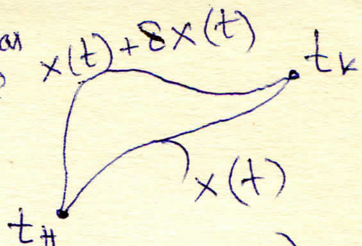
(1) $\mathcal{I} = \int\limits_{t_н}^{t_к} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$ — функционал действия



(2) $\delta\mathcal{I} = \mathcal{I}(x+\delta x) - \mathcal{I}(x) = (\mathcal{I}', \delta x)$

$\mathcal{I}'$ — производная Фреше (градиент функционала)

Вычислим $\mathcal{I}'$, полагая $\delta x(t_н) = \delta x(t_к) = 0$, (*)
т.е. что траектория не варьируется на концах, $\delta\dot{x}(t) = (\delta x)'$. Предполагается, что закон движения $x(t)$ варьируется, т.е. заменяется на $x(t) + \delta x(t)$.

(3) $(\varphi(t), \psi(t)) \overset{\text{опр.}}{=} \int\limits_{t_н}^{t_к} \varphi(t)\psi(t)\,dt$ — скалярное произведение в пространстве функций L_2.

$$\delta\mathcal{I} \underset{(2)}{=} \int\limits_{t_н}^{t_к} \left[L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)\right] dt \underset{\delta x, \delta\dot{x}\text{ — малы}}{=}$$

$$= \int\limits_{t_н}^{t_к} \Big[\cancel{L(x,\dot{x},t)} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \underbrace{O(\delta x^2, \delta\dot{x}^2)}_{\to 0} - \cancel{L(x,\dot{x},t)}\Big] dt$$

$$= \int\limits_{t_н}^{t_к} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\,\delta x(t)}{dt}\right) dt \underset{\substack{2^{й} \int \\ \text{по частям}}}{=} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_н}^{t_к}}_{=0 \text{ в силу } (*)} + \int\limits_{t_н}^{t_к} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{\mathcal{I}'} \delta x\, dt$$

$\therefore$ В точке экстремальности $\mathcal{I}' = 0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ (4) — ур-е Эйлера-Лагранжа для оптимума $\mathcal{I}$.

L — функция Лагранжа.

$L = T - U = \frac{p_x^2}{2m} - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \underset{(4)}{\Longrightarrow} -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \Rightarrow \frac{d}{dt}(\underbrace{m\dot{x}}_{p_x}) = F_x$ — 2й з-н

910902 302

В многомерном случае (4) получаем $\forall$ координатного направления.