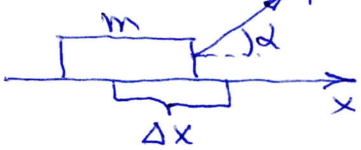
Энергетические соотношения. Работа.

Умножим скалярно на $\vec v$ 2й з-н Н. в форме $m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F$. Заметим, $\vec v\cdot\frac{d\vec v}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + \ldots = \frac{d}{dt}\frac{v_x^2}{2} + \frac{d}{dt}\frac{v_y^2}{2} + \ldots = \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2}$. Поэтому

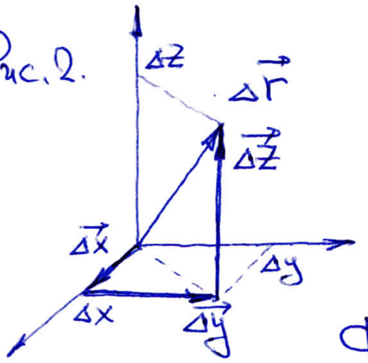
$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \vec F\cdot\vec v \qquad (1)$$

Рис. 1.



Напомним, что при смещении Δx под действием постоянной силы $\vec F$ тела m (см. рис. 1), величина $F\cos\alpha\,\Delta x = F_x\Delta x$ называется работой постоянной силы. Поскольку смещения по координатным направлениям равноправны (см. принцип суперпозиции движений), $\Delta\vec r = \vec i\Delta x + \vec j\Delta y + \vec k\Delta z = \Delta\vec x + \Delta\vec y + \Delta\vec z$ – см. рис. 2, то эта ф-ла для работы симметрично обобщается на произвольные перемещения

Рис. 2.



(2) $\Delta A = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z = \vec F\cdot\Delta\vec r$, $\vec F = const$

Ф-ла (2) выражает ключевые св-ва работы ΔA [Н·м = Дж], которые позволяют её рассчитать и в случае произвольного движения и сил. В самом деле, т.к.

$$\Delta\vec r = \Delta\vec x + \Delta\vec y + \Delta\vec z \Rightarrow \Delta A = \vec F\cdot\Delta\vec r = \vec F\cdot\Delta\vec x + \vec F\cdot\Delta\vec y + \vec F\cdot\Delta\vec z, \qquad (3)$$

т.е. работа на последовательных перемещениях складывается (аддитивность по участкам перемещения).

А т.к.

$$\vec F = \vec F_x + \vec F_y + \vec F_z,\ \vec F_x = \vec i F_x \ldots \Rightarrow \Delta A = \vec F\cdot\Delta\vec r = \vec F_x\cdot\Delta\vec r + \vec F_y\cdot\Delta\vec r + \vec F_z\cdot\Delta\vec r, \qquad (4)$$

т.е. работа различных сил складывается (аддитивность по силам).

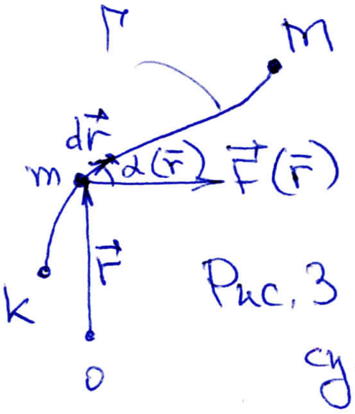


Рис. 3

Пусть теперь тело m перемещается по произвольной траектории Г под действием переменной силы $\vec F(\vec r)$, см. рис. 3. Для малых перемещений $d\vec r$ силу $\vec F$ можно считать постоянной и равной $\vec F(\vec r)$. Поэтому для элементарной работы справедлива (2)

$$\delta A = \vec F(\vec r)\cdot d\vec r \qquad (5)$$

А т.к. работа на участках складывается, суммируя δA по всем участкам, находим

$$\Delta A_\Gamma = \text{"}\sum_{d\vec r_k\in\Gamma}\text{"}\,\delta A_k = \int_\Gamma \vec F(\vec r)\cdot d\vec r \underset{\text{Рис. 3}}{=} \qquad (6)$$

$$= \int_\Gamma F(r)\cos\alpha(r)\,dl,\quad dl = |d\vec r|$$

Крив. ∫ 1го рода.

Крив. ∫ 2го рода

Наконец, если на траектории ввести временную параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, считая, что перемещение $d\vec{r}$ совершается за промежуток времени $[t, t+dt]$, то

$$\delta A \underset{(5)}{=} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)dt = P(t)dt, \quad (7)$$

$$P(t) = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t), \quad (8)$$

то работу можно записать и как

$$\Delta A_{\Gamma} = \int_{t_K}^{t_M} P(t)dt = \int_{t_K}^{t_M} \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)dt \quad (9)$$

$\int$ Римана

Величина $P(t)$ – скорость совершения работы из (8) называется, как известно, мгновенной мощностью $[P] = Дж/сек = Вт$. С учетом (8), ур-е (1) принимает вид (после домножения на dt)

$$d\frac{mv^2}{2} = P(t)dt = \delta A \quad (10)$$

Это равенство можно суммировать как по телам системы, так и по силам (с учетом аддитивности работы).

$$dT_\Sigma = \delta A_\Sigma, \; T_\Sigma = \sum_K T_K, \; T_K = \frac{m_K v_K^2}{2} = \frac{p_K^2}{2m_K} \quad (11)$$

Суммируя 1е из (11) по всем малым участкам dt промежутка времени Δt контроля за системой, получим

$$\Delta T_\Sigma = \Delta A_\Sigma \quad (12)$$

Величины T_K, T_Σ назыв. кинетической энергией тел или их системы. (10)÷(12) отражают различные формы теоремы о кинетической энергии – одного из ключевых энергетических балансов механики:

Изменение кинетической энергии тела или системы равняется работе всех действующих сил.

Поскольку $\vec{v}$ зависит от системы отсчета, то от нее зависит и T. Посмотрим, как. Рассмотрим сначала одно тело массы m. Пусть его скорость в K равна $\vec{v}$, в K' – $\vec{v}'$, $\vec{v}_0$ – скорость K' относ. K. Тогда $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}|\vec{v}'+\vec{v}_0|^2 = \frac{m}{2}(\vec{v}'+\vec{v}_0, \vec{v}'+\vec{v}_0) = \frac{mv'^2}{2} + m(\vec{v}',\vec{v}_0) + \frac{mv_0^2}{2} =$

$$= T' + (\vec{p}', \vec{v}_0) + \frac{mv_0^2}{2}, \quad \vec{p}' = m\vec{v}' \text{ – импульс в } K' \quad (13)$$

Запишем (13) для тел системы и сложим:

$$T_\Sigma = T'_\Sigma + (\vec{P}'_\Sigma, \vec{v}_0) + \frac{M_\Sigma v_0^2}{2} \quad (14) \qquad \text{Но } \vec{P}'_\Sigma = M_\Sigma \vec{v}'_{ц} \quad (15) \Rightarrow$$

$$T_\Sigma = T'_\Sigma + M_\Sigma(\vec{v}'_{ц}, \vec{v}_0) + \frac{M_\Sigma v_0^2}{2} \quad (16)$$

Если K' движется вместе с центром масс системы тел, то $v'_{ц} \Rightarrow$

$$T_\Sigma = T'_{\Sigma, цм} + \frac{M_\Sigma v_0^2}{2} \quad (17) \text{ – т. Кёнига:}$$

Кин. энергия системы тел в $\forall$ СК равна $\sum$ кин. эн. сис. тел в СК ц.м и $M_\Sigma v_0^2/2$, где v_0 – скорость СК отн-но ц.м. системы тел.