Кинематика. Определения и связи величин.

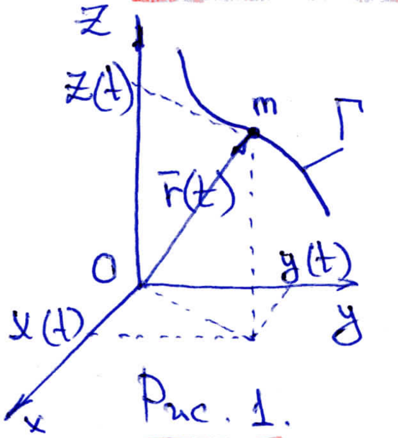


Рис. 1.

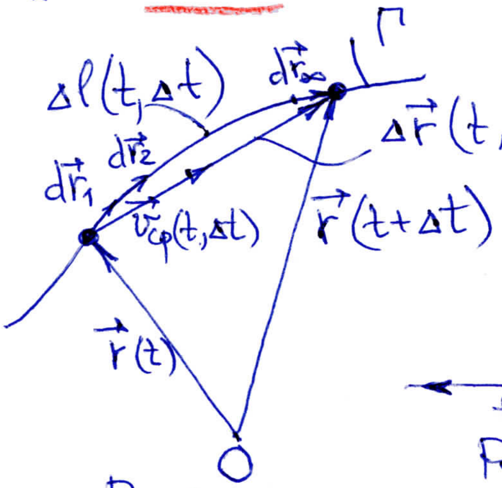
Опр. Материальная точка – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь

$$\vec r(t) = \vec i x(t) + \vec j y(t) + \vec k z(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

– закон движения, Γ – траектория (1)

суперпозиция движений

$\vec i = \{1, 0, 0\}$
$\vec j = \{0, 1, 0\}$
$\vec k = \{0, 0, 1\}$
– постоянный (декартов) базис. ∃ и непостоянные базисы



$$\Delta \vec r(t, \Delta t) = \vec r(t+\Delta t) - \vec r(t) \quad (2)$$

Рис. 2.

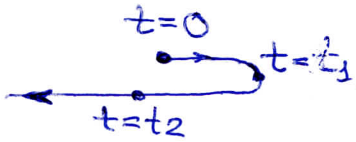


Рис. 3

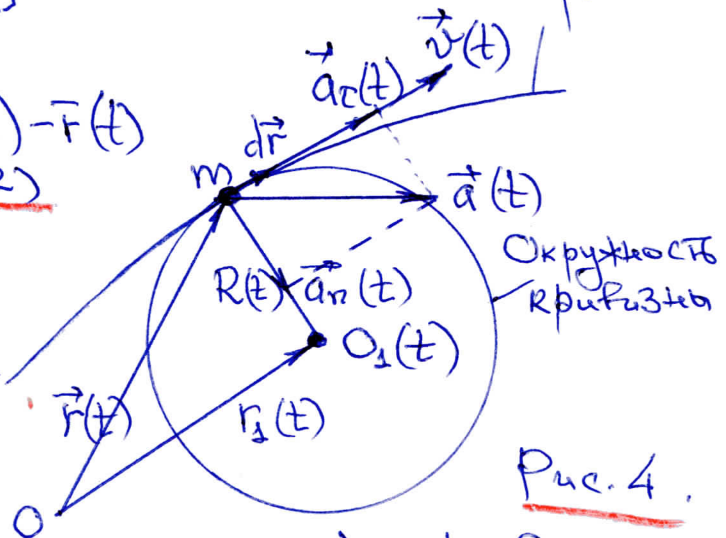


Рис. 4.

Опр. $\Delta\vec r(t, \Delta t)$ – перемещение точки за $[t, t+\Delta t]$, Δt – время перемещения, $\Delta\vec r(t,\Delta t)/\Delta t = \vec v_{ср}(t, \Delta t)$ (3*) – средняя скорость, $\Delta l(t, \Delta t)$ – пройденный путь (рис. 2)

Оперируя средними, не всегда можно учесть все детали движения (см. рис. 3), если шаг по времени Δt велик. Поэтому надо иметь величины, соответствующие $\Delta t \to 0$.

Опр. $$\lim_{\Delta t\to 0} \vec v_{ср}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec r(t)}{dt} = \vec v(t) \quad – (3)$$

– мгновенная скорость

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\vec r(t, \Delta t) = \vec r(t+dt) - \vec r(t) = d\vec r(t) \underset{(3)}{=} \vec v(t)\, dt \quad – (4)$$

– элементарное перемещение

Тогда $$\vec v(t) \underset{(3)}{\overset{(1)}{=}} \vec i \underbrace{x'(t)}_{v_x(t)} + \vec j \underbrace{y'(t)}_{v_y(t)} + \vec k \underbrace{z'(t)}_{v_z(t)} \quad (5) \text{ – скорость}$$

$$dl = |d\vec r| \underset{(4)}{=} v(t)\, dt = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}\, dt \quad (6) –$$

– элементарный путь

$$\Delta\vec r(t, \Delta t) = \vec r(t+\Delta t) - \vec r(t) = \text{"}\sum\text{"} d\vec r = \int_t^{t+\Delta t} \vec v(\tau)\, d\tau \quad (7)$$

см. рис. 2

$$\Delta l(t, \Delta t) = \text{"}\sum\text{"} dl = \int_t^{t+\Delta t} v(\tau)\, d\tau \quad (8)$$

Поскольку производная связана с касательной, вектор $\vec v(t)$ является касательным к траектории в точке $\vec r(t)$. Поэтому

$\vec\tau(t) \underset{(5)}{=} \dfrac{\vec v(t)}{v(t)}$ – единичный вектор, касательный к траектории, ориентирующий скорость. Это – вектор направления движения. (9)

Аналогично $\frac{\Delta l(t,\Delta t)}{\Delta t} = v_{сп}(t,\Delta t)$ (10) – средняя путевая скорость

$$\frac{\Delta\vec v(t,\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\vec v(t+\Delta t)-\vec v(t)}{\Delta t} = \vec a_{ср}(t,\Delta t)$$ (11) – среднее ускор.

$$\lim_{\Delta t\to 0} v_{сп}(t,\Delta t) \overset{(10)}{\underset{(6)}{=}} \frac{dl}{dt} = v_п(t) = v(t)$$ (12) – мгн. пут. скор.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\vec a_{ср}(t,\Delta t) \underset{(11)}{=} \frac{d\vec v(t)}{dt} \underset{(3)}{=} \frac{d^2\vec r(t)}{dt^2} = \vec i x''(t)+\vec j y''(t)+\vec k z''(t) = \vec i v_x'(t)+\vec j v_y'(t)+\vec k v_z'(t) = \vec a(t)$$ (13)

– мгновенное ускорение.

Векторная и путевая скорость по-разному характеризуют движение (пример с петлей). $\vec v(t)$ имеет специальную ориентацию (касательную), $\vec a(t)$ ориентировано произвольно (по силе, см. далее). Поэтому $\vec a(t)$ раскладывают на составляющие, $\parallel$ и $\perp$ $\vec v(t)$ (см. рис. 4)

$$\vec a(t) = \vec a_\tau(t)+\vec a_n(t), \quad \vec a_\tau \parallel \vec v \text{ и } \vec a_n\perp\vec v$$ (14)

$\vec a_\tau$ – касательное (тангенциальное), $\vec a_n$ – нормальное ускорение.

Из рис. 4 видно:

(15) $$\vec a_\tau(t) = Пр_{\vec v}\vec a\ \vec\tau(t) = \frac{\vec a\cdot\vec v}{v}\frac{\vec v}{v} = \frac{\vec a\cdot \vec v}{v^2}\vec v = \frac{a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z}{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\vec v$$

$\vec a\cdot\vec v>0$ – ускоренное

После нахождения $\vec a_\tau$, $\vec a_n$ находим из (14). Компоненты ускорения можно найти и исходя из той роли, которую они играют при движении. При наличии только $\vec a_\tau$ тело движется по прямой, скорость (за исключением точек разворота) меняется только по величине. Поэтому

$$a_\tau(t) = \left|\frac{dv(t)}{dt}\right|$$ (16)

Заметим, что $\vec a_\tau \pm a_\tau\vec\tau$, поскольку $\vec\tau$ – направляющий только для скорости.

При наличии только $\vec a_n$ ($\vec a_\tau=0$) точка находится в состоянии мгновенного вращения по окружности (рис. 4) радиуса $R(t)$ с центром в $O_1(t)$. Они называются мгновенными радиусом, центром и окружностью кривизны траектории в точке $\vec r(t)$. Элементарный путь dl проходится по этой окружности с постоянной скоростью (по величине) $v(t)$. Присутствующее при этом только нормальное ускорение является центростремительным (см. далее кинематику вращения), поэтому

$$a_n(t) = a_{цс}(t) = v^2(t)/R(t)$$ (17)

Заметим, что (16), (17) определяют только модули компонент ускорения, связанные теоремой Пифагора

$$a^2(t) = a_n^2(t)+a_\tau^2(t)$$ (18)

Поэтому, после расчета a_n и v, (17) используется для нахождения радиуса кривизны $R(t)$. Положение $O_1(t)$ можно определить по рис. 4:

$$\vec r_1(t) = \vec r(t) + R(t)\,\vec a_n(t)/a_n(t)$$ (19)

Траектория локально совпадает с окружностью кривизны.

Формулы (3) и (7) взаимно обратны. Аналогично можно обратить и ф-лу $\vec a(t) = \frac{d\vec v(t)}{dt}$ (13)

$$\vec v(t+\Delta t) - \vec v(t) = \int_t^{t+\Delta t} \vec a(\tau)\,d\tau \quad (20)$$

Обычно обратные интегральные соотношения (7), (8) и (20) записываются в виде:

$$\vec r(t) = \vec r(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec v(\tau)\,d\tau, \quad l(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\vec v(t) = \vec v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec a(\tau)\,d\tau, \quad (21)$$

привязываясь к некоторому моменту t_0, для которого известны положение и скорость и от которого отмеряется пройденный путь ($l(t_0) := 0$). С помощью этих равенств определяют простейшие движения:

$\vec a(t) = 0$, $\vec v(t) = \vec v_0 = const$, $\vec r(t) = \vec r(t_0) + \vec v_0(t-t_0)$ — равномерное (и прямолинейное) движение, $l(t) = v_0(t-t_0)$ (22)

$\vec a(t) = const = \vec a_0 \neq 0$, $\vec v(t) = \vec v_0 + \vec a_0(t-t_0)$,

$\vec r(t) = \vec r(t_0) + \vec v(t_0)(t-t_0) + \frac{\vec a_0}{2}(t-t_0)^2$ —

— равнопеременное движение (23)

Законы таких движений — параметрические функции (не сложнее парабол), которые становятся определенными, если их параметры t_0, $\vec r(t_0)$, $\vec v_0 = \vec v(t_0)$ и $\vec a_0$ заданы.

В кинематике закон движения считается заданным, поэтому задача сводится к определению перечисленных характеристик движения и анализа их свойств.

Пример: $\vec r(t) = (2-5t^3)\vec i + (8t^2+t)\vec j - 3\vec k$

Очевидно, что движение происходит в плоскости $z=-3$.

$$\vec v(t) = -15t^2\vec i + (16t+1)\vec j + 0\cdot\vec k = \vec r\,'(t)$$

$$\vec a(t) = -30t\vec i + \underbrace{16\vec j}_{const} + 0\cdot\vec k = \vec v\,'(t) \neq const$$

Это движение не является простейшим, но равнопеременное по оси Oy.

$$\vec a_\tau(t) = \frac{\vec a\cdot\vec v}{v^2}\vec v = \frac{450t^3 + 16(16t+1)}{225t^4 + (16t+1)^2}\vec v(t) \quad \text{и т.д.}$$

При $t > 0$ $\vec a\cdot\vec v > 0$, поэтому это движение ускоренное. Остальные характеристики достаточно громоздко выражаются из приведенных выше соотношений. Пройденный путь нельзя выразить аналитически через элементарные функции.

В заключение заметим, что окружность кривизны $\exists$ только в точках гладкости траектории (т.е. без точек излома).