Решение уравнения движения вида

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0\cos(\delta t) \qquad (1)$$

$$x(t) = x_0(t) + x_в(t) + x_ч(t) \qquad (2)$$

1) Решение $x_0(t)$ однородного уравнения $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$ (3) ищем вначале в виде $x(t) = e^{\gamma t}$ (4), где γ подлежит определению. (4) → (3) и, принимая во внимание тождественный х-р полученного уравнения ($\forall t$) и то, что $e^{\gamma t} \neq 0 \ \forall \gamma$, получим $\gamma^2 + 2\beta\gamma + \omega_0^2 = 0$ (5)

(5) — характеристическое уравнение для (3). Варианты поведения решения (3):

а) $\gamma_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ (6) — действительные и различные ($\gamma_{1,2} < 0$)

$\beta > \omega_0 > 0$, эта ситуация означает высокое сопротивление при движении тела, протекании тока и т.п.

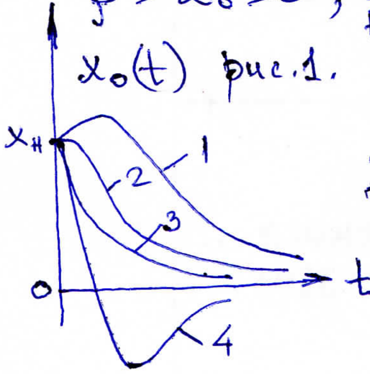

рис. 1.

Решение в этом случае имеет вид $x_0(t) = \sum_{k=1}^{2} C_k e^{\gamma_k t}$ (7)

Экспоненты затухают, коэф-ты C_k определяются из начальных условий $x_0(0) = x_н$, $x_0'(0) = v_{нх}$. (8)

Варианты поведения $x_0(t)$ в зависимости от знака начальной скорости $v_{нх}$ показаны на рис. 1. Колебания не развиваются, т.к. вложенную первоначально в систему энергию (деформацию пружины, дополнительный толчок груза, заряд конденсатора и т.д.) быстро "съедает" сила сопротивления.

б) $\gamma_1 = \gamma_2$ ($\beta = \omega_0$) $= -\beta$, решение имеет вид $x_0(t) = (At + B)e^{-\beta t}$ (9). Постоянные A и B определяются из нач. условий (8). Вид функции (9) построить самостоятельно.

в) $\gamma_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-\underbrace{(\omega_0^2 - \beta^2)}_{\omega^2}} = -\beta \pm i\omega$ — комплексные (10)

Эта ситуация означает $\beta < \omega_0$, т.е. невысокое сопротивление. Именно в этом случае в системе развиваются колебания. Решение (7) в этом случае имеет вид

(11) $x_0(t) \overset{(7)}{\underset{(10)}{=}} e^{-\beta t}\left(C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$ и должно быть действительным. Учитывая комплексную сопряженность экспонент в (11), для действительности необходима комплексная сопряженность $C_{1,2}$ ⇒

$C_2 = C_1^* = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2}$ (12) Тогда (11) можно записать в одной из форм

$$x_0(t) = e^{-\beta t}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (13)$$

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -b/a$.

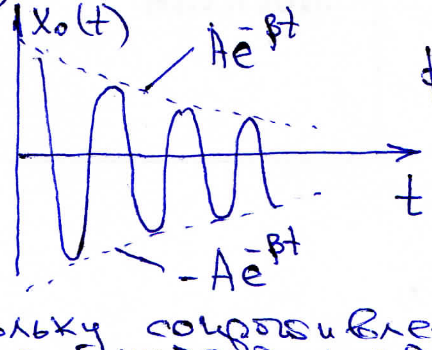

рис. 2

Вид решения показан на рис. 2. Колебания происходят с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (14) и будут затухающими при наличии сопротивления $\beta \neq 0$. При $\beta = 0$ $\omega = \omega_0$, колебания не затухают. Но поскольку сопротивление неуничтожимо (кроме явлений сверхтекучести и сверхпроводимости) $x_0(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ (15) практически всегда.

(2.) Вынужденное решение $x_в(t)$ получается, если систему из состояния покоя начинает раскачивать гармоническая сила $f_0\cos(\delta t)$. Когда это происходит, создаются колебания с частотой δ гармонической силы, незатухающие, т.е. $x_в(t)=A\cos(\delta t+\psi)$

Решение (16) полностью определяется постоянными (16)
A и ψ. Чтобы их найти, надо (16) → (1) и потребовать тождественного равенства нулю линейной комбинации $\cos(\delta t)$ и $\sin(\delta t)$, т.е. обнулить коэф-ты при этих функциях. Существует более изящный способ решения. Введем функцию $y(t)$, удовлетворяющую ур-ю
$$y''+2\beta y'+\omega_0^2 y = f_0\sin(\delta t) \qquad (17)$$
Пусть $z(t)=x(t)+iy(t)$, $x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)$ (18)

Тогда линейная комбинация

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(17)\end{array}\right|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \cdot i\end{array} + \Longrightarrow z''+2\beta z'+\omega_0^2 z = f_0(\cos(\delta t)+i\sin(\delta t)) \equiv f_0 e^{i\delta t} \qquad (19)$$

Решение будем искать в виде (нам достаточно частного решения неоднородного ур-я (1)) $z(t)=Ae^{i(\delta t+\psi)}$ (20) с действительной частью (16). (20) → (19):
$$(-\delta^2+2i\beta\delta+\omega_0^2)Ae^{i(\cancel{\delta t}+\psi)} \equiv f_0\cancel{e^{i\delta t}} \qquad (21)$$
$$\omega_0^2-\delta^2+i2\beta\delta = \frac{f_0}{A}\underbrace{(\cos\psi - i\sin\psi)}_{e^{-i\psi}} \Longrightarrow \begin{cases}\omega_0^2-\delta^2=\frac{f_0}{A}\cos\psi\\ 2\beta\delta = -\frac{f_0}{A}\sin\psi\end{cases} \qquad (22)$$
Складывая квадраты ур-й (22), исключаем ψ и получаем ур-е для A: $(\omega_0^2-\delta^2)^2+4\beta^2\delta^2=\frac{f_0^2}{A^2}$

откуда находим
$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\delta^2)^2+4\beta^2\delta^2}} \qquad (23) \Longrightarrow (16)$$
Поделив друг на друга ур-я (22), находим
$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\beta\delta}{\delta^2-\omega_0^2} \qquad (24)$$
Заметим, что максимум $A(\delta)$ из (23) получается при минимуме подкоренного выражения в знаменателе, а именно при $\delta_p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ (25). Тогда
$$A_{max}=A(\delta_p)=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \overset{(14)}{=} \frac{f_0}{2\beta\omega} \xrightarrow[\beta\to 0]{} \infty \qquad (26)$$
Это — резонанс (достижение A max при частоте (25)). Заметим, что резонанс наблюдается, если $\omega_0^2>2\beta^2$, а колебания (13) — когда $\omega_0^2>\beta^2$. ⇒ Не в ∀ колебательной системе резонанс можно наблюдать.

(3.) Интерференционная часть $x_и(t)$ решения (1) — самая сложная из всех. Она определяется взаимодействием (интерференцией) решений (1) и (2). Но т.к. $x_0(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, эта компонента ($x_и(t)$) тоже $\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, поэтому для $t \gg \Delta t$ — характерное время решения (1) (например $\Delta t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период затух. колебаний) из всех частей (2) остается только вынужденное колебание (16), (23), (24).