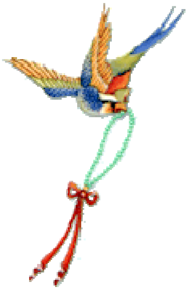


计算机数学建模

第四讲 数学规划模型(1)

周毓明

南京大学计算机科学与技术系

课程内容

1. 数学概念与模型
2. 实际案例与分析
3. 计算机典型应用

1. 数学概念与模型

① 线性规划

② 整数规划

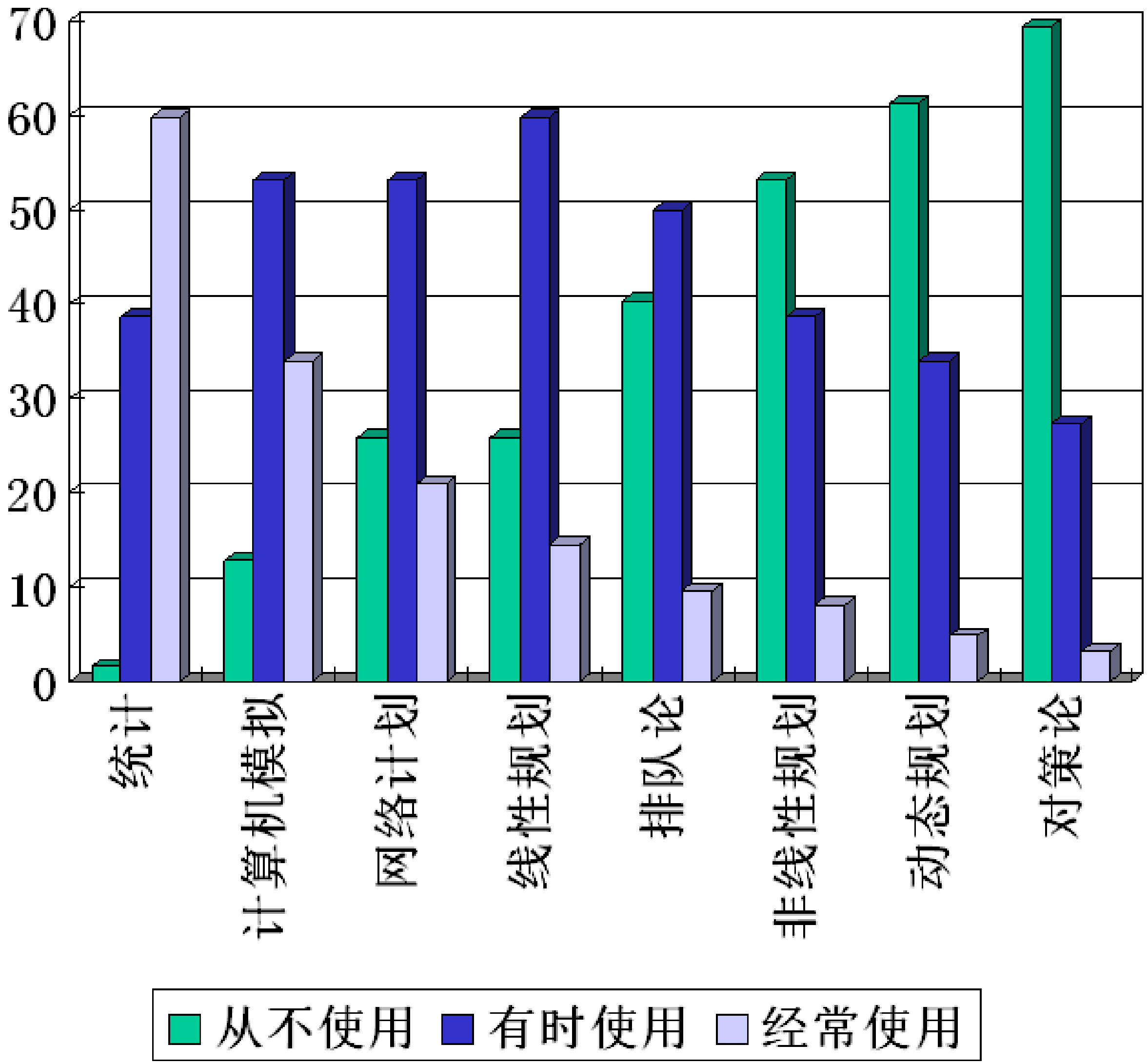
③ 非线性规划

运筹学的分支

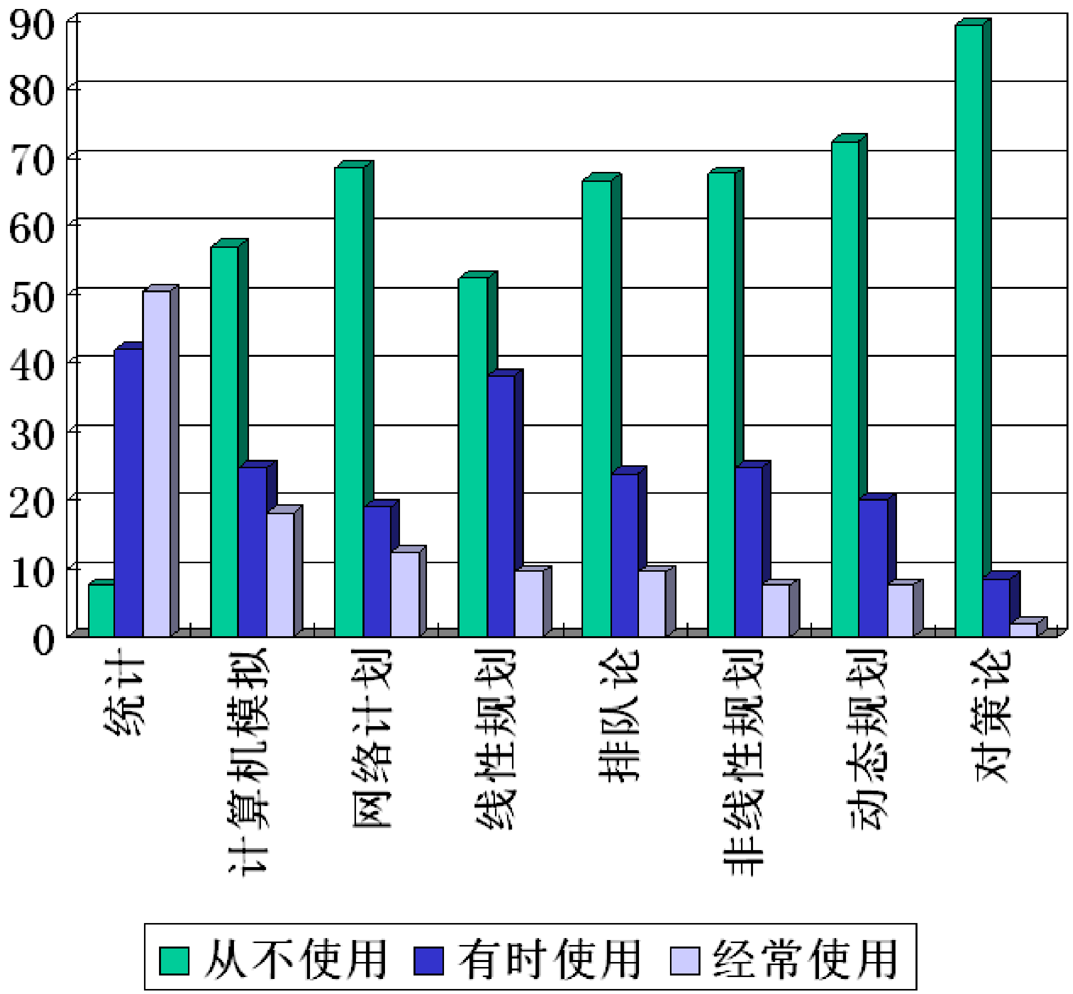
- 线性规划
- 整数规划
- 非线性规划
- 动态规划
- 多目标规划
- 随机规划
- 模糊规划等

- 图与网络理论
- 存储论
- 排队论
- 决策论
- 博弈论
- 排序与统筹方法
- 可靠性理论等

运筹学方法使用情况(美1983)(%)



运筹学方法在中国使用情况(随机抽样)（%）



运筹学在工商管理中的应用

组织	应用	效果
联合航空公司	在满足乘客需求的前提下，以最低成本进行订票及机场工作班次安排	每年节约成本600万美元
Citgo石油公司	优化炼油程序及产品供应、配送和营销	每年节约成本7000万
AT&T	优化商业用户的电话销售中心选址	每年节约成本4.06亿美元，销售额大幅增加
标准品牌公司	控制成本库存（制定最优再定购点和定购量确保安全库存）	每年节约成本380万美元
法国国家铁路公司	制定最优铁路时刻表并调整铁路日运营量	每年节约成本1500万美元，年收入大幅增加。
Taco Bell	优化员工安排，以最低成本服务客户	每年节约成本1300万美元
Delta航空公司	优化配置上千个国内航线航班来实现利润最大化	每年节约成本1亿美元

线性规划问题的数学模型

规划问题

生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是规划问题。

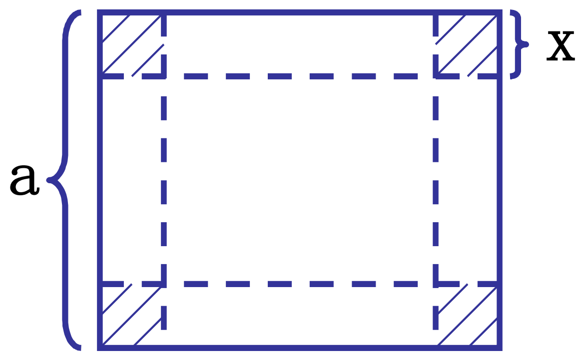
线性规划通常解决下列两类问题：

（1）当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源 （如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标

（2）在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多 、利润最大.）

线性规划问题的数学模型

例：如图所示，如何截取x使铁皮所围成的容积最大？



$$v=(a-2x)^2\cdot x$$

$$\frac{dv}{dx}=0$$

$$2(a-2x)\cdot x\cdot(-2)+(a-2x)^2=0$$

$$x=\frac{a}{6}$$

线性规划问题的数学模型

例：某企业计划生产甲、乙两种产品。这些产品分别要在A、B、C、D、四种不同的设备上加工。按工艺资料规定，单件产品在不同设备上加工所需要的台时如下表所示，企业决策者应如何安排生产计划，使企业总的利润最大?

设 备 产 品	A	B	C	D	利润（元）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
有 效 台 时	12	8	16	12	

线性规划问题的数学模型

解：设x_1、x_2分别为甲、乙两种产品的产量，则数学模型为：

$$\max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

线性规划数学模型的一般形式

目标函数：$\max\ (\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

约束条件：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_m \\ x_1 \ge 0 \cdots\cdots x_n \ge 0 \end{cases}$$

简写为：

$$\max(\min)\ \mathrm{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\ b_i \qquad (\mathrm{i} = 1 \cdot 2 \cdots m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (\mathrm{j} = 1 \cdot 2 \cdots n)$$

线性规划问题的数学模型

向量形式: $\max\ (\min)\ z = \mathbf{CX}$

$$\begin{cases} \sum \mathbf{P_j} x_j \leq (=\cdot\geq)\ \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

其中: $\mathbf{C} = (c_1\ \ c_2\ \cdots\ \ c_n)$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

矩阵形式：

$$\max \quad (\min) \quad Z = \mathbf{CX}$$

$$\begin{cases} \mathbf{AX} \leq (= \cdot \geq) \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

其中：$\mathbf{C} = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

线性规划的数学模型由三个要素构成

决策变量　**Decision variables**

目标函数　**Objective function**

约束条件　**Constraints**

怎样辨别一个模型是线性规划模型?

其特征是:

（1）问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或最小值;

（2）问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

线性规划问题的数学模型

线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\, b_i \qquad (i = 1 \cdot 2 \cdots m) \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1 \cdot 2 \cdots n) \qquad (3)$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件(2)、(3)的方程组中找出一个解(可行解)，使目标函数(1)达到最大值(最优解)

线性规划问题的数学模型

线性规划问题的求解方法

一般有两种方法

- 图解法
  - 两个变量、直角坐标
  - 三个变量、立体坐标
- 单纯形法
  - 适用于任意变量、但必需将一般形式变成标准形式

下面我们分析一下简单的情况—— 只有两个决策变量的线性规划问题，这时可以通过图解的方法来求解。图解法具有简单、直观、便于初学者窥探线性规划基本原理和几何意义等优点

线性规划问题的数学模型

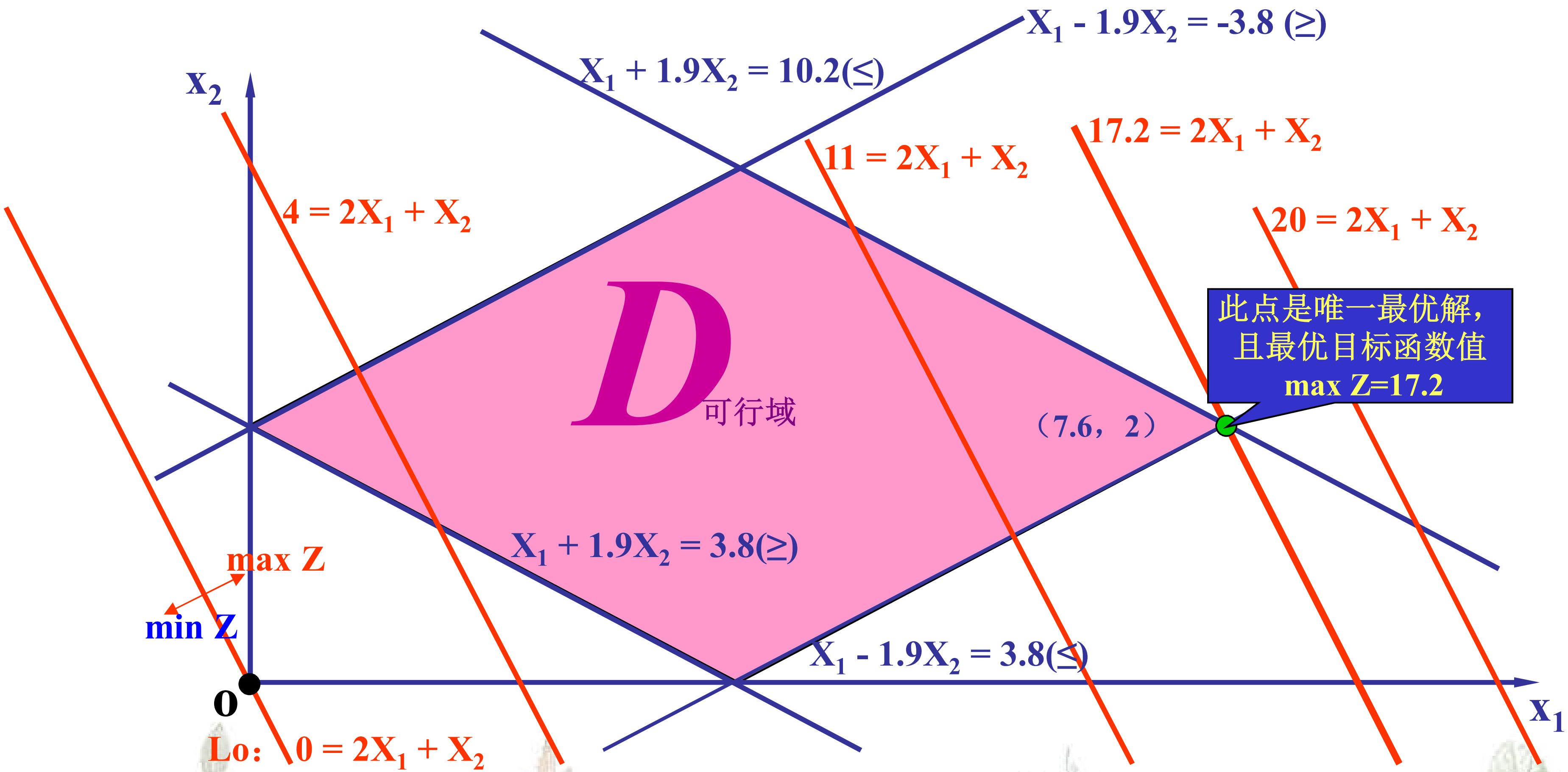
例：用图解法求解线性规划问题

$$\max\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} X_1 + 1.9X_2 \geq 3.8 \\ X_1 - 1.9X_2 \leq 3.8 \\ X_1 + 1.9X_2 \leq 10.2 \\ X_1 - 1.9X_2 \geq -3.8 \\ X_1,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

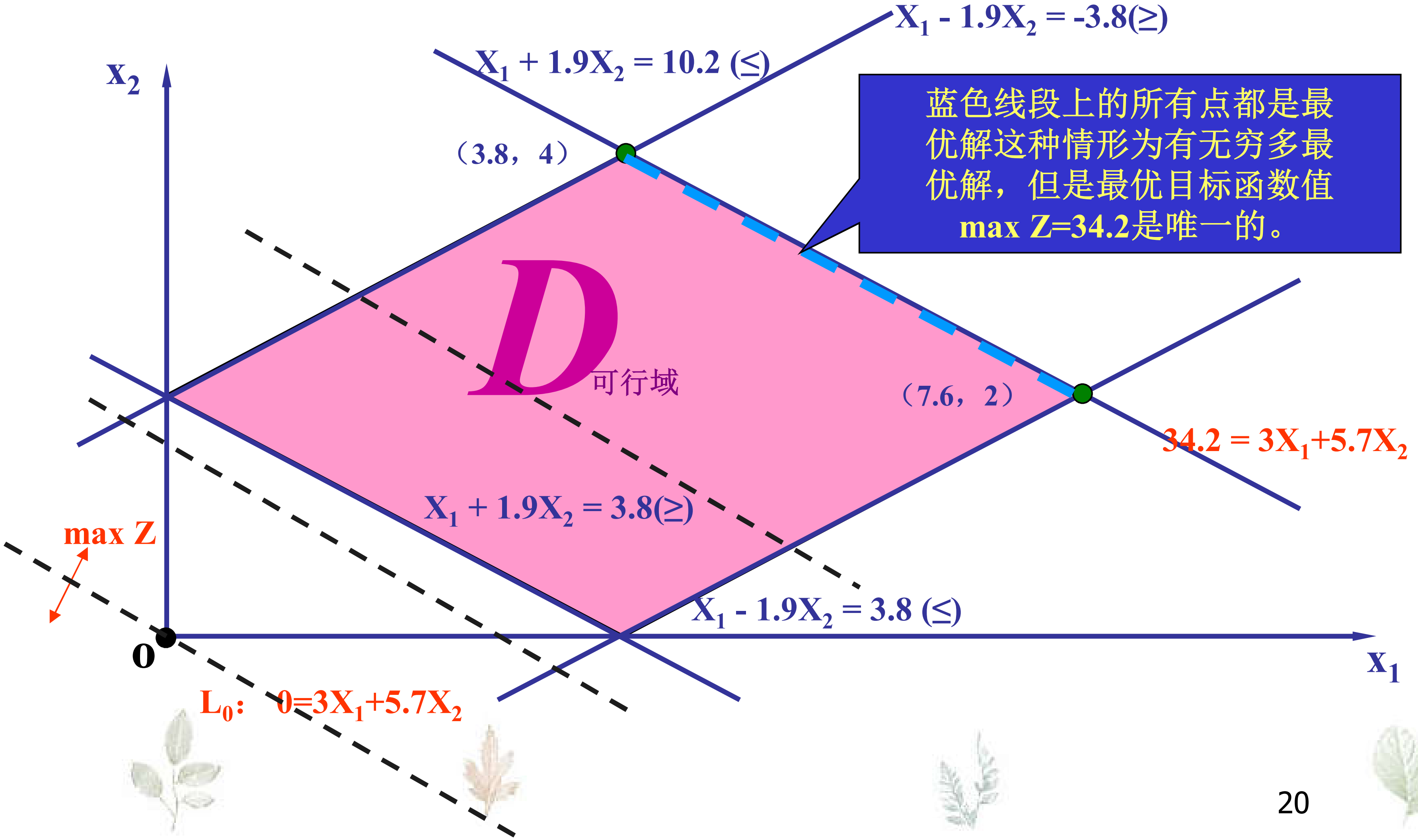
线性规划问题的数学模型

$\max \ Z = 2X_1 + X_2$



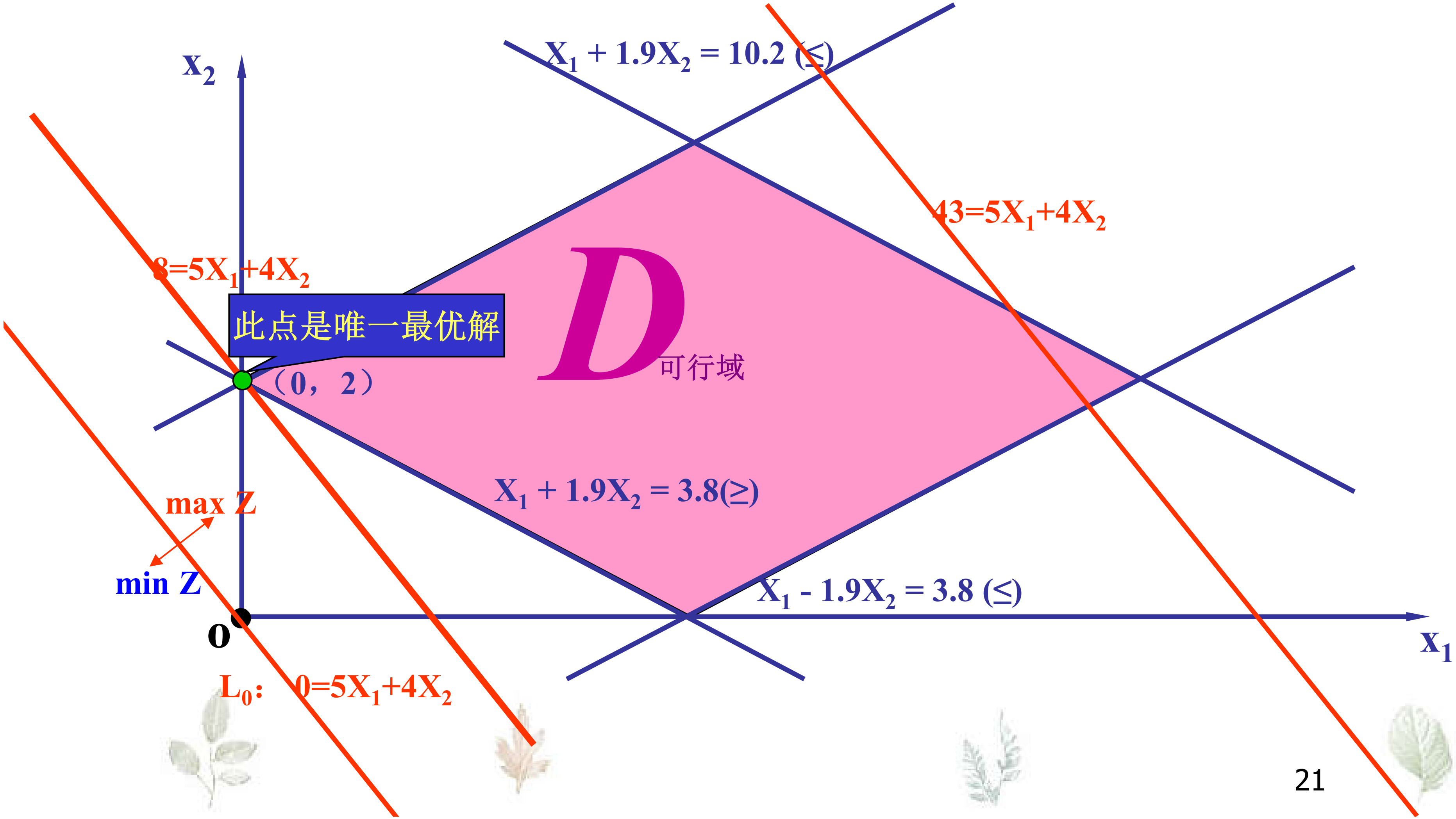
线性规划问题的数学模型

$\max Z=3X_1+5.7X_2$



线性规划问题的数学模型

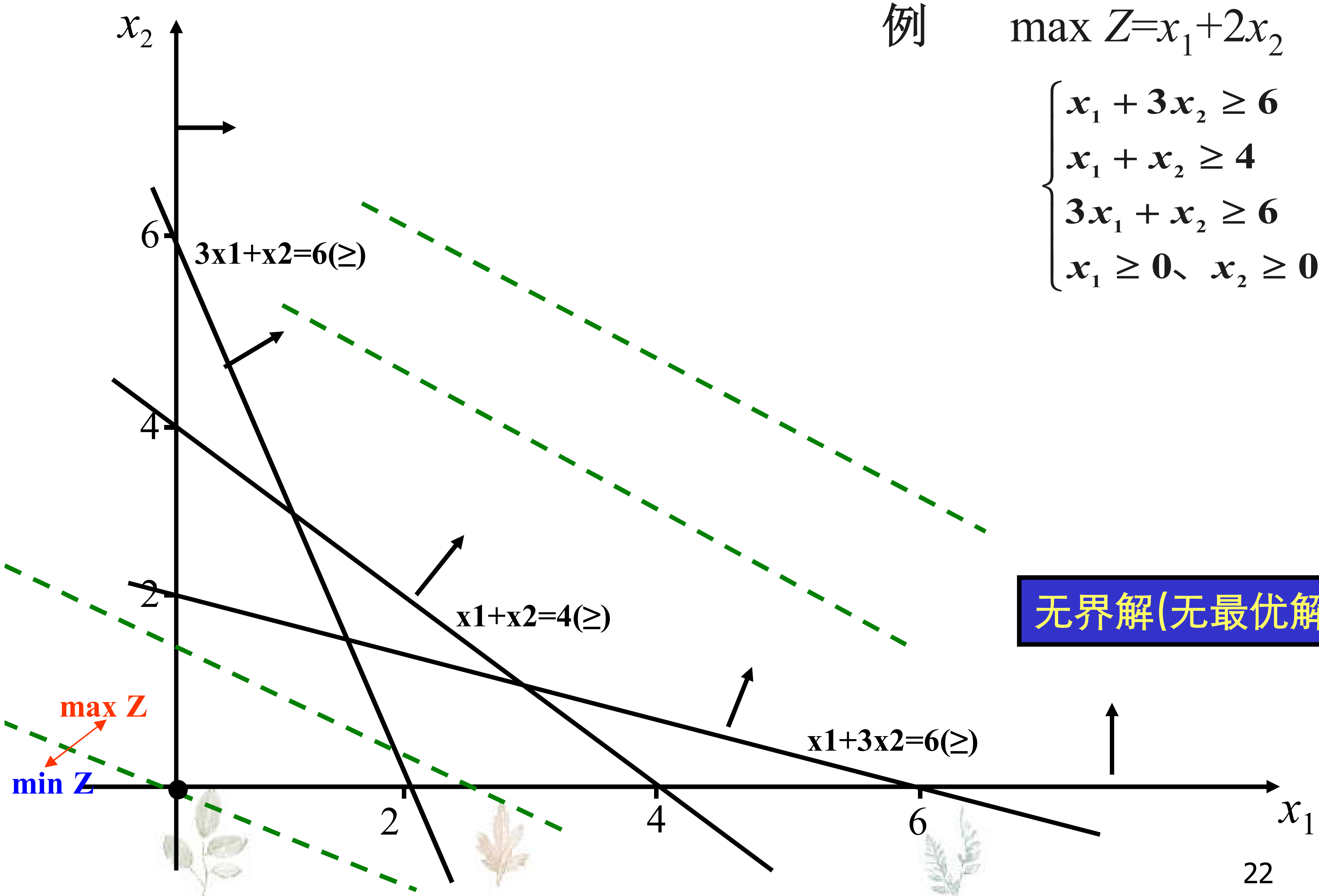
min Z=5X1+4X2



线性规划问题的数学模型

例　$\max Z = x_1 + 2x_2$

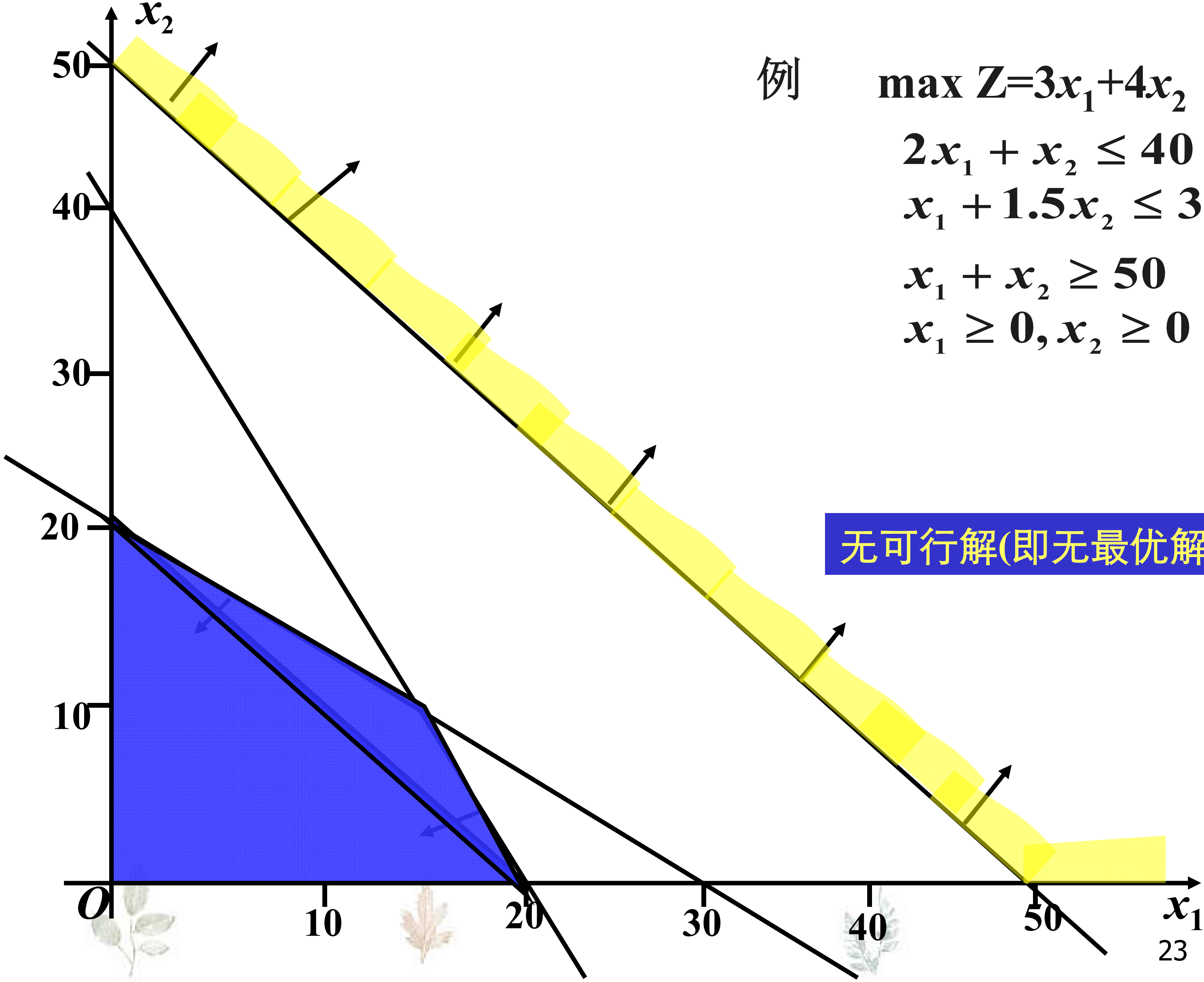
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0 \end{cases}$$



无界解(无最优解)

例 $\max Z=3x_1+4x_2$

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \le 40 \\
x_1 + 1.5x_2 \le 30 \\
x_1 + x_2 \ge 50 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$



无可行解(即无最优解)

线性规划问题的数学模型

学习要点:

1. 通过图解法了解线性规划有几种解的形式（唯一最优解；无穷多最优解；无界解；无可行解）

2. 作图的关键有三点:

(1) 可行解区域要画正确

(2) 目标函数增加的方向不能画错

(3) 目标函数的直线怎样平行移动

整数规划问题的数学模型

整数规划（简称：IP）

要求一部分或全部决策变量取整数值的规划问题称为整数规划。不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题。若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为**整数线性规划**

整数线性规划数学模型的一般形式：

$$\max\ (\min)\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\, b_i \qquad (\mathrm{i} = 1 \cdot 2 \cdots m)$$

$x_j \ge 0 \quad (\mathrm{j} = 1 \cdot 2 \cdots n)$且部分或者全部为整数

整数规划问题的数学模型

整数线性规划问题的种类：

- 纯整数线性规划：全部决策变量都取整数的整数线性规划。
- 混合整数线性规划：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。
- 0-1型整数线性规划：决策变量只取0或1的整数线性规划

整数规划问题的数学模型

设整数规划问题如下

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

首先不考虑整数约束，得到线性规划问题（一般称为松弛问题）

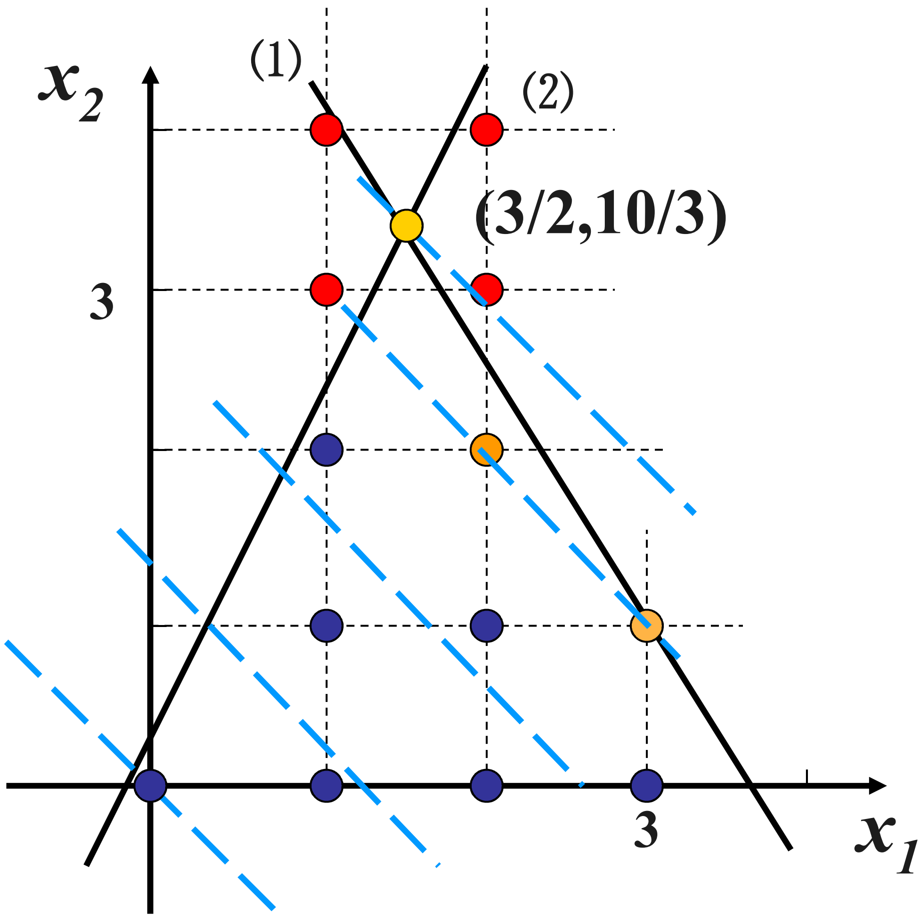
$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划问题的数学模型

用图解法求出最优解为：x_1＝3/2，x_2 = 10/3，且有Z = 29/6

现求整数解(最优解):如用舍入取整法可得到4个点即(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解



按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4

整数规划问题的数学模型

分支定界法的解题步骤：

1）求整数规划的松弛问题最优解；

若松弛问题的最优解满足整数要求，得整数规划最优解,否则转下一步；

2）分支与定界：

任意选一个非整数解的变量x_i，在松弛问题中加上约束：

$$x_i \le [x_i] \quad 和 \quad x_i \ge [x_i]+1$$

组成两个新的松弛问题，称为分枝。新的松弛问题具有特征：当原问题是求最大值时，目标值是分枝问题的上界；当原问题是求最小值时，目标值是分枝问题的下界

检查所有分枝的解及目标函数值，若某分枝的解是整数并且目标函数值大于（**max**）等于其它分枝的目标值，则将其它分枝剪去不再计算，若还存在非整数解并且目标值大于**(max)**整数解的目标值，需要继续分枝，再检查，直到得到最优解

整数规划问题的数学模型

例：用分枝定界法求解整数规划问题

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且全为整数} \end{cases} \qquad \textbf{IP}$$

解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题(原整数规划问题的松弛问题)

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{LP}$$

整数规划问题的数学模型

用图解法求松弛问题的最优解，如图所示。

$x_1 = 18/11, x_2 = 40/11$

$Z = -218/11 \approx (-19.8)$

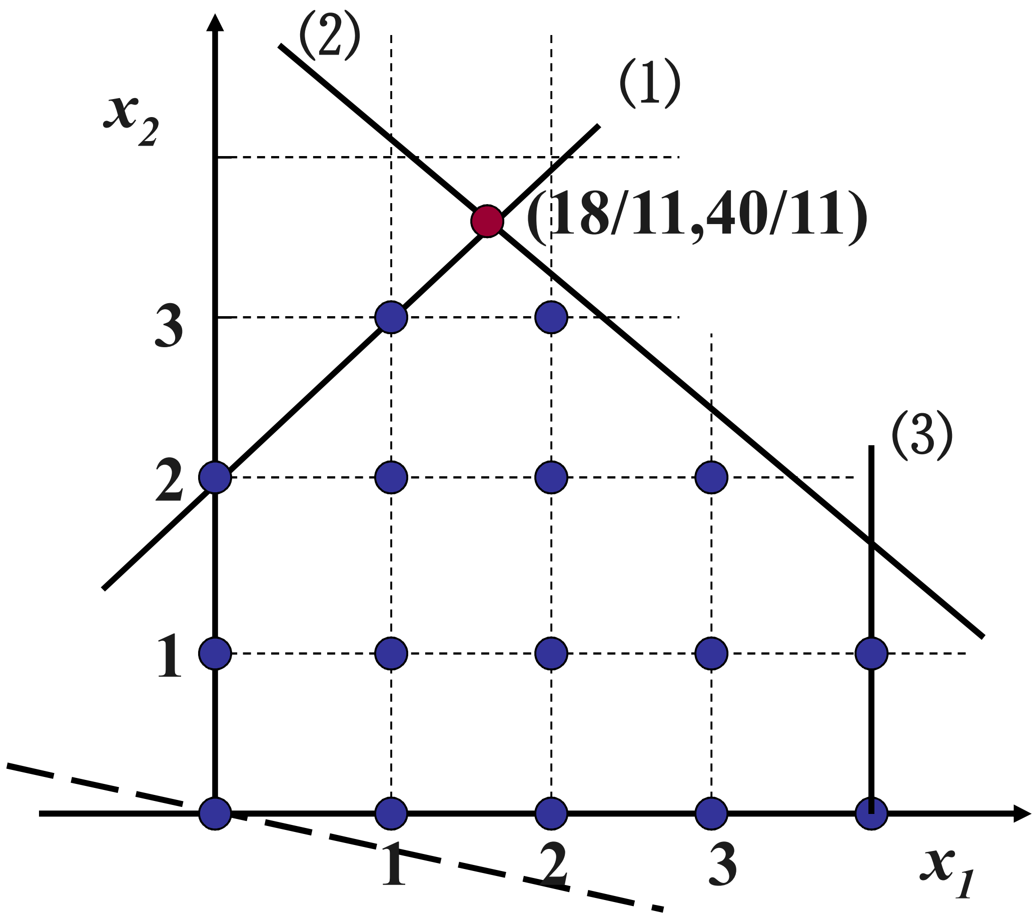
即Z 也是*IP*最小值的下限。

对于$x_1 = 18/11 \approx 1.64$，

取值$x_1 \le 1$， $x_1 \ge 2$

对于$x_2 = 40/11 \approx 3.64$，取值$x_2 \le 3$， $x_2 \ge 4$

先将（LP）划分为（LP1）和（LP2）,取x1 ≤1, x1 ≥2



整数规划问题的数学模型

分支：

$$\min \ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

$$\min \ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP2)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出（*LP1*）和（*LP2*）的最优解

整数规划问题的数学模型

- 先求*LP1*,如图所示。此时在*B*点取得最优解。
- $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ Z^{(1)} = -16$
- 找到整数解，问题已探明，此枝停止计算

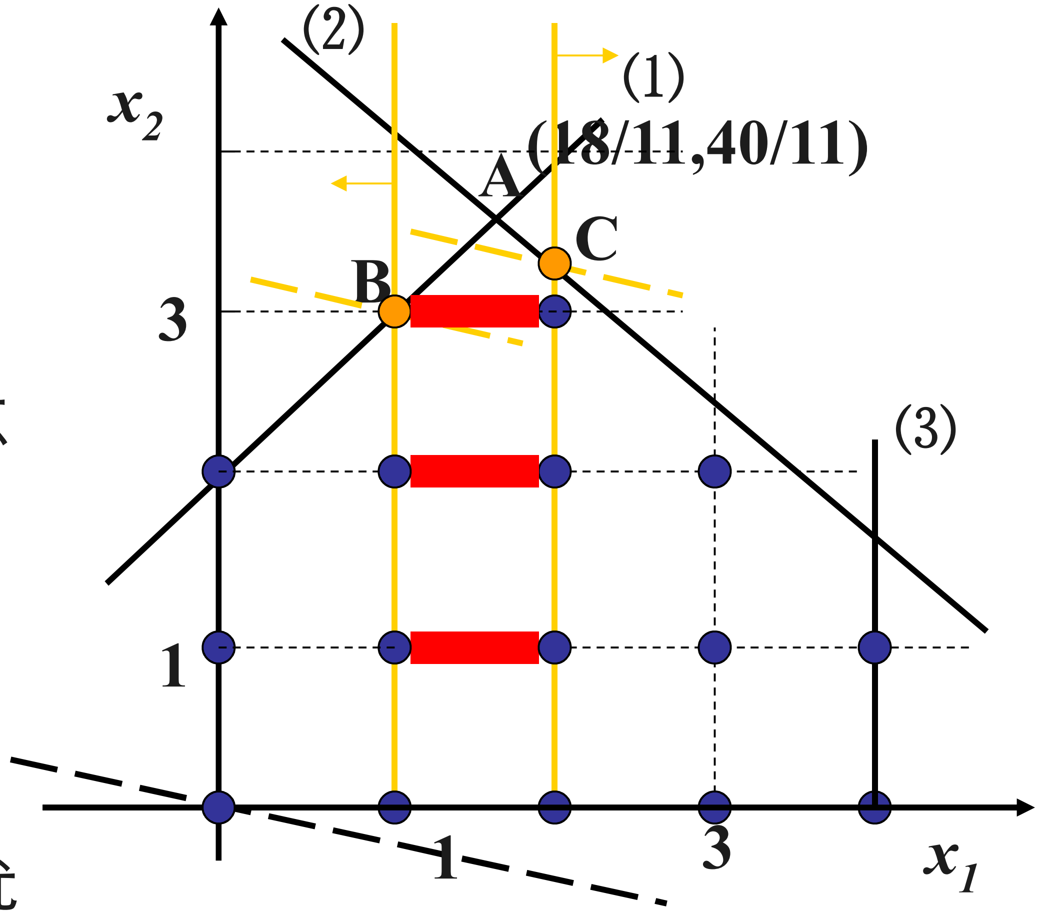
同理求***LP2***,如图所示。在*C* 点取得最优解。即:

$x_1 = 2,\ x_2 = 10/3,$

$Z^{(2)} = -56/3 \approx -18.7$

$\because Z^{(2)} < Z^{(1)} = -16$

∴原问题有比－16更小的最优解，但 *x2* 不是整数，故继续分支



整数规划问题的数学模型

在IP2中分别再加入条件： $x_2 \leqslant 3,\ x_2 \geqslant 4$　得下式两支：

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2 \qquad\qquad \min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP\,21)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases} \qquad (IP\,22)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出LP21和LP22的最优解

整数规划问题的数学模型

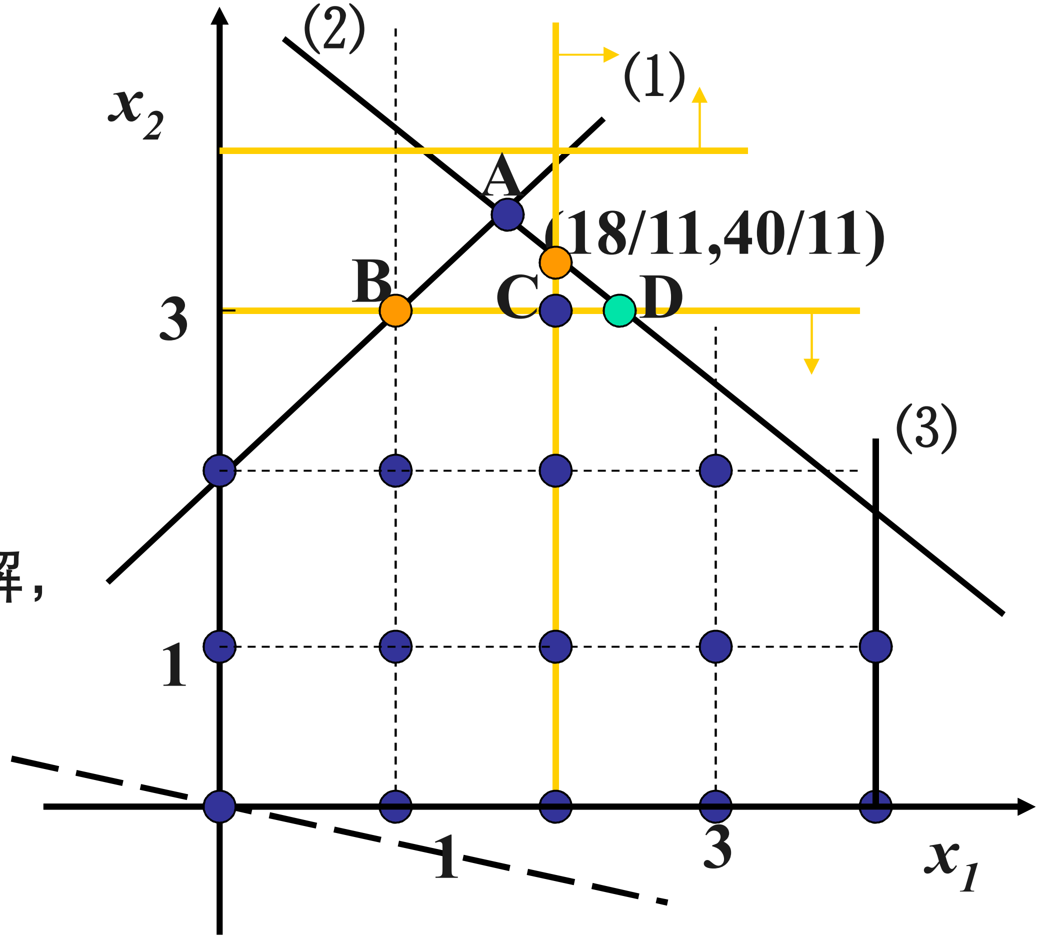
先求LP21,如图所示。此时D在点取得最优解。

即 $x_1 = 12/5 \approx 2.4$, $x_2 = 3$,

$Z^{(21)} = -87/5 \approx -17.4 < Z^{(1)} = -16$

但$x_1 = 12/5$不是整数，可继续分枝。即 $x_1 \leq 2$, $x_1 \geq 3$

求LP22，如图所示。无可行解，故不再分枝。



整数规划问题的数学模型

在（LP21）的基础上继续分枝。加入条件3: $x_1 \le 2$, $x_1 \ge 3$有下式:

$$(IP211)\begin{cases} \min Z = -x_1 - 5x_2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

$$(IP212)\begin{cases} \min Z = -x_1 - 5x_2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出（LP211）和（LP212）的最优解

整数规划问题的数学模型

先求（*LP211*）,如图所示。此时在*E*点取得最优解。即

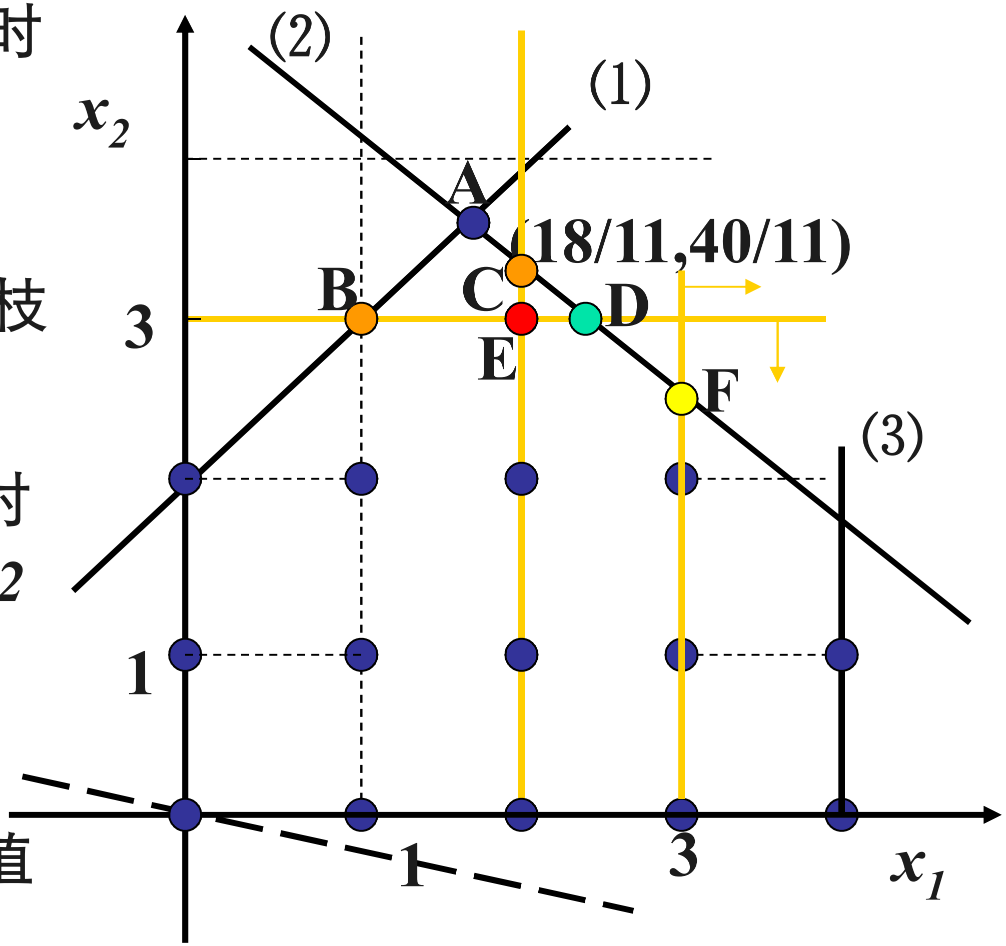
$x1 = 2, x2 = 3, Z^{(211)} = -17$

找到整数解，问题已探明，此枝停止计算

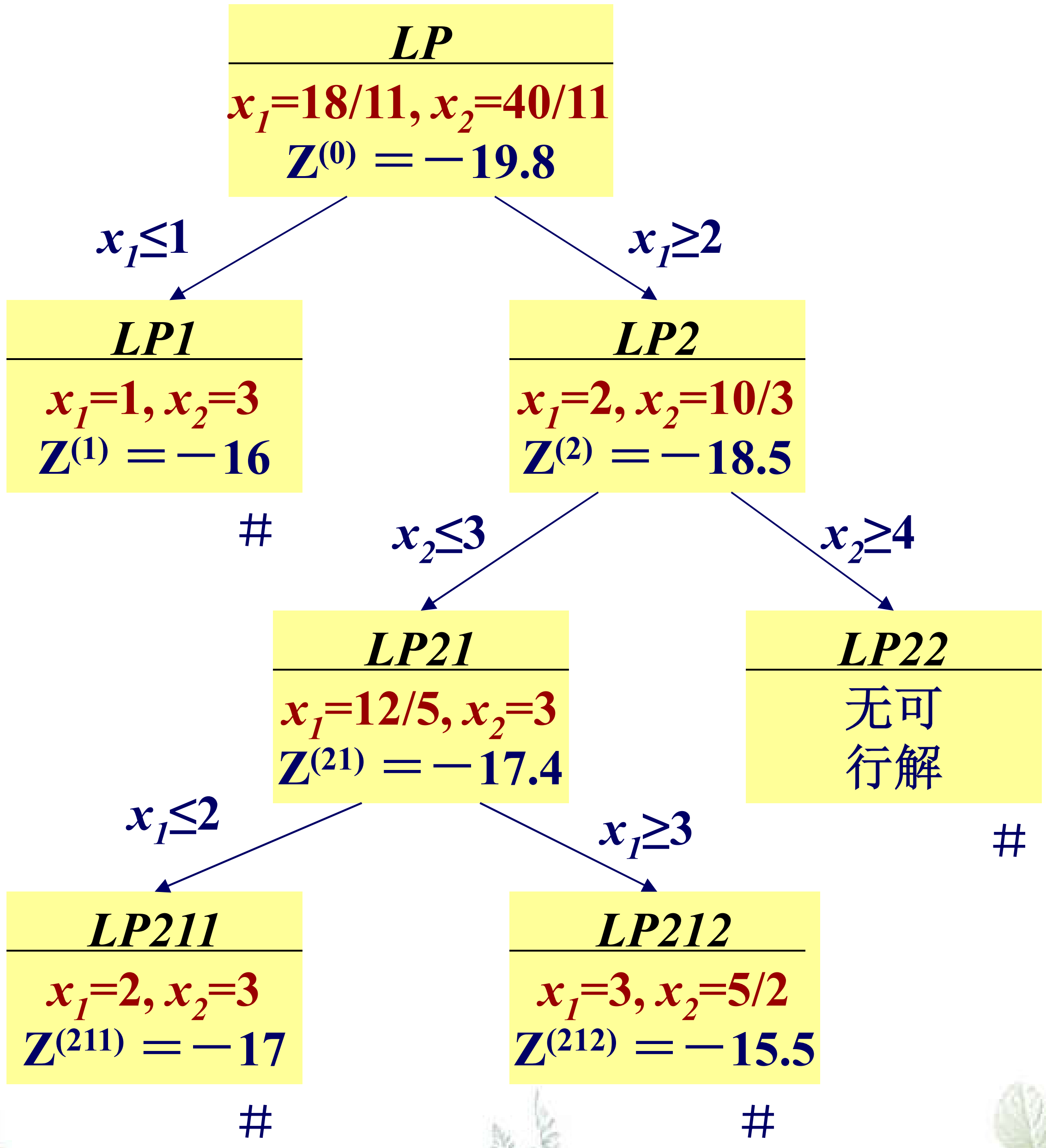
求（*LP212*），如图所示。此时F在点取得最优解。即$x1 = 3, x2 = 2.5$,

$Z^{(212)} = -31/2 \approx -15.5 > Z^{(211)}$

如对LP212继续分解，其最小值也不会低于－15.5，问题探明,剪枝



- 原整数规划问题的最优解为：
- $x_1=2, x_2=3, Z^*=-17$
- 以上的求解过程可以用一个树形图表示如右：



整数规划问题的数学模型

例：用分枝定界法求解

$$\max \ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数} \end{cases}$$

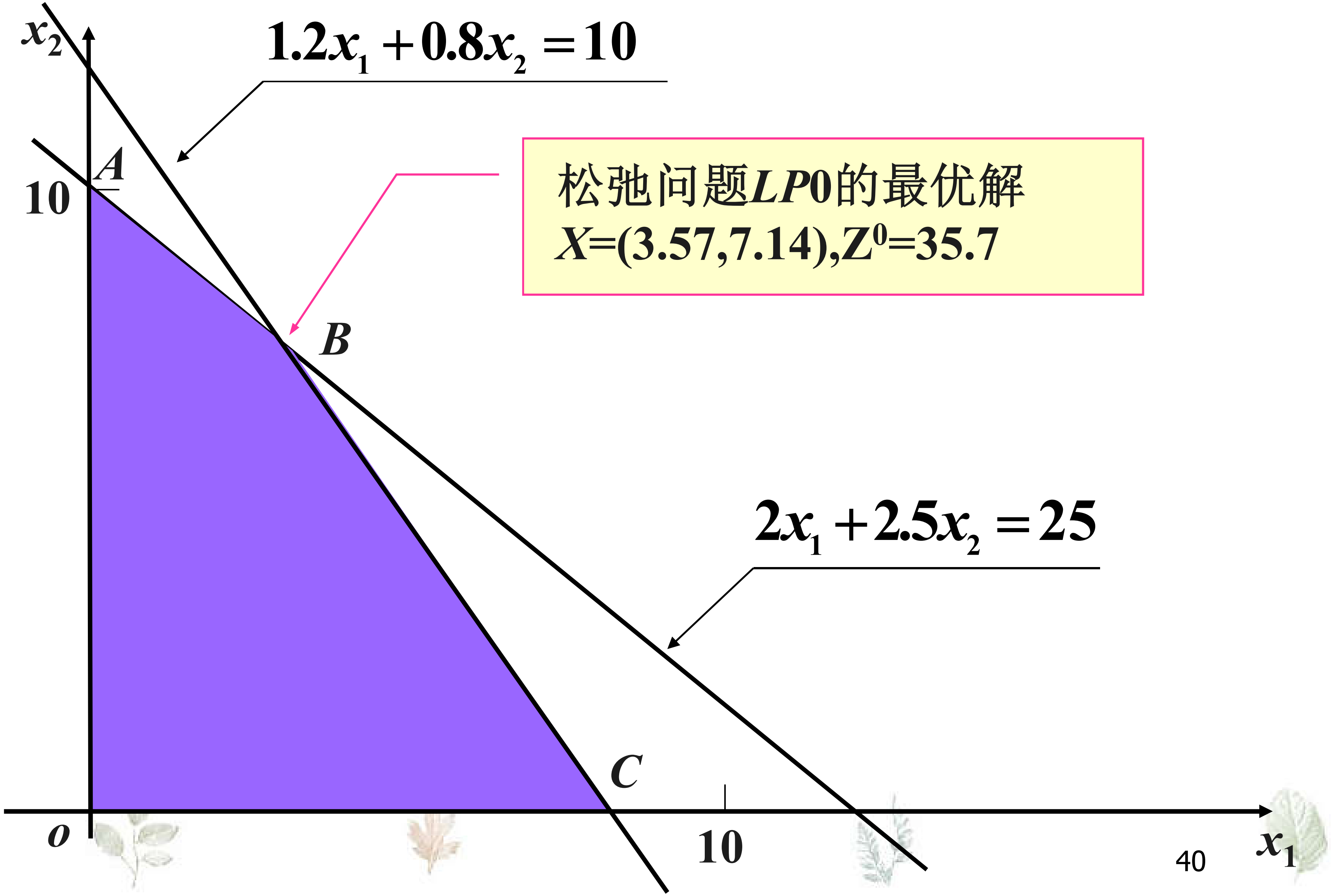
解：先求对应的松弛问题（记为LP^0）

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$st\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (LP^0)$$

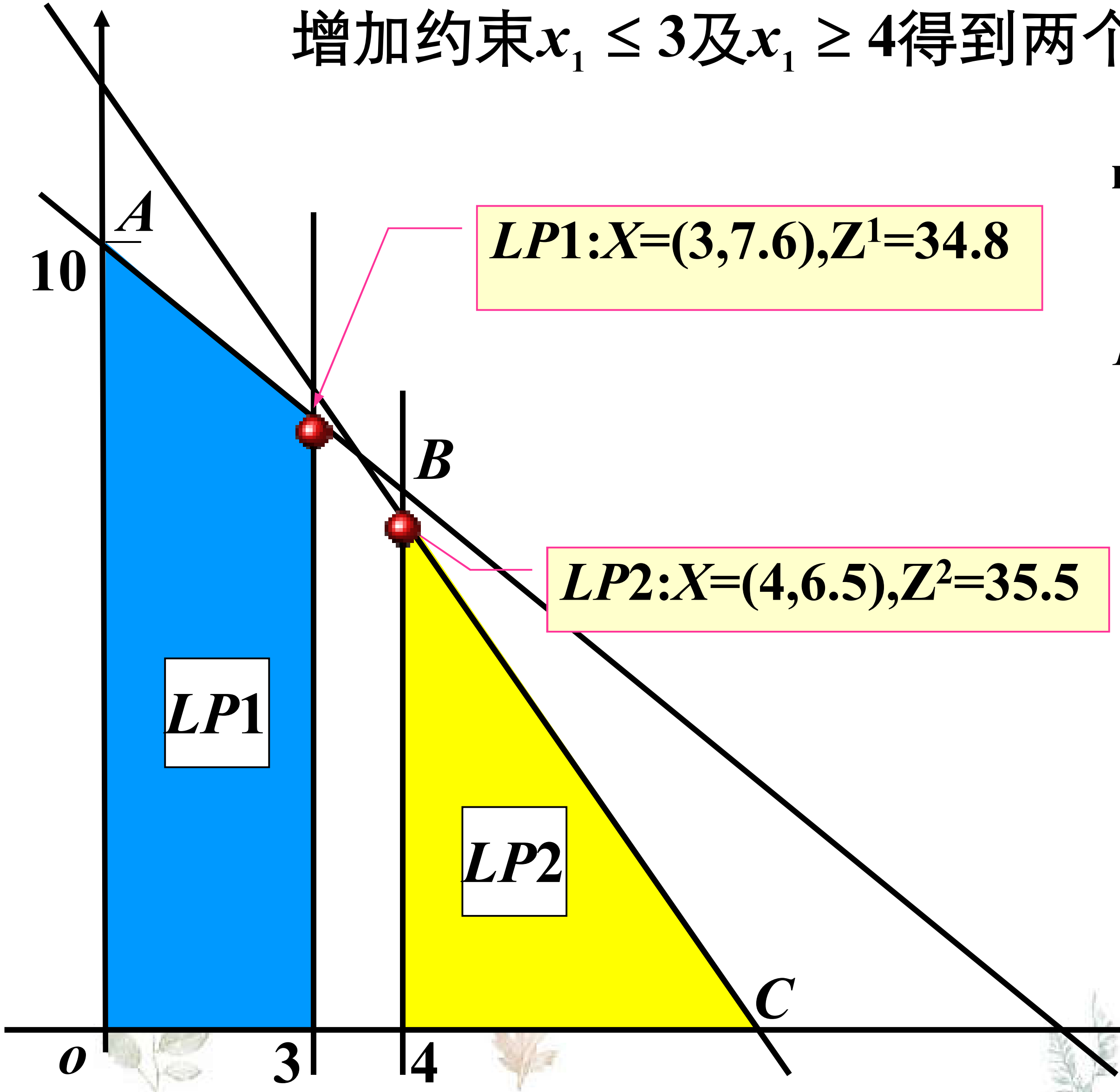
用图解法得到最优解$X = (3.57,7.14)$,Z^0=35.7,如下图所示

整数规划问题的数学模型



整数规划问题的数学模型

增加约束$x_1 \le 3$及$x_1 \ge 4$得到两个线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

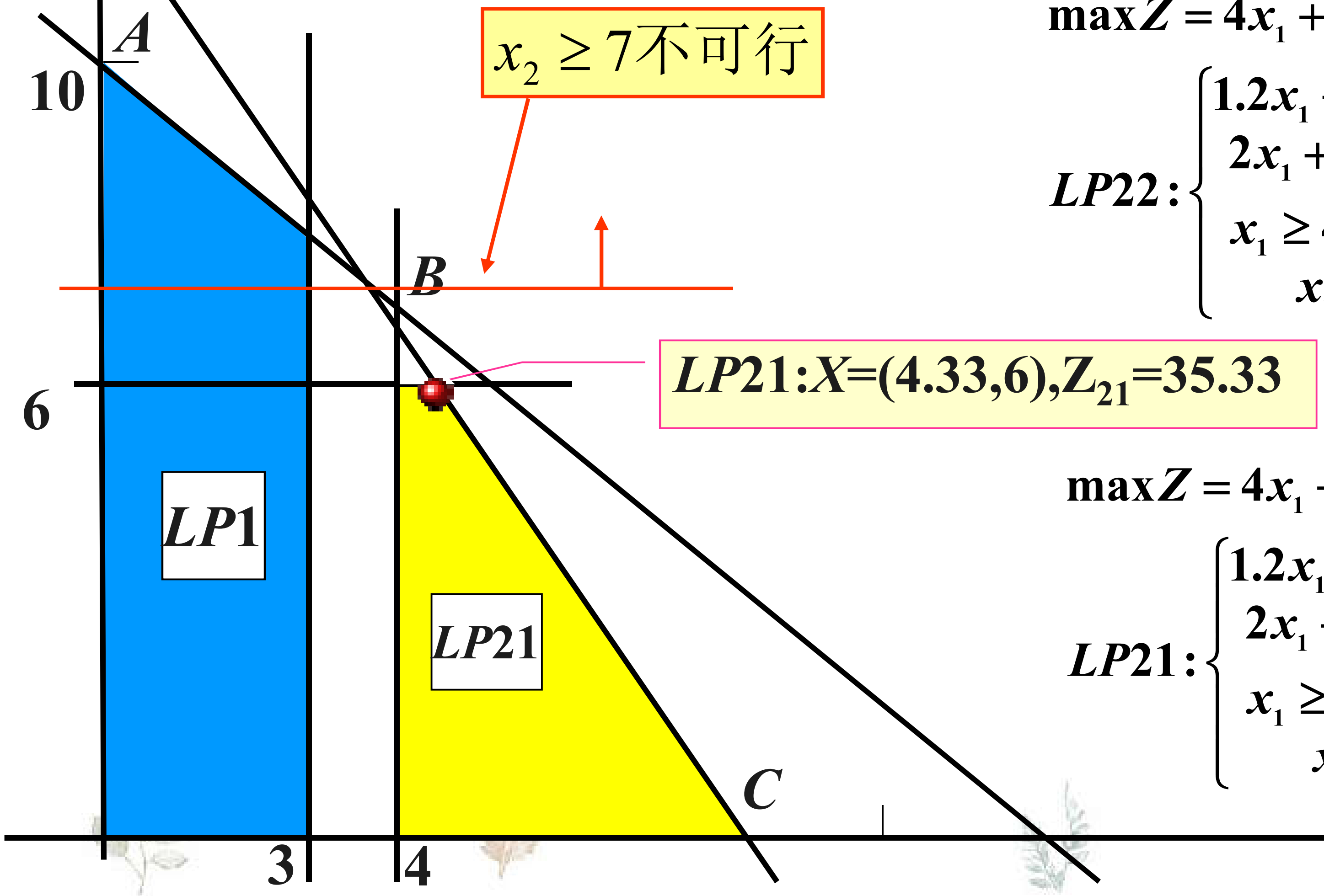
$$LP1:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP2:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划问题的数学模型

选择目标值最大的分枝 $LP2$进行分枝，增加约束 $x_2 \le 6$及$x_2 \ge 7$，显然$x_2 \ge 7$不可行，得到线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

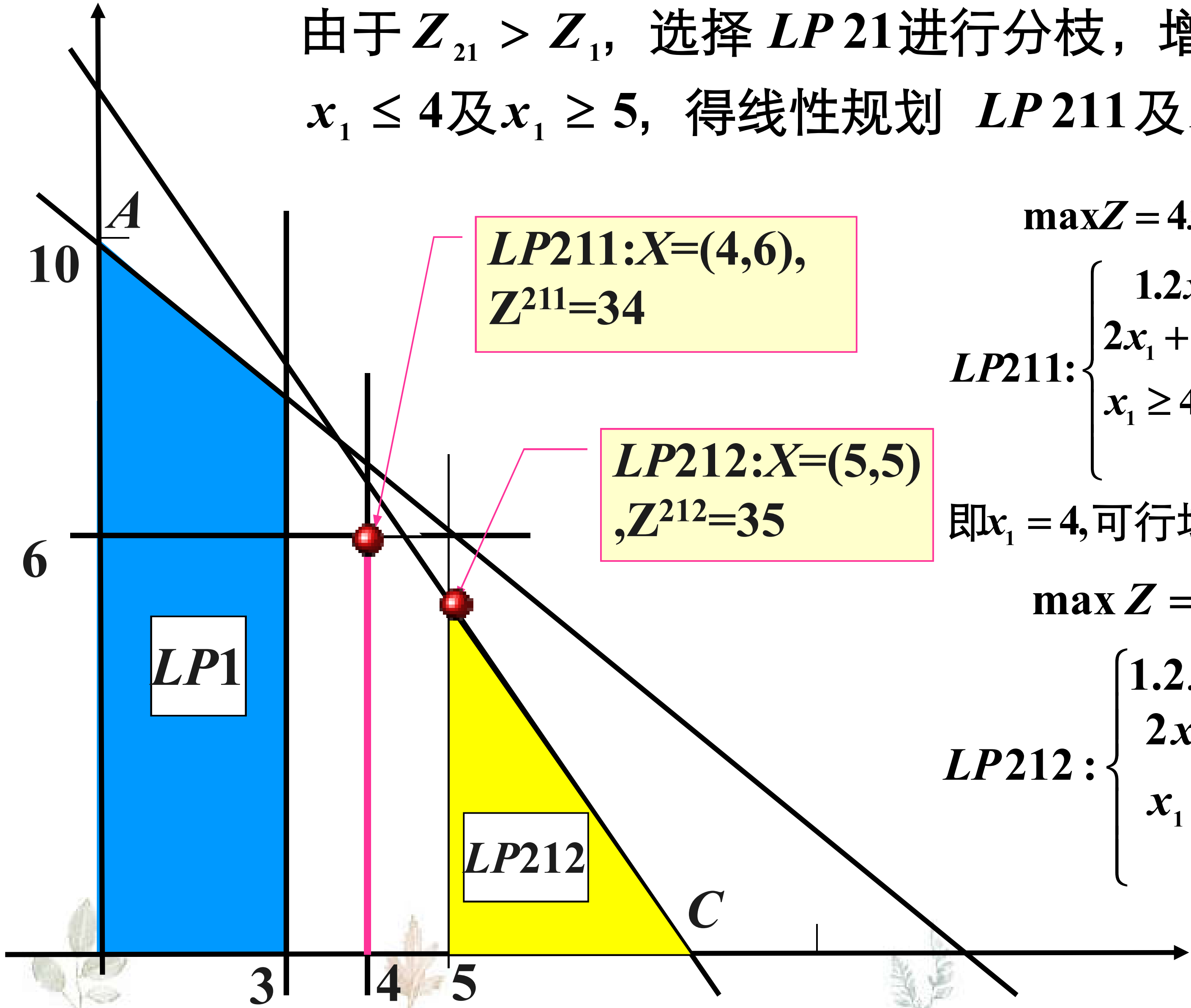
$$LP22: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP21: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划问题的数学模型

由于 $Z_{21} > Z_1$，选择 $LP21$进行分枝，增加约束 $x_1 \le 4$及$x_1 \ge 5$，得线性规划 $LP211$及$LP212$：



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP211:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ x_2 \le 6,\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

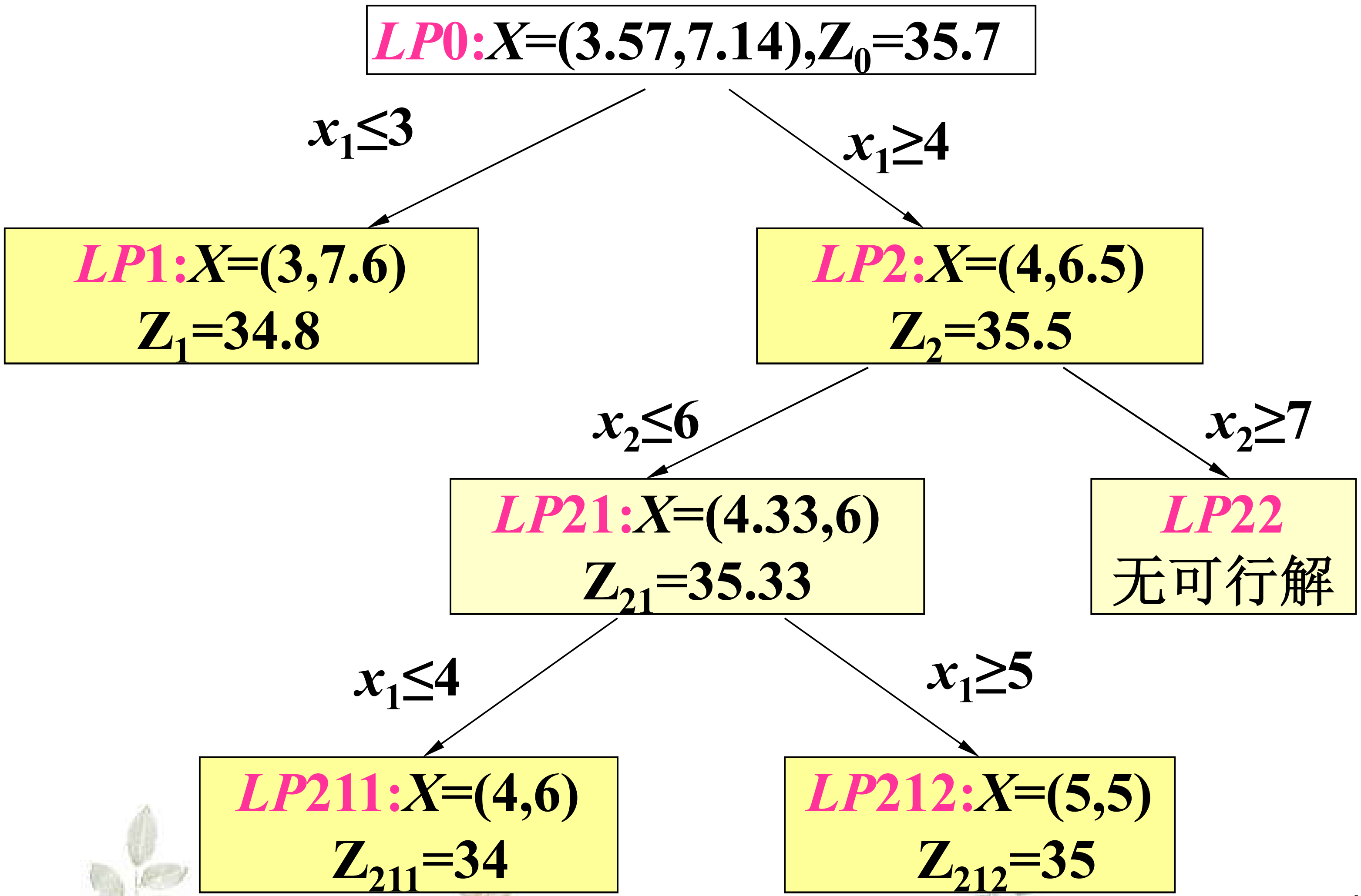
即$x_1 = 4$,可行域是一条线段

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP212:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 5,\ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划问题的数学模型

上述分枝过程可用下图表示：



非线性规划问题的数学模型

实际问题中的优化模型

$$Min(\text{或}Max)\ \ z=f(x),\ \ x=(x_1,\cdots x_n)^T$$
$$s.t.\ \ g_i(x)\le 0,\ \ i=1,2,\cdots m$$

x~决策变量　　**$f(x)$**~目标函数　　**$g_i(x)\le 0$**~约束条件

多元函数条件极值

决策变量个数**n**和约束条件个数**m**较大

最优解在可行域的边界上取得

数学规划

线性规划
整数规划
非线性规划

$f(x)$或者**$g_i(x)$**是非线性函数

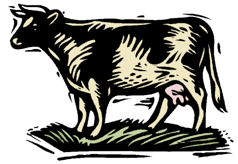
2. 实际案例与分析

① 奶制品的生产与销售

② 汽车生产与原油采购

③ 接力队选拔

奶制品的生产与销售



企业生产计划

空间层次

工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；

车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划。

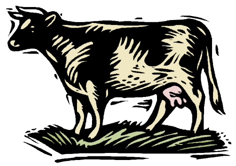
时间层次

若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划。

本节课题

奶制品的生产与销售

例1　加工奶制品的生产计划



1桶牛奶 或 12小时 → 3公斤A_1 → 获利24元/公斤

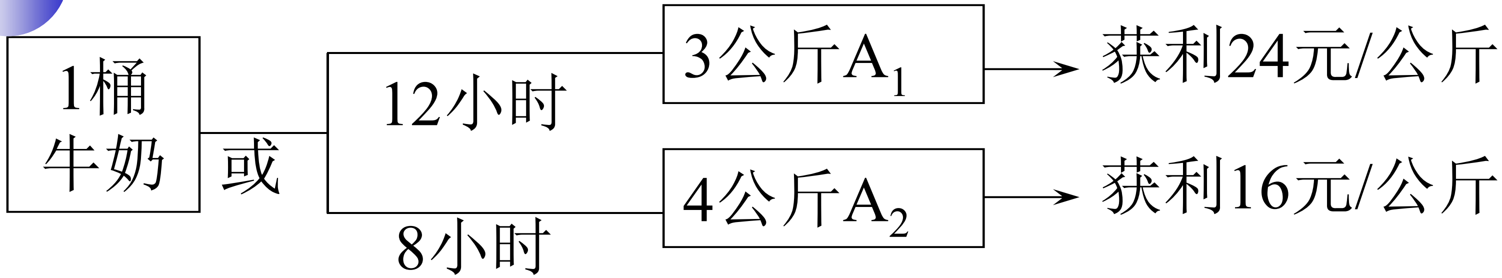
1桶牛奶 或 8小时 → 4公斤A_2 → 获利16元/公斤

每天：　50桶牛奶　时间480小时　至多加工100公斤A_1

制订生产计划，使获利最大

- 35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少?
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?
- A_1的获利增加到 30元/公斤，应否改变生产计划?

奶制品的生产与销售



每天　50桶牛奶　时间480小时　至多加工100公斤A_1

决策变量　x_1桶牛奶生产A_1　x_2桶牛奶生产A_2

目标函数　获利 $24\times 3x_1$　获利 $16\times 4\,x_2$

获利　$Max\ \ z = 72x_1 + 64x_2$

约束条件

原料供应　$x_1 + x_2 \le 50$

劳动时间　$12x_1 + 8x_2 \le 480$

加工能力　$3x_1 \le 100$

非负约束　$x_1, x_2 \ge 0$

线性规划模型(LP)

奶制品的生产与销售

模型求解 **图解法**

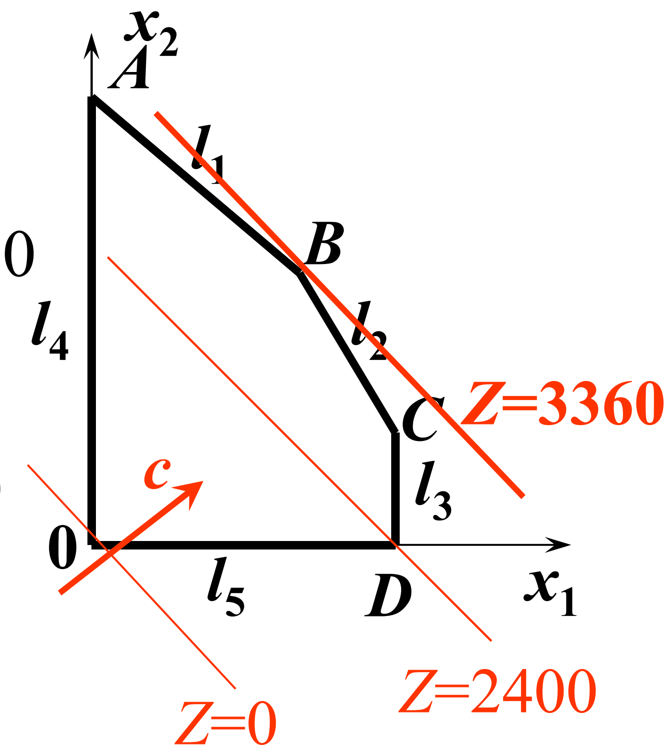
约束条件

$x_1 + x_2 \le 50$ ⇨ $l_1: x_1 + x_2 = 50$

$12x_1 + 8x_2 \le 480$ ⇨ $l_2: 12x_1 + 8x_2 = 480$

$3x_1 \le 100$ ⇨ $l_3: 3x_1 = 100$

$x_1, x_2 \ge 0$ ⇨ $l_4: x_1 = 0,\ l_5: x_2 = 0$



目标函数

$$Max\ \ z = 72x_1 + 64x_2$$

$z=c$ (常数) ~等值线

在B(20,30)点得到最优解

目标函数和约束条件是线性函数

可行域为直线段围成的凸多边形

目标函数的等值线为直线

⇨ 最优解一定在凸多边形的某个顶点取得

奶制品的生产与销售

模型求解　　软件实现　　LINDO 6.1

```
max 72x1+64x2
st
2）x1+x2<50
3）12x1+8x2<480
4）3x1<100
end
```

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS?　No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

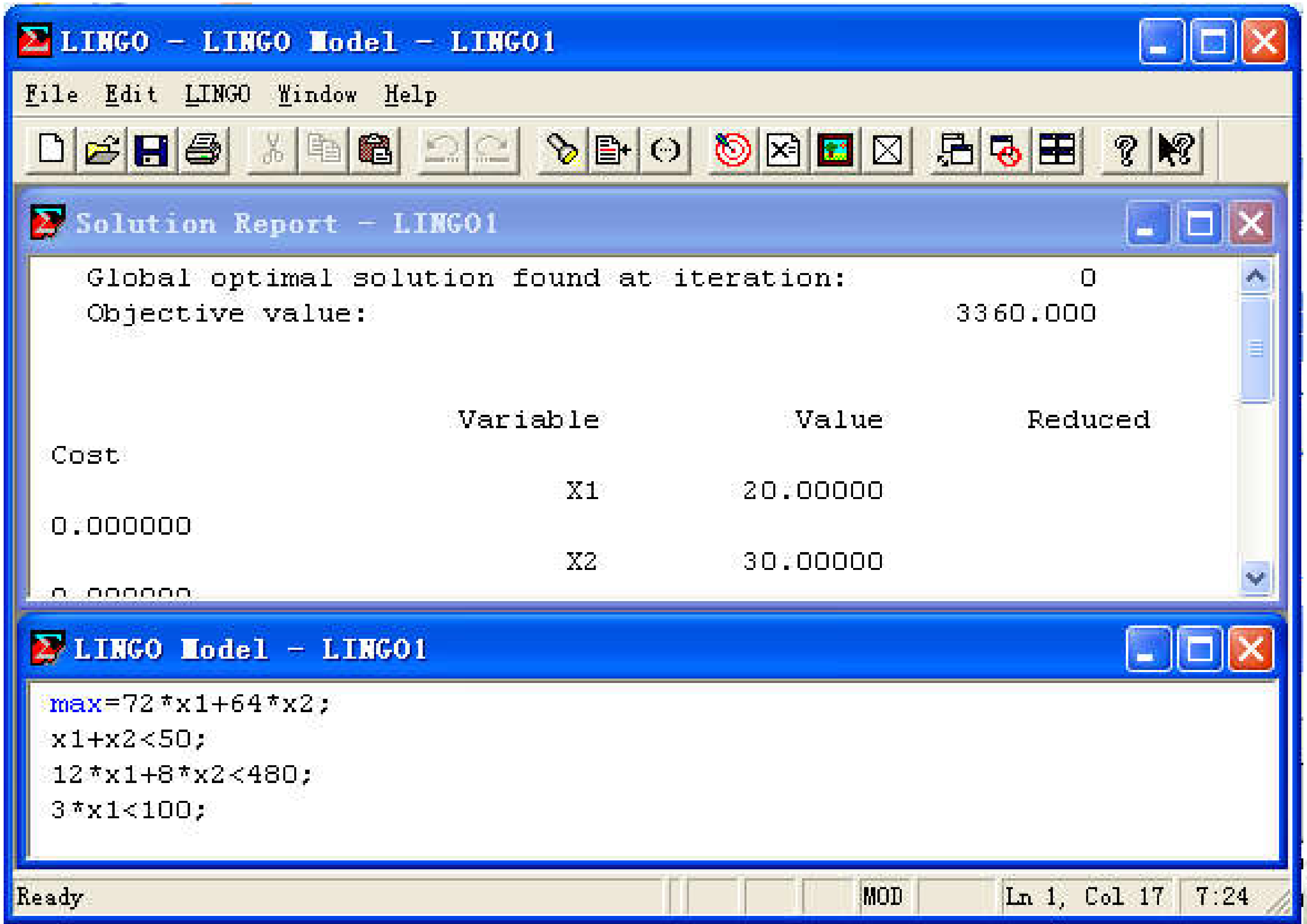
1)　3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS=　2

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元。


LINGO - LINGO Model - LINGO1
File Edit LINGO Window Help
Solution Report - LINGO1
Global optimal solution found at iteration: 0
Objective value: 3360.000
Variable Value Reduced
Cost
X1 20.00000
0.000000
X2 30.00000
LINGO Model - LINGO1
max=72*x1+64*x2;
x1+x2<50;
12*x1+8*x2<480;
3*x1<100;
Ready
MOD
Ln 1, Col 17
7:24

奶制品的生产与销售

结果解释

```
max 72x1+64x2
st
2） x1+x2<50
3） 12x1+8x2<480
4） 3x1<100
end
```

三种资源

原料无剩余

时间无剩余

加工能力剩余40

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

"资源" 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

奶制品的生产与销售

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

结果解释

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量

影子价格

原料增加1单位, 利润增长48

时间增加1单位, 利润增长2

加工能力增长不影响利润

- 35元可买到1桶牛奶，要买吗？ 35 <48, 应该买！
- 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元？ 2元！

奶制品的生产与销售

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

(约束条件不变)

x_1系数范围(64,96)

x_2系数范围(48,72)

x_1系数由24 ×3=72增加为30×3=90，在允许范围内

- A_1获利增加到 30元/千克，应否改变生产计划

不变！

奶制品的生产与销售

结果解释　　影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

(目标函数不变)

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

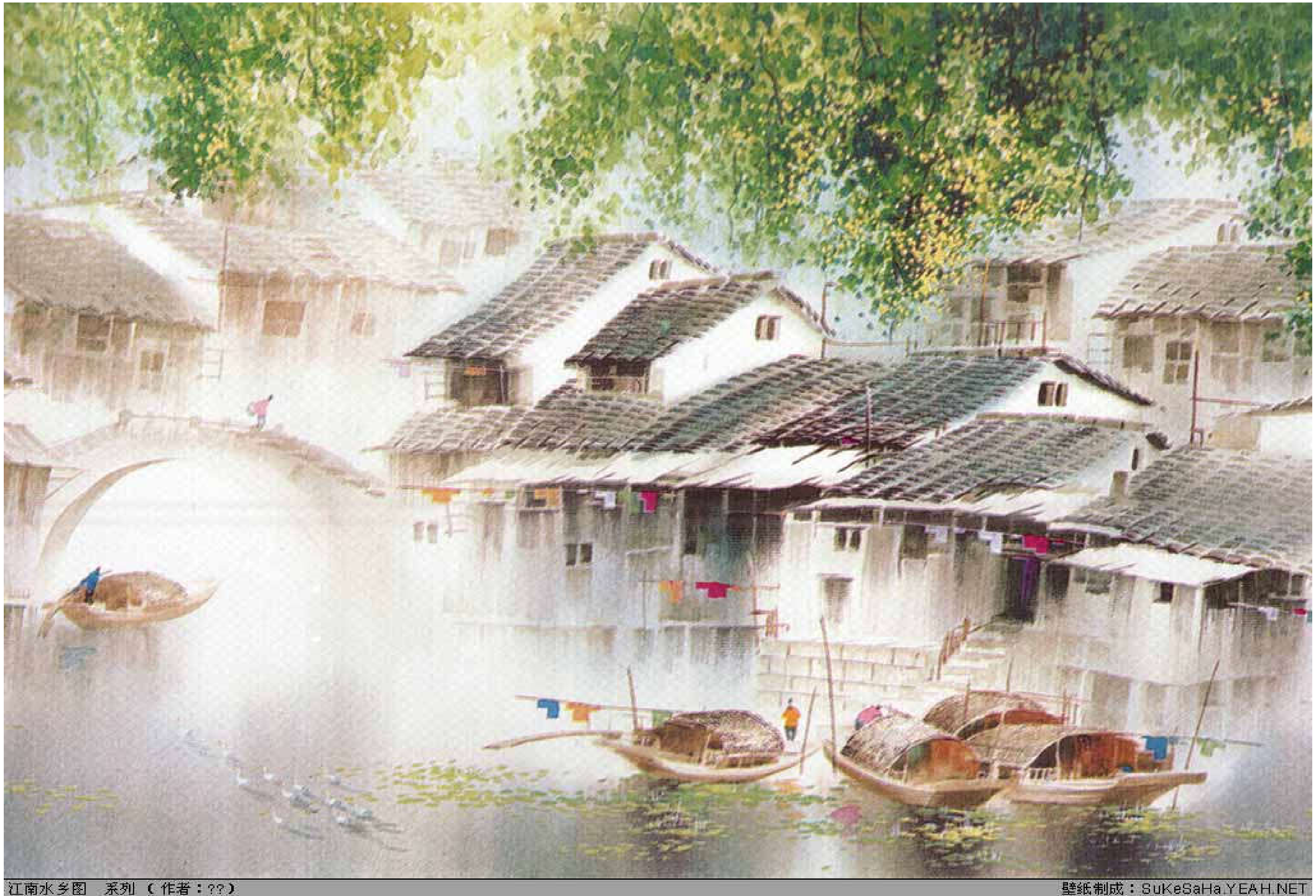
原料最多增加10

时间最多增加53

- 35元可买到1桶牛奶，每天最多买多少？

最多买10桶!

Thanks for your time and attention!



设B是 $\{\max z = CX \mid AX \le b, X \ge 0\}$ 的最优基，由（2.12）知 $z^* = C_B B^{-1} b = Y^* b$

由此 $\dfrac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$

所以变量 y_i^* 的经济意义是在其它条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

- 影子价格是根据资源在生产中作出的贡献而作出的估价，这种估价不是资源的市场价格。

  它反映了在最优经济结构中，在资源得到最优配置前提下，资源的边际使用价值。

Duality in Linear Programming