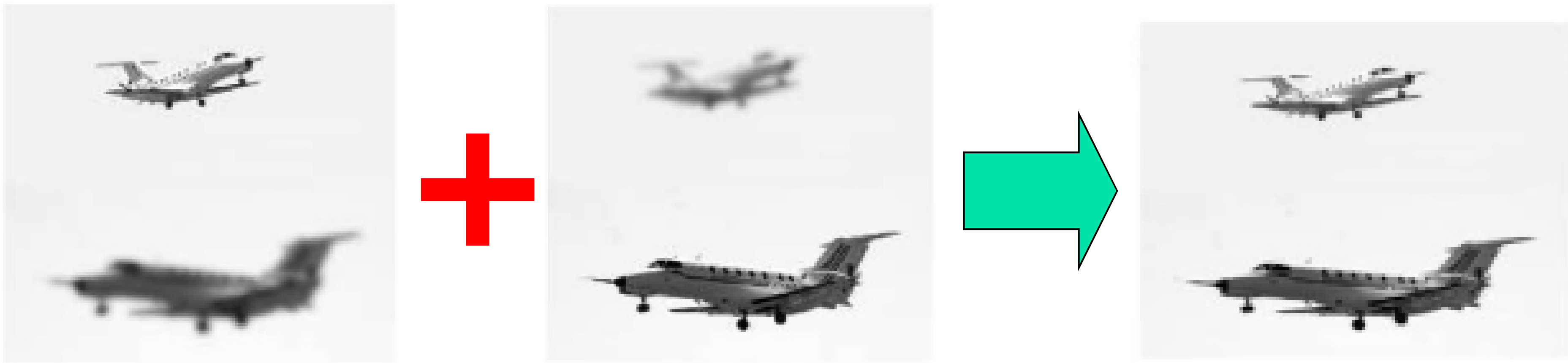
基于直觉模糊集的图像融合

实验评价



基于直觉模糊集的图像融合

实验评价



基于直觉模糊集的图像融合

实验评价

Performance comparison of the IFS fusion of medical images with different fusion rules (without reference image).

Fusion algorithm	MEAN	SF	STD
AVG	14.4200	33.1407	41.7548
PCA	16.1846	43.2659	50.4119
DWT	16.1984	33.1921	41.8921
SWT	16.5855	33.1402	42.5775
DTCWT	18.5251	33.1407	43.8864
MSVD	18.9071	33.1365	42.1180
NSCT	20.5709	55.9107	62.3047
IFS	**21.3657**	**58.5202**	**65.6562**

Performance comparison of the IFS fusion of multifocused aircraft images with different fusion algorithm (without reference image Fig. 1(l)).

Fusion algorithm	SF	MEAN	STD
AVG	9.1266	227.6697	45.8804
PCA	9.1679	227.6697	45.9204
DWT	12.8783	227.6723	46.1907
SWT	13.3948	227.6697	46.3173
DTCWT	13.1172	227.6679	46.8390
MSVD	13.8678	227.6697	46.4184
NSCT	16.9916	228.1178	49.3678
IFS	**17.0008**	**228.6727**	**50.4271**

其他应用...

图像增强?

Applied Soft Computing 25 (2014) 293–308

Contents lists available at ScienceDirect

ELSEVIER

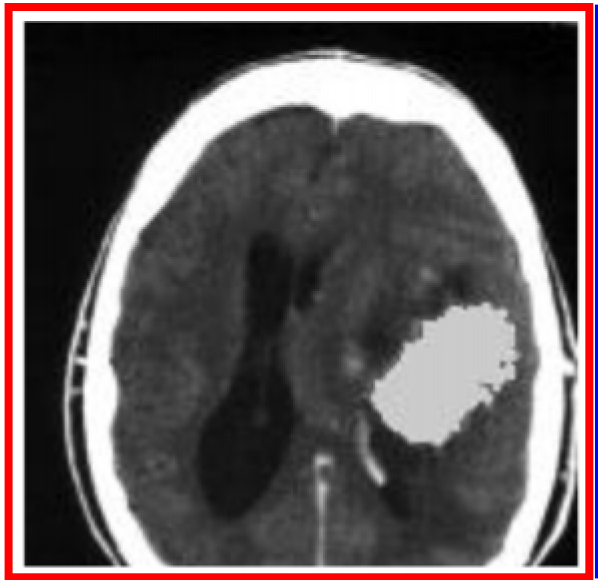
Applied Soft Computing

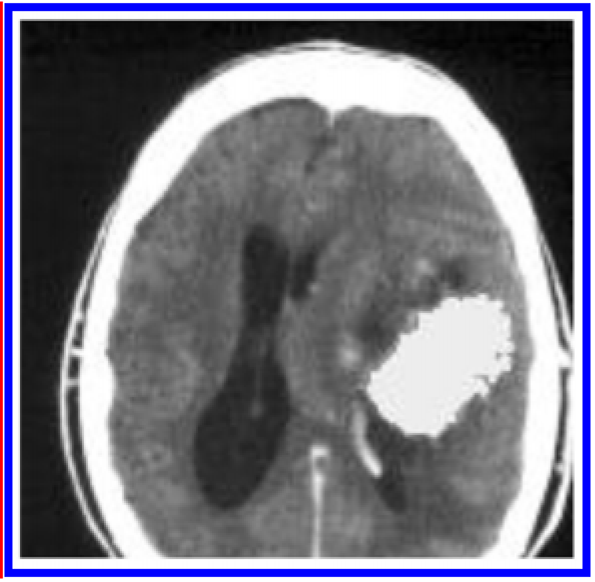
journal homepage: www.elsevier.com/locate/asoc

An improved medical image enhancement scheme using Type II fuzzy set

CrossMark

Tamalika Chaira*





其他应用...

边界检测?

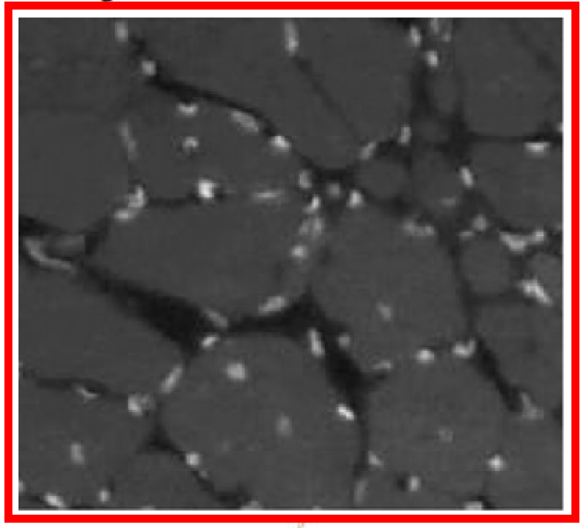
Applied Soft Computing 12 (2012) 1259–1266

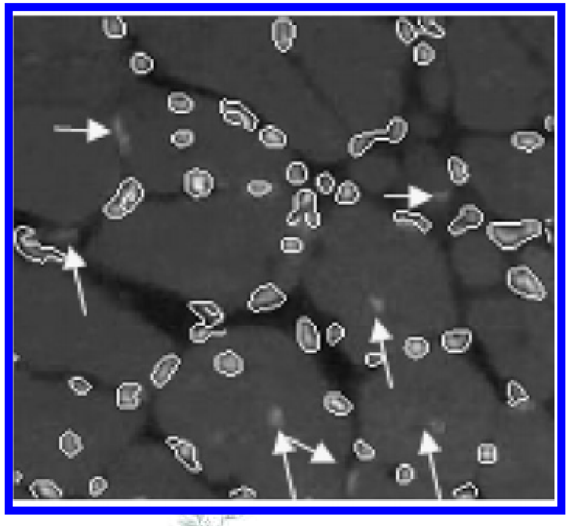
Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Applied Soft Computing

journal homepage: www.elsevier.com/locate/asoc

A rank ordered filter for medical image edge enhancement and detection using intuitionistic fuzzy set





其他应用...

图像分割?

Expert Systems with Applications 40 (2013) 15–26

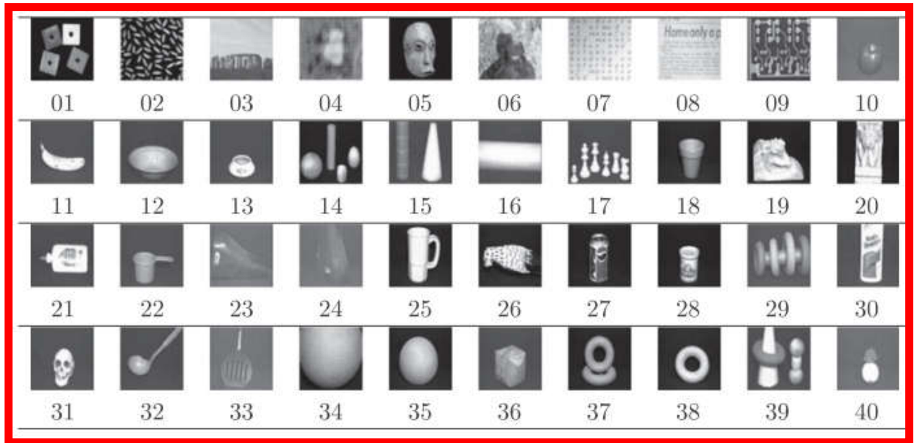
Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

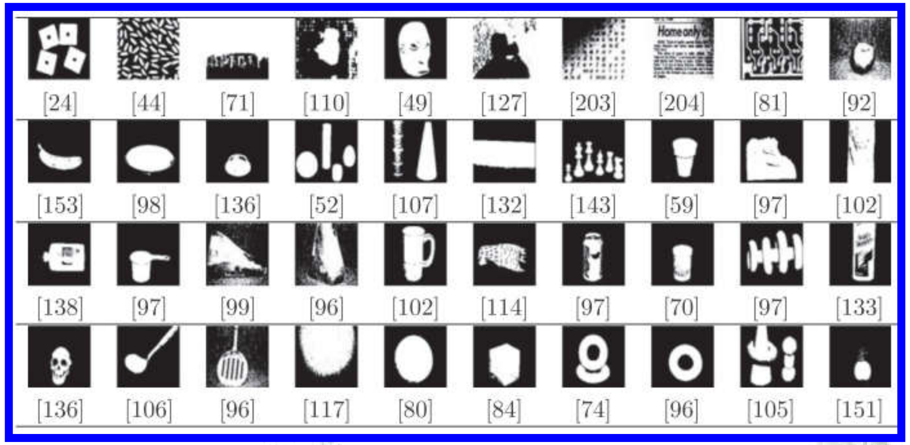
Expert Systems with Applications

journal homepage: www.elsevier.com/locate/eswa

Image segmentation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets

Pedro Melo-Pinto [a], Pedro Couto [a,*], Humberto Bustince [b], Edurne Barrenechea [b], Miguel Pagola [b], Javier Fernandez [b]





其他应用...

图像二值化?

ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

Pattern Recognition 38 (2005) 2363–2372

PATTERN RECOGNITION

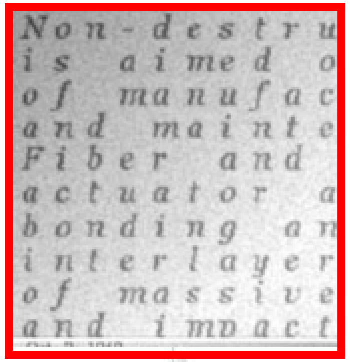
THE JOURNAL OF THE PATTERN RECOGNITION SOCIETY

www.elsevier.com/locate/patcog

Image thresholding using type II fuzzy sets

Hamid R. Tizhoosh

Pattern Analysis and Machine Intelligence Laboratory, Systems Design Engineering, University of Waterloo, 200 University Avenue West, ON, Canada N2L 3G1



其他应用...

图像压缩?

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect

ELSEVIER

Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1485–1506

FUZZY sets and systems

www.elsevier.com/locate/fss

Rough fuzzy set-based image compression

Alfredo Petrosino*, Alessio Ferone

25%压缩比

小结

- 模糊集基本概念

Thanks for your time and attention!