# 数学模型

载波相位测量值的精度比伪距测量值的精度要高出几个数量级，因而基于载波相位的差分系统通常可达到厘米级的定位精度。其定位原理就是建立双差载波相位观测方程，求解基线向量及整周模糊度，其中核心任务就是求解双差载波相位测量值中的整周模糊度，一旦其变成无模糊度的高精度距离测量值，随后的定位问题也就迎刃而解。。

## 单差

如图1.1所示，每个单差测量值只涉及两个接收机在单个时刻对同一颗卫星的测量值，它是站间（接收机之间）对同一颗卫星测量值的一次差分。单差不但可以用来根除测量值中的卫星钟差，而且在短基线（RTK定位的基线长度一般在10km以下）情形下，也可基本消除大气延时误差。



图1.1 单差模型

如图1.2所示，两个相距不远的用户接收机u和r 同时跟踪一个编号为i的卫星，根据载波相位观测方程，以波长为单位的接收机u与r对卫星i的载波相位测量值与可分别表达成

(1.1)

(1.2)

在上述载波相位观测方程式中，等号右边除了包含接收机位置信息的几何距离是我们所希望求解的参量之外，其余各项误差参量实际上不是我们所真正关心的。因此可以利用差分组合技术来将这些误差参量进行消除。

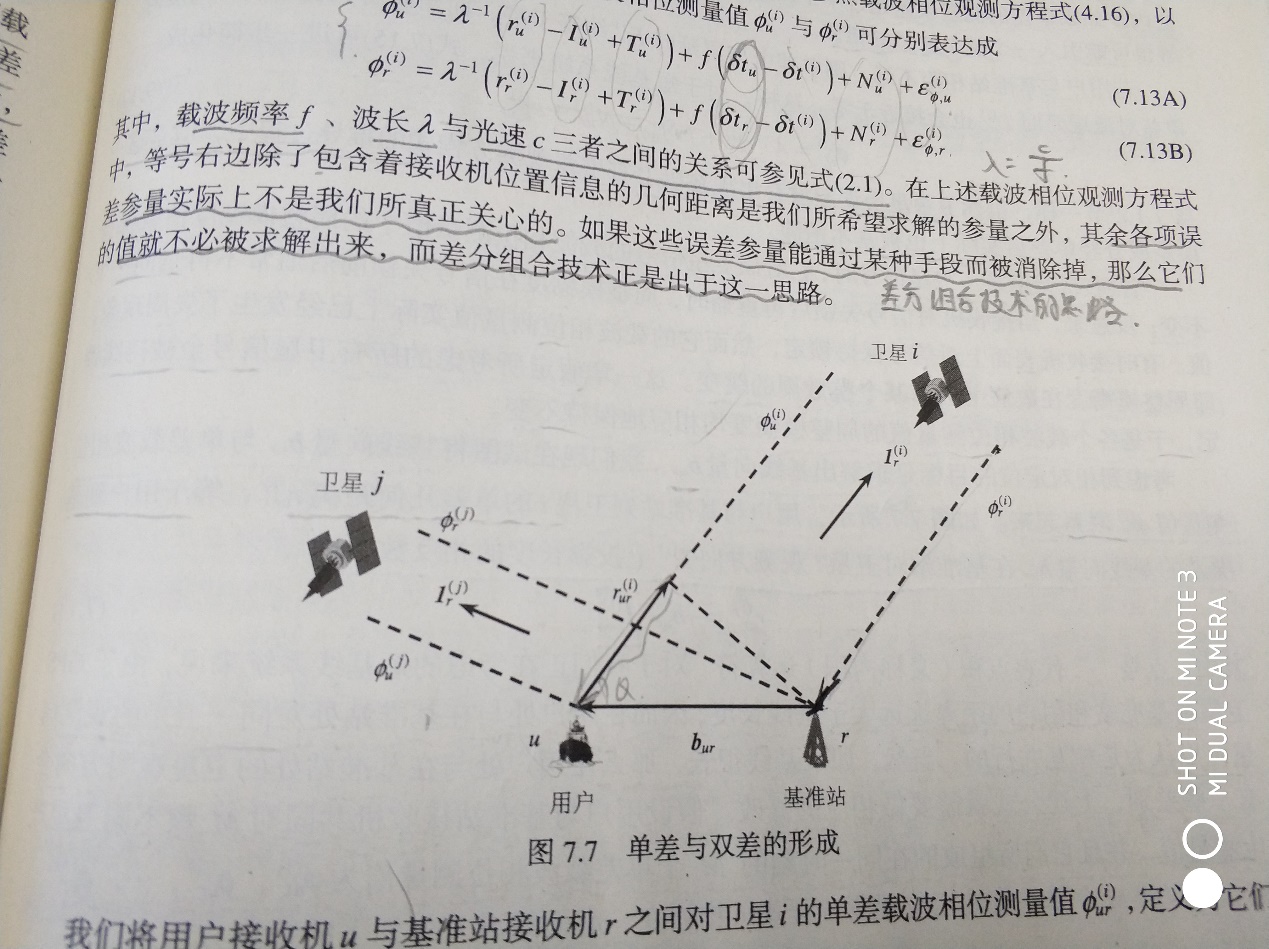


图1.2 单差和双差的形成

将用户接收机u与基准站接收机r之间对卫星i的单差载波相位测量值，定义为它们两者的载波相位测量值之差，即

(1.3)

将式（1.1）和（1.2）代入上述单差计算公式，得

(1.4)

上式各符号定义如下

(1.5)

(1.6)

(1.7)

(1.8)

(1.9)

(1.10)

显然，由两个整数相减得到得的单差整周模糊度仍是个整数，而一旦的值被正确地求解出来，那么单差载波相位就成为既没有模糊度又具有高精度得单差距离测量值。

式（1.4）表明，卫星钟差在单差后被彻底消除，然而单差测量噪声的均方差却增大到原载波相位测量噪声（或）均方差的倍。接收机钟差差异对不同卫星来说是相同的，它可以通过双差而被消除。同时，如果要求基于载波相位测量值的相对定位精度达到厘米级，那么单差载波相位测量值所含的误差也应该被控制在厘米级之内。如果单差的测量误差超过半个波长（即约10cm），那么随后对单差整周模糊度的求解很可能引入一个整个波长的错误。

若用户与基准站相距不远，则单差电离层延时约等于零，而当二者又位于同一高度时，单差对流层延时也会接近于零。这样，对于短基线系统来说，式（1.4）可进一步简化成

(1.11)

相对定位的目标是求解出基线向量，如图1.2所示，可以将基线向量与单差载波相位测量值联系起来，用户与基准站到卫星i的单差几何距离，等于用户到基准站的基线向量在基准站对卫星i观测方向上投影长度的相反数，即

(1.12)

(1.13)

对于短基线系统来说，由于GPS卫星离基准站和用户的距离远远大于基线长度，因而在用户处与在基准站处对于同一卫星的观测向量可以认为是相互平行的。

假设用户与基准站接收机共同对M颗不同卫星产生观测值，并且它们所组成的在同一时刻的M个单差载波相位测量值为, 那么相应的M个单差载波相位观测方程式可排列在一起组成一个如下的矩阵方程式：

(1.14)

其中，各个测量噪声被省去，等号右边的系数矩阵与伪距定位中的几何矩阵**G**相一致。该矩阵方程中，三维基线向量和单差接收机钟差需要求解，再加上M个未知的单差整周模糊度的值，一共包含未知数，多于方程式个数M。然而一旦我们确定了各个单差整周模糊度的值，那么基线向量就可以被精确地求解出来。

类似地，我们可将伪距组合成伪距单差观测量，在短基线情形下，它们对卫星i的单差伪距测量值的定义及观测方程式如下

(1.15)

## 双差

如图1.3所示，每个双差测量值涉及两个接收机在同一时刻对两个卫星的测量值，它对两颗不同卫星的单差之间进行差分，即在站间和星间各求一次差分。显然，双差能进一步消除测量值中的接收机钟差。



图1.3 双差模型

如前节图1.2所示，假设用户接收机u和基准站接收机r同时跟踪卫星i和卫星j，那么同式（1.11）知，对卫星j的单差载波相位测量值为

（1.16）

给定在同一测量时刻的单差和， 由它们所组成的双差载波相位测量值定义如下：

(1.17)

(1.18)

其中，

(1.19)

(1.20)

(1.21)

由式（1.18）知，双差能彻底消除接收机钟差和卫星钟差，然而其代价是使双差测量值噪声的均方差增加到原先单差测量噪声均方差的倍，一般在1cm左右，即大致为0.05个载波L1的波长。

双差载波相位是确定基线向量的关键测量值，因此需要建立双差与基线向量之间的关系方程式。类似于（1.7），对卫星就j，有

(1.22)

代入式（1.19）有

**(**1.23)

再将上式代入式（1.18）得

(1.24)

上式给出了双差与基线向量之间的关系，其中，等号左边是根据式（1.17）由同一时刻的四个载波相位测量值计算出的双差载波相位测量值，它是个已知量，而等号右边是个待求的三维基线向量，双差整周模糊度也是个未知整数。

由于用户和基准站接收机对两颗不同卫星的载波相位测量值（即对两颗不同卫星的单差测量值）才能线性组合成一个双差测量值，因而两接收机同时对M颗卫星有测量值，则这M对载波相位测量值（即M个单差测量值）的两两之间总共能产生个双差测量值，但是只有其中的个双差值相互独立。也就是说，双差技术的另一个代价是牺牲一个观测方程式。假设这个个相互独立的双差载波相位测量值表达成，而每个双差值有一个类似式（1.24）所示的观测方程式，那么这个双差观测方式集中在一起可组成一个如下的矩阵方程式：

(1.25)

其中，双差测量噪声被省略，若接收机能确定上述矩阵方程式中的各个双差整周模糊度值，则基线向量就能从方程式中求解出来，从而实现相对定位。上式选择编号为1的卫星作为双差运算中的参考卫星，为了确保各个双差测量值的精确性，参考卫星一般选择具有高仰角的卫星。

类似于双差载波相位测量值的组合机制，对应于不同站间和星间的伪距测量值也可组成双差伪距。在短基线的情形下，卫星j的单差伪距可写成

(1.26)

这样，接收机u和r对卫星i和j的双差伪距测量值的定义及其测量方程式为

(1.27)

从上式可知，双差伪距的优点在于其不含整周模糊度，但其测量噪声的均方差远高于双差载波相位测量噪声的均方差。如果两接收机对M颗卫星有伪距测量值，那么个相互独立的双差伪距观测方程式可组成一个如下的矩阵方程式：

(1.27)

在给出足够多个双差伪距测量值的条件下，接收机理论上可从上述矩阵方程式中求解出基线向量。

## 双差整周模糊度求解

由式（1.25）知，要想精确地求出基线向量，首先需要求解精确的双差载波相位方程组中的整周模糊度。将该式写成一个线性矩阵的形式：

(1.28)

其中，y为接收机给出的双差载波相位测量值向量，为未知的基线向量，N为需要被求解的双差整周模糊度向量， A和B为常系数矩阵，而其他一些未知的测量误差和噪声均被忽略。整周模糊度求解算法一般是基于最小二乘原理，它们的最优解（）能使测量残余的均方和最小，即

(1.29)

或者更为普遍地说，使测量残余的加权平方和最小，即

(1.30)

其中，C通常取值为测量值y的误差协方差矩阵之逆，其中对称、正定。以最小二乘作为求解准则所获得的整周模糊度结果具有最高的正确率，这使得进行这种无偏估计的LAMBDA算法具有很大的吸引力。

若N的值不必为一列整数，则最小二乘法可直接用来求解式（1.28），所得的浮点解（）能满足式（1.30），尽管浮点解不是我们最后需要的整数解，但它经取整后的值通常可作为整数解的初始估计值。因为这里整周模糊度N要求为整数，所以对式（1.28）的最小二乘解属于整数型最小二乘问题，而它的解一般来说没有解析形式。求解整数型最小二乘问题的一类方法是搜索，即首先确定一个整周模糊度向量的搜索空间并设置一个目标函数，然后计算在搜索空间内各个整数值格网点上的目标函数值，最后将那个使目标函数值达到最小的整数值格网点作为整周模糊度的最优解。可见，搜索空间需要足够大，使它必定包含整周模糊度的正确解，而它又必须尽可能地小，以减少搜索计算量。假设搜索空间为一个维的正方体，并在每一维上搜索浮点解附近左右共有L个整数，那么我们总共需要搜索个点，而在M和L较大时意味着很大的计算量。

为了提高搜索整周模糊度的计算效率，需要一方面减小搜索空间，另一方面是采用一种更为有效的计算残余平方和的算法，LAMBDA算法则具有上面的优点。该算法设定了如式（1.30）所示的目标函数，并通过以下的浮点解、整周模糊度估算和整数解三步来完成对该目标函数的最小化。

**第一步：**不考虑整周模糊度N的整数要求而直接求解出满足（1.30）的浮点型加权最小二乘解。这一步的浮点解可以根据相关公式给出，同时还能给出协方差矩阵

其中代表由竖向量先后排在一起组成的竖向量。我们将协方差矩阵分解成如下形式：

其中，为的协方差矩阵，为**N**的协方差矩阵，而为的右上角部分，它代表着与**N**的相关性。

**第二步：**以整数向量与浮点解N之间的距离平方为目标函数，搜索整周模糊度，使这一目标函数达到最小值，即

(1.31)

将满足上式的整数解记为最优解。对于上式的最小二乘问题，若为一对角阵，则最优整数解N相当明显，它直接等于的四舍五入取整值。然而一般来说，通常并不是一个对角阵，这种不同整周模糊度之间的相关性不再使浮点解N的取整值为最优解**，**于是最优解需要通过搜索才被找到。LAMBDA算法规定了如下一个关于整周模糊度整数解的搜索空间：

(1.32)

其中，T是一个取值适当的门限。由上式限定的搜索空间是一个多维椭球体，球体内部的整数值格网点为理论上需要一一搜索、考察的对象，而其中的一个整数值格网点能满足式（1.31）。

然而，具有实际意义的权系数矩阵对不同测量值有着不等的权重。当对不同测量值之间的权重相差太大时，以上椭球形搜索空间就会变得相当狭长，这会使最优整数解看上去并不一定在浮点解N附近，有可能离很远，而面对这种困境，遍历搜索不是一个合适的选择。为了让最优整数解出现再浮点解N附近，从而相应地限制搜索在附近进行，以提高搜索效率，LAMBDA算法通过以下的Z变换将原先在一个狭长椭球体内对N的搜索变成在一个近似球体空间内对M的搜索

（1.32）

相应地，式（1.31）就等价地变换成

（1.33）

其中，权系数阵从原先的变为对角阵。在完成用来降低整周模糊度之间相关性的Z变换后， LAMBDA算法才进行实质性的整周模糊度搜索求解。若的确为一个对角阵，则对式（1.33）的求解相当容易，它的最优整数解直接等于向量**（即）**的四舍五入取整值，而我们接着可将最优解反变换成最优整数解，即

(1.34)

其中，变换矩阵**Z**及其逆矩阵的元素均应该为整数，这不但保证了该变换是一种一一映射关系，而且还说明矩阵**Z**和的行列式值均为1，即变化前后搜索空间的体积保持不变。可是，具有这些特性的变换**Z**很难将对角化，而事实上只是一个近似的对角阵。LAMBDA算法需要通过对进行一系列的整数变换才能完成近似的对角化，然后采用基于分解的序贯条件最小二乘的方法进行搜索，最终得到满足残余平方和最小的最优解。

**第三步：**将整周模糊度最优整数解代入上式（1.28），从而求出基线向量的最优 “整数”解。

## 定位计算过程

1. 在初始化阶段，静态观测若干历元。历元数目的多少取决于流动站到基准站的距离。在数据处理中，重复静态观测的程序，求出相位模糊度，并加以确认此相位模糊度正确无误。（理论上模糊度是常数，即多次求解的结果一样）
2. 将求出的相位模糊度代入双差方程中，双差方程中只包含未知的三维基线向量。此时，只要观测3颗卫星，就可进行求解。这样，在实际作业中，观测颗卫星，就可实时准确无误地求解。
3. 根据上述结果，我们可以获取移动站和基准站之间建立的基线向量，其次也可以通过CORS站获取到基准站的精确定位信息，即移动站的位置可以得到：

（1.35）