

# Induktives Erwärmen

## Analytische Betrachtung – Pflichtenheft

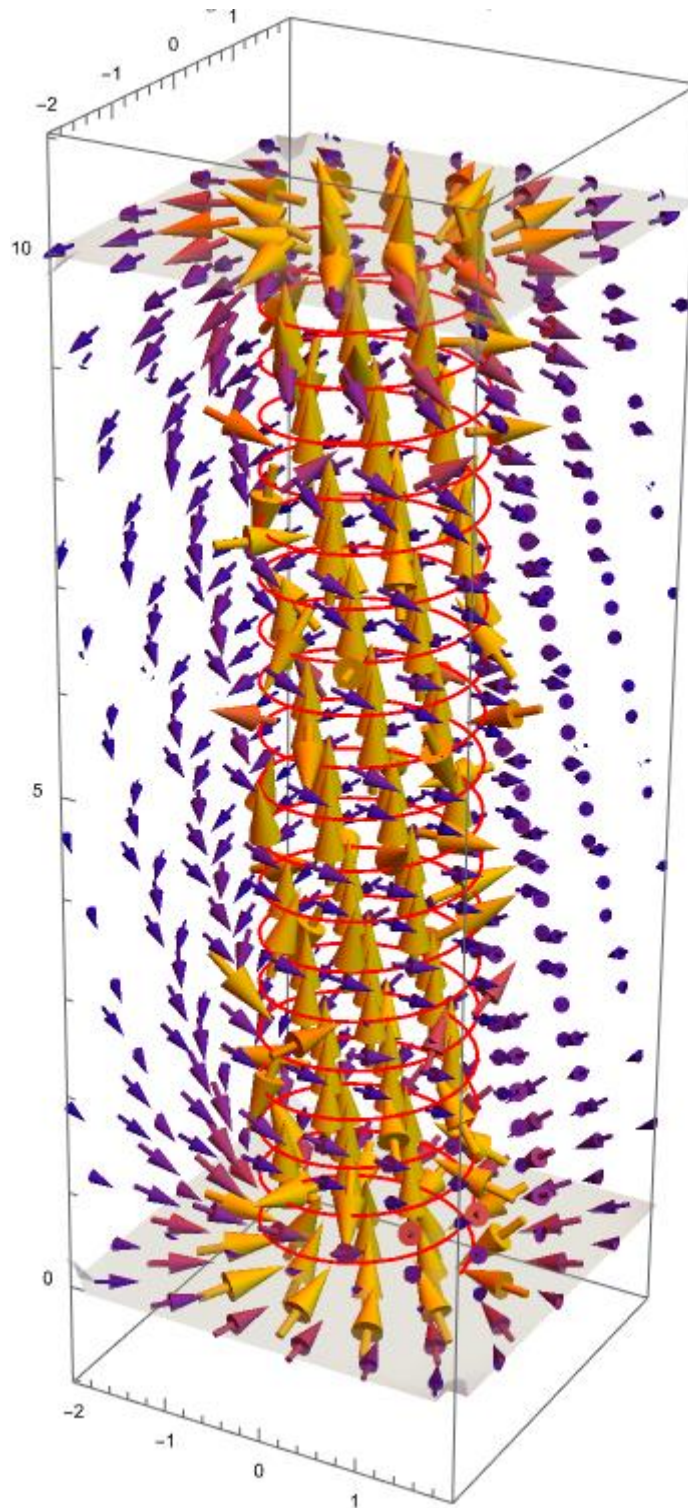


Abbildung 1 - B-Feld Spule

Datum: 06.02.2023 Versionsnummer: v1.1

## Inhalt

1	Einleitung .....	3
2	Theoretischer Teil.....	3
2.1	Funktionsprinzip .....	3
2.2	Ignorierte Effekte .....	7
2.3	Bestimmen wichtiger Größen .....	8
2.4	RL-Ersatzschaltbild .....	8
2.5	Mögliche Probleme.....	10
3	Praktischer Teil .....	10
4	Zeitplan .....	11
5	Dokumentation .....	11
5.1	Pflichtenheft .....	11
5.2	Messungen .....	11
5.3	Mathematica-Notebooks der analytischen Berechnungen .....	11
5.4	Präsentation .....	11
5.5	Abschlussbericht .....	11
6	Abbildungsverzeichnis.....	12
7	Literaturverzeichnis .....	12

## 1 Einleitung

Im Rahmen der Wahlpflichtveranstaltung „Angewandte Feldtheorie“ wurde mir (Sebastian Kattinger, Matrikelnummer: 201824036) die Teilaufgabe der analytischen Untersuchung des Aufbaus im Projekt „Induktive Erwärmung“ übertragen.

In diesem Projekt geht es darum, ein Werkstück induktiv zu erhitzen. Dazu wird ein Induktor in einem Schwingkreis betrieben. Dieses Projekt wird im WS22/23 durchgeführt.

## 2 Theoretischer Teil

### 2.1 Funktionsprinzip

Für das Erhitzen des Werkstücks ist ein zeitlich veränderliches B-Feld notwendig. Für dieses Feld ist ein zeitlich veränderlicher Strom im Induktor nötig.

Der Wechselstrom hat folgende Eigenschaften (Erstmalig bestimmt von Gruppe: „Auslegung eines Schwingkreiswechselrichters und Versuchsaufbau“):

- Amplitude:  $I_{Max} = 20 \text{ A}$
- Frequenz:  $f \approx 30 \text{ kHz}$

Mit diesem Strom lässt sich bei einem spulenförmigen Leiter über das Biot-Savart-Gesetz ein B-Feld berechnen (mit  $\vec{r'}$  als zu berechnender Ort und  $\vec{r}$  als Ort des felderzeugenden Leiters):

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{\mu * i(t)}{4 \pi} * \int d\vec{r} \times \frac{\vec{r'} - \vec{r}}{|\vec{r'} - \vec{r}|^3} \quad (1)$$

Hierbei wird angenommen, dass die Stromdichte  $\vec{j}$  über  $d\vec{r}$  konstant sei. Dies sollte aber durch den Ladungsträger-Erhaltungssatz vom Wert her garantiert sein. Die Richtung könnte leicht abweichen, sollte aber nur kleine Fehler verursachen.

Hieraus lässt sich das Vektorpotential  $A$ , das E-Feld und die übertragene Energie, die der Wärme des Objektes entspricht, berechnen (mit  $\Omega$  als Gebiet, die das Werkstück einnimmt):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2)$$

$$\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt} \quad (3)$$

$$W = Q = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \vec{E} * \varepsilon * \vec{E} dV + \int_{\Omega} \vec{B} * \frac{1}{\mu} * \vec{B} dV \right) \quad (4)$$
$$= \frac{1}{2\mu} * \left( \int_{\Omega} \left( \left( \frac{|\vec{E}|}{c} \right)^2 + |\vec{B}|^2 \right) dV \right) \text{ mit } c = \frac{1}{\sqrt{\mu * \varepsilon}}$$

Aus dieser Energie lässt sich nun die Temperaturänderung in Abhängigkeit dieser bestimmen:

$$\Delta\vartheta = \frac{Q}{c_{sp} * m} \text{ mit } c_{sp} \text{ als spezifische Wärmekapazität} \quad (5)$$

Da für  $\Delta\vartheta$  gefordert ist, dass das Objekt glüht, kann man hiermit überprüfen, ob der vorher angegebene Strom groß genug ist, um das Objekt auf die gewollte Temperatur zu bringen.

Um zu überprüfen, wie warm die Spule hierbei wird, lohnt es sich auch das  $\Delta\vartheta$  dieser zu berechnen:

$$P_{Spulenverluste} = I_{Spule,eff}^2 * R_{Spule} = \dot{Q}_{Spule} \quad (6)$$

$$\Delta\vartheta_{Spulenverluste} = \frac{1}{c_{sp,Spule} * m_{Spule}} * \int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}_{Spule} dt \quad (7)$$

Da jedoch Gleichung 2 zu kompliziert wird, um sie analytisch zu berechnen (3-Dimensionales Differenzialgleichungssystem), wird ein vereinfachter Ansatz zur generellen Überprüfung der Möglichkeit genutzt, etwaige DGL werden von Gruppe „Auslegung des Induktors“ numerisch über ein FEM-Simulationsprogramm bestimmt:

Für den eingangs erwähnten vereinfachten Ansatz folgt:

$$Q_{Obj} = m * c_{sp} * \Delta\vartheta \quad (8)$$

$$P_{Brutto} = \frac{Q_{Obj}}{\eta * \Delta t} = \frac{m * c_{sp} * \Delta\vartheta}{\eta * \Delta t} \quad (9)$$

Hierbei muss noch beachtet werden, dass Energie an die Umgebung abgegeben wird (mit Emissionsgrad  $\varepsilon$  und Stefan-Boltzmann-Konstante  $\sigma$ ):

$$P_{abstrahlung} = \varepsilon * \sigma * A * ((T_0 + \Delta\vartheta)^4 - T_0^4) \quad (10)$$

Somit ist:

$$P_{Brutto} = P_{zugegeben} - P_{abstrahlung} \quad (11)$$

$$\rightarrow P_{zugegeben} = P_{Brutto} + P_{abstrahlung} = \frac{m * c_{sp}}{\eta * \Delta t} \Delta\vartheta + \varepsilon * \sigma * A * ((T_0 + \Delta\vartheta)^4 - T_0^4) \quad (12)$$

Zur Veranschaulichung dieser und spätere eingeführter Leistungen dient folgende Graphik:

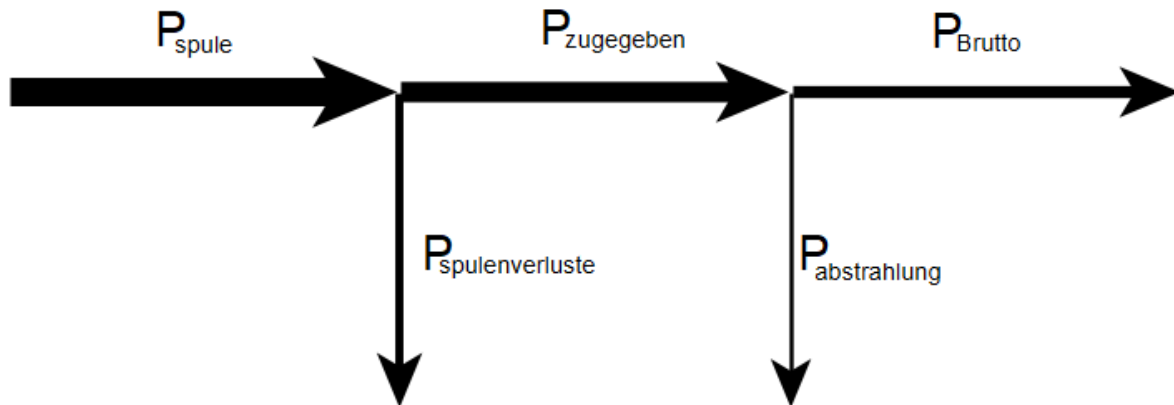


Abbildung 2 - Leistung Übersicht

Im Folgenden soll die vorherige Rechnung mit exemplarischen Werten von einem Werkstück aus Stahl ausgeführt werden. Für die Parameter gilt:

$$l = 30 \text{ mm} = 0,06 \text{ m}$$

$$h = 20 \text{ mm} = 0,02 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$$

$$c_{sp} = 0,477 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} [1]$$

$$\eta = 0,5$$

$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

$$\varepsilon = 0,36 [2]$$

$$\rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} [3]$$

$$\vartheta_0 = 293,15 \text{ K} \quad (20^\circ\text{C})$$

$$\Delta\vartheta = 700^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 680 \text{ K}$$

Hiermit ergibt sich folgende Berechnung:

$$m = l * b * h * \rho = 0,06 \text{ m} * 0,02 \text{ m} * 0,002 \text{ m} * 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 0,01886 \text{ kg} \quad (13)$$

$$A = 2 * (b * h + b * l + l * h) = 2 * (0,002 * 0,02 + 0,002 * 0,03 + 0,03 * 0,02) \text{ m}^2 \quad (14)$$

$$\approx 0,00272 \text{ m}^2$$

$$P_{zugegeben} = \frac{m * c_{sp}}{\eta * \Delta t} \Delta\vartheta + \varepsilon * \sigma * A * ((\vartheta_0 + \Delta\vartheta)^4 - \vartheta_0^4) \quad (15)$$

$$= \frac{0,01886 \text{ kg} * 477 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}}{0,5 * 10 \text{ s}} * \Delta\vartheta + 0,36 * 5,67 * 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} * 0,00272 \text{ m}^2$$

$$* ((293,15 \text{ K} + \Delta\vartheta)^4 - (293,15 \text{ K})^4)$$

$$P_{zugegeben} = 1,8 \frac{W}{K} * \Delta\vartheta + 55,5 * 10^{-12} \frac{W}{K^4} * ((293,15 K + \Delta\vartheta)^4 - (293,15 K)^4)$$

Somit ist die notwendige Leistung für ein Equilibrium in Abhängigkeit der Temperatur:

$$P_{zugegeben} = 1,8 \frac{W}{K} * 680 K + 555 * 10^{-12} \frac{W}{K^4} * ((293,15 K + 680 K)^4 - (293,15 K)^4) \quad (16)$$

$$= 1273,13 W$$

Gleichung 15 lässt sich nun nach  $\Delta\vartheta$  umstellen. Das Ergebnis ist relativ lang und wird deshalb hier nicht aufgelistet. Da es sich jedoch um ein Polynom 4.ter Ordnung handelt, sollte bekannt sein, dass dies eine allgemeine Lösung besitzt. Hier graphisch der Verlauf für:

$$P_{Spule} = 500 W, \eta = 50\%, P_{zugegeben} = P_{Spule} * \eta.$$

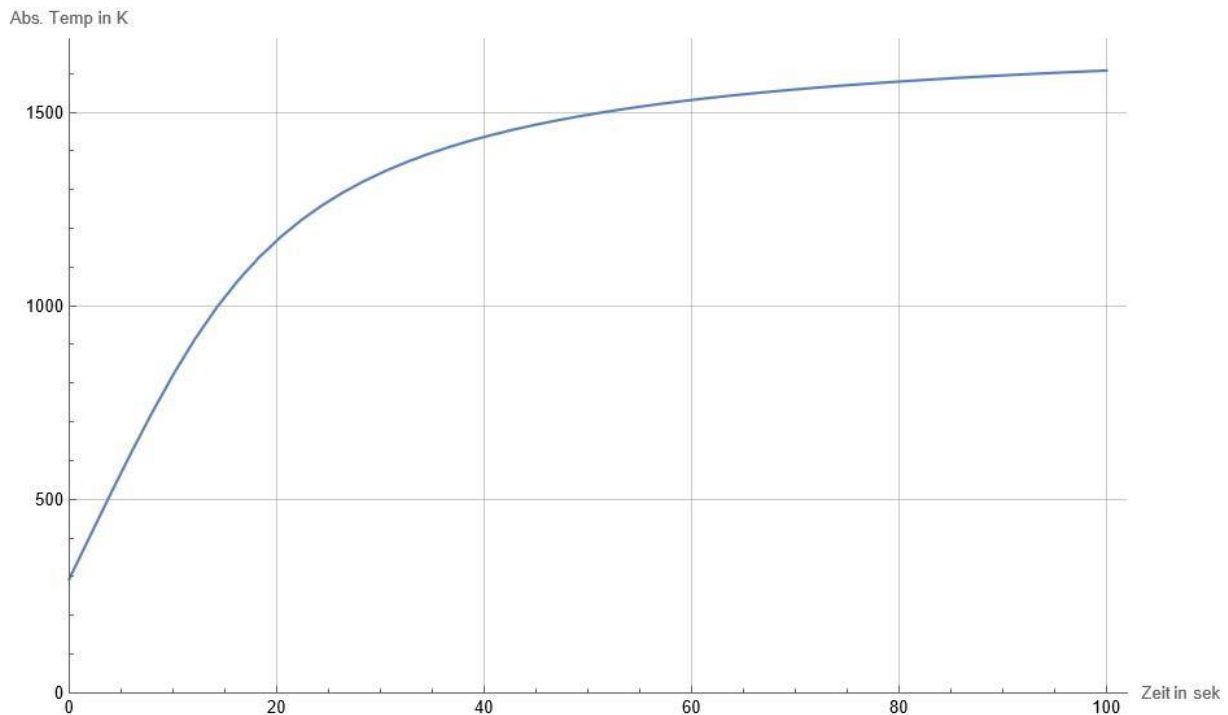


Abbildung 3 - Analytischer Temperaturverlauf

Da hierbei die Curie-Temperatur nur schwer analytisch zu untersuchen ist, wird dies auch noch einmal iterativ untersucht (mit Zeit-Schrittweite  $\Delta t$  und  $\vartheta_0 = 293,15 K$ ):

$$\vartheta_x = \vartheta_{x-1} + \Delta\vartheta_{x-1} \quad (17)$$

$$P_{ab_x} = \varepsilon * \sigma * A * ((293,15 K + \vartheta_x)^4 - (293,15 K)^4) \quad (18)$$

$$\text{Wenn } \vartheta_x < \text{Curie Temp: } \Delta P_x = \eta * P_{Spule} - P_{ab_x} \quad (19)$$

$$\text{Sonst: } \Delta P_x = k_c * \eta * P_{Spule} - P_{ab_x} \text{ mit } k_c \text{ als Curie - Faktor} \quad (20)$$

$$\Delta\vartheta_x = \frac{\Delta P_x * \Delta t}{m * c_{sp}} \quad (21)$$

Dies wird wieder am Beispiel  $P_{Spule} = 500\text{ W}$ ,  $\eta = 50\%$ . Graphisch dargestellt.

( $k_c = 0,1$  ;  $\Delta t = 0,1$  ; Curie Temp = 1042,15 K)

Abs. Temp in K

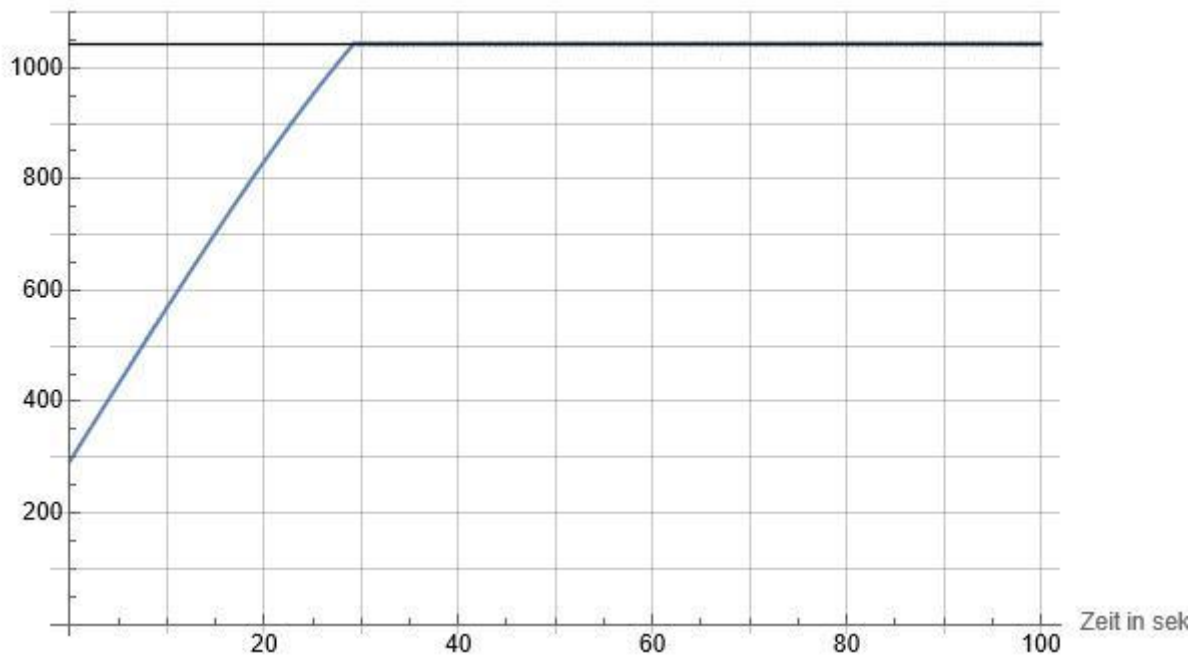


Abbildung 4 - Iterativer Temperaturverlauf

## 2.2 Ignorierte Effekte

Für die analytischen Berechnungen werden einige Effekte ignoriert, die dafür sorgen würden, dass die Rechnung nur numerisch lösbar wäre. Ein paar dieser Effekte sind hier aufgelistet:

- Nicht-Isotropie<sup>1</sup> durch Verunreinigung beim Werkstück (für konstante Dichte, spezifische Wärmekapazität und Emissionskoeffizient)
- Temperaturabhängigkeit von geometrie- und materialabhängigen Größen
- Abnahme des Wirkungsgrades mit zunehmender Temperatur
- Nicht-linearitäten von  $\mu_r$  verursacht durch Hystereseverhalten vom Werkstück
- Hystereseverluste, da diese als klein angenommen werden
- Wärmefluss Objekt  $\rightarrow$  Umgebung, da der Erwärmungsvorgang als relativ schnell angenommen wird.
- Konvektionsverluste
- Wirkungsgrad wurde grob geschätzt

Des Weiteren ist zu beachten, dass die vereinfachte Berechnung lediglich dazu dient, die allgemeine Möglichkeit zu prüfen. Diese sollte als Minimalwert angenommen werden, da einige Verluste vernachlässigt wurden.

<sup>1</sup> Isotropie: Gleichheit des Materials über ein Volumen

## 2.3 Bestimmen wichtiger Größen

Hier werden ein paar wichtige zu bestimmende Größen aufgelistet, die aus Gründen der Komplexität nicht analytisch bestimmt werden können.

- Induktivität der Spule, mit und ohne Werkstück:

$$L = \frac{1}{I_{eff}^2} \iiint \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0 * \mu_r} dV \quad (22)$$

- Widerstand der Spule im Leerlauf sowie mit Werkstück mittels RL-Ersatzschaltbild (Siehe Kapitel 2.4). Diese Größe wird messtechnisch bestimmt.

## 2.4 RL-Ersatzschaltbild

Da eine Spule Energie temporär im Magnetfeld speichert, und es somit eine Blindleistungskomponente gibt, wird durch eine Induktivität im Ersatzschaltbild dargestellt. Da es nun auch Verlustleistung an der Spule durch Erwärmung gibt, wird ein Widerstand in Reihe hinzugefügt. Somit ergibt sich für den Fall ohne Werkstück folgendes Ersatzschaltbild:

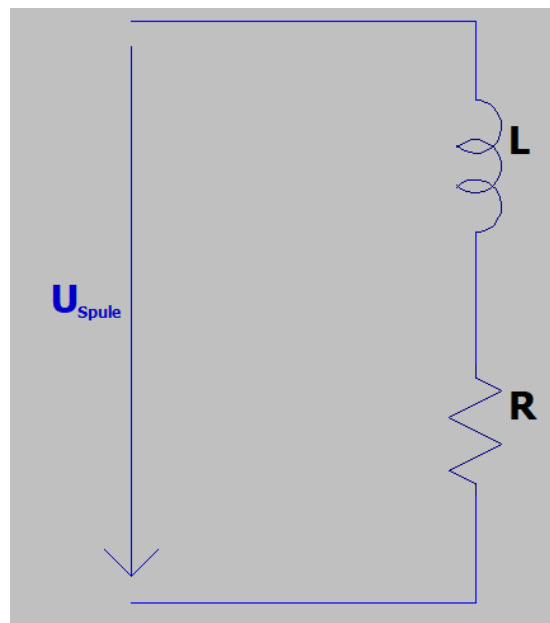


Abbildung 5 - RL Ersatzschaltbild ohne Werkstück

Sobald das Werkstück mit  $\mu_r \gg 1$  eingeführt wird und der Strom konstant ist, steigt die Energie, die man im magnetischen Feld speichern kann. Die Erhöhung dieser Energie führt zu einer erhöhten Induktivität  $L + \Delta L$  (Siehe Formel 22 - Kapitel 2.3).

Ebenso steigt die Wirkleistung, da nun zu der Erwärmung der Spule, zusätzlich auch das Werkstück erwärmt wird. Dies wird im Modell als größerer Widerstand  $R + \Delta R$  dargestellt.



Damit ist das Ersatzschaltbild für den Fall mit Werkstück:

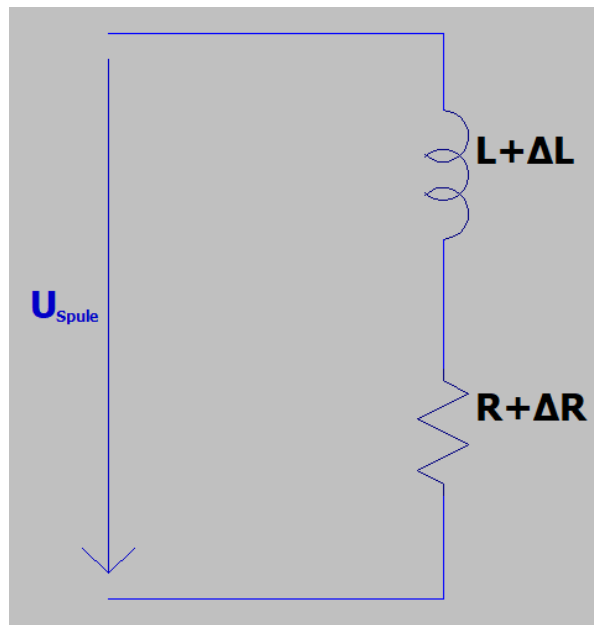


Abbildung 6 - RL Ersatzschaltbild mit Werkstück

Der Strom wird von der Gruppe: „Auslegung eines Schwingkreiswechselrichters und Versuchsaufbau“ über die äußere Verschaltung bestimmt. Somit ist für den Wirkungsgrad  $\eta$  nur die Erhöhung des Widerstandes relevant.

Durch diese Betrachtung wird klar, dass die Leistung die hierbei in das Werkstück übergeht, sich wie folgt berechnet:

$$P_{zugegeben} = I_{eff}^2 * \Delta R \quad (23)$$

Damit ist die in der Spule „verschwendete“ Wirkleistung:

$$P_{spulenverluste} = I_{eff}^2 * R \quad (24)$$

Nun lässt sich der Wirkungsgrad berechnen:

$$\eta = \frac{P_{zugegeben}}{P_{zugegeben} + P_{spulenverluste}} = \frac{\Delta R}{(R + \Delta R)} \quad (25)$$

Somit müsste für einen gewünschten Wirkungsgrad von  $\eta = 0.5$  mindestens gelten:

$$R = \Delta R \quad (26)$$

Optimal wäre deshalb:

$$R < \Delta R \quad (27)$$

Die Steigerung der Induktivität hat zwar keinen Effekt auf die Wirkleistung, aber auf die Resonanzfrequenz des Serienschwingkreises. Hierbei kann theoretisch der Strom und somit

die Nutzleistung reduziert werden. Somit muss bei der Dimensionierung des Schwingkreises berücksichtigt werden, dass der Resonanzpunkt erreicht wird, wenn das Objekt eingeführt ist.

Die benötigte Resonanzfrequenz berechnet sich hierbei zu:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi * \sqrt{(L + \Delta L) * C}} \quad (28)$$

## 2.5 Mögliche Probleme

Zuletzt werden noch mögliche Probleme sowie deren Lösungen aufgelistet:

- Analytisch ermittelte Leistung reicht nicht aus, um das Objekt zu erhitzen.
  - Die Berechnung gibt die minimal nötige Leistung an, um das Objekt zu erhitzen. Dies kommt daher, dass in der Berechnung von  $\Delta\theta$  der Wärmewiderstand vernachlässigt wird, da angenommen wird, dass das Erhitzen möglichst kurz dauert. Es ist bekannt, dass die Erwärmung schneller geht, wenn zu Beginn mehr Leistung als benötigt genutzt wird. Es sollte also eine größere Leistung als berechnet gewählt werden.
- Frequenz verlässt Resonanzpunkt, wenn das Werkstück eingeführt wird.
  - Durch Variation der Kapazitäten kann die Frequenz wieder angepasst werden.
  - Da die Schaltung über einen Signalgenerator gespeist wird, ist diese Verschiebung hierbei von geringer Relevanz, da die Anregfrequenz einstellbar ist und im Betrieb nachgeführt werden soll.
- Der Widerstand wird mit eingeführtem Werkstück zu groß.
  - Entweder muss das Werkstück vom Volumen her verkleinert werden, oder die Anzahl der Wicklungen muss reduziert werden, wodurch  $R + \Delta R$  sinkt. Dadurch wird aber möglicherweise auch der Wirkungsgrad  $\eta$  reduziert, dies sollte somit also möglichst vermieden werden.

## 3 Praktischer Teil

Da alle drei Gruppen zusammenarbeiten, ist die Unterteilung der Aufgaben an sich relativ schwer und wenig zielführend.

Grundlegend besteht die Absicht, die hier vorbereiteten Rechnungen auf die Messungen der anderen Gruppen anzuwenden und sonst bei den bevorstehenden Aufgaben zur Hilfe zu stehen.

## 4 Zeitplan

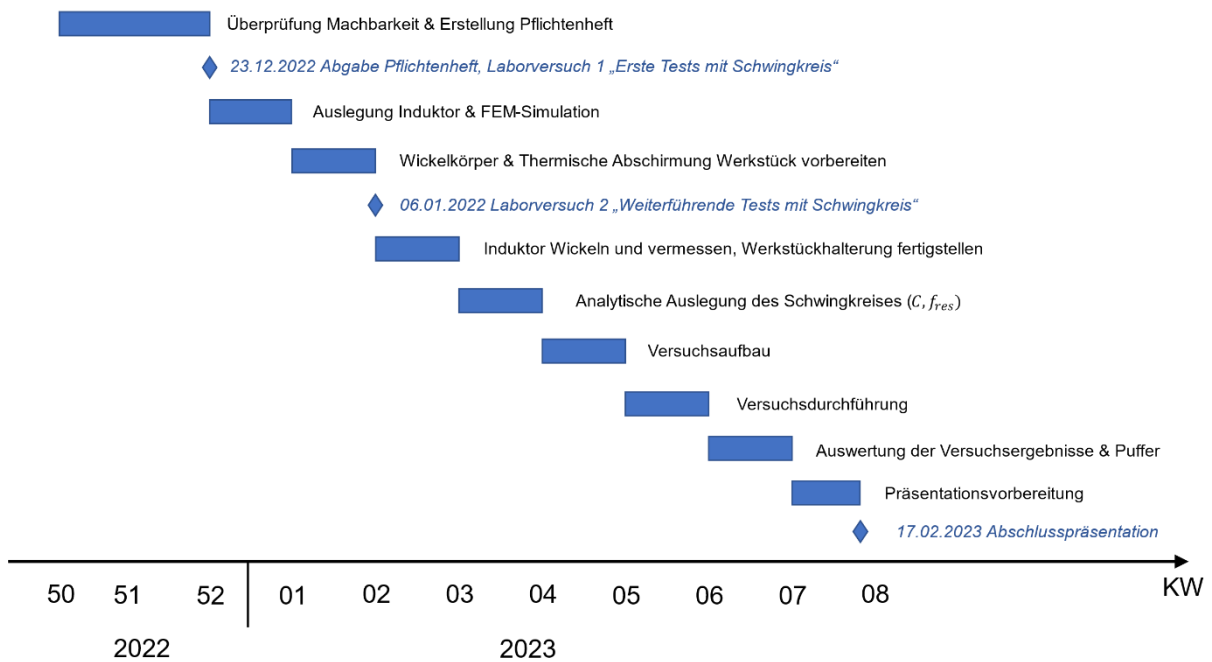


Abbildung 7 – Zeitplan

## 5 Dokumentation

### 5.1 Pflichtenheft

Zur Überprüfung der Machbarkeit wurde dieses Pflichtenheft erstellt. Es dient als Vertragsgegenstand zwischen Herr Kattinger und Herr Rüter.

### 5.2 Messungen

Die durchgeführten Messungen werden angemessen dokumentiert und der Projektakte zugefügt.

### 5.3 Mathematica-Notebooks der analytischen Berechnungen

Die in Mathematica-Notebooks angefertigten analytischen Berechnungen werden der Projektakte hinzugefügt.

### 5.4 Präsentation

Am Ende des Projektes wird eine Power-Point-Präsentation von etwa 20 Minuten mit den Ergebnissen des Projektes gehalten. Dies endet in einer Fragerunde von etwa 10 Minuten.

### 5.5 Abschlussbericht

Die erzielten Arbeitsergebnisse (Siehe Kapitel: 5.1 - 5.4) werden in einem Abschlussbericht zusammengefasst.

## 6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 - B-Feld Spule.....	1
Abbildung 2 - Leistung Übersicht.....	5
Abbildung 3 - Analytischer Temperaturverlauf .....	6
Abbildung 4 - Iterativer Temperaturverlauf.....	7
Abbildung 5 - RL Ersatzschaltbild ohne Werkstück.....	8
Abbildung 6 - RL Ersatzschaltbild mit Werkstück.....	9
Abbildung 7 - Zeitplan.....	11

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] A. Schweizer, „schweizer-fn.de,“ [Online]. Available: <https://www.schweizer-fn.de/main/impressum.php>. [Zugriff am 20 12 2022].
- [2] Steinel, „steinel.de,“ [Online]. Available: <https://www.steinel.de/de/werkzeuge/service/unser-serviceangebot/emissionsgrade/>. [Zugriff am 20 12 2022].
- [3] Wikimedia Foundation Inc., „Wikipedia.de,“ [Online]. Available: <https://de.wikipedia.org/wiki/Stahl>. [Zugriff am 23 12 2022].

---

Datum:

---

Herr Rüter:

---

Datum:

---

Herr Kattinger: