Динамика систем точек. Центр масс. Замкнутые системы тел. Свойства их центра масс. Система центра масс. Закон сохранения импульса.

$$\vec F_{\Sigma k} = m_k \vec a_k = m_k \frac{d\vec v_k}{dt} = \frac{d\vec p_k}{dt} = m_k \frac{d^2\vec r_k}{dt^2} = \vec F_{kв} + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{N} \vec F_{i\to k} \quad (1)$$

$k = 1 \div N$, $m_k = const$

Пусть имеется система точек, движущаяся в соотв. с (1). Пусть нас не интересуют детали внутреннего устройства системы, а преследуется цель описания динамики системы как целого. Тогда, сложив (1), получим

$$\vec F_\Sigma = m_\Sigma \vec a_{цм} = m_\Sigma \frac{d\vec v_{цм}}{dt} = \frac{d\vec P_\Sigma}{dt} = m_\Sigma \frac{d^2 \vec r_{цм}}{dt^2} = \vec F_{\Sigma,в}, \quad (2)$$

где $m_\Sigma = \sum_k m_k$, $\vec P_\Sigma = \sum_k \vec p_k$, $\vec F_{\Sigma,в} = \sum_k \vec F_{k,в}$, $\vec r_{цм} = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_k m_k \vec r_k$ (3)

$\vec v_{цм} = \vec r_{цм}'$, $\vec a_{цм} = \vec v_{цм}'$

Пример преобразования компонент

$$\sum_k \vec F_{\Sigma k} = \sum_k \vec F_{kв} + \sum_k \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{N} \vec F_{i\to k} = \sum_k \vec F_{kв} + \sum \left(\cancelto{0}{\vec F_{i\to k} + \vec F_{k\to i}}\right) = \vec F_{\Sigma,в}$$

$$\sum_k m_k \frac{d^2\vec r_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_k m_k \vec r_k \underset{(3)}{=} \frac{d^2}{dt^2} m_\Sigma \vec r_{цм} = m_\Sigma \frac{d^2\vec r_{цм}}{dt^2} = m_\Sigma \vec a_{цм}$$

и т.д.

(2) описывает динамику мат. точки — центра масс, в которой собрана вся масса, импульс системы и внешняя сила. Мы этим приемом пользовались еще в школе, прикладывая в одну точку системы (макроскопического тела) все распределенные силы (трение, тяготение и т.д.). Сейчас мы доказали, что это можно делать и о какой точке идет речь.

В случае макроскопического тела с непрерывно распределенной массой материальные точки — элементы объема dV тела с массами $dm = \rho(\vec r)dV$ (например), поэтому тогда коор. центра масс опр-ся так

$$\vec r_{цм} = \frac{1}{m_\Sigma}\int_V \vec r\rho(\vec r)dV, \quad m_\Sigma = \int_V \rho(\vec r)dV \quad (4)$$

Поскольку для описания динамики центра масс исп. (2), движение системы (макротела) сводится к описанию движения относительно центра масс. Поэтому $\exists$ система центра масс — СК, нач. которой — центр масс тела (системы). Также можно показать, что $\forall$ системы тел её цм определяется через цм элементов системы через последнюю из формул (3).

Опр. Если $\vec F_{\Sigma,в} = \sum_k \vec F_{k,в} = 0$, то система тел наз. замкнутой. Её следует отличать от изолированной системы (частный случай замкнутой), для которой $\vec F_{k,в} = 0 \ \forall k$.

Замкнутые системы тел обладают рядом замечательных свойств. Так, из (2) следует, что

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_{\Sigma,в} = 0 \Rightarrow m_\Sigma \frac{d\vec{v}_{цм}}{dt} = \frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = 0 \qquad (5)$$

∴ $\vec{v}_{цм} = const$ ($m_\Sigma \neq 0$) – центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно. (6)

Если ∃ момент t_0, когда все тела системы замкнутой покоятся, то и далее $\vec{v}_{цм} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{цм} = const$ (7)

У такой системы центр масс неподвижен (сохраняется).

Условие (6) означает, что для замкнутых систем тел система центра масс инерциальна. Из (5) также $\Rightarrow$

$\vec{P}_\Sigma = const$ – в замкнутой системе тел ($\vec{F}_{\Sigma,в} = 0$) полный импульс постоянен. (8)

Это утверждение наз. законом сохранения импульса. Наконец, в силу векторного характера (2), (5) выполняются ∀ направлении. Если же они справедливы лишь для отдельных направлений (а для остальных – нет), то следствия (6)÷(8) будут справедливы для этих отдельных направлений.

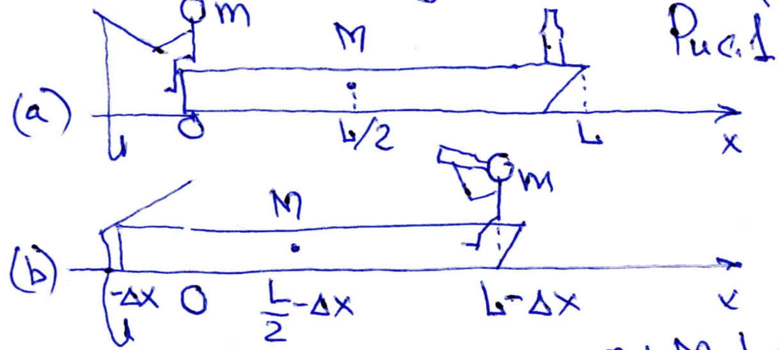


Рис.1.

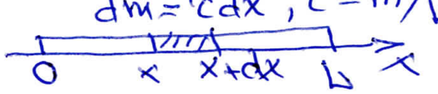
Пример 1. Если пренебречь трением лодки о воду, то по x система замкнута. Если в случае (a) человек и лодка покоятся, то положение цм $x_{цм} = const$

$$(9) \qquad x_{цм,a} = \frac{m\cdot 0 + M\cdot L/2}{m+M} = \frac{m(L-\Delta x) + M\left(\frac{L}{2} - \Delta x\right)}{m+M} = x_{цм,b}$$

$\Downarrow$
Δx

Пример 2. Центр масс тонкого однородного стержня

$dm = \tau dx$, $\tau = m/L$



$$(10) \qquad x_{цм} = \frac{1}{m}\int_0^L x \underbrace{\tau dx}_{dm} = \frac{1}{\cancel{\tau} L}\cdot \cancel{\tau}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

– не зависит от краёв (посередине стержня).

Наличие сохраняющихся величин значительно упрощает решение задач, т.к. позволяет уравнять 2 выражения (значения сохраняющейся величины) ∀ состояний системы, независимо от характера перехода между ними (переход может быть очень сложным). З-ны сохр. могут приводить к равенствам, более простым, чем 2й з-н, и часто алгебраическим, даже для сил (см. (9)).

З-ны сохранения – важный инструмент решения физических задач. Надо только помнить, что они отражают разные свойства тел или систем (см. (6)÷(8), или далее).