Квазиупругие силы

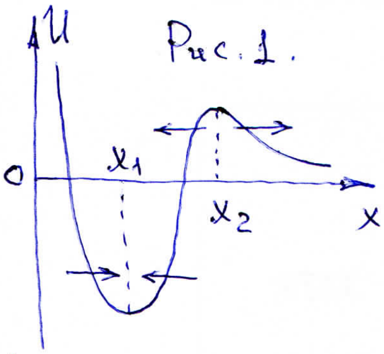

Рис. 1.

Пусть тело m находится и движется в поле потенциальной силы с энергией, показанной на рис. 1.

$$\vec F = -\vec\nabla U = \vec i F_x, \quad F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (1)$$

Эта сила обращается в 0 в точках x_1 и x_2 – положениях равновесия тела.

Но x_1 – устойчивое равновесие, а x_2 – неустойчивое (на рис. показаны направления действия сил в окрестности x_1 и x_2). Тогда в небольшой окрестности x_1:

$$U(x) = U(x_1) + \underbrace{U'(x_1)}_{0}\cdot(x-x_1) + \underbrace{\frac{1}{2}U''(x_1)}_{k/2>0}(x-x_1)^2 + O[(x-x_1)^3]$$

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -k\cdot(x-x_1) + O[(x-x_1)^2] \approx -k(x-x_1) \quad (2)$$

Это – закон Гука для упругой силы. А т.к. силовое поле вида рис. 1 наиболее типично, делаем вывод: при движении тел в потенциальном поле в окрестности точек устойчивого равновесия любая сила является квазиупругой, т.е. подчиняется (2).

О роли постоянных сил при движении вблизи точек равновесия и о решении

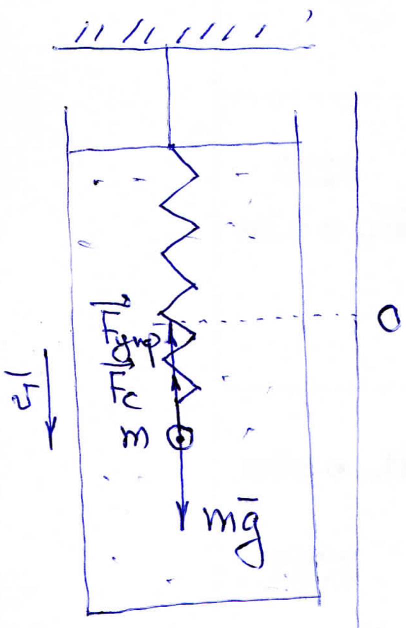

Рис. 2

Пусть пружинный маятник опущен в жидкость. Тогда при небольших скоростях, возникающих при движении в окрестности точки равновесия, на груз m действует линейное динамическое (вязкое) трение $F_c = -r\vec v$, упругая сила* $F_{упр\,x} = -kx$, сила тяготения (силу Архимеда можно отбросить, если размер m мал, но можно и сохранить; далее будет показано, что это не принципиально).

*Сила упругости имеет такой вид, если за начало координат на оси Ox принято такое положение груза, при котором пружина не деформирована.

Тогда 2-й з-н Ньютона в проекции на Ox принимает вид (рис. 2):

$$mx'' = -rx' - kx + mg \quad (3)$$

(к mg может быть добавлена любая постоянная сила). Перепишем (3) в виде

$$x'' + 2\beta x' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\underbrace{\left(x - \overbrace{\frac{mg}{k}}^{x_1}\right)}_{y(t)} = 0, \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (4)$$

У функций x(t) и y(t) одинаковые производные, т.к. они отличаются на постоянные слагаемые. Тогда для y(t) получим ур-е $y'' + 2\beta y' + \omega_0^2 y = 0$ (5) – линейное, однородное, с постоянными коэф.

Если $\gamma_{1,2}$ – корни ур-я $\gamma^2 + 2\beta\gamma + \omega_0^2 = 0$ (6), то решение (5) ищем в виде $y(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$, при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (7), или $y(t) = (At+B)e^{\gamma t}$, при $\gamma_1 = \gamma_2$ (8). C_1, C_2 или A, B находим из начальных условий x_0 и v_{x0}.