猫猫们の难题集

题目解答

喵喵

2023 年 12 月 22 日

写在前面

众所周知，猫猫们在学习的过程中会遇到好多好多问题。不过没有关系，喵喵会来帮助大家！不过，让喵喵干活一个小时需要一杯咖啡喵……不是咖啡猫啦！

1 高等数学

1. (**集合与函数**) 设 f 是 A 到 B 的一个映射，定义 B 到 A 的对应法则 g 如下：

   $$g(b) = a\text{，其中 } a \text{ 为 } b \text{ 在 } f \text{ 下的原像。}$$

   请问 f 满足什么条件时，g 是 B 到 A 的映射？

   解答： f 是双射。

   想要解决这个问题，首先我们需要弄清楚函数的定义。如果 g 构成 B 到 A 的映射，那么对于集合 B 中的任何一个元素 b，在集合 A 中都存在唯一的一个元素 a 与之对应。从这里我们可以知道，对于 B 中的每一个元素 b，都可以在集合 A 中找到它对应的原像。所以，f 是**满射**。另一方面，如果存在 $a_1 \neq a_2$，使得 $f(a_1) = f(a_2)$，那么 $g(b)$ 可以等于 a_1，也可以等于 a_2，这就违背了函数的定义。所以，如果 $a_1 \neq a_2$，那么 $f(a_1) \neq f(a_2)$，即 f 是**单射**。由于函数 f 既是单射又是满射，所以函数 f 是双射。在数学上，我们将函数 g 称为函数 f 的逆映射，记为 f^{-1}。**函数 f 的逆映射存在的充分必要条件是 f 是双射**。

2. (**集合与函数**) 请问 $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ 是否成立？若成立，请证明；若不成立，请给出反例。

   解答：不成立。给出反例如下：取 $f(x) = x^2, X = \{0, 1\}, Y = \{0, -1\}$，那么 $X \cap Y = \{0\}, f(X \cap Y) = \{0\}$，但是 $f(X) = \{0, 1\}, f(Y) = \{0, 1\}$，所以 $f(X) \cap f(Y) = \{0, 1\} \neq f(X \cap Y)$。

   事实上，这个命题正确的写法应该是：$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$。等号成立的条件是 f 是单射。

3. (**极限**) 利用数列极限的定义证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$。另外，如果数列 $\{|a_n|\}$ 收敛，请问数列 $\{a_n\}$ 是否收敛？

   解答： 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，由数列极限的定义，对于 $\forall \epsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，都有 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立。此时，由于 $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$，所以 $||a_n| - |a|| < \epsilon$ 也成立。即证 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$。如果数列 $\{|a_n|\}$ 收敛，此时数列 $\{a_n\}$ 不一定收敛，例如数列 $\{(-1)^n\}$，$\{|a_n|\}$ 是一个常数列，一定收敛，但是 $\{a_n\}$ 并不收敛。

4. (**极限**) 利用数列极限的定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

解答：对于 $\forall\epsilon>0$，取 $N=[\epsilon^{-1}]+1>\epsilon^{-1}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n}<\epsilon$$

结合数列极限的定义，即证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

解决这个问题的关键，是将要证明的数列放缩到 n^{-1}。这个问题本质上利用了**夹逼定理**的思想进行解答。在证明一些困难的数列极限的时候，可以考虑将要证明的数列放缩到一个容易证明的数列上去，例如 n^{-1} 之类的数列，这样就可以大大减小题目的计算量。

5. (**极限**) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arccot\ x^2}{\sqrt{x}}$$

解答：注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}arccot\ x^2=\frac{\pi}{2}$，是一个有界量。而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$，是一个无穷大量。由于有界量除以无穷大量等于 0，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arccot\ x^2}{\sqrt{x}}=0$$

6. (**极限**) 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{\cos x-1}$$

解答：本题可以使用等价无穷小的方式来解决。我们知道，当 $x\to0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim\frac{1}{4}x^2,\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$。所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{1}{2}$$

7. (**不定积分**) 求不定积分

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

解答：由于

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\cos x=\frac{\sin x}{\tan x}$$

代入得到

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin x+\frac{\sin x}{\tan x}}dx=\int\frac{\tan x}{\tan x+1}dx$$

记 $t=\tan x$，那么 $x=\arctan x$，代入即有

$$\int\frac{\tan x}{\tan x+1}dx=\int\frac{t}{t+1}d(\arctan t)=\int\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}dt$$

利用待定系数法可以得到

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

代入即有

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}dt &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan x - \ln(|t+1|)\right) + C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\tan^2 x + 1\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(|\tan x + 1|) + C\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln\left(|\sin x + \cos x|\right) + C\end{aligned}$$

8. (**极限**) 当 $x \leq 0$ 时，等式

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

中的 $\theta(x)$ 满足 $1/4 \leq \theta(x) \leq 1/2$，并且

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x\to\infty}\theta(x) = \frac{1}{2}$$

解答：首先对这个式子进行分子有理化：

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

进而推出

$$2\sqrt{x+\theta(x)} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

两边平方去根号：

$$4(x+\theta(x)) = \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2 = 2x+1+2\sqrt{x(x+1)}$$

反解出 $\theta(x)$ 的表达式为

$$\theta(x) = \frac{1}{4}\left(-2x+1+2\sqrt{x(x+1)}\right) = \frac{1}{4}\left(1+2\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)\right)$$

下面我们来考察 $\sqrt{x(x+1)}-x$ 的取值范围，同样，作分子有理化：

$$\sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

这是一个单调递增函数，在 $x=0$ 的时候取到最小值 0，x 趋向于 ∞ 的时候取到最大值 $1/2$。由此即证

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$$

以及所要求的两个极限式。

2 数理逻辑

1. (**集合概念**) 命题“上海人很精明”和“他是上海人”中的概念“上海人”(　　)。
   A. 都是集合概念　　B. 前者是集合概念，后者不是集合概念
   C. 前者不是集合概念，后者是集合概念　　D. 都不是集合概念

   解答：B。集合指的是有一系列确定的对象组成的全体，在数学中，我们把具有相同属性的事物的全体称为集合。“上海人很精明”中的“上海人”指的是住在上海的人的全体，因此它是一个集合概念。而“他是上海人”中的“上海人”指的是一个具体的个体，这个“上海人”是对“他”的一个描述，可以认为这是主语的一个性质，因此它不是一个集合概念。

2. (**有效推理**) 写出下面这个推理的形式，分析形式是否有效，结论是否正确，并阐述理由。
   如果两个概念是矛盾概念，且其中一个是负概念，那么另一个是正概念。已知 a,b 是矛盾概念，且 a 是正概念，所以，b 是负概念。

   解答：我们记 p 表示 a,b 两个概念是矛盾概念，q 表示 a 是正概念，r 表示 b 是正概念。那么原推理形式可以写作

   $$(p \wedge \neg q) \to r, (p \wedge \neg r) \to q \vdash (p \wedge q) \to \neg r$$

   为了判断这个推理形式是否有效，我们可以考虑当结果为假的情况，即 $(p \wedge q) \to \neg r$ 为假。由于蕴含式的真值表中只有当前项为真，后项为假时，整个蕴含式才为假，所以我们可以得到 $p \wedge q$ 为真，$\neg r$ 为假。所以 p, q, r 为真。此时 $(p \wedge \neg q) \to r, (p \wedge \neg r) \to q$ 均为真。也就是说，存在一个指派 $< 1, 1, 1 >$ 使得条件为真但结论为假。所以原推理形式无效，结论是错误的。

3. (**形式推理**) 请用形式证明方法证明下列推理有效，并写出推导过程。

   $$p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p \vdash \neg q \to u$$

   证明：

   (1) $\neg p, p, \neg q \vdash p$　　$(\in)$
   (2) $\neg p, p, \neg q \vdash \neg p$　　$(\in)$
   (3) $\neg p, p \vdash q$　　$(\neg -)(1)(2)$
   (4) $\neg p, q \vdash q$　　$(\in)$
   (5) $\neg p, p \vee q \vdash q$　　$(\vee -)(3)(4)$
   (6) $p, p \to \neg p \vdash p$　　$(\in)$
   (7) $p, p \to \neg p \vdash p \to \neg p$　　$(\in)$
   (8) $p, p \to \neg p \vdash \neg p$　　$(\to -)(6)(7)$
   (9) $p \to \neg p \vdash \neg p$　　$(\neg +)(6)(8)$
   (10) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash p$　　$(\in)$
   (11) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash p \to r$　　$(\in)$
   (12) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash r$　　$(\to -)(10)(11)$
   (13) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash r \to s$　　$(\in)$
   (14) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash s$　　$(\to -)(12)(13)$
   (15) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash s \to \neg p$　　$(\in)$

(16) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, p, \neg u \vdash \neg p$ $(\to -)(14)(15)$

(17) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg u \vdash p \to \neg p$ $(\to +)(16)$

(18) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg u \vdash \neg p$ $(Tr)(9)(17)$

(19) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg u \vdash p \vee q$ $(\in)$

(20) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg u \vdash q$ $(Tr)(5)(18)(19)$

(21) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p \vdash \neg u \to q$ $(\to +)(20)$

(22) $\neg u \to q \vdash \neg q \to u$ (已证)

(23) $p \vee q, p \to r, r \to s, s \to \neg p \vdash \neg q \to u$ $(Tr)(21)(22)$

4. (**形式推理**) 判断下面的形式推理是否有效。如果有效，请写出推导过程。如果无效，请说明理由。

$$\neg(p \to q) \vee (\neg r \vee s), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash r \to s$$

解答：这个形式推理有效，证明如下：

(1) $\neg r \vee s \vdash r \to s$ (已证)

(2) $\neg r \vee s, \neg q \to s, p \to s \vdash r \to s$ $(+)(1)$

(3) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash \neg(p \to q)$ $(\in)$

(4) $\neg(p \to q) \vdash p$ (已证)

(5) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash p$ $(Tr)(3)(4)$

(6) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash p \to \neg s$ $(\in)$

(7) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash \neg s$ $(\to -)(5)(6)$

(8) $\neg(p \to q) \vdash \neg q$ (已证)

(9) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash \neg q$ $(Tr)(3)(8)$

(10) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash \neg q \to s$ $(\in)$

(11) $\neg(r \to s), \neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash s$ $(\to -)(9)(10)$

(12) $\neg(p \to q), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash r \to s$ $(\neg -)(7)(11)$

(13) $\neg(p \to q) \vee (\neg r \vee s), \neg q \to s, p \to \neg s \vdash r \to s$ $(\vee -)(2)(12)$

5. (**等值演算**) 证明：公式 $(p \wedge q) \to r$ 与 $(p \wedge \neg r) \to \neg q$ 等值。

证明：作如下的等值演算：

$(p \wedge q) \to r$

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ (蕴含等值式)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \vee \neg q$ (交换律, 结合律)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg\neg) \vee \neg q$ (双重否定律)

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \to \neg q$ (蕴含等值式)

即证公式 $(p \wedge q) \to r$ 与 $(p \wedge \neg r) \to \neg q$ 等值。

6. (**有效推理**) 写出下面这三句话的推理形式，指出其是否有效并简要说明理由。

(a) 如果甲队技术好并且配合得当，那么就能战胜乙队。甲队技术好但未能战胜乙队，所以甲队配合不当。

(b) 如果老王不出席，那么老李就出席；如果老张不出席，那么老白就出席；老王出席或老张出席，所以老李不出席或老白不出席。

(c) 如果我努力学习逻辑，只要期末考试不超纲，我就能取得满意成绩。因此等于说，如果我努力学习逻辑并且期末考试不超纲，那么我就能取得满意成绩。

解答：

(a) 我们记 p 表示甲队技术好，q 表示甲队配合得当，r 表示甲队战胜乙队。那么这句话的推理形式就可以写作

$$(p \wedge q) \to r \vdash (p \wedge \neg r) \to \neg q$$

考虑当结果为假的情况，即 $(p \wedge \neg r) \to \neg q$ 为假。由于蕴含式的真值表中只有当前项为真，后项为假时，整个蕴含式才为假，所以我们可以得到 $p \wedge \neg r$ 为真，$\neg q$ 为假，即 p,q 为真，r 为假。此时条件 $(p \wedge q) \to r$ 为假，因此当结论为假时条件也为假。原推理形式有效。

(b) 我们记 p,q,r,s 分别表示老王、老李、老张、老白出席。那么这句话的推理形式就可以写作

$$\neg p \to q, \neg r \to s, p \vee r \vdash \neg q \vee \neg s$$

同样，我们考虑结论为假的情形。要使 $\neg q \vee \neg s$ 为假，那么 $\neg q$ 和 $\neg s$ 均为假，即 q 和 s 均为真。我们希望此时条件是真的，那么就有 $\neg p$ 和 $\neg r$ 均为真，p 和 r 均为假。但是此时 $p \vee r$ 为假，所以当结论为假时条件也为假。原推理形式有效。

(c) 我们记 p 表示我努力学习逻辑，q 表示期末考试不超纲，r 表示我取得满意的成绩，那么这句话的推理形式就可以写作

$$p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$$

我们写出它的证明序列：

(1) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash p \wedge q$ $(\in)$

(2) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash p$ $(\wedge -)(1)$

(3) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash q$ $(\wedge -)(1)$

(4) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash p \to (q \to r)$ $(\in)$

(5) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash q \to r$ $(\to -)(2)(4)$

(6) $p \to (q \to r), p \wedge q \vdash r$ $(\to -)(3)(5)$

(7) $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$ $(\to +)(6)$

因此原推理形式有效。