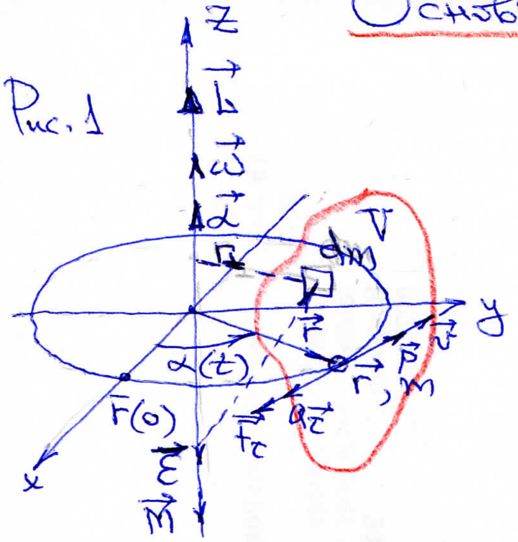
Основное уравнение динамики вращения.



Вращение точки (рис. 1)

$$\vec r\times \Big|\ \vec F = m\vec a = m\frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec p}{dt} = m\frac{d^2\vec r}{dt^2} \quad (1)$$

$$\vec M = J\vec\varepsilon = J\frac{d\vec\omega}{dt} = \frac{d\vec L}{dt} = J\frac{d^2\vec\alpha}{dt^2} \quad (2)$$

$$\vec M = \vec r\times\vec F,\quad \vec L = \vec r\times\vec p,\quad J = mr^2 \quad (3)$$

Преобразования тождественные, напр.

$$\vec r\times\frac{d\vec p}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{[\vec r,\vec p]}_{\vec L} - \Big[\underbrace{\frac{d\vec r}{dt}}_{\vec v\parallel\vec p},\vec p\Big]^0 = \frac{d\vec L}{dt}$$ и т.д.

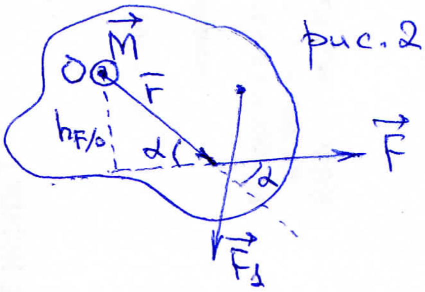
Из идентичности форм (1), (2) следует идентичность ролей х-к и идентичность связей.

Поступ.	$\vec F$	m	$\vec r$	$\vec v$	$\vec a$	$\vec p$
Вращ.	$\vec M$	J	$\vec\alpha$	$\vec\omega$	$\vec\varepsilon$	$\vec L$

$\vec p = m\vec v$ – к-во движ. $\Rightarrow$ $\vec L = J\vec\omega$ – к-во вращ. движ.

$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ – кин. эн. $\Rightarrow$ $T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$ – кин. эн. вращ. движ. (4)

и т.д.



$$M = |\vec r\times\vec F| = rF\sin\alpha = Fr\sin\alpha = Fh_{F/O} \quad (5)$$

рис. 2 $h_{F/O}$ – плечо $\vec F$ отн-но O. У сил $\vec F$ и $\vec F_1$ векторы моментов ориентир. противополож., т.е. их вращ. действие противоположно.

Вращение макроскопического тела (абс. твердого) вокруг неподвижной оси:

В сл. абс. тв. тела (относ. полож. точек тела не меняются), у всех его точек одинаковые $\vec\omega$, $\vec\varepsilon$ и $d\vec\alpha$, все вращательные векторы лежат вдоль оси вращения. Их удобно складывать. Сложив ур-я (2) разных точек $dm = \rho(\vec r)dV$ тела получим

$$\vec M_\Sigma = J_\Sigma\vec\varepsilon = J_\Sigma\frac{d\vec\omega}{dt} = \frac{d\vec L_\Sigma}{dt} = J_\Sigma\frac{d^2\vec\alpha}{dt^2} \quad (6)$$ – ур-е типа (2)

$$\vec M_\Sigma = \int_V \vec r_\perp\times\vec f(\vec r)\,dV,\quad \vec L_\Sigma = \int_V \rho(\vec r)\,\vec r_\perp\times\vec v(\vec r)\,dV \underset{(4.1)}{=} J_\Sigma\vec\omega, \quad (7)$$

$$J_\Sigma = \int_V r_\perp^2\rho(\vec r)\,dV$$ – суммарные х-ки

$\vec f(\vec r)$ – объемная плотность силы. Моменты инерции и импульса тела зависят (как и моменты сил) от выбора оси вращения. Так если ось проходит через центр масс тела, то

(8)

Тв. тело	Ось Z	J
Тонкий однор. стерж. длины l	$\perp$ стержню	$\frac{1}{12}ml^2$ (если через конец, $\frac{ml^2}{3}$)
Цилиндр рад. R	Совп. с осью цил.	$\frac{1}{2}mR^2$
Тонкий диск, R	Совп. с диам. диск.	$\frac{1}{4}mR^2$ (если $Z\perp$ диску, $\frac{mR^2}{2}$)
Шар, радиус R	$\forall$ диаметр	$2/5\ mR^2$

Теорема Штейнера

В общем случае у $\forall$ тела J от разных осей связ. интегрально. Связь для $\parallel$ осей – алгебраическая. Если C – ц.м $\Rightarrow$ $J = J_0 + md^2$ (9) $Г_0\parallel Г$