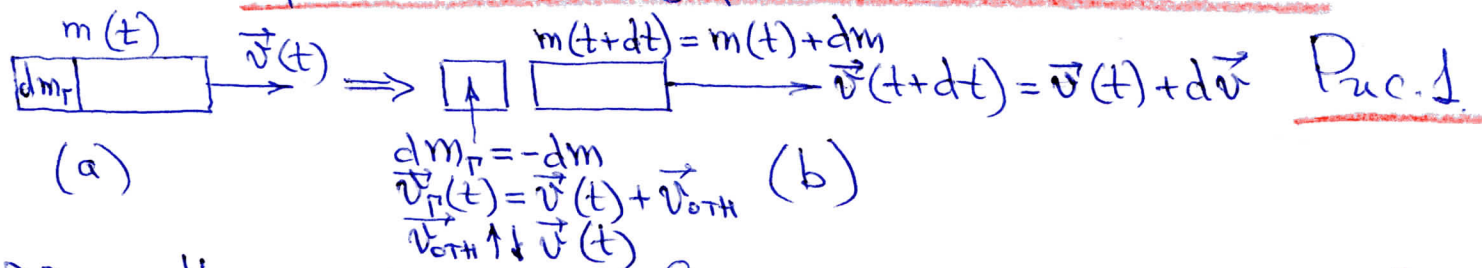


Движение тел и массы. Реактивное движение.

Уравнения Мещерского и Циолковского



2й з-н Н. имеет еще одно важное приложение — оно позволяет составлять соотношения закона для импульса

$$\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = \vec{F}_\Sigma \Rightarrow d\vec{P}_\Sigma = \vec{P}_\Sigma(t+dt) - \vec{P}_\Sigma(t) = \vec{F}_\Sigma(t)dt \quad (1)$$

Докажем, как подобные соотношения позволяют описать движение тел и массы, например ракеты. Пусть масса и скорость ракеты  $m(t)$  и  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{v}_{отн}$  — постоянная скорость истечения порохов из сопла КС (рис. 1). Тогда за время  $dt$  уменьшение массы ракеты  $dm = -dm_r$ ,  $dm_r$  — масса сгоревшего топлива ( $dm < 0$ ). Тогда для импульса системы ракета + продукты сгорания имеем:

$$\vec{P}_\Sigma(t) = m(t)\vec{v}(t)$$

$$\vec{P}_\Sigma(t+dt) = (m(t) + dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}) + dm_r \vec{v}_r(t), \quad (2)$$

$\vec{v}_r(t) = \vec{v}(t) + \vec{v}_{отн}$ ,  $\vec{v}_{отн} \uparrow \downarrow \vec{v}(t)$ ,  $dm_r = -dm$

Подставив (2) в (1), получим

$$\underbrace{(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm(\vec{v}+\vec{v}_{отн})}_{\vec{P}_\Sigma(t+dt)} - \underbrace{m\vec{v}}_{\vec{P}_\Sigma(t)} = \vec{F}_\Sigma dt$$

$\Downarrow$

$$m d\vec{v} = \vec{v}_{отн} dm + \vec{F}_\Sigma dt \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v}_{отн} \frac{dm}{dt}}_{\vec{F}_p} + \vec{F}_\Sigma \quad (3)$$

(3) — у-е Мещерского,  $\vec{F}_p$  — реактивная,  $\vec{F}_\Sigma$  — внешняя сила.  $d\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{v}_{отн}$ . Пусть внешних сил нет (старая ракета с платформой в невесомости). Тогда

$$m d\vec{v} = -\vec{v}_{отн} dm \Rightarrow v = -v_{отн} \ln m + const \quad (4)$$

Из к-з. условий  $v(0) = 0$ ,  $m(0) = m_0$  найдем  $const = v_{отн} \ln m_0$

$$\Rightarrow v = v_{отн} \ln \frac{m_0}{m} \quad (5) \text{ или } \frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v}{v_{отн}}\right) \quad (6)$$

(5), (6) — у-е Циолковского. Еще без подеркты, что на Земле (где  $\vec{F}_\Sigma \neq 0$ ) эти у-е не работают.