А.А. ПУНТУС

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е

У Р А В Н Е Н И Я

(курс лекций)

М О С К В А

2013 год

Аннотация.

Книга содержит учебный материал, излагаемый исключительно в лекциях по данному курсу в соответствии с программой курса обыкновенных дифференциальных уравнений для студентов высших технических учебных заведений, в том числе и обучающихся по специальности прикладной математики. Особенностью данного издания является тот факт, что этот учебник является содержанием только лекционного материала по данному курсу в его логической последовательности. Объём учебника уменьшен по сравнению с имеющейся учебной литературой за счёт сокращения дополнительного материала и либо выбора более простых, но достаточно строгих доказательств, либо со ссылкой на соответствующий материал в указанной известной литературе. Примеры по каждому из рассматриваемых методов предлагаются только академического, не прикладного характера, так как это только лекционный курс и удобнее лектору, читающему данный курс для конкретной специализации, самостоятельно дополнительно вставлять примеры, иллюстрирующие рассматриваемые алгоритмы применительно только к этой специализации. В качестве примера прикладных задач, которыми можно воспользоваться для иллюстрации лекционного материала или заданий по различным видам учебных занятий и самостоятельной работы студентов по данному курсу, в приложении приводятся примеры различных видов приложений дифференциальных уравнений к прикладным задачам авиационной техники. Численные и приближённо-аналитические методы решения начальных и краевых задач даются без доказательства их сходимости и без иллюстрации примерами, так как это обусловлено лишь необходимостью ознакомления только с их алгоритмами и возможной актуальной необходимостью использования в дополнительных расчётных заданиях учебного плана. Теоретические выводы и доказательства, а также выводы основных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений излагаются достаточно подробно, просто и доступно для среднего уровня студенческой аудитории. Примеры решения типовых задач, иллюстрирующих основные положения курса, приводятся с пояснениями. Для проведения практических занятий рекомендуются задачники, цитируемые в прилагаемом списке литературы по данному курсу. Для удобства пользования в конце учебника приведен предметный указатель.

Содержание учебника представлено в виде отдельных глав и параграфов таким образом, что при его изучении можно воспользоваться материалом либо отдельных разделов, либо полностью изложением его применительно к соответствующей конкретной программе курса. Данный учебник может быть использован в соответствующем объёме как программы бакалавриата, так и магистратуры для студентов инженерно-технических специальностей и специальности «прикладная математика» технического вуза. Преподавателям предлагается возможность практического использования материала учебника для чтения соответствующего лекционного курса. Молодым специалистам, аспирантам и научным сотрудникам, использующих в своей деятельности методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, учебник может служить справочником по основным методам интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, исследованию свойств их решений, а также методам решения уравнений в частных производных первого порядка.

Оглавление.

П Р Е Д И С Л О В И Е.

Данный учебник написан на основе лекций, читаемых автором на факультете прикладной математики и физики, аспирантам института и слушателям факультета повышения квалификации преподавателей высшей математики втузов при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете). Рекомендуется как учебное пособие при изучении соответствующих разделов курса обыкновенных дифференциальных уравнений на базе знаний основ теории и методов дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных курса математического анализа, а также основ теории и методов линейной алгебры и аналитической геометрии.

Основу содержания учебника составляет подробное, логически последовательное и достаточно строгое лекционное изложение теории и основных методов интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, доступное студентам со средним уровнем подготовки. В отличие от традиционного подхода основные свойства решений линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений рассматриваются одновременно в наглядной, доступной и математически строгой координатной, векторно-матричной и операторной формах. В учебнике предлагается редкий вывод формулы Остроградского-Лиувилля-Якоби, а также изложение важного для приложений приближённо-аналитического метода малого параметра. Даётся достаточно математически строгое и в то же время относительно простое доказательство теоремы существования и единственности Коши для системы дифференциальных уравнений и дифференциального уравнения высшего порядка в векторно-матричной форме для общего случая их постановки. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами рассматривается во всех случаях (простых и кратных, действительных и мнимых) корней характеристических уравнений.

Рассматриваемые методы интегрирования иллюстрируются примерами, решаемых с достаточно подробными комментариями, что позволяет использовать данный учебник и как справочное пособие по основам теории и методам интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. В процессе изложения материала формулируются замечания, уточняющие аргументацию положений рассматриваемого материала, которые при начальном изучении курса могут быть опущены без ущерба для основного содержания материала и могут быть изучены с целью более глубокого понимания при окончательном изучении курса. Кроме того, во многих моментах изложения вставляется выражение «очевидно», что предполагает несложное доказательство утверждаемого положения или его непосредственная проверка. Численные и приближённо-аналитические методы решения начальных и краевых задач даются без доказательства их сходимости и без иллюстрации примерами, так как это обусловлено лишь необходимостью ознакомления только с их алоритмами и возможной актуальной необходимостью использования в дополнительных расчётных заданиях учебного плана. Теоретические выводы и доказательства, а также выводы основных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений излагаются достаточно подробно, просто и доступно для среднего уровня студенческой аудитории. Примеры решения типовых задач, иллюстрирующих основные положения курса, приводятся с пояснениями. При более глубоком изучении отдельных положений и разделов данного курса можно воспользоваться ссылками на указанную в конце учебника известную литературу.

Данный учебник или, по существу, издание курса лекций, предназначен для студентов (как бакалавров, так и магистров), аспирантов, преподавателей и специалистов, изучающих или использующих в своей практике теорию и методы обыкновенных дифференциальных уравнений. В то же время материал учебника может служить справочником по основным методам интегрирования дифференциальных уравнений и их систем, исследованию свойств их решений, а также методам решения уравнений в частных производных первого порядка.

Глава 1. **Введение в курс дифференциальных уравнений.**

§1. Основные определения.

При решении многих геометрических, физических, технических и других прикладных задач требуется найти неизвестную функцию (скалярную или векторную) по данному соотношению между этой функцией, её производной и независимой переменной. Каждое такое соотношение и будет примером *дифференциального уравнения*. Простейшими примерами таких задач могут служить, например, такие, которые встречались при изучении предшествующих дисциплин.

Пример. Найти первообразную для $y' = 2x$.

Решение. $y' = 2x$ представляет собой пример простейшего дифференциального уравнения, решением которого, очевидно, является $y = x^2 + C$.

Примером в области физики может служить следующий:

Пример. Определить положение $S(t)$ в текущий момент времени t материальной точки единичной массы, движущейся по закону равномерно-ускоренного движения без учёта сопротивления при постоянном ускорении a и при известных в момент времени $t = t_0 = 0$ её положении $S(t_0) = S_0$ и скорости $V(t_0) = \mathcal{V}_0$.

Решение. На основании механического смысла второй производной дифференциальным уравнением данного движения будет $\ddot{S}(t) = a$. Интегрируя это уравнение последовательно два раза, и, используя условия задачи, получаем:

$$S(t) = a\,\frac{t^2}{2} + C_1\,t + C_2\,, \quad \text{или, что то же,} \quad S(t) = S_0 + \mathcal{V}_0\,t + a\,\frac{t^2}{2}\,.$$

Примечание. Отметим, что величины t_0 , S_0 , $\mathcal{V}_0$ называются *начальными данными*, а $S(t_0) = S_0$, $\mathcal{V}(t_0) = \dot{S}(\,t_0) = \mathcal{V}_0$ – *начальными условиями* (или *условиями Коши*) данной задачи. Если бы вместо этих значений функции $S(\mathrm{t})$ и её производной $\dot{S}(t) = \mathcal{V}(t)$ для одного и того же значения t , равного t_0 , были бы заданы значения, например, функции $S(\mathrm{t})$ для разных значений t , а именно $S(t_0) = S_0$ и $S(t_1) = S_1$ при $t_1 \neq t_0$, то тем самым были заданы так называемые *краевые условия*. В соответствии с заданием дополнительных условий задача об определении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *начальной задачей* или *задачей Коши*. Если же дополнительные условия краевые, то такая задача называется *краевой задачей*.

Приведём теперь геометрический пример.

Пример. Найти уравнение проходящей через точку (1,1) кривой, касательная в любой точке которой обладает следующим свойством. Отрезок касательной, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной (см. рис.1) $y' = \text{tg}\alpha = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$. Полученное выражение является дифференциальным уравнением искомой кривой.

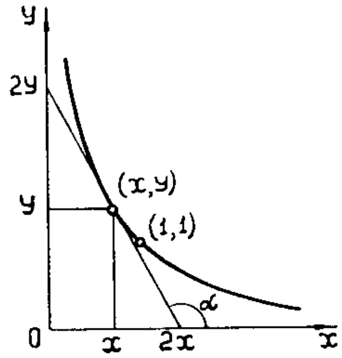

Рис.1. Искомая кривая решения примера.

Решая это уравнение, находим $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $xdy + ydx = 0$, $d(xy) = 0$, $xy = C$. Используя теперь начальное условие $y = 1$, $x = 1$, окончательно имеем $xy = 1$, то есть искомая кривая является гиперболой.

Примечание. Из приведенных примеров следует также, что одному и тому же дифференциальному уравнению может удовлетворять множество решений (при различных значениях постоянных C). Для выделения одного определённого их них и необходимо задание дополнительных условий, что и показано в последних двух примерах.

Итак, *обыкновенным дифференциальным уравнением* называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', y''' \dots y^{(n)}) = 0, \qquad (1.1)$$

связывающее независимую переменную x, функцию y этого независимого переменного и производные функции y по x до n – го порядка, где функция F определена и достаточное число раз дифференцируема в некоторой области изменения своих аргументов.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Решением дифференциального уравнения (1.1) называется определённая и достаточное число раз дифференцируемая в некоторой рассматриваемой области функция $y = y(x)$, в результате подстановки которой в уравнение оно становится справедливым тождеством.

Решение дифференциального уравнения, имеющее неявную форму $\varphi(x, y) = 0$ называется *интегралом дифференциального уравнения.*

Решение дифференциального уравнения может быть определено также и *в параметрической форме*, а именно $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием.*

График решения дифференциального уравнения называется его *интегральной кривой*.

Общим решением дифференциального уравнения в некоторой области переменных x, y называется соотношение вида $y = y\,(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных, такое, что при каждом наборе значений постоянных, это соотношение является решением дифференциального уравнения, и, наоборот, любое решение уравнения содержится в данном семействе при определённых значениях постоянных.

Если общее решение имеет неявный вид $\varphi(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0$, то такая форма общего решения называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

График множества интегральных кривых дифференциального уравнения, соответствующих его общему решению или его общему интегралу, составляет *семейство интегральных кривых*.

Каждое решение в составе общего решения или, соответственно, каждый интеграл, входящий в общее решение или в общий интеграл при определённых значениях постоянных, называется соответственно *частным решением* или *частным интегралом*.

Замечание. В дальнейшем (в §11 учебника) будет введено определение одного из решений, которое принадлежит общему семейству решений уравнения, обладающее определёнными специальными свойствами, а именно, так называемое *особое решение*.

Обратим внимание, что дифференциальное уравнение может и не иметь решений в действительной области. Примером является уравнение $y'^2 + 1 = 0$. В основном дифференциальные уравнения имеют множество решений. Однако, можно привести пример уравнения $(y - x)^2 + \sqrt{1 - y'^2} = 0$, которое имеет лишь единственное решение $x = y$. Может быть также, что уравнение имеет множество решений, но эти решения не выражаются в элементарных функциях, как, например, для уравнения $y' = \frac{\sin x}{x}$ имеем $y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$. В соответствии с этим, если интегрирование дифференциального уравнения сводится к квадратурам, то есть к операции взятия неопределённых интегралов, то решение данного уравнения в таком случае считается найденным. Наконец, в совокупность решений данного уравнения могут входить решения, не содержащиеся в семействе решений этого уравнения, зависящем от произвольных постоянных. Такие решения также называются частными решениями, если они записываются в явной аналитической форме, или частными интегралами – в случае неявной их формы.

Если в дифференциальном уравнении содержится только одна независимая переменная, то такое дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если же независимых переменных два или более, то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*. Если ясно, какое уравнение рассматривается, то слова «обыкновенное» или «в частных производных» могут опускаться.

Замечания к изложению материала в данном курсе лекций:

1) В данном учебнике как, по существу, учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям, слово «обыкновенное» всюду далее упоминаться не будет.

2) В дальнейшем в данном учебнике (в Главе 5) будет дано определение *особого решения* дифференциального уравнения и будут рассмотрены его специальные свойства.

3) Далее все переменные, функции, уравнения, постоянные, рассматриваемые величины, если особо не оговорено, будут рассматриваться в действительной области.

4) При проведении операций дифференцирования, интегрирования (если особо не оговорено) предполагается, что эти операции выполнимы.

5) При решении задач (если особо не оговорено) переменные x и y следует полагать равноправными, то есть в ответе должно быть учтено, что либо $y(x)$, либо $x(y)$.

6) Если в процессе решения проводится замена переменных, то в результате решения следует проводить обратную замену с тем, чтобы ответ был представлен в тех же переменных, в которых задано условие задачи.

7) Как это вытекает из сформулированных определений и следует из дальнейшего (см., например, §4, §10, §16 и §19), важно иметь в виду, что *обыкновенное дифференциальное уравнение* n *-го порядка имеет общее решение, зависящее от* n *произвольных постоянных*.

Подтверждением последнего утверждения может также служить, например, задача о построении дифференциального уравнения некоторого семейства функций, зависящего от n параметров. Так как в общем случае для исключения n параметров требуется система из $n+1$ соотношений, связывающих эти параметры, то такую систему составим из уравнения данного семейства и n равенств, полученных из него в результате последовательного дифференцирования. Итак, пусть дано соотношение

$$\phi(x, y, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) = 0, \tag{1.2}$$

связывающее функцию y, независимое переменное x и параметры $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$; при этом полагаем, что функция ϕ непрерывна по всем аргументам и дифференцируема по x и y достаточное число раз. Дифференцируя n раз, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\, y' = 0 \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} y' + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^n} + \dots + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y^{(n)} = 0\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2) и (1.3) составляют систему $n+1$ уравнений. Если из этой системы исключить n параметров $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ (для чего должны быть выполнены условия соответствующей теоремы о системе неявных функций), то в результате получим

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

– дифференциальное уравнение n – го порядка, для которого данное соотношение (1.2) является общим интегралом, так как удовлетворяет этому уравнению.

Аналогично можно строить дифференциальное уравнение следующего семейства: $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$. Для аналогично построенного соответствующего ему дифференциального уравнения данное семейство будет являться решением, содержащим n произвольных постоянных, или общим решением.

Пример. Построить дифференциальное уравнение двухпараметрического семейства:

$$y = ax^2 + bx\ .$$

Решение. Продифференцировав дважды по x, имеем:

$$\begin{cases} y' = 2ax + b \\ y'' = 2a \end{cases}.$$

Из данной системы следует, что $a = \dfrac{y''}{2}$, $b = y' - xy''$ и, подставив данные значения в уравнение семейства, получим искомое дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

(В §38 можно убедиться, что это – уравнение Эйлера, решением которого и является данное семейство, зависящее от двух произвольных постоянных a и b).

Всюду в дальнейшем, если специально не оговорено, под решением дифференциального уравнения понимаем как собственно решение, так и интеграл, то есть, говоря о решении уравнения, будем иметь в виду его решение независимо от формы, в которой оно даётся (явной, неявной или параметрической). Кроме того, при отсутствии дополнительных условий задачу решения дифференциального уравнения будем понимать как задачу отыскания всей совокупности его решений.

Заметим, что нередко при решении практических задач нахождение решения дифференциального уравнения представляет собой достаточно сложную проблему. Однако в тех случаях, когда требуется определить лишь некоторые свойства искомого решения, они могут быть исследованы, как это можно видеть в дальнейшем (см. Главы 12 и 13) , без нахождения самого решения. Кстати, уже известное и очень важное в приложениях следующее уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2) = 0$ в общем случае не интегрируется в квадратурах, однако свойства его решений в достаточной степени исследованы.

Итак, отметим, что основными задачами курса обыкновенных дифференциальных уравнений, составляющих его предмет, являются следующие задачи.

§2. Задачи курса дифференциальных уравнений.

Основными задачами данного курса являются:

1. Изучение *методов интегрирования* дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, в том числе и при наличии соответствующих дополнительных условий. Рассматриваемые методы интегрирования классифицируются следующим образом:

1.1. *Точные* или *аналитические методы*. Если уравнение аналитически не может быть решено, то говорят, что его решение не может быть получено в квадратурах.

1.2. *Приближённые методы*, которые подразделяются на следующие методы:

1.2.1. *Приближённо-аналитические методы*.

1.2.2.*Численные методы*.

1.2.3. *Графические методы*.

1.2.4. *Табличные методы*.

1.3. *Методы решения задач, в которых* для определения конкретного решения *задаются дополнительные условия*, которым должно удовлетворять искомое решение:

1.3.1. *Начальные задачи* или *задачи Коши*. Это задачи, в которых дополнительные условия, которые называются *начальными данными* или *начальными условиями задачи Коши*, задаются для одного определённого значения независимого переменного.

1.3.2. *Краевые задачи*, в которых дополнительные условия, называемые *краевыми условиями* задачи, задаются для двух или более различных значений независимого переменного.

2. Изучение методов исследования и определения свойств решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений непосредственно по заданному их виду, не определяя этих решений и независимо от интегрируемости данных уравнений или систем уравнений в элементарных функциях или квадратурах, только по свойствам данных уравнений и систем уравнений. Такие методы составляют так называемый раздел *качественной теории дифференциальных уравнений*. Среди свойств решений, определяемых указанными качественными методами, можно отметить следующие свойства:

2.1. *Условия существования и единственности* решения дифференциальных уравнений или систем уравнений.

2.2. *Условия применения* соответствующего рассматриваемого *преобразования или метода* (например, метод исключения, приближённо-аналитические методы и т.д.).

2.3. *Условия устойчивости решений* уравнений или систем уравнений.

Постановка и решение указанных основных задач курса дифференциальных уравнений, тем не менее, не позволяет разделить кардинально содержание данного учебника на две отдельные части. Содержание делится на главы, большинство из которых (Главы 2-11,14) имеют основной целью изучение первой основной задачи курса, а именно методов интегрирования, Главы же 12 и 13 относятся ко второй из них, которую можно охарактеризовать как изучение методов качественной теории дифференциальных уравнений и систем уравнений. Однако, несмотря на такое деление курса, это деление следует считать с точки зрения основной цели предмета условной, ибо эти две основные задачи курса составляют как бы две стороны – «качественную» и «количественную» изучаемого курса и поэтому в совокупности при решении прикладных задач неотделимы друг от друга. Более того, при изучении отдельных вопросов предмета обе стороны неизбежно привлекаются к рассмотрению одновременно и между ними часто границу провести нельзя. Например, как это будет видно далее, доказательство теоремы Коши методом последовательных приближений (см. §19) является одновременно доказательством существования и единственности решения (качественная сторона), и обоснованием приближённого метода решения (количественная сторона).

Глава 2. **Дифференциальные уравнения 1-го порядка.**

§3. Геометрическая интерпретация. Метод изоклин.

Дифференциальное уравнение 1–го порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y') = 0\,. \tag{3.1}$$

Определения уравнения, частного и общего решения и интеграла формулируются аналогично соответствующим определениям, рассмотренным в введении.

Если уравнение (3.1) может быть записано в явном виде

$$y' = f(x, y), \tag{3.2}$$

то оно называется *дифференциальным уравнением 1–го порядка, разрешённым относительно производной,* в противном случае – *не разрешённым относительно производной.*

Прежде чем перейти к изучению методов решения данных дифференциальных уравнений, рассмотрим *геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения 1–го порядка*, его решений и связанные с этим некоторые задачи.

Рассмотрим уравнение вида (3.2). Примем x и y за декартовы прямоугольные координаты плоскости. Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ однозначна и непрерывна по совокупности переменных x и y в некоторой области G на плоскости Oxy. Эта область называется *областью определения уравнения* (3.2). Тогда каждой точке $(x, y) \in G$ области определения рассматриваемое уравнение ставит в соответствие значение углового коэффициента $y' = \mathrm{tg}\alpha$ касательной к интегральной кривой данного уравнения, проходящей через эту точку. Таким образом, каждой точке $(x, y) \in G$ ставится в соответствие некоторое направление (этой касательной), составляющее с осью Ox угол $\alpha = \operatorname{arctg} y' = \operatorname{arctg} f(x, y)$. Тем самым, следовательно, в рассматриваемой области G определяется так называемое *поле направлений*. Если изобразить это поле, поместив в соответствующих точках отрезки, имеющие направление касательной, то задачу об интегрировании данного дифференциального уравнения (3.2) можно сформулировать следующим образом: для любой точки $(x, y) \in G$ найти проходящую через неё кривую $y = y(x)$, такую, что в каждой её точке касательная к кривой имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Другими словами, в каждой точке (x, y) поля направлений интегральная кривая $y = y(x)$ касается построенного в данной точке отрезка, а рассматриваемое дифференциальное уравнение (3.2) выражает тем самым это общее свойство касательных его интегральных кривых. Для практического приближённого графического построения семейства интегральных кривых уравнения (3.2) в поле направлений дополнительно проводятся изоклины.

Изоклиной называется геометрическое место точек $(x, y) \in G$, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление. Семейство изоклин дифференциального уравнения (3.2) определяется уравнением $f(x, y) = C$, где C − параметр.

Приближённое построение интегральных кривых или, что то же, *приближённое графическое решение дифференциального уравнения*, называется *методом изоклин*.

Замечание. При $C = 0$ изоклина включает в себя точки экстремума и точки перегиба (если таковые имеются) интегральных кривых. Для большей точности можно найти геометрическое место точек перегиба из условия $y'' = 0$ или $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0$, полученного дифференцированием правой части (3.2) по x, считая $y = y(x)$, с последующей заменой y' на $f(x, y)$.

Пример. С помощью метода изоклин приближённо графически построить интегральные кривые уравнения $$y' = x^2 + y^2.$$

Решение. Семейство изоклин здесь, очевидно, будет $x^2 + y^2 = C$, при этом для $C < 0$ действительных изоклин нет, при $C = 0$ изоклиной является только одна точка (0,0), причём она является также точкой перегиба, так как $y''(0) = 0$ и при переходе через начало координат y'' меняет знак. При $C > 0$ изоклинами являются окружности радиуса $r = \sqrt{C}$, в точках которых угол направления касательных (направление поля) будет равен $\alpha = \operatorname{arctg} C$. Построим изоклины $C_0 = 0$ ($r_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$), $C_1 = 1$ ($r_1 = 1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$), $C_2 = 4$ ($r_2 = 2$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4$) и т.д. Очевидно, при увеличении r возрастает α. Для приближённого графического построения интегральных кривых данного уравнения поступаем следующим образом (см. рис. 2). Выбираем произвольную точку (x, y), например, точку на оси Ox, и проводим через неё интегральную кривую в плоскости Oxy так, чтобы она в каждой своей точке имела направление поля. Взяв несколько таких точек, строим указанным образом соответствующие проходящие через них кривые. Каждая из построенных кривых (с точностью до графического выполнения) удовлетворяет данному дифференциальному уравнению и, следовательно, является его интегральной кривой. Очевидно, точки перегиба этих интегральных кривых расположены в точках, где интегральная кривая касается изоклины и её не пересекает.

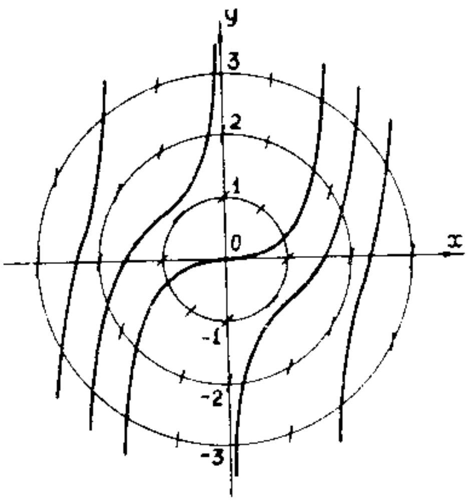

Рис.2. График изоклин и интегральных кривых уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Из проведенного построения видно, что получается не одна интегральная кривая, а целое семейство кривых от одного параметра, например, числового значения абсциссы точки на оси Ox, через которую проходит интегральная кривая. Это согласуется с отмеченным (в главе 1) утверждением, что общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Аналогично можно рассмотреть с некоторыми дополнительными условиями и геометрическую интерпретацию решений уравнения (3.1).

§4. Условия существования решений.

Для рассматриваемого дифференциального уравнения 1–го порядка (3.1) общее решение или общий интеграл (в случае их существования) содержат одну произвольную постоянную (это соответствие отмечено в §1), то есть определяют однопараметрическое семейство решений. Задача же выделения одного конкретного (частного) решения из всей их совокупности для рассматриваемого уравнения, а именно задача об определении решения при задании некоторых *дополнительных* (здесь *начальных*) *условий* является одной из важнейших задач курса дифференциальных уравнений и называется *задачей Коши*. Для данного уравнения она ставится следующим образом.

Задача Коши. Найти решение $y = y\,(x)$ дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, или в частном его случае – уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y\,(x_0) = y_0$, где числа x_0 и y_0 заданы.

Дополнительное условие задачи Коши $y\,(x_0) = y_0$ называется *начальным условием* (или *условием Коши*), а числа x_0 и y_0 – *начальными данными*. Задача Коши часто называется также *начальной задачей*. Несмотря на довольно простую постановку, задача Коши, тем не менее, имеет большое содержание. Так, например, решение этой задачи даёт ответ на вопрос о существовании хотя бы одного решения $y = y\,(x)$ данного дифференциального уравнения в рассматриваемой области G его определения, такого, что $y\,(x_0) = y_0$.

Если дифференциальное уравнение 1–го порядка может быть записано в явном виде $y' = f(x, y)$, то есть является разрешённым относительно производной, то для такого уравнения задачу Коши решает следующая *теорема Коши*.

Теорема Коши (*для уравнения 1–го порядка, разрешённого относительно производной*). Пусть в некоторой области G изменения своих переменных функция $f(x, y)$ непрерывна. Тогда для любой внутренней точки этой области $(x_0, y_0) \in G$ можно указать такой замкнутый интервал $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $h > 0$, оси Ox, на котором существует решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y\,(x_0) = y_0$. Если, кроме того, в этой области непрерывна производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ (или, что то же, $\frac{\partial y'}{\partial y}$), то указанное решение является единственным.

Замечания. 1). Условие непрерывности функции $f(x, y)$ является *условием существования решения задачи Коши*, а условие непрерывности частной производной этой функции по y является *условием единственности решения задачи Коши*.

2). Также в результате доказательства теоремы Коши в §19 будет доказано и следствие, которое утверждает, что доказанное единственное решение может быть продолжено сколь угодно близко до границы области G.

Рассмотрим теперь теорему Коши, решающую задачу Коши для случая дифференциального уравнения 1–го порядка, не разрешённого относительно производной.

Теорема Коши (*для уравнения 1–го порядка, не разрешённого относительно производной*). Пусть в некоторой области G изменения своих аргументов функция $F(x, y, y')$ и её производная $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны и, кроме того, $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$. Тогда для любой внутренней точки этой области $(x_0, y_0) \in G$ можно указать такой замкнутый интервал $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $h > 0$, оси Ox, на котором существует решение дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию $y\,(x_0) = y_0$. Если, кроме того, в этой области непрерывна производная $\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$, то для любого значения y'_0, являющегося корнем уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, такое решение, удовлетворяющее условиям $y\,(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$, является единственным.

Условия единственности решения данной теоремы, отличающиеся от предыдущей, можно прокомментировать следующим примером.

Пример. Иллюстрация условия единственности решений следующего дифференциального уравнения: $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$ в окрестности произвольной точки (x_0, y_0). *Решение.* Условия существования (непрерывности) здесь практически очевидны. Тот факт, что через любую заданную точку (x_0, y_0) проходят в данном случае не одно решение, а два, следует из возможности представления данного уравнения в следующем виде: $(y' - x\,)(\,y' - y) = 0.$ То есть данное уравнение распадается на два уравнения и через одну и ту же точку могут проходить единственное решение одного уравнения $(y' - x) = 0$ и единственное решение другого $(\,y' - y) = 0$ с разными значениями касательных к ним, определяемыми разными значениями y'_0 (см. рис. 3).

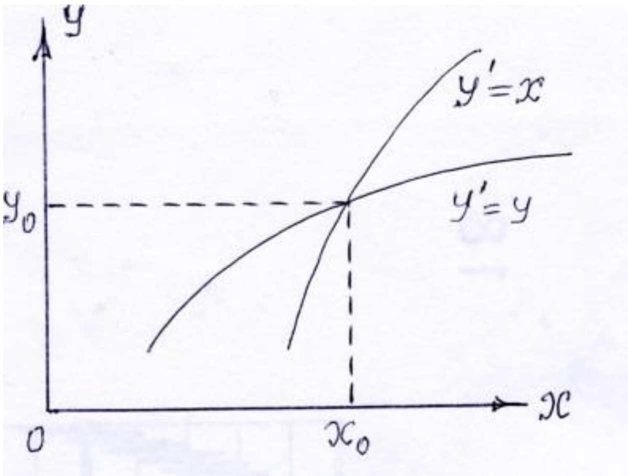

Рис.3. Иллюстрация прохождения через точку (x_0, y_0) двух различных решений уравнений $y' = x$ и $y' = y$.

Замечание. 1) Обе теоремы Коши в этом параграфе даны без доказательств. Доказательство более общей теоремы Коши, обобщающей данные теоремы, будет рассмотрено в §19 данного учебника.

2). Всюду в дальнейшем, если особо не оговорено, полагаем, что условия теорем Коши выполнены.

Глава 3. **Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производной.**

Дифференциальное уравнение 1–го порядка называется *разрешённым относительно производной,* если оно может быть записано в виде $y' = f(x,y)$. Однако, данное уравнение может быть записано также и в следующих эквивалентных формах: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$, $x' = \frac{1}{f(x,y)}$ (при $f(x,y) \neq 0$), $dy = f(x,y)dx$. Если же $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, то данное уравнение записывается и в следующих формах: $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Рассматривая далее методы интегрирования дифференциальных уравнений 1–го порядка, разрешённых относительно производной, предпочтительно будем данное уравнение записывать в виде $y' = f(x,y)$ или $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Итак, рассмотрим основные классы таких уравнений, для которых решения могут быть найдены с помощью тождественных преобразований и замен переменных:

– уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним,
– однородные уравнения и приводящиеся к ним,
– линейные уравнения, уравнения Бернулли и Риккати,
– уравнения в полных дифференциалах.

Перейдём теперь к рассмотрению отдельных типов данных уравнений.

§5. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.

Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если оно может быть записано в виде:

$$P(x)\,Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0\,. \tag{5.1}$$

Умножим обе части данного уравнения на $\frac{1}{R(x)Q(y)}$. В результате получим

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0 \quad \text{или} \quad \frac{P(x)}{R(x)}dx = -\frac{S(y)}{Q(y)}dy\,. \tag{5.2}$$

Тем самым рассматриваемое уравнение приведено к виду, в котором переменные «разделены», то есть к виду, когда в одну часть уравнения входят только функции от x и дифференциал dx, а в другую – функции от y и dy. Полученное равенство (5.2) следует понимать так: в обеих частях уравнения (5.2) стоят равные между собой дифференциалы – слева функции от переменной x, а справа – функции от переменной y. Как известно, если дифференциалы функций равны между собой, то первообразные отличаются на произвольную постоянную. Следовательно:

$$\int \frac{P\,(x)}{R\,(x)} dx = -\int \frac{S\,(y)}{Q\,(y)} dy + C \qquad \text{или} \qquad \int \frac{P\,(x)}{R\,(x)} dx + \int \frac{S\,(y)}{Q\,(y)} dy = C\ , \qquad (5.3)$$

и, окончательно, $\varphi(x) + \psi(y) = C$.

Таким образом, можно брать интегралы от обеих частей уравнения (5.2) в любой из указанных форм (5.2) . Тем самым получен общий интеграл данного уравнения (5.1). Однако утверждать, что рассматриваемое уравнение полностью решено, преждевременно, так как преобразование уравнения из формы (5.1) в (5.2) является не эквивалентным преобразованием, поскольку такое преобразование может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $R(x)Q(y)$, то есть решений уравнений $R(x) = 0$ и $Q(y) = 0$. Пусть действительными решениями этих уравнений (если они существуют) являются следующие решения: $x = x_i$ ($i = 1,2,3,\ldots,m$); $y = y_j$ ($j = 1,2,3,\ldots,k$); $m, k \in N$. (5.4)

Непосредственной подстановкой проверяем, являются ли (5.4) решениями данного уравнения (5.1). Если некоторые из (5.4), например, при $i = 1,2,3,\ldots, p \le m$ и $j = 1,2,3,\ldots,q \le k$ являются решениями уравнения (5.1) и ни при каком значении постоянной C не входят в состав семейства решений (5.3), то они записываются в ответе для решения (5.1) совместно с (5.3). Итак, вся совокупность решений уравнения (5.1) определяется соотношениями

$\varphi(x) + \psi(y) = C$; $x = x_i$ ($i = 1,2,3,\ldots, p \le m$); $y = y_j$ ($j = 1,2,3,\ldots, q \le k$); $p, q, m, k \in N$.

Пример. Решить уравнение $x\,(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Умножив обе части уравнения на $\frac{1}{(x^2-1)\,(y^2-1)}$, получим $\frac{xdx}{x^2-1} - \frac{ydy}{y^2-1} = 0$, откуда, умножив обе части на 2 для удобства интегрирования, по аналогии с (5.3), получим $\int \frac{2xdx}{x^2-1} - \int \frac{2ydy}{y^2-1} = C$ или

$$\int \frac{2xdx}{x^2-1} - \int \frac{2ydy}{y^2-1} = \ln|C|, \ \ \ln|x^2-1| - \ln|\,y^2-1| = \ln|C|, \ \ \ln|x^2-1| = \ln|\,y^2-1| + \ln|C|.$$

Пропотенцировав последнее равенство, получаем общее решение $x^2 - 1 = C\,(y^2-1)$.

При делении на $(x^2-1)(y^2-1)$ могли быть потеряны решения уравнения $(x^2-1)(y^2-1) = 0$, или, что то же, $(x^2-1) = 0$ и $(y^2-1) = 0$. Решения этих уравнений $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, являются одновременно решениями и данного уравнения. Сопоставляя эти решения с найденным семейством решений $x^2 - 1 = C\,(y^2-1)$, убеждаемся, что решения $x = \pm 1$ находятся в данном семействе при $C = 0$, а решения $y = \pm 1$, не входящие в это семейство, записываются в ответе. Итак, окончательным ответом решений данного уравнения является: $x^2 - 1 = C\,(y^2-1)$, $y = \pm 1$.

Замечания. 1). При решении дифференциальных уравнений, в том случае, если решение содержит выражения в логарифмах и затем следует потенцирование, то в промежуточном выражении этого решения, во-первых, произвольная постоянная записывается в виде её логарифма. Во-вторых, в этих промежуточных логарифмических выражениях знак модуля можно не ставить, так как в результате потенцирования вследствие наличия множителя – произвольной постоянной, эти модули снимаются. Если же потенцирования не проводится, то указанный знак модуля следует ставить обязательно. Например, промежуточное выражение при решении данного уравнения могло быть записано также и следующим образом: $\ln(x^2-1)=\ln(\,y^2-1)+\ln C,$ и далее $x^2-1=C\,(y^2-1),\ \ y=\pm 1$.

2). Решение данного уравнения могло быть записано следующим образом: $\ln(x^2-1)+\ln C\ =\ln(\,y^2-1)$, и далее $y^2-1=C\,(x^2-1),\ \ x=\pm 1.$ Отсюда следует, что вид окончательного решения дифференциального уравнения (как здесь, так и в дальнейшем) может быть записан не единственным образом. Поэтому при виде другого ответа (например, в задачнике), отличающегося от полученного при решении, следует убедиться, что оба (или более) ответы описывают полные эквивалентные семейства решений данного уравнения.

3). Так как при решении уравнений с разделяющимися переменными проводится неэквивалентное преобразование (деление на функции), то при решении таких уравнений каждый раз следует проверять наличие возможных решений, не входящих в найденное семейство решений, исследуя равенство нулю «делителей».

4). Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, в другой литературе может определяться как уравнение, приводящееся к следующему виду:
$$y'=f(x)g(y). \tag{5.5}$$
Очевидно, что это частный случай уравнения (5.1) , представляемый в следующей форме $f(x)g(y)dx-dy=0$. Разделение переменных в нём проводится так же как в уравнении (5.1) умножением обеих частей на $\frac{1}{g(y)}$, что в результате приводит к разделению переменных $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$ И далее решение проводится по аналогии с решением уравнения (5.1) или его преобразованного вида (5.2).

Рассмотрим теперь следующее дифференциальное уравнение вида
$$y'=\ f(ax+by+c). \tag{5.6}$$
Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными вида (5.1) или (5.5) с помощью невырожденной подстановки (замены) переменных

$$\begin{cases} u = ax + by + c \\ x = x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = ax + by \\ x = x \end{cases} .$$

Действительно, если применить первый вариант такой подстановки к уравнению (5.6), оно приводится к виду $\frac{u'-a}{b} = f(u)$ (так как $u' = a + by'$) или $du - (a + b\,f(u))\,dx = 0$, то есть к виду (5.1).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = 5x + y - 7$.

Решение. Применяем подстановку $\begin{cases} u = 5x + y - 7 \\ x = x \end{cases}$, $u' = 5 + y'$, $y' = u' - 5$, $u' - 5 = u$, $u' = u + 5$, $\frac{du}{u+5} = dx$, $\ln(u + 5) = x + \ln C$, $u + 5 = Ce^x$, и, проведя обратную замену, имеем $5x + y - 2 = Ce^x$, $y = Ce^x - 5x + 2$. Так как решение уравнения («делителя») $u + 5 = 0$, или $u = -5$ входит в полученное решение $u + 5 = Ce^x$ при $C = 0$, окончательно ответом для решения данного уравнения является $y = Ce^x - 5x + 2$.

§6. Однородные уравнения и приводящиеся к ним.

Функция $M(x, y)$ называется *однородной функцией* относительно своих аргументов, если для любого значения t выполняется тождественно следующее равенство $M(tx, ty) \equiv t^m M(x, y)$. Показатель m степени t в этом равенстве называется *измерением* или *степенью однородности* данной однородной функции.

Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной и записанное в виде
$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 , \tag{6.1}$$
называется *однородным уравнением*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности относительно своих аргументов.

Замечание. Можно сформулировать и два других определения однородного уравнения, эквивалентных данному определению, которыми также можно пользоваться при интегрировании однородных уравнений. Это следующие определения:

1). Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным уравнением*, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени однородности. Очевидно, это определение легко следует из данного определения для (6.1), так как, если (6.1) записать в следующем виде: $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x, y)$, то, очевидно, в этом случае будет выполняться равенство
$$f(tx, ty) \equiv t^0 f(x, y) \equiv f(x, y) . \tag{6.2}$$

2). Если в (6.2) принять $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, то (6.2) преобразуется к следующему эквивалентному виду $f(x, y) \equiv \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x, y) \equiv f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) \equiv f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$. Таким образом, отсюда следует, что дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, является *однородным уравнением*, если его можно представить в следующем виде $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородное дифференциальное уравнение решается приведением к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки (замены переменных):

$$\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = uy \\ y = y \end{cases}. \tag{6.3}$$

Действительно, применяя первую из (6.3) подстановку в уравнении (6.1), полагая, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности m, получаем: $M\,(x,ux)\;dx\; +\; N\,(x,ux)(xdu + udx) = 0$, или $x^m M(1,u)dx\; + x^m N(1,u)(xdu + udx) = 0$, и, сократив на множитель x^m, получаем следующее уравнение с разделяющимися переменными, к которому сводится данное уравнение $[\,M(1,u) + N(1,u)u]\;dx + [x \cdot N(1,u)]du = 0$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(x + y)dx = xdy$.

Решение. Так как функции $x + y$ и x являются однородными функциями первой степени однородности, то данное уравнение – однородное. Применяем для его решения подстановку $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$ и в результате получаем $(x + ux)dx = x(xdu + udx)$. Отметив, что $x = 0$ является, очевидно, решением данного уравнения, то, полагая, что $x \neq 0$ и сокращая на $x \neq 0$, имеем $dx + udx = xdu + udx$, $dx = xdu$, $du = \frac{dx}{x}$, $u = \ln x + \ln C$, $e^{\mathrm{u}} = Cx$. Проведя обратную замену и учитывая решение $x = 0$, получаем окончательный ответ: $e^{\frac{y}{x}} = Cx$, $x = 0$.

Рассмотрим теперь виды дифференциальных уравнений, приводящихся к однородным уравнениям. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \tag{6.4}$$

(при этих условиях данное уравнение не относится к уже рассмотренным типам). Уравнение (6.4) решается с помощью подстановки:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}, \tag{6.5}$$

где числа α и β – решения системы:
$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{6.6}$$

Очевидно, последняя система, являясь совместной и определённой, имеет единственное решение. В результате подстановки (6.5) в уравнение (6.4) получаем (так как $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$):

$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2u+b_2v+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}\right)$, и вследствие (6.6) приходим к уравнению

$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$, то есть данное уравнение (6.4) подстановкой (6.5) сводится к однородному уравнению.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x+2y-4}{2x-y-3}$.

Решение. Это, очевидно, уравнение вида (6.4). Применяем подстановку $\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{cases}$, где α и β – решения системы: $\begin{cases} \alpha+2\beta-4=0 \\ 2\alpha-\beta-3=0 \end{cases}$. Решение данной системы $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Применяя теперь данную подстановку с найденными значениями α и β , приводим данное уравнение к виду $\frac{dv}{du} = \frac{u+2+2v+2-4}{2u+4-v-1-3}$ или $\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u-v}$. Применяя теперь к данному однородному уравнению подстановку $\begin{cases} v = zu \\ u = u \end{cases}$, имеем $u\frac{dz}{du} + z = \frac{u+2zu}{2u-zu}$ или $u\frac{dz}{du} = \frac{1+2z}{2-z} - z$,

$u\frac{dz}{du} = \frac{1+z^2}{2-z}$, $\frac{(2-z)dz}{1+z^2} = \frac{du}{u}$, $2\text{arctg}z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln u + \ln C$, $e^{2\text{arctg}z} = Cu\sqrt{1+z^2}$.

Проведя обратную подстановку, получим $e^{2\text{arctg}(\frac{v}{u})} = Cu\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}$, $e^{2\text{arctg}(\frac{v}{u})} = C\sqrt{u^2+v^2}$,

$e^{2\text{arctg}(\frac{y-1}{x-2})} = C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, $e^{2\text{arctg}(\frac{y-1}{x-2})} = C\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$. Это выражение и представляет собой искомое решение, так как решение уравнения $2 - z = 0$, $z = 2$, или, что то же, $v = 2u$, $y-1 = 2(x-2)$, $2x-y-3 = 0$, решением данного уравнения не является (не входит в область определения правой части данного уравнения).

Рассмотрим теперь следующее уравнение, которое приводится к однородному уравнению. Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, называется *обобщённым однородным уравнением*, если существует числовое значение m такое, что все слагаемые уравнения оказываются слагаемыми одинакового измерения, если переменному x приписать измерение 1, переменной y – измерение m , а постоянные считать нулевого измерения (измерения, как показатели степеней, при умножении складываются, при делении вычитаются). Обобщённое однородное уравнение приводится к однородному уравнению с помощью подстановки $\begin{cases} y = u^m \\ x = x \end{cases}$ или сразу к уравнению с разделяющимися переменными с помощью следующей подстановки $\begin{cases} y = ux^m \\ x = x \end{cases}$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2x^2y' = y^3 + xy$.

Решение. Рассмотрим измерения слагаемых и проверим, существует ли такое значение m , при котором выполняется равенство этих измерений: $0 + 2 + m - 1 = 3m = 1 + m$. Это ра-- венство выполняется при $m = \frac{1}{2}$. Следовательно, данное уравнение является обоб-

щённым однородным уравнением и для решения выбираем подстановку $\begin{cases} y = u\sqrt{x} \\ x = x \end{cases}$.
Этой подстановкой уравнение приводится к виду $2x^2(u'\sqrt{x} + \frac{u}{2\sqrt{x}}) = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$ или $2x^2u'\sqrt{x} + xu\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$, $2x^2u'\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x}$. Так как $x = 0$ решением, очевидно, не является, то, сокращая обе части на $x\sqrt{x}$, имеем , $2u'x = u^3$, $2\frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{u^2} = \ln x + \ln C$, $e^{-\frac{1}{u^2}} = Cx$, и так как $u = \frac{y}{\sqrt{x}}$, то $e^{-\frac{x}{y^2}} = Cx$. Учитывая равенство нулю делителей, находим, что из $u = 0$ следует $y = 0$, являющееся решением, не входящим в найденное семейство решений. Итак, окончательно получаем искомое множество решений в виде $e^{-\frac{x}{y^2}} = Cx$, $y = 0$.

§7. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли и Риккати.

Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, называется *линейным уравнением*, если его можно записать в виде

либо $\quad y' + p(x)y = q(x)$ (*линейное по* y), (7.1)

либо $\quad x' + p(y)x = q(y)$ (*линейное по* x). (7.2)

Линейное уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \equiv 0$ или $q(y) \equiv 0$, то есть $\quad y' + p(x)y = 0 \quad$ или $\quad x' + p(y)x = 0$. (7.3)

Если же $q(x) \not\equiv 0$ или $q(y) \not\equiv 0$, то линейное уравнение называется *линейным неоднородным* уравнением .

Замечание. Заметим, что здесь определение однородности выполняется по аналогии с однородными уравнениями, но только по одной из переменных y или x соответственно.

Линейные уравнения интегрируются либо *методом вариации произвольной постоянной* (*Лагранжа*) либо методом *введения двух функций* (*Бернулли*).

Рассмотрим *метод вариации произвольных постоянных* (*Лагранжа*) на примере решения линейного уравнения по y вида (7.1). (Линейное уравнение по x решается полностью аналогично). По данному методу решаемое уравнение сначала записывается в указанном виде (7.1). Затем решается соответствующее линейное однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$. Решение такого уравнения имеет вид $\frac{dy}{y} = -p(x)$, и далее $\ln y = -\int p(x)dx + \ln C$,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{7.4}$$

Искомое решение уравнения (7.1) определяем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} , \tag{7.5}$$

где $C(x)$ – неизвестная функция. Подставляя этот вид решения в (7.1) имеем: $\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ или, в результате взаимного уничтожения второго и третьего слагаемых, получаем равенство

$$\frac{dC(x)}{dx}\, e^{-\int p(x)dx} = q(x). \qquad (7.6)$$

Замечание. Взаимное уничтожение слагаемых является, очевидно, следствием правильного решения однородного уравнения. При достаточной практике аккуратного решения линейных уравнений, зная наличие такого факта взаимного уничтожения, при решении уравнений можно сразу с этапа (7.5) переходить к (7.6).

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными (7.6) получаем:

$$dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx \ , \ C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \ ,$$

где C – новая произвольная постоянная. Подставляя найденное решение для $C(x)$ в (7.5), определяем искомое решение данного уравнения (7.1) в виде:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\,. \qquad (7.7)$$

Замечание. Обратим внимание, что *общее решение* (7.7) *линейного уравнения* (7.1) *представляет собой сумму общего решения* (7.4) *соответствующего однородного уравнения* (7.3) *и частного решения данного неоднородного* (т.е. решения (7.7) при $C = 0$). Так как частное решение данного уравнения можно выбрать бесконечным количеством способов (например, полагая вместо произвольной постоянной в (7.7) сумму $C + K, \ \forall K \in R$), то, следовательно, и общее решение может быть записано бесконечным количеством способов.

Замечание. Итак, алгоритм решения линейного уравнения при решении практических примеров состоит из следующих этапов: 1). Записать данное уравнение в виде (7.1); 2). Решить соответствующее линейное однородное уравнение (7.3) и найти его решение в виде (7.4); 3). Представить искомое решение в форме (7.5) с неизвестной функцией $C(x)$ и записать результат подстановки (7.5) в (7.1) в виде (7.6); 4). Решить уравнение (7.6) , определить значение функции $C(x)$, подставить это значение в (7.5) и получить ответ в виде (7.7). При решении конкретного примера не следует пользоваться готовой формулой (7.7), а решать задачу в соответствии с данным алгоритмом.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(e^y+x)\, y'=1$.

Решение. Так как данное уравнение является линейным уравнением по x , то, реализуя этапы алгоритма решения, запишем, в соответствии с первым [1).] этапом алгоритма данное уравнение в виде (7.1): $x' - x = e^y$ (так как $x' = \frac{1}{y'}$). 2). Решая соответствующее однородное уравнение, получим $x' - x = 0$, $\frac{dx}{dy} = x$, $\frac{dx}{x} = dy$, $\ln x = y + \ln C$, $x = Ce^y$. 3). Полагаем искомое решение в виде: $x = C(y)e^y$. Подставляем в уравнение $x' - x = e^y$ и в результате, так как $\frac{dC(y)}{dy}e^y + C(y)e^y - C(y)e^y = e^y$, получаем $\frac{dC(y)}{dy}e^y = e^y$ или $\frac{dC(y)}{dy} = 1$.

4). Находим решение уравнения $\frac{dC(y)}{dy} = 1$, $dC(y)=dy$, $C(y) = y + C$. Подставив его в искомый вид решения $x = C(y)e^y$, получаем окончательный ответ в виде: $x = Ce^y + ye^y$.

Рассмотрим *метод введения двух функций* (*Бернулли*) решения линейного уравнения (7.1), как и в предыдущем случае, на примере решения линейного уравнения по y вида (7.1). (Линейное уравнение по x решается полностью аналогично). По данному методу решаемое уравнение, как и в методе Лагранжа, сначала записывается в указанном виде (7.1). Затем проводится подстановка $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$, где u и v – две функции от x. Подставляем в (7.1):

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x). \tag{7.8}$$

Составим далее равенство нулю суммы любого из первых двух слагаемых (выбираем первое) и (обязательно) третьего слагаемого, содержащего uv, в результате получим:
$u'v + p(x)uv = 0$ и, сокращая на v, имеем: $u' + p(x)u = 0$.

Замечание. При применении метода Бернулли при первом интегрировании, а именно при интегрировании уравнения $u' + p(x)u = 0$ константа C не пишется, то есть определяется только частное решение $\frac{du}{u} = -p(x)dx$, $\ln u = -\int p(x)dx$, $u = e^{-\int p(x)dx}$. Если бы константа была поставлена, то при последующем интегрировании возникает вторая и, следовательно, окончательное решение данного линейного уравнения имело бы две произвольных постоянных, а это противоречит тому, что уравнение 1-го порядка должно иметь лишь одну постоянную. Другим аргументом в данном случае является следующий. Благодаря определению частного значения функции $u = e^{-\int p(x)dx}$ данная подстановка $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$ приобретает вид

$$\begin{cases} y = ve^{-\int p(x)dx} \\ x = x \end{cases}, \tag{7.9}$$

то есть вид замены данной функции не на две неизвестных, а только на одну, что абсолютно логично.

Итак, в результате интегрирования уравнения $u' + p(x)u = 0$ получаем его частное решение $u = e^{-\int p(x)dx}$. Подставляя это значение u в оставшееся от (7.8) равенство $uv' = q(x)$, получим $e^{-\int p(x)dx} \cdot v' = q(x)$, $dv = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, $v = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Подставляя полученное значение функции v в (7.9) получаем искомое решение уравнения (7.1) в виде полностью совпадающем с (7.7):

$$y = e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx .$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xy' - 2y = x^3\cos x$.

Решение. Так как данное уравнение является линейным уравнением по y , то запишем данное уравнение в виде (7.1): $y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x$. Проводим подстановку $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$, в результате имеем: $u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = x^2 \cos x$. Приравняв нулю сумму первого и третьего слагаемых, получим $u'v - 2\frac{uv}{x} = 0$, сокращаем на v: $u' - 2\frac{u}{x} = 0$, $\frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}$ (напоминаем, что в методе Бернулли при первом интегрировании константа C не ставится), $\ln u = 2\ln x$, $u = x^2$, и замена приобретает вид $\begin{cases} y = x^2 v \\ x = x \end{cases}$. Подставив $u = x^2$ в $uv' = x^2 \cos x$, в результате получим $x^2 v' = x^2 \cos x$, $x^2\,(v' - \cos x) = 0$. Так как $x = 0$ решением не является, то, полагая $x \neq 0$ и сокращая на x^2, получаем $v' - \cos x = 0$, $dv = \cos x\, dx$, $v = \sin x + C$. Подставляя полученный результат в $y = x^2\, v$, окончательно получаем решение данного уравнения $y = Cx^2 + x^2 \sin x$.

Рассмотрим теперь виды дифференциальных уравнений, приводящихся к линейным уравнениям.

Дифференциальное уравнение называется *уравнением Бернулли*, если его можно записать в виде:

$$y' + p(x)y = y^n q(x), \tag{7.10}$$

или в виде

$$x' + p(y)x = x^n q(y),$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$ (в противном случае – эти уравнения линейные).

Уравнение Бернулли может быть сведено к линейному уравнению с помощью подстановки $\begin{cases} u = y^{n-1} \\ x = x \end{cases}$. Действительно, поделив, например, (7.10) на y^n , приводим данное уравнение к виду $\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = q(x)$, или $\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + p(x)y^{1-n} = q(x)$, $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$, то есть к виду линейного уравнения, которое далее может быть решено одним из рассмотренных методов интегрирования линейного уравнения. Однако, уравнение Бернулли можно сразу решать рассмотренным методом Бернулли.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

Решение. Решаем данное уравнение Бернулли методом Бернулли. Для этого применим подстановку $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$. Получим $u'v + uv' + 2uv = (uv)^2 e^x$. Далее по аналогии с методом Бернулли решения линейного уравнения, приравнивая первое и третье слагаемое нулю, имеем $u'v + 2uv = 0$, $u' + 2u = 0$, $\frac{du}{u} = -2dx$, $\ln u = -2x$, $u = e^{-2x}$. (Напоминаем, что при первом интегрировании в методе Бернулли константа C не ставится). Тогда $\begin{cases} y = e^{-2x} v \\ x = x \end{cases}$. Подставляя $u = e^{-2x}$ в уравнение $uv' = (uv)^2 e^x$ (так как $u'v + 2uv = 0$), получаем $e^{-2x}v' = (e^{-2x}v)^2 e^x$, $\frac{dv}{v^2} = e^{-x}dx$, $-\frac{1}{v} = -e^{-x} - C$, $v = \frac{1}{e^{-x}+C}$ и окончательно находим $y = e^{-2x}\frac{1}{e^{-x}+C}$ или $y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+C}$. Кроме того, в данном случае решением является, очевидно, $y = 0$. Итак, искомое решение имеет вид: $y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+C}$, $y = 0$.

Дифференциальное уравнение называется *уравнением Риккати*, если его можно записать в виде:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{7.11}$$

при этом $p(x) \neq 0$ – иначе уравнение будет линейным, $r(x) \neq 0$ – иначе это уравнение будет уравнением Бернулли.

Уравнение Риккати в общем виде в квадратурах не интегрируется. Однако, если известно или каким-либо образом может быть определено его частное решение y_1, то уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли с помощью подстановки $\begin{cases} y = u + y_1 \\ x = x \end{cases}$.

Действительно, проведя данную подстановку в уравнении (7.11), имеем $u' + y_1' = p(x)u^2 + 2p(x)uy_1 + p(x)y_1^2 + q(x)u + q(x)y_1 + r(x)$, и, так как y_1 – решение (7.11), то $u' = p(x)u^2 + 2p(x)uy_1 + q(x)u$, или $u' - [2p(x)y_1 + q(x)]u = p(x)u^2$. Таким образом, уравнение Риккати сведено к уравнению Бернулли.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' + y^2 + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$.

Решение. Так как данное уравнение является линейным уравнением Риккати, то полагаем предположительно, что частным его решением является $y_1 = \frac{a}{x}$, где a – постоянная. Для определения величины a подставляем искомый вид решения в данное уравнение:

$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0$, $a^2 = 4$, $a = \pm 2$. Принимаем $y_1 = \frac{2}{x}$. Затем применим подстановку $\begin{cases} y = u + y_1 \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} y = u + \frac{2}{x} \\ x = x \end{cases}$, $u' - \frac{2}{x^2} + u^2 + \frac{4u}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{u}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0$,

$u' + \frac{5u}{x} = -u^2$, Решаем полученное уравнение Бернулли, как и предыдущий пример, методом Бернулли, применяя очередную подстановку $\begin{cases} u = vw \\ x = x \end{cases}$, $v'w + vw' + \frac{5vw}{x} = -(vw)^2$,

$v'w + \frac{5vw}{x} = 0$. Сокращаем на $w \neq 0$, так как $w = 0$ соответствует $u = 0$, то есть уже известному решению $y_1 = \frac{2}{x}$. Далее $\frac{d\,v}{v} = -5\,\frac{dx}{x}$, $\ln v = -5\ln x$ (Напоминаем, что при первом интегрировании в методе Бернулли произвольная постоянная C не ставится) , $v = \frac{1}{x^5}$.

Теперь имеем $\begin{cases} u = \frac{1}{x^5} w \\ x = x \end{cases}$, и решаем уравнение $vw' = -(vw)^2$. Сокращаем на $v \neq 0$ (при $v = 0$ также приходим к $u = 0$ и $y_1 = \frac{2}{x}$). Далее имеем: $w' = -\,vw^2$,

$w' = -\frac{1}{x^5} w^2$, $\frac{dw}{w^2} = -\frac{dx}{x^5}$, $-\frac{1}{w} = \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{4} C$, $w = -\frac{4x^4}{1+Cx^4}$. Следовательно, $u = \frac{1}{x^5} w$,

$u = -\frac{4}{x(1+Cx^4)}$. Проводя обратную замену, получим: $y = -\frac{4}{x(1+Cx^4)} + \frac{2}{x}$, $y = \frac{-2+2Cx^4}{x(1+Cx^4)}$.

Таким образом, ответ задачи имеет вид: $y = 2\,\frac{Cx^4-1}{x(1+Cx^4)}$, $y = \frac{2}{x}$.

§8. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его можно записать в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{8.1}$$

где левая часть этого уравнения (8.1) представляет собой полный дифференциал от некоторой функции $U(x,y)$:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0\,, \tag{8.2}$$

или, что то же, $dU(x,y) = 0$. Следовательно, в этом случае решением уравнения (8.1) является функция

$$U(x,y) = C. \tag{8.3}$$

Из (8.2) следует, что $M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Продифференцируем первое из последних равенств частным образом по y, а второе – по x. В итоге получаем: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Вследствие непрерывности смешанных производных второго порядка и, следовательно, их равенства, имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{8.4}$$

Равенство (8.4) по доказанному (и в результате последующего восстановления функции $U(x,y)$ по её производным) представляет собой *необходимое и достаточное условие* того факта, что уравнение (8.1) является *уравнением в полных дифференциалах*.

Решение уравнения в полных дифференциалах (8.1) проводится одним из методов: *метод восстановления функции по её частным производным* или *метод интегрирования соответствующего криволинейного интеграла второго рода.*

Рассмотрим сначала *метод восстановления функции* $U(x,y)$ по её частным производным $\frac{\partial U}{\partial x} = M\,(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = N\,(x,y)$. Интегрируя производную $\frac{\partial U}{\partial x}$, находим значение искомой функции в виде: $U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M\,(x,y)\,dx + \varphi(y)$ (при интегрировании частной производной по одной из переменных вторая переменная считается при таком интегрировании постоянной, а произвольная постоянная в этом случае является неизвестной функцией от второй переменной). Далее приравниваем частные производные по y полученного значения функции $U(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$, то есть $\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} [\int M\,(x,y)\,dx +$ $+ \varphi(y)] = N\,(x,y)$. Решая последнее равенство, определяем значение неизвестной функции $\varphi(y)$, находим окончательную величину $U(x,y)$, и, приравнивая её произвольной постоянной в соответствии с (8.3), определяем решение уравнения (8.1) в виде: $\int M\,(x,y)\,dx + \varphi(y) = C$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(3x^2y^4 - 2x)dx + (4x^3y^3 + 3y^2)dy = 0 \ .$$

Решение. Рассмотрим производные:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y^4 - 2x)}{\partial y} = 12x^2y^3, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(4x^3y^3 + 3y^2)}{\partial x} = 12x^2y^3.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то, таким образом, данное уравнение – в полных дифференциалах, и левая часть данного уравнения – полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Следовательно, $\frac{\partial U}{\partial x} = M\,(x,y) = 3x^2y^4 - 2x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = N\,(x,y) = 4x^3y^3 + 3y^2$.

Определим функцию $U(x,y)$ с помощью метода восстановления по соответствующим её частным производным: $U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (3x^2y^4 -$ $- 2x)dx + \varphi(y) = x^3y^4 - x^2 + \varphi(y)$. Далее, приравнивая частные производные по y полученного выражения функции $U(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = N\,(x,y) = 4x^3y^3 + 3y^2$, получим: $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial(x^3y^4 - x^2 + \varphi(y))}{\partial y} = 4x^3y^3 + 3y^2$ или $4x^3y^3 + \frac{d\varphi(y)}{dy} = 4x^3y^3 + 3y^2$, и далее $\frac{d\varphi(y)}{dy} = 3y^2$, $d\varphi(y) = 3y^2dy$, $\varphi(y) = y^3 + C$. Таким образом, $U(x,y) = x^3y^4 - x^2 +$ $+ \varphi(y) = x^3y^4 - x^2 + y^3 + C$. Решением данной задачи является, следовательно, в соответствии с (8.3): $x^3y^4 - x^2 + y^3 = C$.

Рассмотрим теперь *метод* решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах путём применения с этой целью *интегрирования соответствующего криволинейного интеграла второго рода.* Из курса математического анализа известно, что, если подынтегральная функция криволинейного интеграла второго рода вдоль некоторой кривой L

$$\int\limits_L M\,(x,y)\,dx\; +\; N\,(x,y)\,dy = \int\limits_L dU(x,y) = U(x,y) + C \qquad (8.5)$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то в этом случае результат интегрирования не зависит от пути интегрирования L. Поэтому путь интегрирования в области непрерывности функций $M\,(x,y)$ и $N\,(x,y)$ данного интеграла с целью вычисления функции $U(x,y)$ можно выбрать произвольно. Если начальная точка кривой L – это точка (x_0, y_0), а точка (x,y) – текущая конечная точка этой кривой, то этот интеграл теперь можно записать так:

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,y)} dU(x,y) \;=\; \int\limits_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy \;,$$

а путь интегрирования выбираем по ломаной $L = L_1 + L_2$, где L_1 – отрезок прямой вдоль оси Ox от точки (x_0, y_0) до точки (x, y_0), вдоль которого $y = y_0 = \mathrm{Const}$ и $dy = 0$; L_2 – отрезок прямой вдоль оси Oy от точки (x, y_0) до точки (x,y), вдоль которого $x = x = \mathrm{Const}$ и $dx = 0$ (см. рис. 4):

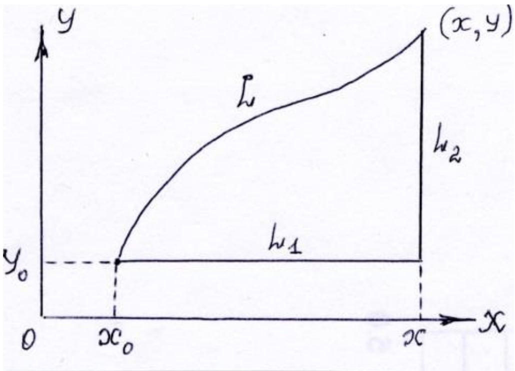

Рис.4. Путь интегрирования криволинейного интеграла по пути $L_1 + L_2$.

Таким образом:

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy \;,$$

и в соответствии с (8.3) решение уравнения (8.1) имеет вид:

$$U(x,y) = C \quad \text{или} \quad \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C\;.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, рассмотренное в предыдущем примере $(3x^2y^4 - 2x)dx + (4x^3y^3 + 3y^2)dy = 0$, методом интегрирования криволинейного интеграла второго рода.

Решение. Сначала выбираем координаты точки (x_0, y_0) принадлежащей области непрерывности функций $M\,(x,y) = 3x^2y^4 - 2x$ и $N\,(x,y) = 4x^3y^3 + 3y^2$ и принимаем её в качестве начальной точки пути L интегрирования криволинейного интеграла второго рода, Очевидно, в данном случае, в качестве такой точки можно выбрать точку с координатами $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Далее выберем путь интегрирования от выбранной точки (0,0) до текущей точки (x, y) вдоль ломаной линии $L = L_1 + L_2$, где L_1 – отрезок прямой вдоль оси Ox от точки (0,0) до точки $(x, 0)$, вдоль которого $y = 0$ и, следовательно, $dy = 0$; L_2 – отрезок прямой $x = x = \text{Const}$ вдоль оси Oy от точки $(x, 0)$ до точки (x, y) . Вдоль отрезка L_2 , очевидно, не только $x = x = \text{Const}$, но и $dx = 0$.

Таким образом,

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} (3x^2 \cdot 0 - 2x)dx + \int\limits_{0}^{y} (4x^3y^3 + 3y^2)dy = -2\int\limits_{0}^{x} xdx + 4x^3 \int\limits_{0}^{y} y^3dy + 3\int\limits_{0}^{y} y^2dy =$$

$= -x^2 + x^3y^4 + y^3$. Так как решение уравнения должно иметь вид (8.3) , то приравнивая полученный результат произвольной постоянной, получаем решение данного уравнения в виде: $x^3y^4 - x^2 + y^3 = C$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(3x^2 + \frac{1}{y})dx + \left(2y - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$.

Решение. Так как в данном случае $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Применим метод интегрирования криволинейного интеграла второго рода. Сначала выбираем точку ($x_0 = 0,\ y_0 = 1$) , принадлежащую области непрерывности функций $M\,(x, y)$ и $N\,(x, y)$. Эту точку принимаем в качестве начальной точки ($x_0\,, y_0$) вдоль пути интегрирования L – ломаной линии $L = L_1 + L_2$. Здесь путь L_1 – это вдоль оси Ox отрезок прямой от точки (0,1) до точки $(x, 1)$, вдоль которого $y = 1$ и, следовательно, $dy = 0$. L_2 – это вдоль оси Oy отрезок прямой от точки $(x, 1)$ до точки (x, y), вдоль которого, очевидно, $x = x = \text{Const}$ и $dx = 0$. Таким образом,

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} \left(3x^2 + \frac{1}{y}\right) dx + \int\limits_{1}^{y} \left(2y - \frac{x}{y^2}\right) dy = \int\limits_{0}^{x} (3x^2 + 1)dx + 2\int\limits_{1}^{y} ydy - x\int\limits_{1}^{y} \frac{1}{y^2}dy =$$

$= x^3 + x + y^2 - 1 + \frac{x}{y} - x = x^3 + y^2 + \frac{x}{y} - 1$. В соответствии с (8.3) определяем вид решения данного уравнения $x^3 + y^2 + \frac{x}{y} = C$.

Перейдём теперь к рассмотрению понятия *интегрирующего множителя* дифференциального уравнения 1–го порядка, разрешённого относительно производной.

Если рассматриваемое дифференциальное уравнение в виде $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, однако, если существует такая функция $\mu(x,y)$, в результате умножения на которую уравнение становится уравнением в полных дифференциалах вида $\mu(x,y)M\,(x,y)dx + \mu(x,y)N\,(x,y)dy = 0$, то функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем*. Сформулируем и докажем следующие две теоремы о свойствах интегрирующего множителя.

Теорема (*о существовании интегрирующего множителя*). Если данное уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ имеет общий интеграл вида $U(x,y) = C$, то такое уравнение имеет интегрирующий множитель.

Замечание. В §20 будет доказано, что если уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Коши, то у такого уравнения всегда существует общий интеграл вида $U(x,y) = C$.

Доказательство теоремы. Вычислим дифференциалы обеих частей общего интеграла: $dU(x,y) = dC$, $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$, откуда $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$. С другой стороны, из рассматриваемого уравнения следует, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Так как вдоль решений имеем единое значение $\frac{dy}{dx}$, то, следовательно, из полученных равенств вытекает равенство их левых частей: $\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{M\,(x,y)}{N(x,y)}$. Данное равенство можно преобразовать так: $\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M\,(x,y)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N(x,y)} = \mu(x,y)$ (через $\mu(x,y)$ обозначено общее значение полученного равенства). Из полученного равенства следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = \mu(x,y)M\,(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \mu(x,y)N\,(x,y)$. Подставляя полученные значения в выражение полного дифференциала $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$, получаем $\mu(x,y)M\,(x,y)dx + + \mu(x,y)N\,(x,y)dy = 0$. Таким образом, данное уравнение становится уравнением в полных дифференциалах, при этом, очевидно, функция $\mu(x,y)$ – интегрирующий множитель. Что и требовалось доказать.

Теорема (*о не единственности интегрирующего множителя*). Если дифференциальное уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu_0(x,y)$, то есть $\mu_0(x,y)M\,(x,y)\,dx + \mu_0(x,y)N\,(x,y)dy = dU_0(x,y) = 0$, то данное уравнение имеет бесконечное множество интегрирующих множителей вида $\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\Phi(U_0(x,y))$, где функция $\Phi(U_0(x,y))$ – произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство. Так как $\mu_0(x,y)$ – интегрирующий множитель данного уравнения $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, то в результате умножения на этот множитель уравнение становится полным дифференциалом функции $U_0(x,y)$. Выбираем произвольную дифференцируемую функцию $\Phi(t)$. Теперь обе части данного уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ умножаем на функцию $\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\Phi(U_0(x,y))$, то есть $\mu(x,y)M\,(x,y)dx +$ $+\mu(x,y)N\,(x,y)dy = \mu_0(x,y)\Phi(U_0(x,y))M(x,y)dx + \mu_0(x,y)\Phi(U_0(x,y))N(x,y)dy = 0$ или $\Phi(U_0(x,y))[\mu_0(x,y)M\,(x,y)dx + \mu_0(x,y)N\,(x,y)dy] = \Phi(U_0(x,y))dU_0(x,y) = 0$. Очевидно, последнее равенство представляет собой дифференциал некоторой функции от аргумента $U_0(x,y)$, то есть $\Phi\big(U_0(x,y)\big)dU_0(x,y) = d\Psi\big(U_0(x,y)\big) = 0$. Таким образом, интегрирующим множителем является $\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\Phi(U_0(x,y))$, где функцию $\Phi(t)$ можно выбрать произвольно. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые *методы определения интегрирующего множителя* при решении различных видов дифференциальных уравнений 1–го порядка, разрешённых относительно производной.

1). Очевидно, дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида (5.1), то есть $P\,(x)Q\,(y)\,dx + R\,(x)\,S\,(y)\,dy = 0$ имеет интегрирующим множителем $\frac{1}{R(x)Q(y)}$, так как в результате умножения на него уравнение $\frac{P\,(x)}{R\,(x)}\,dx + \frac{S\,(y)}{Q\,(y)}\,dy = 0$, очевидно, становится уравнением в полных дифференциалах.

2). Если уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ – однородное и, если $xM(x,y) +$ $+\,yN(x,y) \neq 0$ (так как в противном случае уравнение окажется уравнением с разделяющимися переменными), то легко определить вид интегрирующего множителя для такого уравнения следующим образом. Для этого сначала применяется подстановка $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$ и уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Если записать теперь интегрирующий множитель для полученного уравнения и провести в нём обратную подстановку, получим в результате следующий вид интегрирующего множителя для однородного уравнения $\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}$.

3). Для определения интегрирующего множителя $\mu(x,y)$ в общем случае запишем уравнение в полных дифференциалах в виде: $\mu(x,y)M\,(x,y)dx + \mu(x,y)N\,(x,y)dy = 0$, в котором, очевидно, должно выполняться равенство $\frac{\partial\mu(x,y)M\,(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x,y)N\,(x,y)}{\partial x}$, или $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}M(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Далее это равенство преобразуем: $\frac{1}{\mu(x,y)}\left[\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y)\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$, и окончательно получаем уравнение для определения $\mu(x,y)$ в виде:

$$\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\ . \qquad (8.6)$$

Решение данного уравнения в частных производных в общем случае представляет собой довольно сложную задачу. Поэтому в общем виде определить $\mu(x,y)$ достаточно сложно и далее этот общий случай не рассматриваем. Рассмотрим только частные случаи возможного решения уравнения (8.6).

4). Предположим, что данное уравнение (8.1) имеет интегрирующий множитель, представляющий собой функцию только одного переменного y, то есть $\mu(x,y)=\mu(y)$. В этом случае уравнение (8.6) преобразуется к виду:

$$\frac{d\ln\mu(y)}{dy}=\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} \qquad (8.7)$$

и, следовательно, интегрирующий множитель $\mu(y)$ существует, если правая часть уравнения (8.7) представляет собой либо постоянную, либо функцию переменной y.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2xy\ln y dx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})\,dy=0$.

Решение. В данном случае, как легко проверить, $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Однако, если вычислить правую часть (8.7) применительно к данному уравнению, то получим $\frac{2x-2x(\ln y+1)}{2xy\ln y}=-\frac{1}{y}$. Следовательно, данное уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu(y)$, который определим по формуле (8.7): $\frac{d\ln\mu(y)}{dy}=-\frac{1}{y}$, $d\ln\mu(y)=-\frac{dy}{y}$, $\ln\mu(y)=-\ln y$, $\mu(y)=\frac{1}{y}$, при этом значения постоянной не требуется, так как достаточно определения одного из значений $\mu(y)$. Применив $\mu(y)=\frac{1}{y}$, решим полученное уравнение: $2x\ln y dx+\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0$.

Решаем методом интегрирования интеграла второго рода по аналогии с предыдущим примером, выбрав путь интегрирования вдоль ломаной от начальной точки (0,1) до точки (x,y):

$$U(x,y)=\int_0^x 2x\ln 1\,dx+\int_1^y\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0+x^2\int_1^y\frac{dy}{y}+\int_1^y y\sqrt{y^2+1}dy=$$

$=x^2\ln y-0+\frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{8}$. В соответствии с (8.3) решение данного уравнения имеет вид: $x^2\ln y+\frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3}=C$.

5). Предположим теперь, что данное уравнение имеет интегрирующий множитель, представляющий собой функцию только одного переменного x, то есть $\mu(x,y)=\mu(x)$. В этом случае уравнение (8.6) преобразуется к виду:

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx}=\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} \tag{8.8}$$

и, следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu(x)$, если правая часть уравнения (8.8) представляет собой либо постоянную, либо функцию переменной x. В качестве примера может служить определение интегрирующего множителя для линейного уравнения.

6). Определим интегрирующий множитель линейного уравнения $y'+p(x)y=q(x)$. Запишем уравнение в виде: $[\,p(x)y-q(x)]dx+dy=0$. Так как здесь $\frac{\partial M}{\partial y}=p(x)$, а $\frac{\partial N}{\partial x}=0$, то линейное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Проверим, используя (8.7), не имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель $\mu(y)$. Так как в данном случае правая часть (8.7) имеет вид $\frac{\frac{\partial N\,(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M\,(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}=\frac{0-p(x)}{p(x)y-q(x)}$, то так как это не постоянная и не функция от y, то интегрирующего множителя $\mu(y)$ данное уравнение не имеет. Теперь проверим возможность интегрирующего множителя $\mu(x)$. Так как правая часть (8.8) в данном случае имеет вид $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{p(x)-0}{1}=p(x)$, то, таким образом, интегрирующий множитель линейное уравнение имеет. Определяем его в соответствии с (8.8): $\frac{d\ln\mu(x)}{dx}=p(x)$, $d\ln\mu(x)=p(x)dx$, $\ln\mu(x)=\int p(x)dx$, $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$. Очевидно, можно проинтегрировать с учётом $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ линейное уравнение как уравнение в полных дифференциалах $e^{\int p(x)dx}[p(x)y-q(x)]dx+e^{\int p(x)dx}dy=0$ и получить его решение в виде (7.7).

7). Рассмотрим ещё один способ определения интегрирующего множителя. Пусть уравнение вида $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ не является уравнением в полных дифференциалах и не имеет интегрируемых множителей видов $\mu(x)$ и $\mu(y)$. Пусть это уравнение можно представить в виде $[M_1(x,y)+M_2(x,y)]dx+[N_1(x,y)+N_2(x,y)]dy=0$ или

$$M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy+M_2(x,y)dx+N_2(x,y)dy=0\ . \tag{8.9}$$

Если для первых двух слагаемых можно определить интегрирующий множитель $\mu_1(x,y)$, а для вторых двух – $\mu_2(x,y)$, то тогда $\mu_1(x,y)M_1(x,y)dx+\mu_1(x,y)N_1(x,y)dy=dU_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)M_2(x,y)dx+\mu_2(x,y)N_2(x,y)dy=dU_2(x,y)$. Вследствие не единственности интегрирующего множителя следует, что указанные первые два слагаемых (8.9) имеют множество интегрирующих множителей вида $\mu_1(x,y)\Phi_1(U_1(x,y))$, а вторые два – множество $\mu_2(x,y)\Phi_2(U_2(x,y))$, где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ – произвольные дифференцируемые функции. Если удастся выбрать значения этих функций так, что достигается следующее равенство функций $\mu_1(x,y)\Phi_1(U_1(x,y)) = \mu_2(x,y)\Phi_2(U_2(x,y)) = \mu(x,y)$, то это общее равенство и будет интегрирующим множителем $\mu(x,y)$ данного уравнения $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Пример. Найти интегрирующий множитель дифференциального уравнения

$$(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0 \tag{8.10}$$

Решение. Так как прямыми способами решить уравнение и найти интегрирующий множитель не удаётся, то представим данное уравнение следующим образом

$$xydx + x^2dy + y^4dx - xy^3dy = 0\ . \tag{8.11}$$

Очевидно, интегрирующий множитель первых двух слагаемых (8.11): $\mu_1 = \frac{1}{x^2y}$, а вторых двух слагаемых: $\mu_2 = \frac{1}{xy^4}$. Следовательно: $\frac{1}{x^2y}(xydx + x^2dy) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d\ \ln xy$, $\frac{1}{xy^4}(y^4dx - xy^3dy) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d\ \ln\frac{x}{y}$. Множество интегрирующих множителей этих групп теперь можно представить в виде $\frac{1}{x^2y}\Phi_1(\ln xy)$ и $\frac{1}{xy^4}\Phi_2(\ln\frac{x}{y})$. Для достижения равенства данных функций можно в качестве функций $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ выбрать следующие их значения: $\Phi_1(t) = e^{-t}$ и $\Phi_2(t) = e^{-2t}$. Действительно, в этом случае получаем общее значение интегрирующих множителей двух групп левой части уравнения (8.11), а, следовательно, искомый интегрирующий множитель данного уравнения (8.10) имеет вид:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2y}e^{-\ln xy} = \frac{1}{xy^4}e^{-2\ln\frac{x}{y}} = \frac{1}{x^3y^2}\ .$$

Глава 4. **Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешённые относительно производной.**

§9. Уравнения 1-го порядка n-й степени.

Дифференциальное *уравнение 1–го порядка, не разрешённое относительно производной* в общем случае имеет вид $F(x,y,y') = 0$. Рассмотрим частный случай, когда левая часть уравнения представляет собой полином относительно y':

$$a_n(x,y)(y')^n + a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + a_{n-2}(x,y)(y')^{n-2} + \ldots\ldots + a_1(x,y)\,y' + a_n(x,y) = 0.$$

Из курса алгебры известно, что любой многочлен в действительной области можно представить в виде произведения линейных и квадратичных множителей. Поэтому, без ограничения общности, представим в виде такого произведения множителей данный полином по y' :

$$a_n(x,y)[\,y' + b_1(x,y)]^{k_1} \cdot [\,y' + b_2(x,y)]^{k_2} \cdot \ldots\ldots \cdot [\,y' + b_m(x,y)]^{k_m} \cdot [(y')^2 + c_1(x,y)y' +$$
$$+d_1(x,y)]^{l_1} \cdot [(y')^2 + c_2(x,y)y' + d_2(x,y)]^{l_2} \cdot \ldots\ldots \cdot [(y')^2 + c_s(x,y)y' + d_s(x,y)]^{l_s} = 0,$$

где $m + 2s = n$.

Так как данное уравнение распадается на множители то, следовательно, для решения уравнения необходимо каждый из множителей приравнять нулю. Решением уравнения будет объединение решений всех уравнений – приравненных нулю множителей. Что касается линейных множителей, то их интегрирование полностью соответствует тем методам, которые рассмотрены для дифференциальных уравнений 1–го порядка, разрешённых относительно производной. Методы же интегрирования уравнений, соответствующих квадратичным множителям, рассматриваются в последующих параграфах данной главы учебника.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$.

Решение. Данное уравнение разбивается но множители $(y' - x)(y' - y) = 0$. Приравнивая каждый множитель нулю, имеем: $y' - x = 0$ и $y' - y = 0$. Решая каждое из данных уравнений, получим: $dy = x\,dx,\;\; y = \dfrac{x^2}{2} + C$; $\dfrac{dy}{y} = dx$, $\ln y = x + \ln C$, $y = Ce^x$. Следовательно, решение данной задачи записывается в виде: $y = \dfrac{x^2}{2} + C$; $y = Ce^x$.

§10. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Все следующие рассматриваемые дифференциальные уравнения 1–го порядка, не разрешённые относительно производной, интегрируются с помощью *метода введения параметра*, и ответ, как правило, представляет собой выражение переменных уравнения x и y в виде зависимости от этого параметра, то есть решение уравнения представляется в параметрической форме.

Замечание. Всюду в дальнейшем в методе введения параметра следует проводить замену $y' = p$, но, как правило, не наоборот. Иначе может оказаться, что решение уравнения содержит две произвольные постоянные, а уравнение первого порядка в решении должно иметь только одну. Данный факт будет далее обоснован и прокомментирован в замечании при рассмотрении интегрирования уравнения вида $y = f(x, y')$.

Рассмотрим последовательно виды дифференциальных уравнений 1–го порядка, не разрешённых относительно производной, которые интегрируются с помощью метода введения параметра.

1. Рассмотрим интегрирование уравнений вида $x = f(y')$. Введём параметр $y' = p$. Это введение параметра здесь и в дальнейшем следует рассматривать как добавление к дан-

ному уравнению ещё и уравнение определения параметра, то есть практически следует решить систему двух уравнений: $\begin{cases} x = f(y') \\ y' = p \end{cases}$, при решении которой два переменных этой системы следует выразить через третье переменное p . Решение данной системы проводится далее следующим образом: $\begin{cases} x = f(p) \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = f(p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = f(p) \\ dy = pdx \end{cases}$, $\begin{cases} x = f(p) \\ dy = p\, f'(p)dp \end{cases}$, и в результате интегрирования получаем искомое решение в виде $\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)\, dp + C \end{cases}$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $x = y' + (y')^3$.

Решение. Решаем методом введения параметра: $\begin{cases} x = y' + (y')^3 \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ dy = pdx \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ dy = p(1 + 3p^2)dp \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ y = \int p(1 + 3p^2)\, dp + C \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ y = \int (p + 3p^3)\, dp + C \end{cases}$. Ответ: $\begin{cases} x = p + (p)^3 \\ y = \frac{p^2}{2} + \frac{3}{4}p^4 + C \end{cases}$.

2. Рассмотрим интегрирование уравнений вида $y = f(y')$. Введём параметр $y' = p$. Далее решаем систему: $\begin{cases} y = f(y') \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} y = f(p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$, $\begin{cases} y = f(p) \\ dx = \frac{dy}{p} \end{cases}$, $\begin{cases} y = f(p) \\ dx = \frac{f'(p)dp}{p} \end{cases}$, и в результате интегрирования получаем искомое решение в виде $\begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C \end{cases}$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y = 3 + 2(y')^3$.

Решение. Решаем методом введения параметра: $\begin{cases} y = 3 + 2(y')^3 \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 + 2(p)^3 \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 + 2(p)^3 \\ dx = \frac{dy}{p} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 + 2(p)^3 \\ dx = \frac{6p^2dp}{p} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 + (p)^3 \\ dx = 6pdp \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 + (p)^3 \\ x = 6\int p\, dp + C \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} y = 3 + (p)^3 \\ x = 3p^2 + C \end{cases}$.

3. Рассмотрим интегрирование уравнений вида $y = f(x, y')$. Введём параметр $y' = p$. Далее решаем систему: $\begin{cases} y = f(x, y') \\ y' = p \end{cases}$ или $\begin{cases} y = f(x, p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$. Рассмотрим теперь равенство дифференциалов обеих частей уравнения $y = f(x, p)$: $\begin{cases} dy = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} dp \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$.

Обе части первого уравнения делим на dx и заменяем слева $\frac{dy}{dx}$ на p. В результате имеем: $\begin{cases} p = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx} \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$ и $\begin{cases} p = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx} \\ y = f(x,p) \end{cases}$. (10.1)

Далее уравнение $p = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx}$, содержащее только переменные x и p, интегрируется как дифференциальное уравнение 1–го порядка, разрешённое относительно производной, и, как правило, определяется его решение в виде $x = \varphi(p, C)$. С учётом данного результата далее система (10.1) записывается в следующей эквивалентной форме: $\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(x,p) \end{cases}$. И, следовательно, окончательный вид общего решения данного уравнения $y = f(x, y')$ имеет вид: $\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$.

Замечания. 1). Уравнение $p = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ в (10.1) может быть получено дифференцированием обеих частей уравнения $y = f(x,p)$ по x в предположении, что p является функцией от x с заменой слева $\frac{dy}{dx}$ на p. Поэтому такой метод интегрирования уравнения $y = f(x, y')$, также как и последующего уравнения $x = f(y, y')$, *называют методом интегрирования с помощью дифференцирования.* В связи с этим при решении уравнения типа $y = f(x, y')$ после замены в нём y' на p для получения (10.1) следует проводить указанное дифференцирование с заменой в его результате слева $\frac{dy}{dx}$ на p.

2). Необходимо обратить внимание, что при решении первого уравнения системы (10.1) и, по аналогии, в последующем первого уравнения системы (10.2), кроме общего решения в параметрической форме, уравнения могут иметь дополнительно частные решения, которые не входят в состав полученного общего решения.

3). Покажем справедливость отмеченного ранее в начале §10 утверждения замечания о том, что в методе введения параметра следует проводить замену $y' = p$, но не наоборот. Действительно, если в уравнении $p = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ провести обратную замену p на y', то получим уравнение второго порядка $y' = \frac{\partial f(x,y')}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y')}{\partial p} y''$, которое в общем решении будет иметь две произвольные постоянные, а данное уравнение $y = f(x, y')$ в соответствующем общем решении должно иметь только одну произвольную постоянную. Следовательно, в этом случае получается уравнение, не эквивалентное данному уравнению.

Прежде, чем представить примеры на интегрирование уравнений вида $y = f(x, y')$ перейдём к следующему виду уравнений.

4. Рассмотрим интегрирование уравнений вида $x = f(y, y')$. Введём параметр $y' = p$. Далее решаем систему: $\begin{cases} x = f(y, y') \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} x = f(y, p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$. Применим теперь отмеченный метод интегрирования с помощью дифференцирования, а именно, продифференцируем обе части первого уравнения системы по y, полагая при этом p функцией от y с заменой в левой части полученного результата дифференцирования $\frac{dx}{dy}$ на $\frac{1}{p}$. В итоге последняя система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\frac{dp}{dy} \\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\frac{dp}{dy} \\ x = f(y, p) \end{cases}. \qquad (10.2)$$

В результате интегрирования первого уравнения этой системы получаем: $\begin{cases} y = \varphi(p, C) \\ x = f(y, p) \end{cases}$.

Отсюда и следует общее решение данного уравнения: $\begin{cases} y = \varphi(p, C) \\ x = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$.

Примерами на метод интегрирования с помощью дифференцирования служат следующие известные дифференциальные уравнения рассматриваемого вида:

5. *Дифференциальные уравнения Лагранжа и Клеро*. Если дифференциальное уравнение 1–го порядка, не разрешённое относительно производной, можно представить в виде:

$$y = xf(y') + g\,(y') \quad , \qquad (10.3)$$

то такое дифференциальное уравнение называется *уравнением Лагранжа*. Частным случаем уравнения Лагранжа, когда $f(y') = y'$ такое уравнение

$$y = xy' + g(y') \qquad (10.4)$$

называется *уравнением Клеро*. Так как уравнения Лагранжа и Клеро являются частными случаями уравнения $y = f(x, y')$, то они интегрируются методом интегрирования с помощью дифференцирования.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y = x(y')^2 + y'$.

Решение. Данное уравнение, очевидно, является уравнением Лагранжа. Решаем его методом введения параметра: $\begin{cases} y = x(y')^2 + y' \\ y' = p \end{cases}$, $\begin{cases} y = x(p)^2 + p \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases}$. Далее, по аналогии с решением уравнения $y = \varphi(x, y')$, применяем метод интегрирования с помощью дифференцирования:

$$\begin{cases} p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}. \\ y = x(p)^2 + p \end{cases} \qquad (10.5)$$

Решим сначала отдельно первое уравнение системы (10.5). Его можно записать в виде:

$\frac{dx}{dp}(p-p^2)=2xp+1$, $\frac{dx}{dp}+\frac{2p}{p^2-p}x=-\frac{1}{p^2-p}$. Проверим сразу возможность потери решений, вытекающих из $p=0$ и $p=1$. Легко непосредственно проверить, что из $y'=0$, то есть $y=C$, следует частное решение данного уравнения $y=0$, а из $y'=1$, то есть $y=x+C$, следует частное решение $y=x+1$. Решаем данное линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной при $p\neq 0$ и $p\neq 1$: $\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=-\frac{1}{p^2-p}$, $\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=0$, $x=C\frac{1}{(p-1)^2}$. Полагая $x=C(p)\frac{1}{(p-1)^2}$, решаем далее $\frac{dC(P)}{dp}\frac{1}{(p-1)^2}=-\frac{1}{p^2-p}$,

$dC(\mathrm{p})=-\frac{p-1}{p}dp$, $C(p)=\ln|p|-p+C$. И находим решение первого уравнения системы (10.5) $x=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2}$. Теперь определяем решение системы (10.5): $\begin{cases} x=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2} \\ y=x(p)^2+p \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2} \\ y=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2}(p)^2+p \end{cases}$. Так как уравнение имеет частные решения $y=0$ и $y=x+1$, не входящие в состав полученного общего решения, то ответом данной задачи является следующая совокупность решений: $\begin{cases} x=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2} \\ y=\frac{\ln|p|-p+C}{(p-1)^2}(p)^2+p \end{cases}$, $y=0$, $y=x+1$.

Пример. Решить в общем виде дифференциальное уравнение Клеро: $y=x\,y'+g(y')$.
Решение. Решаем уравнение Клеро в соответствии с решением уравнения $y=f(x,y')$, методом введения параметра и затем интегрирования с помощью дифференцирования:

$\begin{cases} y=xy'+g(y') \\ y'=p \end{cases}$, $\begin{cases} y=xp+g(p) \\ \frac{dy}{dx}=p \end{cases}$, $\begin{cases} p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{dg(p)}{dp}\frac{dp}{dx} \\ y=xp+g(p) \end{cases}$,

$\begin{cases} 0=x\frac{dp}{dx}+\frac{dg(p)}{dp}\frac{dp}{dx} \\ y=xp+g(p) \end{cases}$, $\begin{cases} 0=\frac{dp}{dx}(x+\frac{dg(p)}{dp}) \\ y=xp+g(p) \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{dp}{dx}=0,\ x+\frac{dg(p)}{dp}=0 \\ y=xp+g(p) \end{cases}$. Таким образом, система распадается на две системы. Решаем каждую из них: 1) $\begin{cases} \frac{dp}{dx}=0 \\ y=xp+g(p) \end{cases}$,

$\begin{cases} p=\mathrm{C} \\ y=xp+g(p) \end{cases}$ и, следовательно: $y=Cx+g(C)$ – общее решение уравнения Клеро, представляющее собой, очевидно, однопараметрическое семейство прямых линий с различными угловыми коэффициентами.

2). $\begin{cases} x=-\frac{dg(p)}{dp} \\ y=xp+g(p) \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\frac{dg(p)}{dp} \\ y=-\frac{dg(p)}{dp}p+g(p) \end{cases}$ – это частное решение уравнения Клеро. Ответ – совокупность общего и частного решений.

Замечание. Геометрически решения уравнения Клеро можно интерпретировать следующим образом. Общее решение данного уравнения – это множество прямых линий с различными угловыми коэффициентами, а частное решение – это кривая, которая в каждой своей точке касается одной из прямых данного множества прямых. Эта кривая – так называемая *огибающая семейства прямых линий* общего решения уравнения Клеро, являющаяся (как будет доказано в §12 в примере на уравнение Клеро) *особым* его решением.

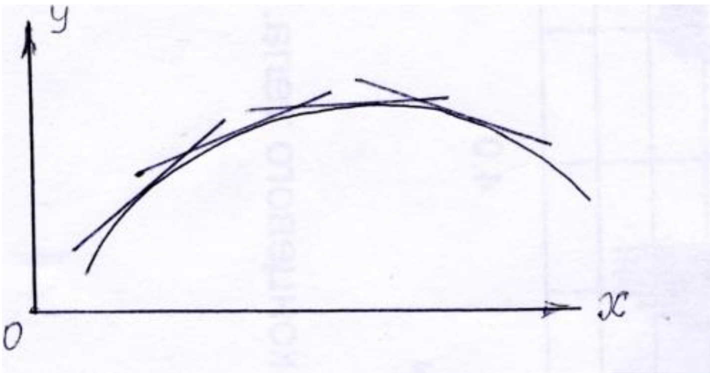

Рис.5. Общее решение (семейство прямых) и особое решение (огибающая) уравнения Клеро.

Можно показать, что эту кривую – огибающую, как частное (особое) решение уравнения Клеро, можно получить следующими двумя способами:

1 способ. Составим систему из уравнения Клеро в виде $y - xy' - g(y') = 0$ и частной производной левой части по y' : $\begin{cases} y - xy' - g(y') = 0 \\ -x - \frac{dg(y')}{dy'} = 0 \end{cases}$. Исключив y' из этой системы, получаем параметрическое уравнение кривой: $\begin{cases} x = -\frac{dg(y')}{dy'} \\ y = -\frac{dg(y')}{dy'} y' + g(y') \end{cases}$. С точностью до замены здесь параметра y' на p мы и получаем частное решение уравнения Клеро.

2 способ. Представим общее решение уравнения Клеро в виде $y - Cx - g(C) = 0$ и затем составим систему из этого общего решения и частной производной его левой части по C : $\begin{cases} y - Cx - g(C) = 0 \\ -x - \frac{dg(C)}{dC} = 0 \end{cases}$. Исключая C, имеем $\begin{cases} x = -\frac{dg(C)}{dC} \\ y = -\frac{dg(C)}{dC} C + g(C) \end{cases}$, то есть опять частное решение уравнения Клеро, где параметром является C .

Указанные способы определения частного решения уравнения Клеро и являются основой определения так называемых *особых решений* дифференциальных уравнений 1-го порядка, геометрический смысл которых совпадает с рассмотренным выше геометрическим смыслом частного решения уравнения Клеро.

Глава 5. **Особые решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.**

§11. Определение особых решений.

Особым решением дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x,y,y')=0$ называется такое его решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, то есть через каждую его точку проходит с той же касательной другое, не совпадающее с ним решение данного уравнения. Очевидно, в каждой точке особого решения выполнены условия существования решения задачи Коши, но не выполнены условия единственности. Так как из условия теоремы Коши, рассмотренной в §4, следует, что для единственности решения задачи Коши необходимо выполнение условия непрерывности производной $\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$, то, очевидно, это условие нарушается в области, в которой $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$. Следовательно, особые решения могут принадлежать именно данной области, что и является одним из основных условий их определения. Другим важным условием является отмеченное в определении особого решения её касание другого не совпадающего с ним решения данного уравнения. Эти условия и полагаются в рассматриваемые далее два метода определения особых решений дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Рассмотрим *первый метод определения особого решения* уравнения $F(x,y,y')=0$, алгоритм которого состоит в следующем. Сначала определяем множество значений (x,y) на плоскости Oxy, на котором нарушается условие единственности теоремы Коши. Для этого сначала на первом этапе алгоритма метода составляем следующую систему:

1). $\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases}$ и исключаем из неё y'. Существуют, очевидно, две возможности. Рассмотрим сначала первую из них. Если y' не исключается, и, следовательно, область нарушения единственности пуста, то, следовательно, и особых решений нет, и в этом случае уже на первом этапе алгоритма данный метод определения особого решения закончен.

Если же y' исключается, то в результате получаем множество значений функции $\Phi(x,y)=0$, которая называется *дискриминантной кривой.* Данная функция может быть представлена в виде простейших множителей $\Phi(x,y)=\varphi_1(x,y)\varphi_2(x,y)\ldots\varphi_m(x,y)=0$, каждый из которых далее называем *ветвью дискриминантной кривой*. На последующих этапах алгоритма исследования следует рассматривать каждую из этих ветвей. Без ограничения общности исследуемую ветвь обозначим через $\varphi(x,y)=0$.

2). Проверяем непосредственной подстановкой, является ли $\varphi(x,y)=0$ решением данного уравнения. Если решением не является, то не является и особым решением и на данном этапе исследование этой ветви завершается. Если же $\varphi(x,y)=0$ является решением данного уравнения, то переходим к следующему этапу алгоритма данного метода.

3). Так как условие единственности теоремы Коши является лишь необходимым условием, но, к сожалению, не достаточным, то, несмотря на нарушение условия единственности, фактически единственность может и не нарушаться. Как провести данное исследование в общем случае – рекомендаций нет, и установление факта действительного нарушения единственности в каждом отдельном случае проводится непосредственно каким-либо образом применительно только для рассматриваемого случая (что будет продемонстрировано на иллюстрируемых далее примерах). Итак, если единственность фактически не нарушена, то исследуемая ветвь дискриминантной кривой является лишь частным решением уравнения, если же единственность действительно нарушена, то эта исследуемая ветвь $\varphi(x,y)=0$ является особым решением данного уравнения.

Пример. Исследовать, имеются ли особые решения у линейного дифференциального уравнения $y'+p(x)y=q(x)$.

Решение. В соответствии с методом определения особых решений составляем следующую систему: $\begin{cases} y'+p(x)y-q(x)=0 \\ \frac{\partial(y'+p(x)y-q(x))}{\partial y'}=1\neq 0 \end{cases}$. Так как здесь равенства нулю во втором уравнении системы не достигается, то рекомендуемого исключения y' осуществить нельзя и, следовательно, линейное уравнение особых решений не имеет.

Пример. Исследовать, имеет ли особые решения уравнение $(y'-1)^2-y=0$.

Решение. Составляем систему: $\begin{cases} (y'-1)^2-y=0 \\ \frac{\partial((y'-1)^2-y)}{\partial y'}=2(y'-1)=0 \end{cases}$. В данном случае y' исключается и дискриминантная кривая имеет вид $y=0$ и состоит всего лишь из одной ветви. Так как непосредственная подстановка показывает, что $y=0$ решением уравнения не является, то, следовательно, данное уравнение особых решений не имеет.

Пример. Исследовать, имеет ли особые решения уравнение $(y')^2=y^3$.

Решение. Составляем систему: $\begin{cases} (y')^2-y^3=0 \\ \frac{\partial((y')^2-y^3)}{\partial y'}=2\,y'=0 \end{cases}$. Исключая y' , получаем дискриминантную кривую $y=0$, которая в этом случае является решением данного уравнения. Для проверки фактического нарушения единственности проведём решение данного уравнения. $(y')^2=y^3$, $y'=\pm\, y^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}=\pm\, dx$, $-\frac{2}{\sqrt{y}}=\pm(x+C)$, $\frac{4}{y}=(x+C)^2$, $y=\frac{4}{(x+c)^2}$.

Множество решений данного уравнения $y = \frac{4}{(x+c)^2}$ представляет собой геометрически множество ветвей гипербол над осью Ox , не касающихся этой оси, которая является для них асимптотой.

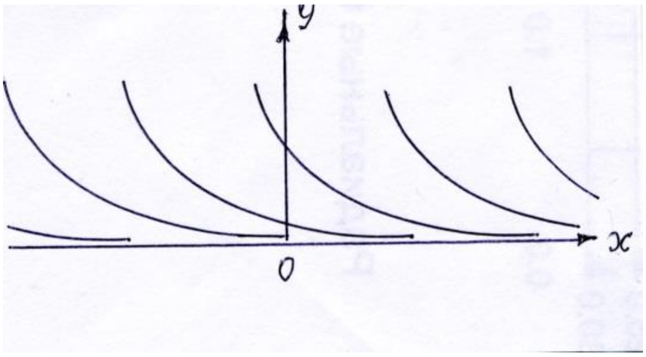

Рис.6. Геометрическая интерпретация множества решений $y = \frac{4}{(x+C)^2}$ *и решения* $y = 0$.

Следовательно, в точках решения $y = 0$ единственность фактически не нарушается и $y = 0$ – только частное решение данного уравнения и особым решением не является.

Пример. Исследовать, имеет ли особые решения уравнение $(y')^2 = 4y$.

Решение. Составляем систему: $\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ \frac{\partial((y')^2-4y)}{\partial y'} = 2\,y' = 0 \end{cases}$. Исключая y', получаем дискриминантную кривую $y = 0$, которая в этом случае является решением данного уравнения. Для проверки фактического нарушения единственности проведём решение данного уравнения. $(y')^2 = 4y$, $y' = \pm\, 2\sqrt{y}$, $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm\, dx$, $\sqrt{y} = \pm\,(x + C)$, $y = (x + C)^2$. Следовательно, множество решений $y = (x + C)^2$ данного уравнения $(y')^2 = 4y$ представляет собой множество парабол с вершинами на оси Ox , то есть параболы касаются в точках своих вершин с не совпадающей с ними прямой $y = 0$.

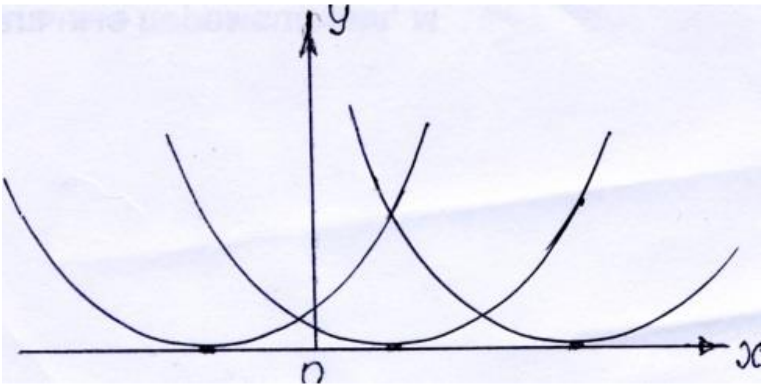

Рис.7. *Геометрическая интерпретация множества решений* $y = (x + C)^2$ *и решения* $y = 0$.

Таким образом, вследствие нарушения единственности, $y = 0$ является особым решением данного уравнения $(y')^2 = 4y$.

§12. Особое решение, как огибающая однопараметрического семейства кривых.

Рассмотрим *второй метод определения особого решения* дифференциального уравнения 1-го порядка. Сначала дадим следующее определение. *Огибающей однопараметрического семейства кривых* называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из не совпадающей с ней кривой данного семейства кривых. В курсах математического анализа и дифференциальной геометрии даётся метод определения такой огибающей однопараметрического семейства кривых. Используем основу данного метода применительно к рассматриваемому методу определения особого решения. Действительно, если множество траекторий решений дифференциального уравнения имеет огибающую, то данная огибающая, очевидно, удовлетворяя в каждой точке уравнению, является его особым решением.

Итак, по второму методу определения особого решения уравнения $F(x,y,y')=0$ сначала определяется общее решение данного уравнения в виде $f(x,y.C)=0$. Для определения области плоскости Oxy, в которой возможно определение огибающей, составляется система: $\begin{cases} f(x,y.C)=0 \\ \frac{\partial f(x,y.C)}{\partial C}=0 \end{cases}$. Из данной системы исключаем C.

Если C не исключается, то искомая область пуста и огибающей, а следовательно, и особого решения у данного уравнения нет.

Если C исключается, то определяется множество значений функции $\Psi(x,y)=0$, называемой так же, как и в предыдущем методе, *дискриминантной кривой*. Данная функция может быть представлена в виде простейших множителей $\Psi(x,y)=\psi_1(x,y)\psi_2(x,y)\dots\psi_k(x,y)=0$, являющихся *ветвями дискриминантной кривой*. Количество ветвей данной дискриминантной кривой может отличаться от аналогичного количества ветвей дискриминантной кривой, получаемой при применении первого метода определения особого решения. Однако, если данное уравнение имеет особое решение, то оно определяется по любому из рассматриваемых методов и соответствующая ветвь обязательно присутствует в каждой из дискриминантных кривых.

Далее по рассматриваемому методу исследуется каждая ветвь дискриминантной кривой $\Psi(x,y)=0$. Обозначим текущую исследуемую ветвь через $\psi(x,y)=0$. По данному методу далее вычисляются частные производные функции левой части $f(x,y.C)=0$ общего решения данного уравнения $\frac{\partial f(x,y.C)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y.C)}{\partial y}$ и рассматриваются по отношению к нулю значения этих производных на множестве $\psi(x,y)=0$ исследуемой ветви дискриминантной кривой. Другими словами, рассматривается по отношению к нулю на множестве точек рассматриваемой ветви дискриминантной кривой $\psi(x,y)=0$ величина следующей суммы:

$$[\,(\frac{\partial f(x,y.C)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y.C)}{\partial y})^2]\Big|\,\psi_{(x,\,y)\,=\,0} = \alpha \quad (\text{где } \alpha = 0 \text{ или } \alpha \neq 0)\,.$$

Если $\alpha \neq 0$, то значит исследуемая ветвь дискриминантной кривой $\psi(x,y) = 0$ является огибающей однопараметрического семейства кривых $f(x,y.C) = 0$, и, следовательно, является особым решением рассматриваемого дифференциального уравнения. Очевидно, для этого достаточно не равенства нулю одной из частных производных. Если же $\alpha = 0$, то требуется дополнительное исследование, например, по алгоритму первого метода определения особого решения.

Пример. Определить особое решение уравнения Клеро $y = xy' + g(y')$.

Решение. В §10 определено общее решение данного уравнения в виде $y = Cx + g(C)$. Применим второй метод определения особого решения, то есть составляем систему:

$$\begin{cases} y - Cx - g(C) = 0 \\ -x - \frac{dg(C)}{dC} = 0 \end{cases}.$$

Исключая из этой системы C , получаем дискриминантную кривую в параметрической форме: $\begin{cases} x = -\frac{dg(C)}{dC} \\ y = -\frac{dg(C)}{dC}C + g(C) \end{cases}$, то есть принимаем здесь C за параметр, и как, было отмечено при решении уравнения Клеро в §10, определяем частное решение уравнения Клеро. По второму методу – это единственная ветвь дискриминантной кривой. Предполагая теперь, что первое уравнение последней системы разрешено относительно C, то есть, может быть записано в виде $C = \varphi(x)$, то, подставляя $C = \varphi(x)$ во второе уравнение этой системы, получим дискриминантную кривую в виде $y - \varphi(x)x - g(\varphi(x)) = 0$. Так как уже частная производная $\frac{\partial[y-\varphi(x)x-g(\varphi(x))]}{\partial y} = \alpha = 1 \neq 0$, то, следовательно, $\alpha \neq 0$, и по второму методу можно утверждать, что исследуемая кривая является огибающей, а, следовательно, и особым решением уравнения Клеро. Иллюстрацией данного утверждения является рис. 5 на стр. 42.

Замечание. В решении уравнения Клеро особым решением является такое его решение, которое не входит в состав общего его решения. Однако утверждать, что особое решение при решении дифференциальных уравнений – это частное решение, записанное в ответе и не входящее в состав однопараметрического семейства решений, не верно, как показывает пример, цитируемый в учебнике [17]. Это пример уравнения $(y')^3 - 4xyy' + y^2 = 0$, которое имеет решения: $y = C(x-C)^2$, $y = \frac{4}{27}x^3$. Данное уравнение имеет особое решение $y = 0$, которое входит в состав общего однопараметрического семейства решений при $C = 0$.

Глава 6. **Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.**

§13. Уравнения, интегрируемые методами понижения порядка.

Содержанием данной главы являются некоторые методы понижения порядка дифференциальных уравнений высшего порядка и использования рассмотренных методов интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1. Дифференциальные уравнения следующего типа: $y^{(n)} = f(x)$, очевидно, решаются последовательным интегрированием и, следовательно, последовательным понижением порядка до получения окончательного результата: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, $y^{(n-2)} = \iint f(x)\,dxdx + C_1x + C_2$, … и т.д. В итоге имеем: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''' = 24x$.

Решение. Последовательно интегрируя данное уравнение, получаем: $y'' = 12x^2 + C_1$, $y' = 4x^3 + C_1x + C_2$, и окончательно: $y = x^4 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$.

2. Дифференциальное уравнение вида $F\big(x, y^{(k)}y^{(k+1)} \dots y^{(m)}\big) = 0$, $k \geq 1$, $m \geq 2$, не содержащее искомой функции и возможно её производных до порядка k включительно. Порядок такого дифференциального уравнения может быть понижен на k единиц с помощью подстановки $y^{(k)} = z(x)$. Таким образом, данное уравнение сводится к уравнению вида: $F\big(x, z, z', z'', \dots, z^{(m-k)}\big) = 0$. Если это уравнение порядка $m - k$ решено, то следует провести обратную подстановку $z = y^{(k)}$, решить полученное уравнение порядка k и определить ответ в переменных, в которых задано данное уравнение.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' = \frac{y'}{x}$.

Решение. Применяем подстановку $y' = z(x)$. В этом случае, очевидно, $y'' = z'$, и данное уравнение переводится в уравнение $z' = \frac{z}{x}$, решая которое, имеем $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\ln z = \ln x + \ln C_1$, $z = C_1x$. Применив обратную подстановку, интегрируем до получения ответа – решения данного уравнения: $y' = C_1x$, $y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$.

3. Уравнение, не содержащее независимого переменного x . Порядок такого дифференциального уравнения вида $F\big(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\big) = 0$, $n \geq 2$, может быть понижен на единицу с помощью подстановки $y' = z(y)$. В этом случае $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}y' = z\frac{dz}{dy}$,

и, как легко видеть, аналогично далее определяем $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(z\frac{dz}{dy})}{dy}\frac{dy}{dx} = [(\frac{dz}{dy})^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}]\, y' =$
$= z\,(\frac{dz}{dy})^2 + z^2\frac{d^2z}{dy^2}$ и т.д. В результате данной подстановки порядок уравнения понижается на единицу. После его решения проводим обратную подстановку $z = y'$ и приходим к окончательному ответу, решив полученное уравнение первого порядка.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $yy'' = (y')^2$.

Решение. Применяя подстановку $y' = z(y)$ и, следовательно, $y'' = z\frac{dz}{dy}$, получаем уравнение $y\,z\frac{dz}{dy} = (z)^2$ или $z\left(y\frac{dz}{dy} - z\right) = 0$. Из $z = 0$ следует $y' = 0$ и $y = C$, являющееся решением данного уравнения. Из $y\frac{dz}{dy} - z = 0$ следует $\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$,
$\ln z = \ln y + \ln C_1$, $z = C_1 y$.

После обратной подстановки имеем $y' = C_1 y$, $\frac{dy}{y} = C_1 dx$, $\ln y = C_1 x + \ln C_2$, и окончательно имеем ответ $y = C_2 e^{C_1 x}$, в состав которого при $C_1 = 0$ входит и решение $y = C$, в том числе и $y = 0$.

4. Рассмотрим интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых $F\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\big) = 0$ является производной некоторого дифференциального выражения $\Phi\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}\big)$ порядка $(n-1)$, то есть выполняется равенство:

$$F\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\big) = \frac{d\Phi\big(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-1)}\big)}{dx} = 0 \ .$$

Очевидно, порядок данного уравнения понижается на единицу, так как решение данного уравнения сводится к решению уравнения $\Phi\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}\big) = C$. Решим данным методом предыдущий пример.

Пример. Решить предыдущее дифференциальное уравнение $yy'' - (y')^2 = 0$, преобразовав левую часть уравнения к виду производной некоторой функции.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = 0$. Тогда в этой форме уравнение может быть записано в виде $\frac{d(\ln y' - \ln y)}{dx} = 0$ и, следовательно, $\ln y' - \ln y = \ln C_1$,
$\frac{y'}{y} = C_1$. Далее, очевидно, $\frac{dy}{y} = C_1 dx$, $\ln y = C_1 x + \ln C_2$.

Отсюда следует общее решение данной задачи: $y = C_2 e^{C_1 x}$. При этом в состав полученного общего решения входят также и решения $y = C$. Это решения данного уравнения, полученные приравниванием нулю делителей y' и y – результата неэквивалентного преобразования данного уравнения.

§14. Уравнения, однородные относительно функции и её производных.

Если дифференциальное уравнение $F\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\big) = 0$ обладает свойством однородности относительно $y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$, то есть для любого значения t выполняется тождество $F\big(x, ty, ty', ty'', ty''', \dots, ty^{(n)}\big) \equiv t^k F\big(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\big)$, то порядок данного уравнения понижается с помощью замены переменных

$$\begin{cases} y = e^{\int z dx} \\ x = x \end{cases},$$

где z – новая функция от x, при этом, очевидно, $z = \frac{y'}{y}$. В этом случае $y' = zy = ze^{\int z dx}$, $y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)e^{\int z dx}$, $y''' = z''y + 2z'y' + zy'' = (z'' + 3zz' + z^3)e^{\int z dx}$ и т.д. Проведя подстановку в уравнение, множитель $e^{\int z dx}$ (как t) выносим вследствие однородности. Производные функции $y(x)$ выражаются через производные функции $z(x)$ на единицу меньшего порядка и, следовательно, порядок данного уравнения при этом понижается на единицу. Переходя в результате интегрирования преобразованного уравнения с помощью обратной подстановки к исходным переменным системы, и, проинтегрировав полученное уравнение первого порядка, получаем ответ задачи.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.

Решение. Так как, очевидно, данное уравнение является однородным по y, y' и y'', то применяем подстановку $\begin{cases} y = e^{\int z dx} \\ x = x \end{cases}$. При этом $y' = ze^{\int z dx}$ и $y'' = (z' + z^2)e^{\int z dx}$. Подставляя в уравнение, получим $e^{\int z dx}(z' + z^2)e^{\int z dx} - (ze^{\int z dx})^2 = 6x(e^{\int z dx})^2$.

Сокращая на $(e^{\int z dx})^2$, получаем уравнение $z' + z^2 - z^2 = 6x$ или $z' = 6x$. Отсюда $dz = 6x dx$, $z = 3x^2 + C_1$. В результате обратной подстановки $z = \frac{y'}{y}$ получаем $\frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1$, $\ln y = x^3 + C_1 x + \ln C_2$ и окончательно имеем ответ задачи $y = C_2 e^{x^3 + C_1 x}$.

Глава 7. **Системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения высшего порядка.**

§15. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Системой дифференциальных уравнений в нормальной форме или, что то же, *нормальной системой дифференциальных уравнений*, называется следующая система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases} \quad . \tag{15.1}$$

Порядком системы дифференциальных уравнений называется количество входящих в данную систему уравнений, совпадающее с количеством неизвестных функций и суммарным порядком производных этих функций.

Решением системы дифференциальных уравнений (15.1) называется такая совокупность функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, в результате подстановки которой в данную систему, эта система становится системой справедливых тождеств.

Общим решением системы дифференциальных уравнений (15.1) называется совокупность функций $y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $i = 1,2, \dots, n$, зависящих от n произвольных постоянных, которая при каждом наборе значений постоянных представляет собой решение данной системы дифференциальных уравнений. И, наоборот, любая совокупность решений системы уравнений содержится в этом семействе при определённых значениях постоянных.

Каждое решение в составе общего решения при определённых значениях постоянных является *частным решением* данной системы.

Запись нормальной системы дифференциальных уравнений в виде (15.1) называется *координатной формой записи* такой системы.

Перейдём теперь к рассмотрению в последующих §16 и §17 методов взаимного сведения проблем интегрирования систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высшего порядка, направленность которых изображена на следующем рис. 8 :

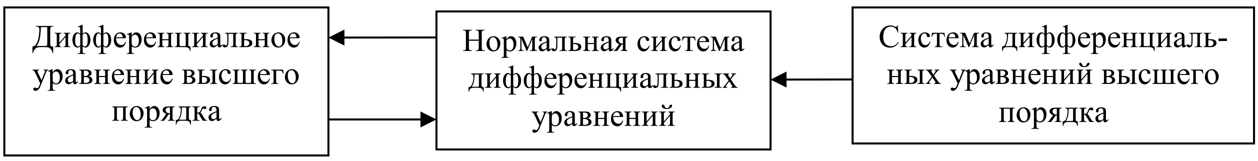

Рис.8. Взаимное сведение задач интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Стрелки означают сведение интегрирования одного из объектов к интегрированию другого.

§16. Сведение задачи интегрирования системы уравнений к задаче интегрирования дифференциального уравнения высшего порядка. Метод исключения.

Рассмотрим метод сведения задачи интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений (15.1) к задаче интегрирования дифференциального уравнения высшего порядка, называемый *методом исключения.* Данный метод состоит в следующем. Сначала продифференцируем обе части первого уравнения (15.1) по x . В результате получим:

$$\frac{\partial^2 y_1}{dx^2} = y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot f_n =$$

$= F_2\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Так как все производные и функции правой части производной y_1'' являются функциями переменных $x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, то, следовательно, в результате данного дифференцирования получаем некоторую функцию F_2 этих же переменных.

Далее аналогично дифференцируем обе части уравнения $y_1'' = F_2\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$.

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot f_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\cdot f_n =$$

$= F_3\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Продолжаем данный последовательный процесс дифференцирования функции $y_1(x)$ до вычисления производной $y_1^{(n-1)} = F_{n-1}\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, а затем – заключительной производной $y_1^{(n)} = F_n\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Результат такого последовательного дифференцирования сведём в следующую систему дифференциальных уравнений и отдельное уравнение:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ y_1'' = F_2\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ y_1''' = F_3\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)\,. \end{cases} \tag{16.1}$$

$$y_1^{(n)} = F_n\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad . \tag{16.2}$$

Составим следующий определитель, называемый *якобианом,* и полагаем, что его значение отлично от нуля:

$$\frac{\partial(f_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})}{\partial(y_2, y_3, y_4, \dots, y_n)} \neq 0 \quad . \tag{16.3}$$

Как известно из курса математического анализа, если такой якобиан отличен от нуля, то по известной теореме о системе неявных функций, система (16.1) может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_4 = \varphi_4(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \end{cases} \quad . \tag{16.4}$$

Подставляя (16.4) в (16.2) , получаем следующее дифференциальное уравнение высшего порядка:

$$y_1^{(n)} = F_n\,(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) =$$

$$= F_n\,\Big(x, y_1, \varphi_2\Big(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\Big), \varphi_3\Big(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\Big), \dots, \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)})\Big).$$

Следовательно, в итоге:

$$y_1^{(n)} = \Phi\Big(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\Big) \quad . \tag{16.5}$$

Таким образом, интегрирование данной системы (15.1) сведено к интегрированию дифференциального уравнения высшего порядка (16.5) . Действительно, если уравнение

(16.5) решено и определено его решение $y_1 = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, то достаточно подставить это решение в правую часть (16.4), чтобы в результате получить окончательное решение нормальной системы дифференциальных уравнений (15.1).

Замечания. 1). Данный метод сведения интегрирования системы (15.1) к интегрированию уравнения высшего порядка (16.5) является убедительным подтверждением того факта, что общее решение системы дифференциальных уравнений n – го порядка содержит n произвольных постоянных.

2). На основании проведенной реализации метода исключения можно сформулировать условия применимости метода исключения, которыми являются, очевидно, условия достаточной дифференцируемости функций правых частей уравнений системы (15.1) и неравенство нулю соответствующего якобиана (16.3). При этом, например, если бы при применении метода исключения по y_1 , как в рассмотренном случае, якобиан (16.3) оказался бы равным нулю, то следовало бы провести реализацию этого метода по другой переменной из их совокупности y_i , $i = 2, \dots, n$, по которой соответствующий якобиан окажется не равным нулю.

Пример. Применить метод исключения к системе: $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0 \end{cases}$, то есть свести задачу её интегрирования к задаче интегрирования уравнения высшего порядка.

Решение. Сначала применим метод исключения по y . Так как уравнения данной системы линейные, то метод исключения сводится к исключению одной из переменных, в данном случае переменной x . Продифференцировав второе уравнение, имеем: $\ddot{x} - \ddot{y} + \dot{x} = 0$ или $\ddot{y} = \ddot{x} + \dot{x}$. Подставив в первое уравнение, имеем $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0$. Получено лишь уравнение второго порядка и для интегрирования системы предстоит решать уравнение 1-го порядка относительно x . Таким образом, полностью интегрирование системы к уравнению высшего порядка не сведено.

Теперь применим метод исключения по x . Для этого продифференцируем первое уравнение данной системы. В результате получим $\dddot{x} + \ddot{x} + \ddot{y} - 2\dot{y} = 0$. Подставляя теперь в это уравнение на основе второго уравнения $\ddot{y} = \ddot{x} + \dot{x}$ и $\dot{y} = \dot{x} + x$ в итоге имеем: $\dddot{x} + \ddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0$ или окончательно $\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$. В данном случае метод исключения реализован, и интегрирование данной системы 3-го порядка сведено к интегрированию дифференциального уравнения 3-го (высшего) порядка. Решив данное уравнение, получим решение $x = \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3)$. Подстановка в результат почленного сложения уравнений системы, разрешённого относительно y, то есть в $y = \frac{\ddot{x} + 2\dot{x} + x}{2}$, позволяет получить решение для функции y : $y = \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3)$. В итоге интегрирование данной системы методом исключения полностью сведено к интегрированию уравнения высшего (3-го) порядка относительно переменной x .

§17. Сведение задачи интегрирования дифференциальных уравнений высшего порядка и их систем к задаче интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение высшего порядка

$$y^{(n)} = f(x, y,\ y',\ y'',\ y''', \dots\dots, y^{(n-1)}) \ . \tag{17.1}$$

$$z_1\,, z_2\,, z_3\,,\ z_4\ , \dots\dots,\ z_n$$

В данном уравнении перейдём от переменных $y,\, y',\ y'',\ y''', \dots\dots, y^{(n-1)}$ к новым переменным, которые для наглядности припишем ниже под соответствующими переменными уравнения. Эту замену на новые переменные проводим следующим образом. Переменная $z_1 = y$ – это переобозначение переменной y на новое обозначение z_1 для единообразия с последующими переменными. Обозначения же $z_2 = y' = z_1'$, $z_3 = y'' = z_2'$, $z_4 = y''' = z_3'$,…, $z_n = y^{(n-1)} y^{(n-1)} = z_{n-1}'$ и тот факт, что $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = z_n'$, позволяет теперь записать следующую нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = z_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, z_3, z_4\,, \dots, z_n) \end{cases} . \tag{17.2}$$

Таким образом, проблема интегрирования уравнения (17.1) сведена к задаче интегрирования системы (17.2). Решив систему (17.2), получаем не только значение решения уравнения (17.1) – то есть значение неизвестной функции $y(x)$, но и значения её производных. Система (17.2) называется далее *системой дифференциальных уравнений, соответствующей дифференциальному уравнению высшего порядка* (17.1).

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений высших порядков, то есть систему уравнений вида:

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = f_1(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k-1)}, y_2\ , y_2'\ , y_2''\,, \dots, y_2^{(l-1)}, y_3, y_3', \dots\dots, y_m^{(s-1)}) \\ y_2^{(l)} = f_2\Big(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k-1)}, y_2\ , y_2'\ , y_2''\,, \dots, y_2^{(l-1)}, y_3, y_3', \dots\dots, y_m^{(s-1)}\Big) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m^{(s)} = f_m(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k-1)}, y_2\ , y_2'\ , y_2''\,, \dots, y_2^{(l-1)}, y_3, y_3', \dots\dots, y_m^{(s-1)}) \end{cases} \tag{17.3}$$

$$z_1\,, z_2\,, z_3, \dots, z_k\,,\ z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+l}, z_{k+l+1}, \dots\dots, z_n \qquad ,$$

где $k + l + \dots + s = n$.

Следующие равенства $z_1 = y_1$, $z_{k+1} = y_2$, $z_{k+l+1} = y_3$, ... – это замена обозначений переменных y_1 на z_1, y_2 на z_{k+1}, y_3 на z_{k+l+1}, ... для единообразия с последующими переменными. Обозначения $y_1' = z_1' = z_2$, $y_1'' = z_2' = z_3$, $y_1''' = z_3' = z_4$, … … , $y_1^{(k-1)} = z_k$ и тот факт, что $y_1^{(k)} = \frac{dy_1^{(k-1)}}{dx} = z_k'$, позволяют теперь записать следующее уравнение $z_k' = f_1(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ вместо первого уравнения системы (17.3). Далее, обозначая $y_2' = z_{k+1}' = z_{k+2}$, $y_2'' = z_{k+2}' = z_{k+3}, \dots, y_2^{(l-1)} = z_{k+l}$ записываем следующее уравнение $z_{k+l}' = f_2(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ вместо второго уравнения системы (17.3). Продолжая аналогичные обозначения введение следующих новых переменных, на конечном этапе получим $z_n{}' = f_m(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$. Сведя воедино все полученные результаты, получим следующую, нормальную систему дифференциальных уравнений, соответствующую данной системе (17.3):

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = z_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{k-1}' = z_k' \\ z_k' = f_1(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \\ z_{k+1}' = z_{k+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{k+l}' = f_2(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n' = f_m(x, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \end{cases} . \qquad (17.4)$$

Замечание. В связи с тем, что интегрирование дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений высшего порядка можно свести к интегрированию нормальной системы дифференциальных уравнений, а интегрирование последней к интегрированию дифференциального уравнения высшего порядка, то при изучении последующих методов некоторые из них рассматриваются для одного из данных случаев, но в итоге они становятся применимыми как для систем дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных уравнений высшего порядка.

§18. Векторная форма нормальной системы дифференциальных уравнений. Норма вектор функции и условие Липшица.

Для дальнейшего в дополнение к рассмотренной в §15 координатной форме нормальной системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases} \tag{18.1}$$

введём в рассмотрение *вектор* $y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, *координатами которого являются функции* $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ – аргументы функций правой части системы (18.1), совокупность которых теперь заменяется *векторным аргументом* y . Если теперь ввести *вектор-функции* $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$ и $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \\ \dots\dots \\ f_n(x,y) \end{pmatrix}$, то *нормальная система дифференциальных уравнений* (18.1) может быть записана в следующей *векторной форме*:

$$y' = f(x, y)\ . \tag{18.2}$$

В векторной форме теперь можно рассматривать *частное решение* $y = y(x)$, *частный интеграл* $\varphi(x,y) = 0$, *общее решение* $y = y(x, C)$ и *общий интеграл* $\varphi(x, y, C) = 0$, где C – вектор произвольных постоянных $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$. Их определения полностью совпадают с соответствующими определениями, сформулированными в §1.

Применительно к векторной форме решения системы (18.2) введём для дальнейшего понятие следующей величины, являющейся развитием понятия модуля скалярной величины. Итак, *нормой вектор – функции* $y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ называется величина, обозначаемая $|y|$ и вычисляемая по одной из следующих формул :

1). $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ – эвклидова норма ; 2). $|y| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$; 3). $|y| = \max_{i \in 1,2,\dots,n} |y_i|$.

Существует в математической литературе достаточное множество определений нормы, однако, здесь мы ограничимся только приведёнными. Норма вектор – функции, как развитие понятия модуля, полностью удовлетворяет свойствам, аналогичным свойствам модуля.

Замечание. Всюду в дальнейшем при применении нормы соответствующие соотношения будут выполняться без дополнительных пояснений в любой из указанных форм нормы.

Рассмотрим далее важное для последующего следующее утверждение. Говорят, что функция $f(y)$ *удовлетворяет условию Липшица* по y , если существует положительная постоянная K , то есть $K > 0$, называемая *постоянной Липшица*, такая, что для любых y_1, y_2 , таких, что $y_1 \neq y_2$, выполняется условие: $\left| f(y_1) - f(y_2) \right| \leq K \left| y_1 - y_2 \right|$.

Замечание. 1). Покажем, что если функция $f(y)$ имеет в рассматриваемой области ограниченную производную, то есть $\left|f'(y)\right| \le K$, то она удовлетворяет условию Липшица. Действительно, используя *формулу конечных приращений Лагранжа* и ограниченность производной, убеждаемся, что требуемое неравенство условия Липшица в этом случае удовлетворяется: $\left|f(y_1) - f(y_2)\right| = \left|f'(\xi)\right| \left|y_1 - y_2\right| \le K\left|y_1 - y_2\right|$. Однако, обратное неверно, как показывает пример функции $f(y) = |y|$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условию Липшица при K =1, однако она не дифференцируема при $y = 0$. Таким образом, условие Липшица позволяет рассматривать, в том числе и в условии последующего доказательства теоремы Коши, более широкое множество функций по сравнению с множеством дифференцируемых функций.

2). Если функция $f(y)$ является вектор – функцией векторного аргумента, то для неё неравенство условия Липшица $\left|f(y_1) - f(y_2)\right| \le K\left|y_1 - y_2\right|$ рассматривается по норме.

§19. Задача Коши. Теорема Коши и её доказательство.

Рассмотрим постановки следующих задач Коши:

Задача Коши (*для нормальной системы дифференциальных уравнений*). Найти решение системы (18.2) $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. В координатной форме данное векторное начальное условие имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ y_3(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \\ \dots\dots \\ y_{n0} \end{pmatrix}. \qquad (19.1)$$

Задача Коши (*для дифференциального уравнения высшего порядка*). Найти решение дифференциального уравнения высшего порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_{10},\ y'(x_0) = y_{20},\ y''(x_0) = y_{30}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}$.

Замечание. Заметим, что при сведении задачи интегрирования дифференциального уравнения высшего порядка к интегрированию нормальной системы дифференциальных уравнений, сформулированные начальные условия задачи Коши для уравнения сводятся к соответствующим начальным условиям (19.1) для полученной системы.

Сформулированные задачи Коши решают следующие теоремы Коши:

Теорема Коши (*для нормальной системы дифференциальных уравнений*). Пусть в некоторой области G вектор-функция $f(x, y)$ является непрерывной по своим аргументам и пусть, кроме того, в любой замкнутой области $\overline{G_1}$, принадлежащей области G, то есть $\overline{G_1} \subset G$, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y быть может со своей постоянной $K > 0$. Тогда для любой внутренней точки $(x_0, y_0) \in G$ можно указать такой замкнутый интервал $[x_0 - h\,,\ x_0 + h]$, $h > 0$, оси Ox, на котором существует единственное решение нормальной системы дифференциальных уравнений $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Доказательство. Сначала докажем, что задача определения единственного дифференцируемого решения данной системы $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, эквивалентна задаче доказательства существования единственного непрерывного решения следующего *интегрального уравнения:*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \quad , \tag{19.2}$$

в котором неизвестная вектор-функция $y(x)$ входит под знак интеграла, причём $y(x_0) = y_0$.

Действительно, если система $y' = f(x,y)$ имеет искомое решение $y = y(x)$, то

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \quad . \tag{19.3}$$

Интегрируя (19.3) в пределах от x_0 до x , получаем (19.2), при этом, очевидно, $y(x_0) = y_0$, то есть искомое дифференцируемое решение $y' = f(x,y)$, является решением и (19.2).

Покажем обратное. Пусть $y = y(x)$ является непрерывной функцией – решением интегрального уравнения (19.2). Тогда, так как $f(x,y)$ и $y(x)$ непрерывны, то непрерывна и подинтегральная функция (19.2). В этом случае интеграл с переменным верхним пределом имеет производную по этому переменному пределу, то есть, правая часть (19.2) дифференцируема по x, а следовательно, дифференцируема и левая часть – функция $y(x)$. Результатом дифференцирования обеих частей (19.2) в этом случае и является (19.3).

Итак, для того чтобы доказать теорему Коши, достаточно доказать, при выполнении условий теоремы Коши, существование и единственность непрерывной функции – решения интегрального уравнения (19.2). Для доказательства теоремы сначала выберем произвольную внутреннюю точку (x_0, y_0) рассматриваемой области G и затем построим следующую последовательность функций $\{y_m(x)\}$: $y_0(x) = y_0$, и при $m \geq 1$:

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)d\xi \quad , \qquad y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_1(\xi)\big)d\xi \quad ,$$

$$y_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_2(\xi))d\xi \quad , \dots , \quad y_m(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\right)d\xi \quad , \dots \tag{19.4}$$

при этом, очевидно, $y_m(x_0) = y_0$ для всех $m \geq 0$.

Далее выбираем числа $a > 0$, $b > 0$, такие, что построенная на их основе замкнутая область $\overline{G}_1$, определяемая в проекции на каждую координатную плоскость Oxy_i неравенствами: $\overline{G}_1 \in \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_{i0} - b \leq y_i \leq y_{i0} + b \end{cases}$, $i = 1,2, \dots, n$, принадлежит G , то есть, $\overline{G}_1 \subset G$.

Проекция данной области $\overline{G}_1 \subset G$ на каждую из координатных плоскостей представлена на рис. 9. В области $\overline{G}_1$, как замкнутой области, непрерывная вектор-функция $f(x,y)$ ограничена по норме некоторой постоянной $M > 0$, то есть $|f(x,y)| \le M$. На основании значений постоянных a, b, K, M и дополнительно выбранного значения постоянной $\propto$, такой, что $0 < \propto < 1$, определяем положительное значение постоянной h, удовлетворяющей следующему неравенству: $0 < h \le \min(a, \frac{b}{M}, \frac{\propto}{K})$. (19.5)

В каждой координатной плоскости Oxy_i – в проекции области $\overline{G}_1$ на эту плоскость проведём сначала вертикальные прямые $x = x_0 \pm h$, затем наклонные прямые через точку (x_0, y_{i0}) под углами $\pm\varphi$, определяемыми значением $\mathrm{tg}\varphi = M$. В результате получаем замкнутую область $\overline{G}_2 \subset \overline{G}_1$, проекция которой на каждую координатную плоскость Oxy_i – это замкнутая область, расположенная между построенными прямыми линиями: $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ и $y_i(x) - y_{i0} = \pm\,\mathrm{tg}\varphi\,(x - x_0)$.

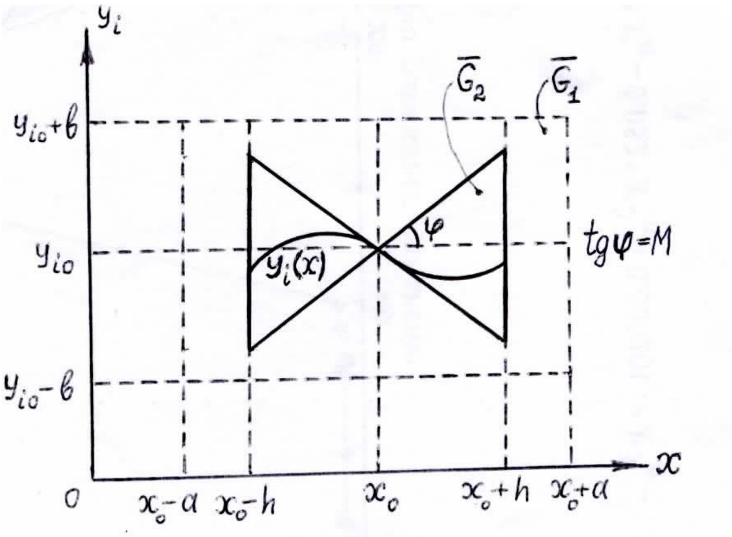

Рис.9. Координатная плоскость пространственных областей $\overline{G}_2 \subset \overline{G}_1 \subset G$.
График искомого решения в области $\overline{G}_2$.

Замечания. 1). В соответствии с выбором h ($0 < h \le a$) имеем указанное на рис. 9 расположение на оси Ox значений $x_0 - a \le x_0 - h < x_0 < x_0 + h \le x_0 + a$. Кроме того, в соответствии с условием $h \le \dfrac{b}{M}$ прямые линии $y_i(x) - y_{i0} = \pm\,\mathrm{tg}\varphi\,(x - x_0)$ имеют точки пересечения с прямыми $x = x_0 \pm h$ в пределах $\left| y_i(x_0 \pm h) - y_{i0} \right| \le \left| y_{i0} \pm b \right|$, что полностью соответствует их расположению на рис. 9.

2). Здесь и в дальнейшем при использовании двух индексов координаты векторной величины первый индекс означает номер координаты, а второй индекс – номер рассматриваемой векторной величины.

3). Заметим, что далее будет доказано утверждение теоремы Коши, то есть существование единственного решения рассматриваемой задачи Коши именно в построенной области $\overline{G}_2 \subset \overline{G}_1 \subset G$.

Рассмотрим теперь свойства функций последовательности $\{y_m(x)\}$, определяемых последовательностью (19.4) и рассматриваемых при $x \in [x_0 - h, x_0 + h\,]$. Каждая из функций последовательности удовлетворяет начальному условию $y_m(x_0) = y_0$ в соответствии с (19.4) при $x = x_0$. Затем, очевидно, по индукции следует, что каждая функция $y_m(x)$ непрерывна, так как определяется суммой постоянной и интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Покажем по индукции, что каждая из данных функций при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ принадлежит области $\overline{G}_2$. Действительно, так как на первом шаге $y_0(x) = y_0 \in \overline{G}_2$, то полагая по индукции, что $y_{m-1}(x) \in \overline{G}_2$, рассмотрим

$$y_m(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\big)\, d\xi \quad \text{или} \quad y_m(x) - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\big)\, d\xi \ ,$$

откуда следует: $$\big|y_m(x) - y_0\big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\big)\, d\xi\Big| \le M \Big|\int\limits_{x_0}^{x} d\xi\Big| \le M\big|x - x_0\big| .$$

То есть, $\big|y_m(x) - y_0\big| \le \operatorname{tg}\varphi\big|x - x_0\big| \in \overline{G}_2$. Итак, следовательно, $y_m(x) \in \overline{G}_2$.

Далее, на основе функций $\{y_m(x)\}$ построим следующий функциональный ряд:

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \cdots + [y_m(x) - y_{m-1}(x)] + \cdots \quad (19.6)$$

Последовательность частичных сумм $\{S_m(x)\}$ ряда (19.6) , очевидно, совпадает с рассматриваемой последовательностью $\{y_m(x)\}$. Исследуем сходимость ряда (19.6), и, как известно, если сходится ряд, то и сходится последовательность его частичных сумм. Построим числовой ряд, мажорирующий данный функциональный ряд (19.6). Итак, $\big|y_0(x)\big| = \big|y_0\big|$, и далее:

$$\big|[y_1(x) - y_0(x)]\big| = \Big|y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)\, d\xi - y_0\Big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)\, d\xi\Big| \le M \Big|\int\limits_{x_0}^{x} d\xi\Big| \le$$

$$\le M\big|x - x_0\big| \le Mh, \qquad \big|[y_2(x) - y_1(x)]\big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_1(\xi)\big)\, d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)\, d\xi\Big| \le$$

$$\le K\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|y_1(\xi) - y_0(\xi)\big|\, d\xi\Big| \le KM\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|\xi - x_0\big|\, d\xi\Big| \le KM\frac{(x - x_0)^2}{2!} \le KM\frac{h^2}{2!} \ ,$$

$$\big|[y_3(x) - y_2(x)]\big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_2(\xi)\big) d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_1(\xi)\big)\, d\xi\Big| \le K\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|y_2(\xi) - y_1(\xi)\big|\, d\xi\Big| \le$$

$$\leq KKM \Big| \int_{x_0}^{x} \frac{(\xi - x_0)^2}{2!} d\xi \Big| \leq K^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!} \leq K^2 M \frac{h^3}{3!} \quad , \dots \dots$$

И далее, как легко видеть, очевидно , по индукции имеем

$$\dots\dots , \ \big| [y_m(x) - y_{m-1}(x)] \big| \leq K^{m-1} M \frac{(x-x_0)^m}{m!} \leq K^{m-1} M \frac{h^m}{m!} \ , \dots\dots$$

Итак, функциональный ряд (19.6) мажорируется следующим знакоположительным числовым рядом:

$$\big| y_0 \big| + Mh + KM\frac{h^2}{2!} + K^2 M \frac{h^3}{3!} + \dots + K^{m-1} M \frac{h^m}{m!} + \dots \ . \tag{19.7}$$

Исследуем сходимость этого ряда по известному *признаку Даламбера*:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\big| [y_{m+1}(x) - y_m(x)] \big|}{\big| [y_m(x) - y_{m-1}(x)] \big|} = \lim_{m\to\infty} \frac{K^m M \dfrac{h^{m+1}}{(m+1)!}}{K^{m-1} M \dfrac{h^m}{m!}} = \lim_{m\to\infty} \frac{Kh}{m+1} = 0 < 1 \ . \tag{19.8}$$

Так как данный числовой мажорирующий ряд сходится, то, по известному *признаку Вейерштрасса*, функциональный ряд (19.6) сходится равномерно. Поэтому сходится равномерно и последовательность $\{S_m(x)\} \equiv \{y_m(x)\}$ частичных сумм данного ряда. Таким образом $\{y_m(x)\} \rightrightarrows y(x)$ или $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(x) = y(x)$. Покажем, что функция $y(x)$ обладает теми же свойствами, что и функции последовательности $\{y_m(x)\}$. Действительно, $y(x_0) = y_0$, так как $y_m(x_0) = y_0$ и $y(x_0) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(x_0) = \lim\limits_{m\to\infty} y_0 = y_0$. Функция $y(x)$ непрерывна, так как является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. И, наконец, так как все функции последовательности принадлежат области $\overline{G}_2$, то и предельная функция принадлежит данной области.

Далее рассмотрим следующее неравенство, в котором в подынтегральную функцию первого из интегралов подставлена данная функция $y(x)$:

$$0 \leq \Big| \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big) d\xi - \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_m(\xi)\big) d\xi \Big| \leq K \Big| \int_{x_0}^{x} \big| y(\xi) - y_m(\xi) \big| d\xi \Big| \leq$$

$$\leq K \cdot \max_{x \in [x_0 - h, \ x_0 + h]} \big| y(x) - y_m(x) \big| \cdot \Big| \int_{x_0}^{x} d\xi \Big| \leq Kh \cdot \max_{x \in [x_0 - h, \ x_0 + h]} \big| y(x) - y_m(x) \big| \ .$$

В пределе при $m \to \infty$ левая часть неравенства равна нулю, а правая часть имеет пределом 0, так как $\lim\limits_{m\to\infty} [y(x) - y_m(x)] = 0$. Следовательно, и средняя часть неравенства стремится к нулю, откуда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_m(\xi)\big) d\xi = \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big) d\xi \ . \tag{19.9}$$

Перейдём теперь к пределу при $m \to \infty$ в основном итерационном соотношении (19.4):

$$y_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\big) d\xi \ .$$

Так как, по доказанному, в левой части данного равенства $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(x) = y(x)$, а в правой части имеем (19.9) , то в пределе при $m \to \infty$ получаем справедливое равенство:

$$y\,(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)\, d\xi \ . \tag{19.10}$$

Таким образом, существование непрерывного решения интегрального уравнения (19.2) доказано. Следовательно, тем самым доказано условие существования теоремы Коши. Докажем единственность этого решения.

Предположим, что кроме доказанного решения $y(x)$ интегрального уравнения (19.10) может быть найдено другое непрерывное решение $z(x)$ этого интегрального уравнения:

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, z(\xi))\, d\xi \ . \tag{19.11}$$

Вычитая почленно из равенства (19.10) другое равенство (19.11), получим

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} \big[f\big(\xi, y(\xi)\big) - f\big(\xi, z(\xi)\big)\big] d\xi \ .$$

Отсюда следует:

$$\big|\, y(x) - z(x) \,\big| = \Big|\int_{x_0}^{x} [f\big(\xi, y(\xi)\big) - f\big(\xi, z(\xi)\big)]\, d\xi \,\Big| \le K \Big| \int_{x_0}^{x} \big|y(\xi) - z(\xi)\big|\, d\xi \,\Big| \le$$

$$\le K \cdot \max_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big| \cdot \Big| \int_{x_0}^{x} d\xi \,\Big| \le Kh \cdot \max_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big| \, .$$

Так как это неравенство справедливо для любого значения $x \in [x_0 - h\,, x_0 + h]$, то, следовательно, и для значения x, при котором достигается $\max\limits_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big|$.

Таким образом, данное неравенство может быть записано в виде :

$\max\limits_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big| \le Kh \cdot \max\limits_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big|$, откуда следует, что $(1 - Kh) \cdot \max\limits_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big| \le 0$. Так как вследствие выбора в (19.5) $h \le \frac{\propto}{K}$ выполняется условие, что $0 < Kh \le \propto < 1$, то последнее неравенство приводится к виду $\max\limits_{x\in[\,x_0-h,\ x_0+h\,]} \big|y(x) - z(x)\big| \le 0$, а это возможно только при условии, что $y(x) \equiv z(x)$. Откуда следует единственность решения $y(x)$, что и требовалось доказать. Тем самым теорема Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений полностью доказана.

Теорема Коши (*для дифференциального уравнения высшего порядка*). Пусть в некоторой области G вектор-функция $f(x, y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по своим аргументам и пусть, кроме того, в любой замкнутой области $\overline{G}_1$, принадлежащей области G, то есть $\overline{G}_1 \subset G$, функция $f(x, y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n-1)})$ удовлетворяет условию Липшица по $y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$ быть может со своей постоянной $K > 0$. Тогда для любой внутренней точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, y_{30}, \ldots, y_{n0}) \in G$ можно указать такой замкнутый интервал $[x_0 - h, x_0 + +h]$, $h > 0$, оси Ox, на котором существует единственное решение дифференциального уравнения высшего порядка $y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\big)$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_{10}$, $y'(x_0) = y_{20}$, $y''(x_0) = y_{30}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}$.

Доказательство. Очевидно, условия данной теоремы Коши сводятся к условиям доказанной теоремы Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, данное дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', y''', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\big)$ может быть преобразовано к виду соответствующей нормальной системы дифференциальных уравнений (17.2), то есть к системе вида $y' = f(x, y)$, как это доказано в §17. При этом все условия теоремы Коши для рассматриваемого уравнения, включая начальные условия задачи Коши, преобразуются в условия теоремы Коши для соответствующей нормальной системы дифференциальных уравнений. Таким образом, данная теорема Коши сводится к предыдущей и, следовательно, её доказательство является доказательством и данной теоремы. как это доказано в §17,

Замечание. Всюду в дальнейшем, если особо не оговорено, полагаем, что условия теоремы Коши выполнены.

§20. Основные следствия из теоремы Коши.

Рассмотрим следующие важные следствия из доказанных теорем Коши. Данные следствия будут сформулированы и доказаны применительно к теореме Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Данные следствия для случая дифференциального уравнения высшего порядка, очевидно, могут быть сформулированы и доказаны аналогично.

Следствие 1 из теоремы Коши. При выполнении условий теоремы Коши в области G, единственное решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений $y(x)$, проходящее через точку $(x_0, y_0) \in G$, может быть продолжено сколь угодно близко к границе области G.

Доказательство. Продолжим доказанное в теореме Коши для системы $y' = f(x, y)$ решение $y(x)$ следующим образом. Рассмотрим точку с координатами $(x_0 + h, y(x_0 + h))$, то есть точку пресечения этого решения с правой границей области $\overline{G}_2$. Обозначим координаты данной точки через $(x_0 + h, y(x_0 + h)) = (x_1, y_1)$. Точку $(x_1, y_1) \in G$ принимаем за начальную точку в условии теоремы Коши и в результате соответствующего её доказательства на интервале $[x_1 - h_1,\ x_1 + h_1]$, $h_1 > 0$, оси Ox определяем единственное решение задачи Коши. Так как интервал $[x_1 - h_1]$ имеет пересечение с предыдущим интервалом $[x_0 - h_0\ ,\ x_0 + h_0]$, $h_0 > 0$, на котором имеется уже доказанное решение $y(x)$, то тем самым это единственное решение продолжается на интервал $[x_1 + h_1]$.

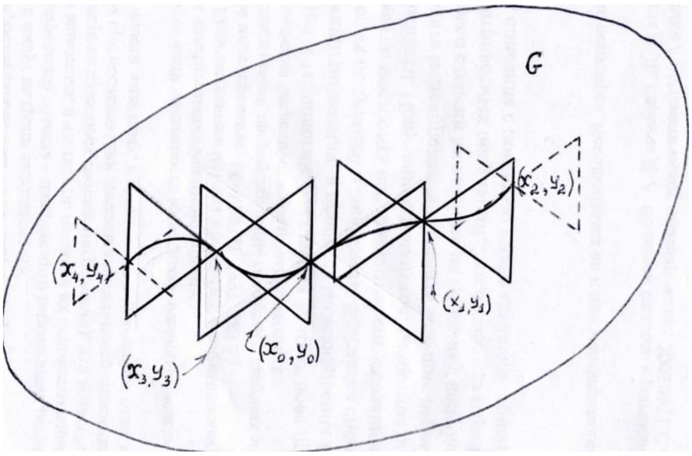

Рис. 10. Продолжение решения задачи Коши на всю рассматриваемую область .

Поступая далее аналогично, и, приняв за очередную внутреннюю точку области G точку $(x_1 + h_1, y(x_1 + h_1)) = (x_2, y_2)$, аналогично доказываем продолжение решения $y(x)$ на интервал $[x_2 + h_2]$, $h_2 > 0$, и так далее до границы области G . По аналогии проводим продолжение решения $y(x)$ в сторону убывания переменной x, принимая за внутренние точки области G , точки $(x_3, y_3) = (x_0 - h, y(x_0 - h))$, и, соответственно, $(x_4, y_4) = (x_3 - - h_3, y(x_3 - h_3))$, продолжая таким образом решение $y(x)$ последовательно на интервалы $[x_3 - h_3]$, $h_3 > 0$, $[x_4 - h_4]$, $h_4 > 0$, и так далее до границы области G .

Следствие 2 из теоремы Коши. При выполнении условий теоремы Коши в области G, общее решение системы $y' = f(x, y)$ имеет вид $y = y(x, C)$.

Доказательство. Полагаем, что рассматривается $(x_0, y_0) \in G$ и область $\overline{G}_1 \subset G$ та же, что и при доказательстве теоремы Коши, при этом по-прежнему считаем x_0 постоянным. Но вместо постоянного значения $y(x_0) = y_0$ полагаем значение $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$, которое для искомого решения считаем векторным параметром, каждая координата которого может принимать любое из значений в промежутке $\tilde{y}_i(x_0) = \tilde{y}_{i0} \in [\, y_{i0} - \frac{b}{2}\, , y_{i0} + \frac{b}{2}\,]$. Таким образом, искомое решение определяем относительно начального значения $(x_0, \tilde{y}_0)$ той же области

$\overline{G}_1$, удовлетворяющей неравенствам: $\overline{G}_1 \in \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ \tilde{y}_{i0} - \frac{b}{2} \leq y_i \leq \tilde{y}_{i0} + \frac{b}{2} \\ y_{i0} - \frac{b}{2} \leq \tilde{y}_{i0} \leq y_{i0} + \frac{b}{2} \end{cases}$, $i = 1,2, \dots, n$.

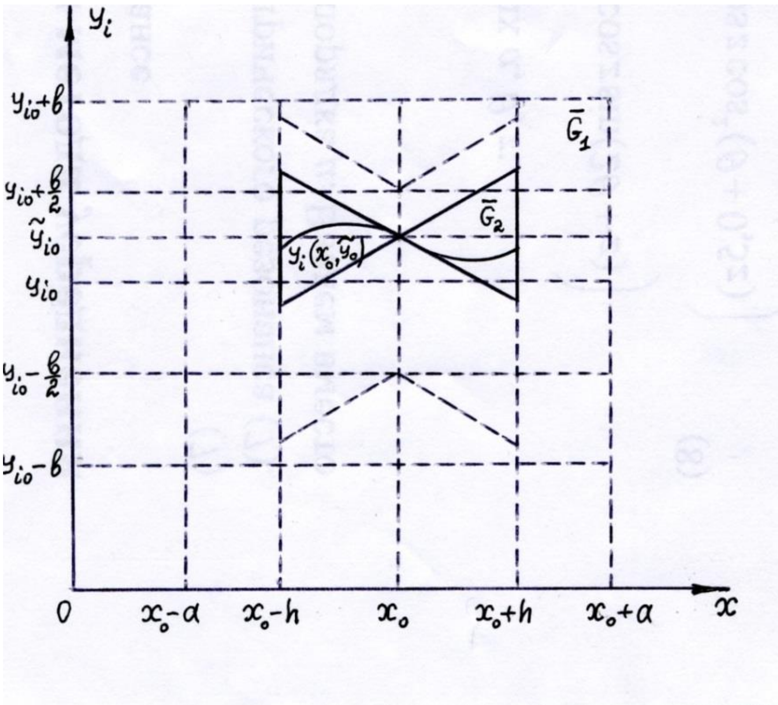

Рис. 11. Решение $y = y(x, \tilde{y}_0)$ *задачи Коши в зависимости от параметра* $\tilde{y}_0$.

Тогда для каждой точки $(x_0 , \tilde{y}_0)$ в соответствии с доказательством теоремы Коши будет существовать единственное решение на замкнутом интервале $x \in [x_0 - h , x_0 + h]$ оси Ox, где h удовлетворяет неравенству $0 < h \leq \min(a, \frac{b}{2M}, \frac{\propto}{K})$.

Каждое такое решение является пределом последовательности функций $\{y_m(x)\}$:

$y_0(x) = \tilde{y}_0$, и при $m \geq 1$:

$$y_1(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \tilde{y}_0) d\xi = y_1(x, \tilde{y}_0) , \qquad y_2(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi, \tilde{y}_0)) d\xi = y_2(x, \tilde{y}_0) , \dots$$

$$\dots, \ y_m(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y_{(m-1)}(\xi, \tilde{y}_0)\right) d\xi = y_m(x, \tilde{y}_0) \ , \dots \dots \qquad (20.1)$$

Так как $y_m(x_0) = y_m(x_0, \tilde{y}_0) = \tilde{y}_0$, при $m \geq 0$, то и предельная функция данной равномерно сходящейся последовательности $\{y_m(x, \tilde{y}_0)\} \rightrightarrows y(x, \tilde{y}_0)$, будет функцией, зависящей от параметра $\tilde{y}_0$, то есть $y = y(x, \tilde{y}_0)$. Распространяя это утверждение по аналогии с предыдущим Следствием 1 на всю область G , и обозначая векторный параметр $\tilde{y}_0$ через C , получаем искомое общее решение $y = y(x, C)$.

Следствие 3 из теоремы Коши. При выполнении условий теоремы Коши в области G, общий интеграл системы $y' = f(x,y)$ имеет вид $\Phi(x,y) = C$.

Доказательство. Полагаем, что рассматривается $(x_0, y_0) \in G$ и область $\overline{G_1} \subset G$ та же, что и при доказательстве теоремы Коши, но при этом не только вместо постоянного значения $y(x_0) = y_0$ полагаем значение $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$, которое для искомого решения считаем векторным параметром, каждая координата которого может принимать любое из значений в промежутке $\tilde{y_i}(x_0) = \tilde{y}_{i0} \in\in [\, y_{i0} - \frac{b}{2}\, , y_{i0} + \frac{b}{2}\,]$, но и вместо постоянного значения x_0 полагаем значение $\tilde{x}_0$, каждая координата которого может принимать любое из значений в промежутке $\tilde{x}_0 \in [\, x_{i0} - \frac{a}{2}\, , x_{i0} + \frac{a}{2}\,]$. По аналогии с доказательством Следствия 2 можно показать, что последовательность $\{y_m(x)\} = \{y_m(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\} \rightrightarrows y(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$. То есть решение задачи Коши в данном случае имеет вид $y = y(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ или $y = \psi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$.

Полученную функциональную зависимость вдоль любого из решений данного семейства можно представлять так: данным выбранным конкретным значениям $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ вдоль решения $y = \psi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ соответствует любая текущая точка (x, y) этого решения. С другой стороны, зафиксировав любую точку (x, y) этого решения, можно выбрать в качестве текущей точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, удовлетворяющей данному уравнению $y = \psi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$. Таким образом, данная функциональная зависимость сохраняется и при взаимной замене обозначений указанных точек вдоль рассматриваемого решения: $(x, y) \to$ $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \to (x, y)$. В результате получим $\tilde{y}_0 = \psi(\tilde{x}_0, x, y)$.

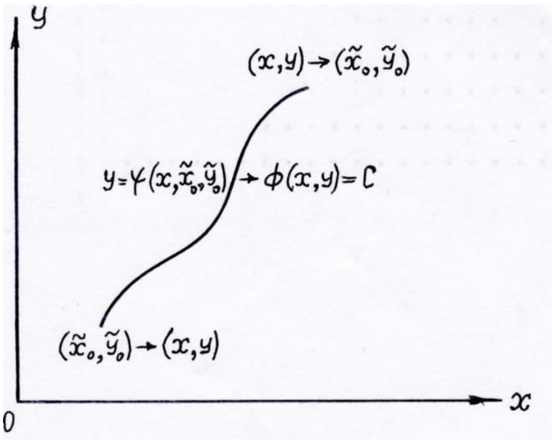

Рис.12. Графическое представление зависимости решения от начальных данных.

В данном функциональном соотношении можно рассматривать $\tilde{x}_0$ как фиксированную постоянную, и тогда в этом случае $\tilde{y}_0 = \psi(\tilde{x}_0, x, y) = \Phi\,(x, y)$. Так как $\tilde{y}_0$ представляет собой векторный параметр, то, как и в предыдущем Следствии 2 , обозначая этот параметр через C , окончательно получаем утверждение данного Следствия – система $y' = f(x,y)$ имеет в области G общий интеграл вида $\Phi(x,y) = C$.

Глава 8. **Интегрирование системы дифференциальных уравнений простейшими методами интегрирования.**

§21. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему $y' = f(x, y)$ снова в координатной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases}.$$

Данную систему, очевидно, можно записать в следующей форме, разрешив каждое из уравнений относительно dx :

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} = \frac{dy_3}{f_3(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)}. \quad (21.1)$$

Форма записи системы в виде (21.1) называется *симметрической формой нормальной системы дифференциальных уравнений*.

Замечание. Симметричность формы (21.1) особенно убедительно видна, когда переменная x заменяется на y_0, а функции $f_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, $i = 1,2,3, \dots, n$, представляются дробно-рациональными функциями $f_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \frac{F_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)}{F_0(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)}$, $i = 1,2,3, \dots, n$, с общим знаменателем вида $F_0(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. В таком случае форма (21.1) записывается в полностью симметричном виде:

$$\frac{dy_0}{F_0(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} = \frac{dy_1}{F_1(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{F_2(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{F_n(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)} .$$

Полученная симметрическая форма (21.1) системы дифференциальных уравнений используется для возможности интегрирования данной системы $y' = f(x, y)$ простейшими методами интегрирования. Для реализации такого интегрирования рассмотрим далее структуру и представление общего интеграла данной системы, который эта система всегда имеет при выполнении условий теоремы Коши (см. в §20 Следствии 3 из теоремы Коши).

§22. Первые интегралы и их независимость.

Итак, рассмотрим общий интеграл системы $y' = f(x, y)$, который в векторной и координатной формах имеет вид:

$$\Phi(x,y)=C \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)=C_1 \\ \varphi_2(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)=C_2 \\ \varphi_3(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)=C_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n\}=C_n \end{cases} . \qquad (22.1)$$

Каждая координата общего решения (22.1) называется *первым интегралом* рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Дадим другое эквивалентное определение такого интеграла. *Первым интегралом нормальной системы дифференциальных уравнений* называется не тождественно равная постоянной функция переменных системы, которая принимает на решениях системы одно и то же постоянное значение.

Из данного определения первого интеграла и структуры общего интеграла (22.1) следует, что, если удаётся определить n независимых первых интегралов системы $y'=f(x,y)$, то тем самым для данной системы определяется её решение в виде общего интеграла. Независимость системы первых интегралов определяется через не равенство нулю соответствующего якобиана: $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\dots,\varphi_n)}{\partial(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)}\neq 0$.

§23. Метод интегрируемых комбинаций.

Для определения первых интегралов системы дифференциальных уравнений в симметрической форме применяется так называемый *метод интегрируемых комбинаций.* Этот метод состоит в том, что, если из пропорций симметрической формы системы удаётся составить интегрируемую комбинацию, то в результате её интегрирования определяется первый интеграл. Для решения системы следует составить n независимых первых интегралов.

Пример. Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

Решение. Одна из интегрируемых комбинацию определяется просто из второго равенства $\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$ или $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Откуда $\ln y=\ln z+\ln C_1$, $\frac{y}{z}=C_1$. Таким образом, один первый интеграл найден. Для определения второй интегрируемой комбинации составим производную пропорцию следующим образом: $\frac{xdx}{x(x^2-y^2-z^2)}=\frac{ydy}{y(2xy)}=\frac{zdz}{z(2xz)}=\frac{dz}{2xz}$ или $\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2-y^2-z^2)+2xy^2+2xz^2}=\frac{dz}{2xz}$. Далее имеем $\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dz}{2xz}$, $\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{2z}$, $\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z}$, $\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln z+\ln C_2$. Откуда $\frac{x^2+y^2+z^2}{z}=C_2$.

Итак, для данной системы второго порядка получена система двух первых интегралов:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = C_1 \\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z} = C_2 \end{cases}. \tag{23.1}$$

Очевидно, эти интегралы независимы, так как якобиан $\dfrac{\partial\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)}{\partial(x, y)} \neq 0$ вследствие того, что левая часть первого уравнения этой системы не содержит переменной x. Тем самым общий интеграл данной системы уравнений и, следовательно, решение данной системы получено.

Если рассматривается система (21.1) из n уравнений с n неизвестными и удаётся составить только k, $k < n$, интегрируемых комбинаций, то есть, определить только n независимых первых интегралов, то для определения недостающих можно поступить следующим образом. Из найденных k первых интегралов k переменных выразить через другие и подставить в первоначальную систему. В результате порядок данной системы понижается и остаётся найти решение лишь этой последующей системы порядка $n - k$.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений: $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$.

Решение. Сначала из равенства $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz}$ или $dx = \dfrac{dy}{x}$, $xdx = dy$, $\frac{x^2}{2} = y - \frac{C_1}{2}$, определяем первый интеграл $2y - x^2 = C_1$. Для определения второго из первых интегралов в данном уравнении произведём замену $y = \dfrac{x^2+C_1}{2}$. Проведя эту замену в следующем равенстве $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dz}{y}$, получаем $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dz}{\frac{x^2+C_1}{2}}$, $(x^2 + C_1)dx = 2zdz$, откуда $\frac{x^3}{3} + C_1x = z^2 - \frac{C_2}{3}$, или $3z^2 - x^3 - 3C_1x = C_2$. После подстановки в это последнее равенство вместо значения C_1 его выражения из первого интеграла, получаем: $3z^2 - x^3 - 6xy + + 3x^3 = C_2$, или $2x^3 + 3z^2 - 6xy = C_2$. Таким образом, получен второй первый интеграл, а вместе с ним, очевидно, и общий интеграл данной системы: $\begin{cases} 2y - x^2 = C_1 \\ 2x^3 + 3z^2 - 6xy = C_2 \end{cases}$, как система двух независимых первых интегралов. Очевидно, эти интегралы независимы, так как левая часть второго уравнения этой системы не содержит переменной z.

Глава 9. **Приближённо-аналитические и численные методы решения задачи Коши.**

§24. Метод последовательных приближений.

Значительную часть задач вычислительной практики составляют различные задачи некоторых реальных процессов или явлений, а также моделей достаточно сложных практических задач. При этом, как правило, точные аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части данных уравнений. Поэтому приходится пользоваться приближёнными методами их решения. Среди таких приближённых методов наиболее предпочтительными являются приближённо-аналитические методы. Особенностью изучения приближённо-аналитических методов интегрирования является то, что без ограничения общности одни из методов удобнее применяются к приближённому интегрированию нормальных систем дифференциальных уравнений, другие – к приближённому интегрированию дифференциальных уравнений высшего порядка. Однако, эти методы могут быть применимы к обоим случаям вследствие взаимного сведения их интегрирования от одного к другому (см. §16, §17) .

Рассмотрим применение так называемого *приближённо-аналитического метода последовательных приближений* к задаче Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений: найти решение $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

По методу последовательных приближений решением такой задачи в соответствии с доказанной теоремой Коши является предел последовательности $\{y_m(x)\} \rightrightarrows y(x)$, или , $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(x) = y(x)$, определяемой следующим образом: $y_0(x) = y_0$, и далее при $m \geq 1$,

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)d\xi \ , \qquad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_1(\xi)\big)d\xi \ , \tag{24.1}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_2(\xi))d\xi \ , \ldots\ldots , \quad y_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y_{(m-1)}(\xi)\right) d\xi \ , \ldots\ldots$$

Задачей рассматриваемого приближённо-аналитического метода последовательных приближений является определение приближённого решения данной задачи $y_m(x)$, удовлетворяющего заданной точности ε , то есть: $\left| y_m(x) - y(x) \right| \leq \varepsilon$. Выведем оценку такой точности данного метода, полагая, что неизвестное точное решение удовлетворяет интегральному уравнению: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)\, d\xi$. Поступаем последовательно следующим образом: $\left| y_0(x) - y(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)\, d\xi \right| \leq M \left| x - x_0 \right| \leq Mh$,

$$\left| y_1(x) - y(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y_0(\xi)\big)d\xi - \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)\, d\xi \right| \leq K \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_0(\xi) - y(\xi) \right| d\xi \right| \leq$$

$$\le KM \left| \int_{x_0}^{x} \left| \xi - x_0 \right| d\xi \right| \le KM \frac{(x - x_0)^2}{2!} \le KM \frac{h^2}{2!}$$ и, полагая по индукции, что выполняется неравенство $\left| y_{m-1}(x) - y(x) \right| \le K^{m-1} M \frac{(x-x_0)^m}{m!} \le K^{m-1} M \frac{h^m}{m!}$, получаем следующую оценку приближённого решения $y_m(x)$ по методу последовательных приближений:

$$\left| y_m(x) - y(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{m-1}(\xi)) d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \right| \le \tag{24.2}$$

$$\le K \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_{m-1}(\xi) - y(\xi) \right| d\xi \right| \le K^{m-1} MK \left| \int_{x_0}^{x} \left| \frac{(\xi - x_0)^m}{m!} \right| d\xi \right| \le K^m M \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \; .$$

Пример. Найти с точностью $\varepsilon = 0{,}1$ приближённое решение следующей задачи Коши:

$$y' = x - y \,, \;\; y(0) = 1 \,, \quad \text{при} \quad x \in [0\,, 1] \,.$$

Решение. Так как $\left| \frac{\partial (x-y)}{\partial y} \right| = 1$, то, очевидно, по определению условия Липшица, в данном случае $K = 1$. Вследствие того, что при $x \in [0\,, 1]$, $y(0) = 1$ и $K = 1$, для правой части уравнения получаем следующую оценку: $\left| x - y \right| \le \left| x \right| + \left| y \right| \le 1 + 2 = 3$. Таким образом, в данном случае : $\left| x - y \right| \le M = 3$. Приближённое решение данной задачи Коши с заданной точностью определяем с помощью метода последовательных приближений. Для определения достаточного значения m в оценке приближённого значения решения $\left| y_m(x) \right| \le \varepsilon = 0{,}1$ рассматриваемой задачи Коши по данному методу применим оценку точности (24.2), используя которую, наименьшее достаточное значение m определяем из неравенства $\left| y_m(x) - y(x) \right| \le K^m M \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \le 1^m 3 \frac{1^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{3}{(m+1)!} \le 0{,}1$. Очевидно, наименьшим значением, удовлетворяющим данному неравенству, является $m = 4$.

Итак, проводим последовательные вычисления по методу последовательных приближений в соответствии с (24.1):

$$y_0(x) = y(0) = 1 \;, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x (\xi - 1) d\xi = 1 + \frac{x^2}{2} - x = 1 - x + \frac{x^2}{2} \;,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6} \;,$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \xi^2 + \frac{\xi^3}{6} \right) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$, и окончательно

получаем $$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \xi^2 + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{24} \right) d\xi = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120} \,.$$

Таким образом, приближённым решением данной задачи Коши с точностью $\varepsilon = 0{,}1$ на отрезке $x \in [0\,,1]$ является $y(x) \cong 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$.

§25. Метод степенных рядов.

В основе так называемого приближённо-аналитического *метода степенных рядов* лежит представление функции $y(x)$ – решения задачи Коши в окрестности начальной точки (x_0, y_0) в виде *ряда Тейлора* по степеням $(x - x_0)$, то есть в виде ряда:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{y''''(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 +$$

$$+ \dots \dots + \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + \dots \dots \qquad (25.1)$$

Рассмотрим применение метода степенных рядов к приближённо-аналитическому решению задачи Коши для уравнения высшего порядка $y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\big)$, удовлетворяющего условиям $y(x_0) = y_{10},\ y'(x_0) = y_{20},\ y''(x_0) = y_{30}\,, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}$. Подставляя начальные данные в представление решения (25.1), получим следующий его вид:

$$y(x) = y_{10} + \frac{y_{20}}{1!}(x - x_0) + \frac{y_{30}}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_{40}}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{y_{n0}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \dots \dots \qquad (25.2)$$

Таким образом, первые n коэффициентов степенного ряда решения определены. Задача состоит в определении последующих коэффициентов ряда (25.2). По способу определения этих неизвестных коэффициентов рассматриваемый метод степенных рядов подразделяется на следующие два метода – это *метод последовательного дифференцирования* и *метод неопределённых коэффициентов*.

По *методу последовательного дифференцирования* поступаем следующим образом. Сначала в обе части данного дифференциального уравнения высшего порядка $y^{(n)} = f\big(x\,, y\ , y'\,, y''\,, y'''\,, \dots \dots, y^{(n-1)}\big)$ подставляем начальные данные и в результате получим $y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, \dots, y_{n0})$ и тем самым значение $y^{(n)}(x_0)$ определено. Далее дифференцируем обе части данного уравнения по x :

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} y^{(i+1)}. \qquad (25.3)$$

Подставляем известные начальные данные и определённое значение $y^{(n)}(x_0)$ в обе части равенства (25.3). В результате получаем значение $y^{(n+1)}(x_0)$. Далее, снова дифференцируя обе части полученного равенства (25.3) по x и, подставляя известные и полученные данные, находим значение $y^{(n+2)}(x_0)$. Таким образом, последовательно дифференцируя и подставляя известные данные, получаем последовательно неизвестные коэффициенты ряда (25.2) до получения необходимого количества этих коэффициентов.

Замечание. Оценка точности метода степенных рядов рассматривается в разделе теории степенных рядов курса математического анализа и в связи с этим на проведении такой оценки в данном случае останавливаться не будем.

Пример. Применить метод последовательного дифференцирования приближённого решения в виде степенного ряда следующей задачи Коши:

$$y'' + xy' + y^2 = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \, .$$

Решение. В данном случае, очевидно, искомое решение представляем в виде *ряда Маклорена* $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y''''(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{(n)!}x^n + \cdots$.

Подставляя начальные данные, получим $y(x) = x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y''''(0)}{4!}x^4 + \cdots$.

Теперь, подставив начальные данные в уравнение: $y''(0) + 0 + 0 = 0$, имеем $y''(0) = 0$. Дифференцируя уравнение задачи Коши $y''' + y' + xy'' + 2yy' = 0$ и подставляя в полученный результат известные данные, находим $y'''(0) + 1 + 0 + 0 = 0$. Откуда следует, что $y'''(0) = -1$. Дифференцируя далее и подставляя известные данные, получаем:
$y'''' + 2y'' + xy''' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$, $y''''(0) + 0 + 0 + 2 + 0 = 0$, $y''''(0) = -2$.
Последующие коэффициенты могут быть получены аналогичным образом. Ограничиваясь найденными значениями, получаем следующий степенной ряд решения данной задачи:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \cdots$$

По *методу неопределённых коэффициентов* искомый вид решения (25.2) представляем в виде: $y(x) = y_{10} + \frac{y_{20}}{1!}(x - x_0) + \frac{y_{30}}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_{40}}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{y_{n0}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$

$$+ a_1(x - x_0)^n + a_2(x - x_0)^{n+1} + \ldots\ldots \quad , \tag{25.4}$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – неопределённые коэффициенты.

Для применения данного метода разлагаем правую часть данного уравнения высшего порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ по степеням $x - x_0$, y , y', y'' , ..., $y^{(n-1)}$ и подставляем в это разложение вместо $y = y(x)$ выражение (25.4) и соответствующие производные (25.4) до $n -$ го порядка. Затем, как обычно, по методу неопределённых коэффициентов в полученном выражении – результате подстановки приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$. В итоге получаем систему равенств, из которой определяем искомые неизвестные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \ldots$, подставляя которые в (25.4), определяем окончательное выражение решения данной задачи Коши в виде степенного ряда.

Пример. Применить метод неопределённых коэффициентов для приближённого решения в виде степенного ряда той же задачи Коши, что и в предыдущем примере:

$$y'' + xy' + y^2 = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \, .$$

Решение. В данном случае, очевидно, искомое решение представляем сначала в том же виде ряда Маклорена $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y''''(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{(n)!}x^n + \cdots$ и подставляя начальные данные и неизвестные коэффициенты, получим следующий ряд: $y(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$. Так как данное уравнение уже имеет вид разложения по степеням $x\,, y\,, y'$ и y'', то подставляя в уравнение искомый вид решения и соответствующие его производные, получаем: $2a_1 + 6a_2x + 12a_3x^2 + \cdots + x(1 + 2a_1x + 3a_2x^2 + {}$ $+4a_3x^3 + \cdots) + (x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots)^2 = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, очевидно, получаем следующую систему равенств:

$$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ 6a_2 + 1 = 0 \\ 12a_3 + 2a_1 + 1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad , \qquad \text{откуда следует, что} \quad a_1 = 0 \ , \ a_2 = -\frac{1}{6} \ , \ a_3 = -\frac{1}{12} \ ,$$

Следовательно, как и в предыдущем случае, имеем $\quad y(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \cdots$.

§26. Метод малого параметра.

Приближённо-аналитический метод, называемый *методом малого параметра* – это метод, позволяющий определять приближённое решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \alpha) \quad , \quad y(x_0) = \varphi(\alpha) \ , \tag{26.1}$$

где α – малый параметр (близкая к нулю постоянная величина).

Предполагается, что функция $f(x, y, \alpha)$ является непрерывной по x и аналитический по y и α, функция $\varphi(\alpha)$ также является аналитической по α .

Замечание. Функция называется *аналитической функцией* в некоторой области, если она в этой области бесконечно дифференцируема, или, что то же, разлагается в сходящийся степенной ряд по соответствующим переменным.

По методу малого параметра решение данной задачи Коши ищется в виде ряда по степеням малого параметра с коэффициентами – функциями переменной x , то есть в виде:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)\cdot\alpha + y_2(x)\cdot\alpha^2 + y_3(x)\cdot\alpha^3 + \ \ldots\ldots \ , \tag{26.2}$$

где $y_0(x)\,,\, y_1(x)\,,\, y_2(x)\,,\, y_3(x)\,, \ldots\ldots$ – неизвестные функции.

Функция $y_0(x)$, равная $y(x)$ при $\alpha = 0$, определяется как решение следующей задачи Коши: $\frac{dy_0}{dx} = f(x, y_0, 0)$, $y_0(x_0) = \varphi(0)$, которая называется *порождающей задачей*, уравнение её – *порождающим уравнением*, а решение $y_0(x)$ – *порождающим решением*.

Для определения последовательности функций $y_1(x)\,, y_2(x)\,, y_3(x)\,, \ldots\ldots$ сначала разлагаем функцию правой части уравнения задачи Коши (26.1) в ряд по степеням $(y-y_0)$ и α в окрестности точки $(x,y_0,0)=(\cdot)$: $f(x,y,\alpha)=f(x,y_0,0)+\frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(\cdot)}{\partial\alpha}\alpha+$ $+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y^2}(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y\partial\alpha}(y-y_0)\alpha+\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial\alpha^2}\alpha^2\right]+\ \dots\dots$ Затем в обе части уравнения (26.1) подставляем искомый вид решения: $\frac{dy_0}{dx}+\frac{dy_1}{dx}\alpha+\frac{dy_2}{dx}\alpha^2+\frac{dy_3}{dx}\alpha^3+\ \dots\dots=$

$$=f(\cdot)+\frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}(y_1\alpha+y_2\alpha^2+y_3\alpha^3\dots)+\frac{\partial f(\cdot)}{\partial\alpha}\alpha+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y^2}(y_1\alpha+y_2\alpha^2+y_3\alpha^3\dots)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y\partial\alpha}(y_1\alpha+y_2\alpha^2+y_3\alpha^3\dots)\alpha+\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial\alpha^2}\alpha^2\right]+\cdots \quad . \qquad (26.3)$$

Аналогично представим и начальное условие, разложив правую часть данного условия $y(x_0)=\varphi(\alpha)$ по степеням α , а слева подставляем искомый вид решения $y(x_0)$:

$$y_0(x_0)+y_1(x_0)\cdot\alpha+y_2(x_0)\cdot\alpha^2++y_3(x_0)\cdot\alpha^3+\ \dots\dots=$$

$$=\ \varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}\cdot\alpha+\frac{\varphi''(0)}{2!}\cdot\alpha^2+\frac{\varphi'''(0)}{3!}\cdot\alpha^3+\ \dots\dots \qquad (26.4)$$

Приравнивая одновременно слагаемые в (26.3) и (26.4) при одинаковых степенях α получим следующую *последовательность задач Коши:*

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx}=f(x,y_0,0)\,, & y_0(x_0)=\varphi(0)\,,\\ \frac{dy_1}{dx}=\frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}y_1+\frac{\partial f(\cdot)}{\partial\alpha}\,, & y_1(x_0)=\varphi'(0)\,,\\ \frac{dy_2}{dx}=\frac{\partial f(\cdot)}{\partial y}y_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y^2}y_1^2+\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial y\partial\alpha}y_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial\alpha^2}\,, & y_2(x_0)=\frac{\varphi''(0)}{2!}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \qquad (26.5)$$

Итак, чтобы получить приближённо-аналитическое решение (26.2) данной задачи Коши, а для этого определить значения функций $y_0(x)\,,y_1(x)\,,y_2(x)\,,y_3(x)\,,\dots\dots-$ коэффициентов представления решения по степеням α, необходимо решить последовательность задач Коши (26.5). Особенностью решения этой последовательности задач Коши является тот факт, что для решения последующей из данных задач требуется решить все предыдущие задачи этой последовательности и их решения подставить в правую часть каждой последующей из них.

Пример. Определить приближённо-аналитическое решение по методу малого параметра следующей задачи Коши: $y'=y^2+\frac{2\mu}{x}$, $y(1)=1$.

Решение. Решение данной задачи определяем в виде ряда по степеням малого параметра μ с коэффициентами – функциями переменной x , то есть полагаем в виде:

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x)\cdot\mu+y_2(x)\cdot\mu^2+y_3(x)\cdot\mu^3+\ \dots\dots\ .$$

Подставляем искомое решение в уравнение и в начальное условие. В результате имеем: $y'_0(x)+y'_1(x)\cdot\mu+y'_2(x)\cdot\mu^2+y'_3(x)\cdot\mu^3+\ \dots\dots=$

$$=(y_0(x)+y_1(x)\cdot\mu+y_2(x)\cdot\mu^2+\ \dots)^2+\frac{2\mu}{x},\qquad y_0(1)+y_1(1)\cdot\mu+y_2(1)\cdot\mu^2+\ \dots=1\ .$$

Таким образом, последовательность задач Коши в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} y'_0(x) = (y_0(x))^2 \ , & y_0(1) = 1 \ , \\ y'_1(x) = 2y_0(x)y_1(x) + \frac{2}{x} \ , & y_1(1) = 0 \ , \\ y'_2(x) = (y_1(x))^2 + 2(y_0(x)y_2(x) \, , & y_2(1) = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & . \end{cases} \qquad (26.6)$$

Решим сначала первую задачу из данной их последовательности: $\frac{dy_0}{y_0^2} = dx$, $-\frac{1}{y_0} = x + C$.

Так как $y_0(1) = 1$, то $-1 = 1 + C$, $C = -2$, и, следовательно, $y_0(x) = \frac{1}{2-x}$.

Решаем вторую из задач Коши, используя результат решения первой: $y'_1(x) = \frac{2y_1(x)}{2-x} + \frac{2}{x}$, или $y'_1(x) - \frac{2y_1(x)}{2-x} = \frac{2}{x}$. Решим данное линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной: $y'_1(x) - \frac{2y_1(x)}{2-x} = 0$, $\frac{dy_1}{y_1} = \frac{2dx}{2-x}$,

$\ln y_1 = -2\ln\left|2-x\right| + \ln C$, $y_1 = \frac{C}{(x-2)^2}$; $y_1 = \frac{C(x)}{(x-2)^2}$, $\frac{C'(x)}{(x-2)^2} = \frac{2}{x}$, $\frac{dC(x)}{dx} = \frac{2(x-2)^2}{x}$,

$C(x) = \int \left(2x - 8 + \frac{8}{x}\right) dx + C_1$, $C(x) = x^2 - 8x + 8\ln|x| + C_1$, $y_1(x) = \frac{x^2-8x+8\ln|x|+C_1}{(x-2)^2}$,

$y_1(1) = \frac{1-8+0+C_1}{1} = 0$, $C_1 = 7$, $y_1(x) = \frac{x^2-8x+8\ln|x|+7}{(x-2)^2}$. Для определения последующих функций $y_2(x)$, $y_3(x)$, … требуется решить последующие задачи Коши. На основании определения функций – коэффициентов $y_0(x)$, $y_1(x)$,… представления решения задачи Коши по степеням малого параметра, это приближённое решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{x^2 - 8x + 8\ln|x| + 7}{(x-2)^2} \cdot \mu + \ \dots\dots$$

§27. Численные методы. Метод Эйлера.

Методы численного приближённого решения задачи Коши, дающие это решение в виде последовательности дискретных числовых значений искомой функции, применяются в случае, если ни один из приближённо-аналитических методов не является достаточно эффективным, в частности, если решение требуется с большой точностью на большом интервале изменения аргумента. Кроме того, эти методы применяются в расчётах с использованием современной вычислительной техники.

Все приближённые численные методы решения задачи Коши

$$y' = f(x,y) \ , \ \ y(x_0) = y_0 \, , \qquad (27.1)$$

имеют следующую единую основу. Решается задача Коши на отрезке $[x_0, X]$, который делится на n частей, при этом длина каждой из частей деления равна $h = \frac{X-x_0}{n}$ и называется *шагом расчёта*.

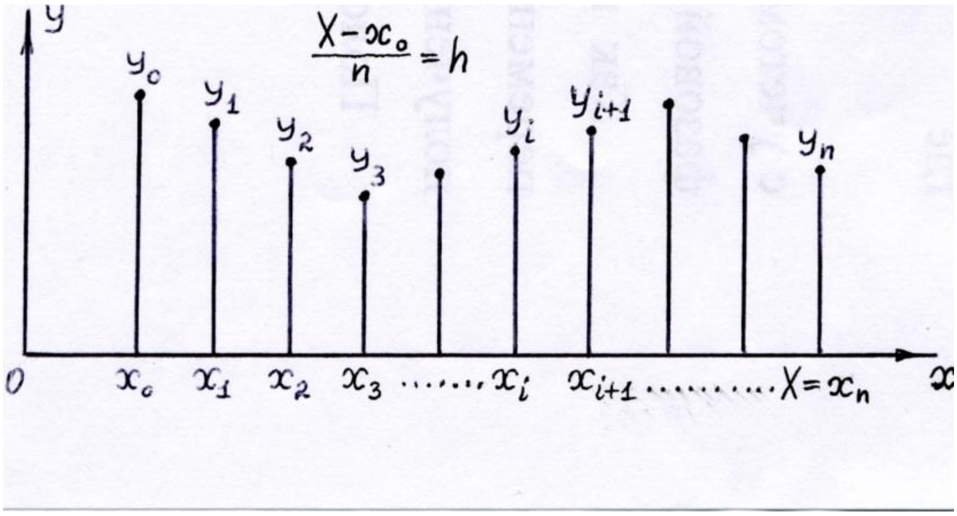

Рис.13. Деление интервала расчёта при применении численного решения задачи Коши.

Через $x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_i , x_{i+1} , \dots , x_{n-1} , x_n = X$ обозначены точки деления отрезка $[x_0, X]$ в результате его разбиения на n частей. Из начального условия следует , что $y_0 = y(x_0)$. Целью каждого из численных методов является приближённое определение дискретных численных значений искомого решения задачи Коши в каждой из точек деления, то есть определение следующих значений решения: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $y(x_3) = y_3 , \dots$ $\dots, y(x_i) = y_i$, $y(x_{i+1}) = y_{i+1} , \dots , y(x_n) = y_n$. Алгоритм каждого из численных методов на каждом текущем шаге h расчёта $[x_i , x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots , n-1$, начиная с первого, на котором известно численное значение ординаты решения в начале шага расчёта, то есть $y(x_i) = y_i$, состоит в определении следующего значения этого решения $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Такое значение решения на каждом шаге расчёта выражается *формулой Тейлора*:

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{y''''(x_i)}{4!}h^4 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}h^n \qquad (27.2)$$

при условии, что все соответствующие производные известны.

Алгоритмы всех рассматриваемых далее численных методов отличаются возможностью определения искомых дискретных значений решения без использования неизвестных значений производных, участвующих в формуле (27.2), но, тем не менее, особенность этих алгоритмов состоит в том, что результат вычисления на их основании неизвестных приближённых численных значений искомого решения полностью совпадает с возможным результатом вычисления по формуле (27.2), а именно, для метода Эйлера – до порядка h , для модификаций метода Эйлера – до порядка h^2 , и, наконец, для методов Рунге-Кутта и Адамса – до порядка h^4 . Доказательство данных утверждений для рассматриваемых алгоритмов численных методов будет приведено далее.

Замечание. При геометрической иллюстрации в последующем алгоритмов численных методов рисунки для удобства графического изображения будут, без ограничения общности их представления, даны для одномерного случая задачи Коши.

Перейдём к рассмотрению алгоритма приближённого численного решения задачи Коши (27.1) по методу Эйлера. Метод Эйлера является наиболее простым и наглядным методом решения такой задачи, и, несмотря на недостаточную точность данного метода, он широко используется на начальных тестовых этапах численного решения прикладных задач. Кроме того, многие важные и эффективные численные методы решения задачи Коши являются по существу развитием метода Эйлера.

Геометрический смысл алгоритма рассматриваемого приближённого численного метода Эйлера состоит в следующем. На каждом шаге h расчёта $[x_i\,, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, начиная с первого, известные значения x_i и $y(x_i) = y_i$ подставляются в обе части уравнения (27.1) данной задачи Коши. В результате получаем $y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$, то есть значением $k = \mathrm{tg}\varphi = y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$ определяется направление поля в данной точке $(x_i, y_i\,)$. Проводим теперь прямую с данным угловым коэффициентом $k = f(x_i, y_i\,)$ из точки $(x_i, y_i\,)$ до пересечения с правой границей интервала расчёта $x = x_{i+1}$. Точка пересечения данных прямых и определяет по методу Эйлера очередное численное значение $y_{i+1} = y\,(x_{i+1})$ приближённого решения задачи Коши.

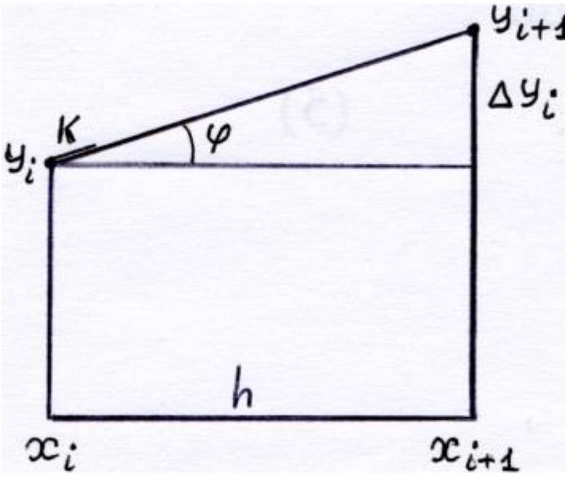

Рис.14. Геометрическая интерпретация алгоритма метода Эйлера.

На основании геометрического представления получаем следующую формулу алгоритма метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h\,f(x_i, y_i\,)\,, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1\,, \tag{27.3}$$

совпадающую, как легко видеть, с формулой (27.2) до слагаемых порядка h.

При практическом применении алгоритмов численных методов результаты вычислений сводят в таблицы. Примером, например, для метода Эйлера, может служить следующая таблица:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$\Delta y_i = h\,f(x_i, y_i)$	$y_i + \Delta y_i$
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$\Delta y_0 = h\,f(x_0, y_0)$	$y_0 + \Delta y_0$
1	x_1	y_1	$f(x_1, y_1)$	$\Delta y_1 = h\,f(x_1, y_1)$	$y_1 + \Delta y_1$
2	x_2	y_2	$f(x_2, y_2)$	$\Delta y_2 = h\,f(x_2, y_2)$	$y_2 + \Delta y_2$
……	……	……	……	……	……
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1}, y_{n-1})$	$\Delta y_{n-1} = h\,f(x_{n-1}, y_{n-1})$	$y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$
n	x_n	y_n			

Замечание. Метод Эйлера является наиболее простым и наглядным методом приближённого численного решения задачи Коши, но из-за того, что его точность имеет низкий порядок, то его успешно применяют лишь при малых значениях h .

§28. Модификации метода Эйлера.

Более точными по сравнению с приближённым численным методом Эйлера решения задачи Коши являются его модификации. Рассмотрим далее алгоритмы приближённого численного решения задачи Коши (27.1) по двум различным модификациям метода Эйлера.

Геометрический смысл алгоритма *первой модификации метода Эйлера* состоит в следующем. На каждом шаге h расчёта $[x_i\,, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, начиная с первого, поступаем так же, как и в методе Эйлера, то есть известные значения x_i и $y(x_i) = y_i$ подставляем в уравнение (27.1) и в результате получаем $y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$. Таким образом, направление поля в данной точке $(x_i, y_i\,)$ имеет значение $k = \mathrm{tg}\varphi = \ y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$. Проводим теперь следующие две прямые линии до их пересечения. Это, по аналогии с предыдущим, проводим прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_i, y_i\,)$ из точки $(x_i, y_i\,)$ до пересечения с правой границей интервала расчёта и вертикальную линию $x = x_i + \frac{h}{2}$, проведенную из середины данного интервала расчёта. Координатами точки пересечения этих прямых, очевидно, являются $\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i\ + \frac{h}{2} f(x_i, y_i\,)\right)$. Направление поля в данной точке имеет величину $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1 = y'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i\ + \frac{h}{2} f(x_i, y_i\,)\right)$.

Проводим теперь прямую с угловым коэффициентом $k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i\ + \frac{h}{2} f(x_i, y_i\,)\right)$ снова из точки $(x_i, y_i\,)$ до пересечения с правой границей интервала расчёта $x = x_{i+1}$. Точка пересечения данных прямых и определяет по первому модифицированному методу Эйлера очередное окончательное численное значение $y_{i+1} = \ y\,(x_{i+1})$ приближённого решения задачи Коши.

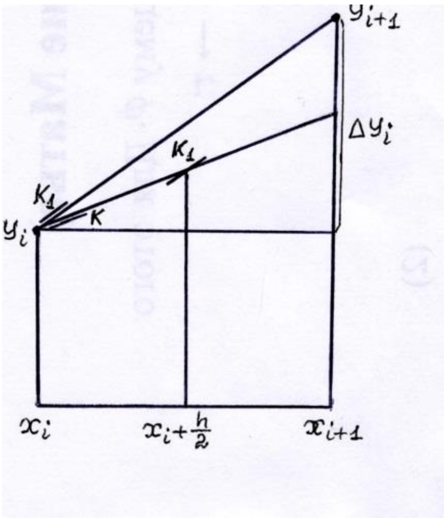

Рис.15. Геометрическая интерпретация алгоритма первой модификации метода Эйлера.

На основании геометрического представления получаем следующую формулу алгоритма первого модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \ h\,f\left(\ x_i + \tfrac{h}{2},\ y_i \ + \tfrac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)\ ,\quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1\ . \qquad (28.1)$$

Геометрический смысл алгоритма *второй модификации метода Эйлера* состоит в следующем. На каждом шаге h расчёта $[x_i\ , x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, начиная с первого, снова поступаем так же, как и в методе Эйлера, то есть известные значения x_i и $y(x_i) = y_i$ подставляем в уравнение $y' = f(x, y)$. В результате получаем $y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$, то есть направление поля в данной точке $k = \mathrm{tg}\varphi = y'(\,x_i) = f(x_i, y_i\,)$. Далее, как и в методе Эйлера, проводим прямую с данным угловым коэффициентом $k = f(x_i, y_i\,)$ из точки $(x_i, y_i\,)$ до пересечения с правой границей $x = x_{i+1}$ интервала расчёта. Точкой пересечения будет $(x_{i+1},\ y_i + \ h\,f(x_i, y_i\,))$. Подставив её координаты в данное уравнение $y' = f(x, y)$, получаем направление поля в этой точке пересечения $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1 = f\big(x_{i+1}, y_i \ + hf(x_i, y_i\,)\big)$.

Коэффициент $k_2 = \frac{k+k_1}{2}$ (равный среднему арифметическому полученных угловых коэффициентов k и k_1) принимаем за величину углового коэффициента прямой, которую проводим снова из точки $(x_i, y_i\,)$ до пересечения с правой границей интервала расчёта $x = x_{i+1}$. Точка пересечения данных прямых и определяет по второму модифицированному методу Эйлера очередное окончательное численное значение $y_{i+1} = \ y\,(x_{i+1})$ приближённого решения задачи Коши (см. рис. 16).

На основании геометрического представления получаем следующую формулу алгоритма второго модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \ h\frac{f(x_i, y_i\,) + f\big(x_{i+1}, y_i \ + hf(x_i, y_i\,)\big)}{2}\ ,\quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1\ . \qquad (28.2)$$

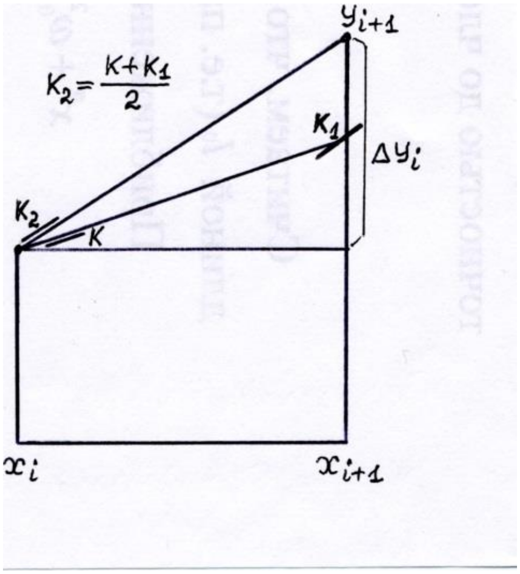

Рис.16. Геометрическая интерпретация алгоритма второй модификации метода Эйлера.

Покажем, что применение алгоритмов модификаций приближённого численного метода Эйлера, в отличие от метода Эйлера, даёт совпадение уже с точностью порядка h^2 результата вычисления искомого значения решения на каждом интервале расчёта с результатом вычисления этого значения по формуле (27.2). На основании формулы (27.2), очевидно, в этом случае имеем $y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 = y_i + \Delta y_i$. В соответствии с уравнением $y' = f(x, y)$ данной задачи Коши вычисляем значения производных $y'(x_i)$ и $y''(x_i)$ в начальной точке интервала расчёта $(x_i, y_i) = (\cdot)$. В результате получаем следующие значения $y'(x_i) = f(x_i, y_i) = f(\cdot)$ и $y''(x_i) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} y'(x_i) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + {}$ $+ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} f(\cdot)$. Итак, по формуле Тейлора (27.2) в этом случае имеем:

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 = y_i + f(\cdot)h + [\frac{1}{2}\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} f(\cdot)]h^2 . \qquad (28.3)$$

Составим теперь следующую формулу алгоритма приближённого вычисления значения $y\,(x_{i+1})$ на текущем интервале расчёта, элементы которого обобщают слагаемые, используемые в алгоритмах модифицированных методов Эйлера:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \propto K_{i1} + \beta K_{i2}$, где $K_{i1} = hf(x_i, y_i)$, $K_{i2} = hf(x_i + ah, y_i + bK_1)$. (28.4)

Отсюда следует, что

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \propto hf(x_i, y_i) + \beta hf\big(x_i + ah, y_i + bhf(x_i, y_i)\big) . \qquad (28.5)$$

Разлагая правую часть (28.5) по степеням h, используя $(x_i, y_i) = (\cdot)$ и ограничиваясь слагаемыми порядка h^2, получаем: $y_{i+1} \cong y_i + \propto hf(\cdot) + \beta h[f(\cdot) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} ah + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} f(\cdot)bh]$,

$y_{i+1} \cong y_i + [\propto f(\cdot) + \beta f(\cdot)]\, h + [\alpha\beta \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + b\beta \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} f(\cdot)]h^2$, или, окончательно,

$$y_{i+1} \cong y_i + [\propto + \beta\,]\, f(\cdot)\, h + [a\beta \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + b\beta \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} f(\cdot)]h^2 \quad . \tag{28.6}$$

Приравнивая коэффициенты в разложениях (28.3) и (28.6) при одинаковых степенях h до степени h^2 включительно и затем при одинаковых функциях, получаем систему:

$\begin{cases} \propto + \beta = 1 \\ a\beta = \frac{1}{2} \\ b\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$. Данная совместная неопределённая система 3-х уравнений с 4-мя неизвестными среди множества своих решений имеет следующие решения:

1). $\propto = 0$, $\beta = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$; 2) $\propto = \beta = \frac{1}{2}$, $a = b = 1$. Подставляя полученные значения этих коэффициентов в (28.5) , получаем следующие формулы алгоритмов:

1). $$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) ,$$

2). $$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h\,\frac{f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big)}{2} ,$$

то есть формулы алгоритмов первой и второй модификаций метода Эйлера. Это доказывает, что эти алгоритмы действительно обеспечивают результат расчёта порядка h^2 .

При практическом применении алгоритмов численных методов модификаций метода Эйлера результаты вычислений сводят в соответствующие таблицы.

§29. Метод Рунге-Кутта.

По сравнению с рассмотренными методами приближённого численного решения задачи Коши, приближённый *численный метод Рунге-Кутта* является дальнейшим развитием методов Эйлера. Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутта следующая: как и в методах Эйлера сначала вычисляется $k = \mathrm{tg}\varphi = y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, затем проводится из точки (x_i, y_i) прямая с угловым коэффициентом k до пересечения с вертикальной прямой $x = x_i + \frac{h}{2}$. В точке пересечения этих прямых вычисляется угловой коэффициент направления поля $k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)) = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k)$, из точки (x_i, y_i) проводится следующая прямая с угловым коэффициентом k_1 до пересечения с вертикальной прямой $x = x_i + \frac{h}{2}$ и вычисляется в точке пересечения следующий угловой коэффициент $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$. Затем из точки (x_i, y_i) проводится третья прямая с угловым коэффициентом k_2 до пересечения с вертикальной прямой $x = x_{i+1}$ – правой границей интервала расчёта . В этой точке пересечения вычисляется следующий угловой коэффициент $k_3 = f(x_{i+1}, y_i + hk_2)$. Наконец, из точки (x_i, y_i) проводится последняя четвёртая прямая с угловым коэффициентом $k_4 = \frac{k+2k_1+2k_2+k_3}{6}$ до пересечения с вертикальной прямой – правой границей интервала расчёта $x = x_{i+1}$. Точка пересечения данных прямых и определяет по методу Рунге-Кутта окончательное численное значение $y_{i+1} = y\,(x_{i+1})$ приближённого решения задачи Коши на рассматриваемом текущем интервале расчёта.

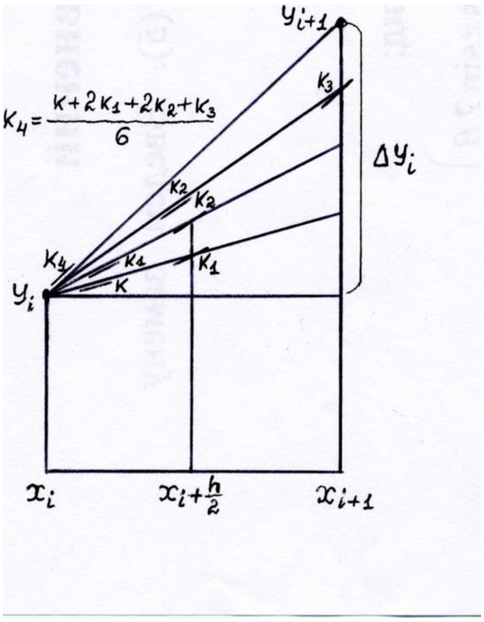

Рис.17. Геометрическая интерпретация алгоритма метода Рунге-Кутта.

Данное геометрическое представление соответствует следующим известным формулам алгоритма приближённого численного метода Рунге-Кутта:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \frac{1}{6}(K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4}), \qquad (29.1)$$

$$K_{i1} = hf(x_i, y_i\,)\,, \quad K_{i2} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i\ + \frac{1}{2}K_{i1}\right)\,,\; K_{i3} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i\ + \frac{1}{2}K_{i2}\right),$$

$$K_{i4} = hf(x_{i+1}\,, y_i\ + K_{i3}\,)\ , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Замечание. По аналогии с доказательством, проведенном для модифицированных методов Эйлера, можно показать, что алгоритм данного приближённого численного метода Рунге-Кутта даёт на каждом интервале шага расчёта совпадение результата вычисления с точностью до порядка h^4 по сравнению с вычислением по формуле (27.2) . Для этого рассматривается следующая формула: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \propto K_{i1} + \beta K_{i2} + \gamma K_{i3} + \delta K_{i4}$, (29.2)
где $K_{i1} = hf(x_i, y_i\,)$, $K_{i2} = hf(x_i + a_1 h\,, y_i\ + b_1 K_{i1})$, $K_{i3} = hf(x_i + a_2 h\,, y_i\ + b_2 K_{i2})$, $K_{i4} = hf(x_i\ + a_3 h\,, y_i\ + b_3 K_{i3})$.

Для определения 10 неизвестных коэффициентов $\propto$, β , γ , δ , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3 проводится разложение (29.2) и представление (27.2) по степеням h до h^4 включительно. Можно показать (см. [6]) , что после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях h и при соответствующих функциях получается система из 18 уравнений при 10 указанных неизвестных. Одним из решений этой системы является совокупность следующих значений неизвестных: $\propto = \delta = \frac{1}{6}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$, $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = b_3 = 1$. Так как эти значения соответствуют формулам алгоритма метода Рунге-Кутта (29.1), то таким образом соответствующее утверждение подтверждается.

При практическом применении алгоритмов приближённого численного метода Рунге результаты вычислений сводят в соответствующие таблицы.

§30. Метод Адамса.

Рассматриваемый далее приближённый численный метод Адамса решения задачи Коши относится к числу разностных численных методов, особенностью которых является достаточно высокая точность и практическое удобство его применения. В данном случае будет рассмотрен алгоритм приближённого численного метода Адамса решения задачи Коши, обеспечивающего точность расчёта порядка h^4 .

В отличие от предыдущих численных методов для применения метода Адамса необходимо иметь, кроме заданного начального значения $y\,(x_0)$ задачи Коши , ещё и значения в трёх последующих начальных точках, а именно: $y\,(x_1)$, $y\,(x_2)$ и $y\,(x_3)$. Эти значения в данном случае определяются по методу Рунге-Кутта, обеспечивающему точность расчёта порядка h^4. На основании этих известного и полученных значений определяются значения производных: $y_0' = f(x_0, y_0)$, $y_1' = f(x_1, y_1)$, $y_2' = f(x_2, y_2)$ и $y_3' = f(x_3, y_3)$.

Начиная с $i = 3$, то есть с 3-го шага расчёта, с использованием этих полученных значений производных определение значения $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ проводится уже по методу Адамса с помощью вычисления слагаемого Δy_i в виде интеграла: $\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx$,

в котором y' аппроксимируется интерполяционным полиномом Ньютона $P_i(x)$ (см. [6]). Таким образом, соответствующее вычисление имеет вид:

$$\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)\, dx = \tag{30.1}$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_i' + z \cdot \Delta y_i' + \frac{z(z+1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_i' + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_i' \right) dx \ ,$$

где $z = \frac{x - x_i}{h}$. Здесь также введены следующие обозначения:

$$\Delta y_i' = y_i' - y_{i-1}' \ , \ \ \Delta^2 y_i' = \Delta y_i' - \Delta y_{i-1}' \ , \ \ \Delta^3 y_i' = \Delta^2 y_i' - \Delta^2 y_{i-1}' \ . \tag{30.2}$$

Заменив в интеграле переменную интегрирования x на $z = \dfrac{x - x_i}{h}$, преобразуем интеграл $\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_i' + z \cdot \Delta y_i' + \frac{z(z+1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_i' + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_i' \right) dx$ к виду:

$\Delta y_i = h \int\limits_0^1 \left(y_i' + z \cdot \Delta y_i' + \frac{z(z+1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_i' + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_i' \right) dz$, и в результате вычисления данного интеграла получаем окончательное выражение для основной формулы алгоритма приближённого численного метода Адамса:

$$\Delta y_i = h \left[y_i' + \tfrac{1}{2} \Delta y_i' + \tfrac{5}{12} \Delta^2 y_i' + \tfrac{3}{8} \Delta^3 y_i' \right]. \qquad (30.3)$$

Особенностью метода Адамса является то, что до 3-го шага расчёта применяется алгоритм численного метода Рунге-Кутта. И только, начиная с 3-го шага включительно, оказывается возможным вычисление необходимых величин $\Delta y_i'$, $\Delta^2 y_i'$, $\Delta^3 y_i'$, $i \geq 3$, используемых для применения уже алгоритма метода Адамса. Таким образом, начиная с этого 3-го шага, численный расчёт уже практически проводится только с использованием алгоритма численного метода Адамса, причём особенностью данного дальнейшего расчёта является тот факт, что этот он проводится в значительной степени внутри нижеследующей таблицы. При применении метода Адамса, как это видно из ниже приведенной таблицы результатов расчёта, на первых трёх шагах результаты расчёта получены по формулам алгоритма метода Рунге-Кутта. Затем вычисляются последовательно необходимые величины с помощью применения алгоритма метода Адамса, начиная со значений y_3', $\Delta y_3'$, $\Delta^2 y_3'$, $\Delta^3 y_3'$. На основании этих значений и уже до конца данного численного расчёта применяется алгоритм метода Адамса (30.3), имеющий точность расчёта, как и рассмотренный алгоритм метода Рунге-Кутта, порядка h^4 (см. [6]).

i	x_i	y_i	y_i'	$\Delta y_i'$	$\Delta^2 y_i'$	$\Delta^3 y_i'$	$\Delta y_i = h\left[y_i' + \frac{1}{2}\Delta y_i' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_i' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_i'\right]$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$
0	x_0	y_0	y_0'	–	–	–	Δy_0 – по методу Рунге-Кутта	$y_0 + \Delta y_0$
1	x_1	y_1	y_1'	$\Delta y_1'$	–	–	Δy_1 – по методу Рунге-Кутта	$y_1 + \Delta y_1$
2	x_2	y_2	y_2'	$\Delta y_2'$	$\Delta^2 y_2'$	–	Δy_2 – по методу Рунге-Кутта	$y_2 + \Delta y_2$
3	x_3	y_3	y_3'	$\Delta y_3'$	$\Delta^2 y_3'$	$\Delta^3 y_3'$	$\Delta y_3 = h\left[y_3' + \frac{1}{2}\Delta y_3' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_3' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_3'\right]$	$y_3 + \Delta y_3$
4	x_4	y_4	y_4'	$\Delta y_4'$	$\Delta^2 y_4'$	$\Delta^3 y_4'$	$\Delta y_4 = h\left[y_4' + \frac{1}{2}\Delta y_4' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_4' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_4'\right]$	$y_4 + \Delta y_4$
…...	……	……	…....	……	…….	……	……………………………………	………
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	y_{n-1}'	$\Delta y_{n-1}'$	$\Delta^2 y_{n-1}'$	$\Delta^3 y_{n-1}'$	$\Delta y_{n-1} = h\left[y_{n-1}' + \frac{1}{2}\Delta y_{n-1}' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_{n-1}' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_{n-1}'\right]$	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$
n	x_n	y_n	–	–	–	–	–	–

§31. Точность и устойчивость алгоритмов численных методов.

Практическое применение приближённых численных методов решения задачи Коши в большинстве случаев состоит в определении требуемого результата с заданной степенью точности. Для достижения этой цели важным фактором является выбор соответствующей величины шага расчёта. Рекомендацией для обеспечения необходимой точности расчёта и выбора соответствующего значения шага h может служить следующий метод Рунге. По этому методу сначала проводится расчёт с выбранным значением шага расчёта $h = \frac{X - x_0}{n}$, соответствующем разбиению отрезка $[x_0, X]$, на котором производится расчёт, с числом делений n. После этого проводится разбиение с числом делений $2n$. Таким образом, выполняется так называемый *двойной пересчёт,* и оценка точности расчёта проводится по следующей *формуле Рунге* (см. [6]):

$$\left| y(x) - y_{(2n)}(x) \right| \le \frac{\left| y_{(n)}(X) - y_{(2n)}(X) \right|}{2^m - 1} \le \varepsilon, \qquad (31.1)$$

где $\varepsilon -$ величина заданной точности расчёта, $y(x)$ – неизвестное точное решение задачи Коши, $y_{(2n)}(x) -$ решение задачи Коши с числом делений отрезка расчёта $2n$, $y_{(n)}(X) -$ конечный результат расчёта с числом делений n , $y_{(2n)}(X) -$ конечный результат расчёта с числом делений $2n$. Значение величины числа m в знаменателе формулы зависит от того, какой из методов расчёта применяется. Так для метода Эйлера принимается значение $m = 1$, для модификаций метода Эйлера $m = 2$ и, наконец, для методов Рунге-Кутта и Адамса – значение $m = 4$. Если результат по формуле (31.1) удовлетворяет значению заданной точности ε , то результат расчёта с числом делений $2n$ считается окончательным, удовлетворяющим заданной точности вычисления.

Если в результате расчётов с числами делений n и $2n$ итоговая величина по формуле Рунге (31.1) оказывается больше, чем ε , то следует провести очередной двойной пересчёт с числами делений уже $2n$ и $4n$ и снова применить формулу Рунге применительно уже для этих значений числа делений. В зависимости от полученного результата либо расчёт заканчивается и последний расчёт считается окончательным, либо проводится последующий двойной пересчёт до достижения требуемого результата.

Рассмотрим следующее важное так называемое *свойство устойчивости счёта*, которому удовлетворяют алгоритмы рассмотренных приближённых численных методов Эйлера, Рунге-Кутта и Адамса. Расчёт является устойчивым, если небольшие начальные отклонения в процессе численного решения не возрастают с увеличением числа шагов. Покажем, например, устойчивость счёта даже при применении метода Эйлера.

Итак, пусть уже в начале, при применении алгоритма метода Эйлера, при задании или

возможном вычислении значения y_0 допущена погрешность $|y_0 - \tilde{y}_0| \le \delta$, где $\tilde{y}_0$ – полученное значение с погрешностью порядка δ вместо истинного значения y_0. Тогда по основной формуле (27.3) метода Эйлера очередное значение искомого решения задачи Коши вместо $y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0)$ будет $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + hf(x_0, \tilde{y}_0)$, и погрешность на первом шаге вычисления определяется неравенством: $|y_1 - \tilde{y}_1| \le \big|y_0 + h\,f(x_0, y_0) - \tilde{y}_0 - - hf(x_0, \tilde{y}_0)\big| \le |y_0 - \tilde{y}_0| + hK|y_0 - \tilde{y}_0| \le (1 + hK)|y_0 - \tilde{y}_0| \le (1 + hK)\,\delta$. Далее по аналогии получаем: $|y_2 - \tilde{y}_2| \le (1 + hK)|y_1 - \tilde{y}_1| \le (1 + hK)^2\,\delta$. Очевидно, по индукции имеем: $|y_n - \tilde{y}_n| \le (1 + hK)^n\,\delta \le (1 + hK + h^2K^2 + \cdots)^n\,\delta \le e^{hKn}\delta \le e^{|X - x_0|K}\,\delta$.
Так как множитель $e^{|X - x_0|K}$ полученной оценки есть величина ограниченная, то порядок малости ошибки в течение всего процесса расчёта остаётся соответствующим порядку малости начальной погрешности δ. Следовательно, расчёт по методу Эйлера является устойчивым. По аналогии следует устойчивость и всех рассмотренных приближённых численных методов решения задачи Коши.

Замечание. Все рассмотренные алгоритмы приближённых численных методов являются сходящимися. Исследование сходимости алгоритмов рассмотренных методов в задачу данного курса не входит и рассматривается в специальных курсах численных методов. Со сходимостью алгоритмов рассмотренных приближённых численных методов можно при желании ознакомиться в прилагаемой литературе (см. [6]).

Глава 10. **Линейные системы дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высшего порядка.**

§32. Линейные системы и уравнения высшего порядка в операторной форме.

Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \tag{32.1}$$

называется *линейной системой дифференциальных уравнений*. Форма (32.1) является *векторно-матричной формой линейной системы дифференциальных уравнений*, в которой *вектор-функции* $y = y(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $f(x)$ и *функциональная матрица* $A(x)$ имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в координатной форме система (32.1) записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad (32.2)$$

Если в (32.1) вектор-функция $f(x) \neq 0$, то данная система называется *линейной неоднородной системой,* если же $f(x) \equiv 0$, то система называется *линейной однородной системой.* Если рассматривается неоднородная система (32.1), но в ней в промежуточном действии полагается $f(x) \equiv 0$, то при этом условии система (32.1) называется *линейной однородной системой, соответствующей данной неоднородной системе* (32.1).

Введём в рассмотрение *операторную форму записи рассматриваемой линейной системы* (32.1) на основании следующего возможного представления этой системы:

$$\left[\frac{d}{dx} - A(x)\right] y = f(x) \qquad (32.3)$$

В этой записи оператор $\left[\frac{d}{dx} - A(x)\right] y$, действующий на вектор-функцию $y = y(x)$ обозначаем через $L(y) = \left[\frac{d}{dx} - A(x)\right] y$ и, следовательно, система (32.1) принимает следующий вид *операторного уравнения*: $L(y) = f(x)$. (32.4)

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение высшего порядка вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \ . \qquad (32.5)$$

Это уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением высшего порядка.* При $f(x) \neq 0$ уравнение называется *неоднородным линейным уравнением*, если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным уравнением*. При рассмотрении (32.5) в случае предположения, что $f(x) \equiv 0$, уравнение называется *линейным однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению* (32.5).

По аналогии с операторной формой системы (32.4) введём в рассмотрение *операторную форму записи рассматриваемого линейного дифференциального уравнения высшего порядка* (32.5) на основании следующего представления этого уравнения:

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n\right] y = f(x) \qquad (32.6)$$

Оператор, действующий на функцию $y = y(x)$ в (32.5), обозначаем, как и в случае системы (32.3), в виде $L(y) = \left[\frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n\right] y$ и, следовательно, в операторной форме рассматриваемое уравнение (32.5) принимает вид (32.4).

Замечание. Совпадающая операторная форма имеет своим удобством и обоснованием тот факт, что, как это рассмотрено в §16 и §17, интегрирование линейной системы (32.1) может быть сведено к интегрированию линейного уравнения высшего порядка (32.5) и наоборот. При применении операторной формы уравнения (32.4) основные свойства линейных систем и уравнений рассматриваются одновременно при несложном обращении, в случае необходимости, к конкретному виду соответствующего оператора. Более того, без ущерба для понимания содержания выражение $L(y) = f(x)$ называем *уравнением*.

§33. Свойства решений линейных однородных систем и уравнений.

Итак, в операторной форме линейные однородные системы и линейные однородные уравнения высшего порядка имеют следующий вид *операторного уравнения*:

$$L(y) = 0 \ . \tag{33.1}$$

Очевидно, уравнение $L(y) = 0$ всегда имеет тривиальное решение $y(x) = 0$. Рассмотрим теоремы о совокупности всех решений данного уравнения $L(y) = 0$.

Замечание. Так как в данной форме одновременно будут рассматриваться свойства решений операторного уравнения (33.1) как для линейной системы, так и для линейного уравнения высшего порядка, то уточнять, какие решения рассматриваются, будем только в случае необходимости. Это будет касаться построений матриц и определителей на основе совокупности этих решений.

Теорема 1. Сумма решений уравнения $L(y) = 0$ является его решением.

Доказательство. По условию теоремы известны решения y_1 и y_2 , то есть, $L(y_1) = 0$ и $L(y_2) = 0$. Покажем, что $y = y_1 + y_2$ также является решением. Для этого рассмотрим доказательство применительно к виду оператора для нормальной системы дифференциальных уравнений (32.3): $L(y_1 + y_2) = \left[\frac{d}{dx} - A(x)\right](y_1 + y_2) = \frac{d(y_1+y_2)}{dx} - A(x)(y_1 + y_2) =$ $= \frac{dy_1}{dx} - A(x)y_1 + \frac{dy_2}{dx} - A(x)y_2 = L(y_1) + L(y_2) = 0$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанное утверждение данной теоремы и доказательство последующих теорем, при применении оператора $L(y) = 0$, может быть проведено аналогично применительно к виду этого оператора, как для системы, так и для уравнения высшего порядка.

Теорема 2. Произведение решения y уравнения $L(y) = 0$ на любую постоянную k является также его решением.

Доказательство. По условию теоремы известно решение y уравнения $L(y) = 0$. Выбираем любую k – произвольную постоянную. Применяя вид оператора для системы, доказываем данное утверждение теоремы: $L(ky) = \frac{d(ky)}{dx} - A(x)ky = k\left(\frac{dy}{dx} - A(x)y\right) = kL(y) = 0.$

Следствия из Теорем 1 и 2 . 1). Линейная комбинация решений, очевидно, является также решением. 2). Оператор $L(y)$, который удовлетворяет следующим свойствам:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \quad \text{и} \quad L(ky) = kL(y) \;, \text{ для любого значения } k, \tag{33.2}$$

называется *линейным оператором* (см. [11]).

Теорема 3. Действительная и мнимая части комплексного решения являются решениями. *Доказательство*. По условию теоремы известно решение $y = u + iv$ уравнения $L(y) = 0$, то есть $L(u + iv) = 0$. Так как оператор $L(y)$ является линейным, то, следовательно: $L(u + iv) = L(u) + iL(v) = 0$. Но, как известно, комплексное выражение обращается в ноль тогда и только тогда, когда обращаются в ноль действительная и мнимая части этого комплексного выражения: $L(u) = 0$ и $L(v) = 0$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим далее совокупность n решений $y_1, y_2, y_3 \dots, y_n$ уравнения $L(y) = 0$. Как известно, данная совокупность решений будет *линейно зависимой*, если существуют такие числа $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$, не все одновременно равные нулю, что выполняется равенство: $h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3 + \dots + h_n y_n = 0$. Если же это равенство нулю выполняется только при условии, что одновременно все $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv \dots \equiv h_n \equiv 0$, то рассматриваемая совокупность n решений является *линейно независимой*.

На базе n решений линейной однородной системы, построим следующую матрицу:

$$G(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \;. \tag{33.3}$$

Замечание. При использовании здесь и в дальнейшем двух индексов, применительно к векторным формам решений, *первый индекс* означает *номер координаты решения*, а *второй индекс – номер векторного решения*.

Теперь на базе совокупности n решений линейного однородного уравнения высшего порядка построим следующую матрицу:

$$G(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \;. \tag{33.4}$$

Замечание. Единообразное обозначение матриц $G(x)$ из решений системы уравнений и уравнения высшего порядка имеет своей аргументацией те же основания, что и при одинаковом обозначении операторного уравнения, как для нормальной системы дифференциальных уравнений, так и для дифференциального уравнения высшего порядка.

Определитель матрицы $G(x)$, обозначаемый в виде $\det G(x) = |G(x)| = W(x)$, называется *определителем Вронского*.

Теорема 4. Если решения $y_1, y_2, y_3 \dots, y_n$ уравнения $L(y) = 0$ линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю.

Доказательство. Утверждение данной теоремы очевидно в силу соответствующего свойства определителя, столбцы которого линейно зависимы.

Теорема 5. Если определитель Вронского равен нулю хотя бы в одной точке рассматриваемого интервала оси Ox, то соответствующая совокупность n решений уравнения $L(y)=0$ линейно зависима.

Доказательство. Предположим, что для некоторой рассматриваемой системы n решений $y_1,\ y_2,\ y_3 \dots, y_n$ уравнения $L(y)=0$ в точке x_0 определитель Вронского $W(x_0)=0$. Составим следующую линейную комбинацию рассматриваемых решений с произвольными постоянными $h_1,\ h_2,\ h_3, \dots, h_n$ (которые полагаются координатами вектора H), то есть $h_1y_1+h_2y_2+\dots+h_ny_n$ или, что то же, $G(x)H$. В соответствии со Следствием 1 из теорем 1 и 2 эта линейная комбинация является также решением уравнения $L(y)=0$. Рассмотрим решение $G(x)H$ при $x=x_0$ и, приравняв это решение нулю, составим следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений $G(x_0)H=0$ относительно неизвестных $h_1,\ h_2,\ h_3, \dots, h_n$. Определителем данной системы является равный нулю определитель $W(x_0)=0$ и, следовательно, эта система имеет ненулевые решения. Выберем ненулевое решение системы $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2,\ \tilde{h}_3, \dots, \tilde{h}_n$ (координаты вектора $\tilde{H}$). В этом случае решение $G(x)\tilde{H}$ при $x=x_0$ вследствие определения $\tilde{H}$ при $x=x_0$ обращается в нуль $G(x_0)\tilde{H}=0$. Но в нуль при всех значениях x, в том числе и при $x=x_0$ обращается и нулевое решение $y(x)\equiv 0$ уравнения $L(y)=0$. Так как условия теоремы Коши выполнены, то через одну точку проходит только одно решение. Следовательно, решения $G(x)\tilde{H}$ и $y(x)\equiv 0$ совпадают, то есть $G(x)\tilde{H}\equiv 0$ или $\tilde{h}_1y_1+\tilde{h}_2y_2+\tilde{h}_3y_3+\dots+\tilde{h}_ny_n\equiv 0$ при условии, что не все числа $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2,\ \tilde{h}_3, \dots, \tilde{h}_n$ обращаются в ноль, то есть данная система решений $y_1,\ y_2,\ y_3 \dots, y_n$ линейно зависима. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим далее определитель $W(x)=\det G(x)$ матрицы $G(x)$ системы решений $y_1,\ y_2,\ y_3 \dots, y_n$ линейной системы дифференциальных уравнений:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{33.5}$$

Продифференцируем данный определитель по x на основании определения определителя, как суммы $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя с соответствующим знаком плюс или минус, зависящим от чётности или нечётности суммарного числа инверсий первых и вторых индексов сомножителей. Говорят, что индексы составляют инверсию, если меньшее числовое значение индекса стоит правее большего. На основании данного определения производная определителя равна сумме n определителей, соответствующих последовательному дифференцированию в каждом из слагаемых сначала элементов первой строки данного определителя, затем второй строки и так далее до n – й строки. Следовательно, производная определителя представляется так:

$$W'(x) = \left(\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}\right)' = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (33.6)$$

Так как линейная однородная система в соответствии с (32.2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad (33.7)$$

или в координатной форме:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + a_{13}(x)y_3 + \cdots + a_{1n}(x)y_n \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + a_{23}(x)y_3 + \cdots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + a_{n3}(x)y_3 + \cdots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}, \qquad (33.8)$$

то результат подстановки в эту систему любого из рассматриваемой совокупности n решений $y_i = \{y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, \dots, y_{ni}\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, представляется в виде:

$$\begin{cases} y'_{1i} = a_{11}(x)y_{1i} + a_{12}(x)y_{2i} + a_{13}(x)y_{3i} + \cdots + a_{1n}(x)y_{ni} \\ y'_{2i} = a_{21}(x)y_{1i} + a_{22}(x)y_{2i} + a_{23}(x)y_{3i} + \cdots + a_{2n}(x)y_{ni} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y'_{ni} = a_{n1}(x)y_{1i} + a_{n2}(x)y_{2i} + a_{n3}(x)y_{3i} + \cdots + a_{nn}(x)y_{ni} \end{cases}. \qquad (33.9)$$

Для продолжения реализации $W'(x)$ необходимо в каждом из определителей (33.6) вместо производных y'_{ji} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) подставить их выражения из системы (33.9), состоящие для каждой производной из n слагаемых. Следовательно, каждый из этих определителей теперь можно представить в виде n определителей, у которых все элементы, кроме строки из производных аналогичны, а вместо производных у первого определителя стоят вместо соответствующей y'_{ji} первые слагаемые из (33.9), у второго – вторые, у третьего – третьи и так далее.

В результате, очевидно, получаем:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & \cdots & a_{11}y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}y_{21} & a_{12}y_{22} & \cdots & a_{12}y_{2n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{13}y_{31} & a_{13}y_{32} & \cdots & a_{13}y_{3n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{1n}y_{n1} & a_{1n}y_{n2} & \cdots & a_{1n}y_{nn} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{21}y_{11} & a_{21}y_{12} & \cdots & a_{21}y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22} & \cdots & a_{22}y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{2n}y_{n1} & a_{2n}y_{n2} & \cdots & a_{2n}y_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn}y_{n1} & a_{nn}y_{n2} & \cdots & a_{nn}y_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}W(x)+$$

$$+a_{12}\cdot 0+a_{13}\cdot 0+\cdots+a_{1n}\cdot 0+a_{21}\cdot 0+a_{22}\,W(x)+\cdots+a_{2n}\cdot 0+\cdots+a_{nn}W(x)=$$

$$=\ a_{11}W(x)+a_{22}W(x)+a_{33}W(x)+\cdots+\ a_{nn}W(x)=(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn})W(x).$$

Таким образом, $W'(x)=(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn})W(x)$. В курсе алгебры сумма диагональных элементов матрицы A обозначается $\mathrm{Sp}A=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$ и называется *следом матрицы* A .

Решаем дифференциальное уравнение $W'(x)=\mathrm{Sp}A\cdot W(x)$.

$$\frac{dW(x)}{dx}=\mathrm{Sp}A\,dx\ ,\quad \ln W(x)=\int_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}A\,dx+\ln C\ ,\quad W(x)=Ce^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}A\,dx}\ .$$

Подставляя в обе части полученного решения $x=x_0$, получим $W(x_0)=C\cdot 1$. Заменив в решении произвольную постоянную C на $W(x_0)$, получаем известную формулу:

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{Sp}A\,dx}\ ,\qquad (33.10)$$

которая носит название *формула Остроградского – Лиувилля – Якоби.*

Так как линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка (как рассмотрено в §17) сводится к соответствующей линейной однородной системе вида:

$$\begin{cases} z_1'=z_2 \\ z_2'=z_3 \\ z_3'=z_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1}'=\ z_n \\ z_n'=-a_nz_1-a_{n-1}z_2-a_{n-2}z_3-\cdots-a_1z_n \end{cases},\qquad (33.11)$$

то след матрицы в данном случае, очевидно, равен $\mathrm{Sp}A=-a_1(x)$, и тогда *формула Остро-*

градского – Лиувилля – Якоби применительно к линейному однородному дифференциальному уравнению высшего порядка, то есть (32.5) при $f(x) \equiv 0$, очевидно, принимает следующий вид:
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx} \quad . \tag{33.12}$$

После вывода полученных формул (33.10) и (33.12) переходим к следующим теоремам.

Теорема 6. Для того, чтобы совокупность n решений $L(y) = 0$ была линейно независимой (линейно зависимой) необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $W(x)$ этой системы решений был не равен нулю (был равен нулю) на всём рассматриваемом интервале оси Ox,

Доказательство. Утверждение данной теоремы, очевидно, верно на основании формул (33.10) и (33.12) Остроградского – Лиувилля – Якоби и утверждения Теоремы 5.

Замечание. Следует заметить, что данное утверждение о том, что при $W(x) = 0$ система решений линейно зависима, относится только к решениям линейных дифференциальных уравнений и систем, но не относится к произвольным даже дифференцируемым функциям, как показывает следующий пример. Следующие дифференцируемые функции:
$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{при} \quad x \in [\ 0,1\ ] \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [\ -0,1\ ] \\ x^2 & \text{при} \quad x \in [1, 0] \end{cases} \tag{33.13}$$
независимы между собой, так как $h_1y_1(x) + h_2y_2(x) = 0$ только при условии, что $h_1 = h_2 = 0$. В то же время $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$, так как при $x \in [\ -0,1\ ]$ элементы второго столбца определителя Вронского равны нулю, а при $x \in [1, 0]$ равны нулю элементы первого столбца этого определителя.

Теорема 7. Любое решение $L(y) = 0$ может быть выражено в виде линейной комбинации n независимых решений $L(y) = 0$.

Доказательство. Пусть дана линейно независимая система решений $y_1,\ y_2,\ y_3 \dots, y_n$ уравнения $L(y) = 0$. Составим на базе данной системы решений матрицу $G(x)$. Выбираем произвольное решение $y(x)$ уравнения $L(y) = 0$, которое при $x = x_0$ принимает значение $y(x_0) = y_0$. Теперь составим решение $h_1y_1 + h_2y_2 + \cdots + h_ny_n$ или, что то же, $G(x)H$ рассматриваемого уравнения $L(y) = 0$, как линейную комбинацию данных n независимых его решений с произвольными постоянными $h_1,\ h_2,\ h_3, \dots, h_n$ (координатами вектора H). Составим и рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений $G(x_0)H = y_0$ относительно неизвестных $h_1,\ h_2,\ h_3, \dots, h_n$. Определителем данной системы, в соответствии с утверждением Теоремы 6, является не равный нулю определитель $W(x_0)$ и, следовательно, эта система имеет единственное решение, которое определяется значениями $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2,\ \tilde{h}_3, \dots, \tilde{h}_n$ (координатами вектора $\widetilde{H}$). В этом случае решение $G(x)\widetilde{H}$ при $x = x_0$ вследствие определения $\widetilde{H}$ при $x = x_0$ принимает значение $G(x_0)\widetilde{H} = y_0$. Но данное значение при $x = x_0$ имеет и выбранное произвольное решение $y(x)$ уравнения $L(y) = 0$, то есть $y(x_0) = y_0$. Так как условия теоремы Коши для $L(y) = 0$ выполнены, то через одну точку проходит только одно решение данного уравнения. Следовательно, $y(x) = G(x)\tilde{H}$ или $y(x) = \tilde{h}_1 y_1 + \tilde{h}_2 y_2 + \tilde{h}_3 y_3 + \cdots + \tilde{h}_n y_n$. Что и требовалось доказать.

§34. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица. Матрица Коши.

Совокупность n независимых решений $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x) \dots, y_n(x)$ уравнения $L(y) = 0$ называется *фундаментальной системой решений.* Матрица $G(x)$, построенная на базе фундаментальной системы решений, называется *фундаментальной матрицей*.

Покажем, что фундаментальная система существует. Выберем единичную числовую матрицу $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Вектор $y_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ – первый столбец этой матрицы принимаем в качестве начального условия решения $y_1(x)$ задачи Коши для уравнения $L(y) = 0$. По теореме Коши определяем это решение $y_1(x)$. Затем, последовательно выбирая аналогично в качестве начального условия следующие столбцы этой матрицы, определяем следующие решения задачи Коши $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, … , $y_n(x)$. Определитель Вронского $W(x)$ полученной системы решений при $x = x_0$ равен $W(x_0) = E \neq 0$. Таким образом, в соответствии с Теоремой 6 , построенная система решений независима и, следовательно, является фундаментальной системой решений. Так как в качестве матрицы $W(x_0)$ можно выбрать любую невырожденную матрицу, то для рассматриваемого уравнения $L(y) = 0$ существует бесконечное множество фундаментальных систем решений. Среди этого множества особое место занимает следующая фундаментальная система: фундаментальная система решений такая, что соответствующий определитель Вронского при начальном значении $x = x_0$ равен $W(x_0) = E$ – единичной матрице, называется *нормальной фундаментальной системой решений*, а соответствующая матрица $G(x)$ называется *нормальной фундаментальной матрицей*.

На основании рассмотренных свойств решений уравнения $L(y) = 0$ можно сделать следующий вывод: фундаментальных систем решений бесконечное множество, но любая фундаментальная система состоит ровно из n решений .

Главным же выводом на основании доказанной Теоремы 7 и определении фундаментальной системы решений является следующий важный вывод:

Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений также, как и *общее решение линейного однородного дифференциального уравнения высшего порядка* $L(y) = 0$, представляет собой *линейную комбинацию фундаментальной системы решений с произвольными постоянными*. Это общее решение, очевидно, представляется в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n = G(x)C \ . \qquad (34.1)$$

Рассмотрим обратную задачу, а именно восстановление линейной однородной системы дифференциальных уравнений по известной фундаментальной её системе решений. Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, … , $y_n(x)$ некоторой линейной однородной системы дифференциальных уравнений определитель Вронского которой имеет вид:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Составим теперь следующие n определителей:

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n} & y_1 \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k1} & y_{k2} & y_{k3} & \dots & y_{kn} & y_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \dots & y_{nn} & y_n \\ y'_{k1} & y'_{k2} & y'_{k3} & \dots & y'_{kn} & y'_k \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad k = 1, 2, 3, \dots, n \ , \qquad (34.2)$$

столбцами которых являются координаты известных решений фундаментальной системы и последнего столбца из неизвестных функций независимой переменной x . При разложении для каждого значения k данных определителей по элементам последнего столбца и деления каждого из полученных уравнений на коэффициент при y'_k , которым, очевидно, является $W(x) \neq 0$, получаем в результате линейную однородную систему вида (33.7) – (33.8). При этом каждое решение $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, … , $y_n(x)$ данной совокупности независимых решений является решением и построенной системы, так как в результате подстановки координат каждого из них вместо элементов последнего столбца (34.2) получаем систему справедливых тождеств. Таким образом, построена линейная однородная система дифференциальных уравнений, для которой данная независимая система решений является фундаментальной системой решений.

Построим теперь линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка по известной фундаментальной системе решений: $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, … , $y_n(x)$, определитель Вронского которой имеет вид:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_n \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Составим теперь на основе данной системы решений следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' & y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (34.3)$$

Разложив данный определитель по элементам последнего столбца и поделив результат на коэффициент при $y^{(n)}$, которым является, очевидно, $W(x) \neq 0$, в итоге получаем требуемое линейное однородное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (34.4)$$

Так как данная независимая система решений, очевидно, будет системой решений и построенного уравнения, в чём легко убедиться подстановкой каждого из этих решений в последний столбец определителя (34.3) , то эта система будет, следовательно, фундаментальной системой построенного уравнения.

Общее решение $L(y) = 0$, как это следует из (34.1) , имеет вид $y = G(x)C$. Подставляя в это равенство при $x = x_0$ начальное условие задачи Коши $y(x_0) = y_0$, получим $y_0 = G(x_0)C$. Так как матрица $G(x_0)$ является невырожденной, то она имеет обратную $G^{-1}(x_0)$. Следовательно, $G^{-1}(x_0)y_0 = G^{-1}(x_0)G(x_0)C$, откуда определяем выражение для постоянной $C = G^{-1}(x_0)y_0$. Подставляя это выражение в общее решение $y = G(x)C$, получаем решение задачи Коши в виде $y = G(x)G^{-1}(x_0)y_0$. Произведение квадратных матриц $G(x)$ и $G^{-1}(x_0)$, которое обозначается в виде матрицы

$$K(x, x_0) = G(x)G^{-1}(x_0) \qquad (34.5)$$

называется *матрицей Коши*. С использованием матрицы Коши, следовательно, решение задачи Коши записывается в виде: $y = K(x, x_0)y_0$. (34.6)

Очевидно, если фундаментальная матрица – нормальная, то матрица Коши принимает вид $K(x, x_0) = G(x)$, так как в этом случае $G^{-1}(x_0) = E$, то есть матрица Коши совпадает с нормальной фундаментальной матрицей, и решение задачи Коши в этом случае имеет следующий вид $y = G(x)y_0$.

§35. Интегрирование линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy}{dx} = Ay \ , \quad \text{где } A - \text{ постоянная матрица}. \qquad (35.1)$$

В координатной форме эта система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad . \tag{35.2}$$

Так как данная система всегда имеет нулевое решение, то основной целью её аналитического решения является определение общего решения данной системы. Итак, аналитическое решение данной системы ищем в виде $y = He^{\lambda x}$, где λ – число, а H – вектор, координаты которого являются постоянными числами.

Замечание. Такой вид решения системы является следствием того, что при решении одномерного случая, то есть уравнения $y' = \lambda y$, получаем решение вида $y = he^{\lambda x}$ с постоянными значениями λ и h.

Искомый вид решения подставляем в уравнение (35.1) : $\frac{dHe^{\lambda x}}{dx} = AHe^{\lambda x}$, откуда $H\lambda e^{\lambda x} = AHe^{\lambda x}$. Сокращая обе части на $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем, очевидно, уравнение $AH - \lambda H = 0$ или $AH - \lambda EH = 0$ и окончательно:

$$(A - \lambda E)H = 0 \quad . \tag{35.3}$$

Как известно из курса линейной алгебры (см.[10]), для того, чтобы линейная однородная система относительно неизвестных координат вектора H имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель матрицы данной системы равнялся нулю: $|A - \lambda E| = 0$, или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{35.4}$$

Построенное уравнение относительно неизвестных λ называется *характеристическим уравнением.* Таким образом, если конкретное значение λ является корнем уравнения (35.4) и, после его подстановки в уравнение (35.3), вектор H является соответствующим решением уравнения (35.3) , то тем самым решение $y = He^{\lambda x}$ уравнения (35.1) определено. Так как уравнение (35.4) имеет n корней, среди которых могут быть действительные и комплексные, простые и кратные, то для построения общего действительного решения данной системы (35.1) необходимо построить фундаментальную систему решений, то есть определить n независимых действительных решений. Рассмотрим построение фундаментальной системы в различных случаях корней характеристического уравнения (35.4).

Пусть все корни характеристического уравнения (35.4) являются простыми различными действительными корнями, то есть: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in R$. Решая для каждого из данных значений корней λ_i уравнение (35.3), а именно $(A-\lambda_i E)H_i=0$, определяем значения H_i и, следовательно, определяем решения $H_i e^{\lambda_i x}$ для каждого $i=1,\ 2,\ 3,\dots,n$. В курсе линейной алгебры доказывается (см.[10]), что в данном случае все H_i независимы, следовательно, независимы все полученные решения $H_1e^{\lambda_1 x}, H_2e^{\lambda_2 x}, H_3e^{\lambda_3 x},\dots,H_ne^{\lambda_n x}$. Таким образом, эта система может быть принята в качестве фундаментальной системы решений.

Замечание. Из курса линейной алгебры известно (см.[10]), что действительные корни λ_i характеристического уравнения (35.4) называются *собственными значениями матрицы* A, а соответствующие им векторы H_i называются *собственными векторами*, соответствующими своим собственным значениям λ_i. При этом, если все *собственные значения различны*, то *соответствующие собственные векторы независимы*.

Таким образом, в рассматриваемом случае общее решение системы (35.1) имеет вид:

$$y=C_1H_1e^{\lambda_1 x}+C_2H_2e^{\lambda_2 x}+C_3H_3e^{\lambda_3 x}+\dots+C_nH_ne^{\lambda_n x}.$$

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z\\ \dot{y}=x+y-z\\ \dot{z}=x-y+z\end{cases}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$. Решая уравнение, определяем его корни: $(1-\lambda)^3-1+1-(1-\lambda)+(1-\lambda)-(1-\lambda)=0$, $(1-\lambda)^3-(1-\lambda)=0$, $(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1]=0$, $(1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)=0$. Итак, корнями данного уравнения являются: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. Подставляя последовательно эти значения корней в (35.3) определяем соответствующие векторы H_1, H_2 и H_3:

$\lambda_1=0$, $(A-0\cdot E)H_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=0$, $\begin{cases}h_1-h_2+h_3=0\\ h_1+h_2-h_3=0\\ h_1-h_2+h_3=0\end{cases}$. Выделив базисный минор $\begin{vmatrix}h_1-h_2\\ h_1+h_2\end{vmatrix}$, переносим свободное переменное h_3 направо и по теореме о базисном миноре (см.[10]) третью строку системы исключаем: $\begin{cases}h_1-h_2=-h_3\\ h_1+h_2=h_3\end{cases}$. Полагая свободное переменное равным $h_3=1$, из последней системы определяем $h_1=0$ и $h_2=1$. В итоге получаем собственный вектор $H_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ и решение системы $H_1e^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^{0\cdot t}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Далее аналогично: $\lambda_2=1$, $(A-1\cdot E)H_2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=0$, $\begin{cases}-h_2+h_3=0\\ h_1-h_3=0\\ h_1-h_2=0\end{cases}$, и по аналогии с предыдущим: $\begin{cases}-h_2=-h_3\\ h_1=h_3\end{cases}$. $h_3=1$, следовательно, $h_1=h_2=h_3=1$,

$H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Решением системы в этом случае будет $H_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{1\cdot t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$.

Далее: $\lambda_3 = 2$, $(A - 2\cdot E)H_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{cases} -h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} -h_1 - h_2 = -h_3 \\ h_1 - h_2 = h_3 \end{cases}$, $h_3 = 1$ и, следовательно, $h_1 = 1$, $h_2 = 0$. $H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Решением системы в этом случае будет $H_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\cdot t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Таким образом, общее решение данной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 H_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 H_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 H_3 e^{\lambda_3 t} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

В координатной форме ответ можно записать в виде: $\begin{cases} x = C_2 e^{t} + C_3 e^{2t} \\ y = C_1 + C_2 e^{t} \\ z = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$.

Замечание. Обратим внимание, что правые части первого и третьего уравнения данной системы равны, поэтому естественно, что решения для x и z отличаются на произвольную постоянную.

Пусть среди корней характеристического уравнения (35.4) имеются комплексно-сопряжённые корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, (то есть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$). Далее решаем уравнения $(A - \lambda_1 E)H_1 = 0$ и $(A - \lambda_2 E)H_2 = 0$ вида (35.3) для каждого из этих корней. В результате их решения определяем комплексно-значные векторы H_1 и H_2. Таким образом, определяем комплексные решения $H_1 e^{\lambda_1 x}$ и $H_2 e^{\lambda_2 x}$ соответственно для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, а именно $y_1 = H_1 e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = H_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$. Но, как известно, соответствующие действия над комплексно-сопряженными величинами в ответе дают комплексно-сопряжённые результаты. То есть в данном случае $\overline{H}_2 = H_1$ и $\bar{y}_2 = y_1$.

Обратим внимание, что в результате следующего невырожденного преобразования найденных решений $\begin{cases} \frac{y_1 + y_2}{2} = \operatorname{Re} H_1 e^{(\alpha + i\beta)x} \\ \frac{y_1 - y_2}{2i} = \operatorname{Im} H_1 e^{(\alpha + i\beta)x} \end{cases}$ определяются независимые действительные решения $\operatorname{Re} H_1 e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $\operatorname{Im} H_1 e^{(\alpha + i\beta)x}$, которые и являются двумя решениями в составе фундаментальной системы решений, соответствующими данной паре комплексно сопряжённых корней. Из последнего выражения следует, что для того, чтобы определить эти два независимых действительных решения достаточно решить уравнение (35.3) лишь для одного из комплексно-сопряжённых корней, например, для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, определить соответствующий комплексный вектор H_1, составить комплексное решение $H_1 e^{(\alpha+i\beta)x}$ и выделить в этом решении действительную и мнимую части. (Данный факт утверждается также в Теореме 3 §33). В этом случае при решении практических задач необходимо воспользоваться известной *формулой Эйлера*: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\,. \qquad (35.5)$$

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Решая уравнение, определяем его корни: $(1-\lambda)^2 + 1 = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Определяем комплексное решение для $\lambda_1 = 1 + i$: $[A - (1+i)E]\, H_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{cases} -ih_1 - h_2 = 0 \\ h_1 - ih_2 = 0 \end{cases}$, $-ih_1 = h_2$, $h_2 = -i$, $h_1 = 1$, $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, и комплексное решение имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1+i)t}$. Выделяем действительную и мнимую части, используя формулу Эйлера: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \cdot \sin t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \cdot \sin t \\ -i \cdot \cos t + \sin t \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t$. Таким образом, фундаментальную систему решений составляют независимые действительные решения $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t$ и $\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t$. Следовательно, общим решением данной системы является: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t$ или в координатной форме $\begin{cases} x = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t \\ y = C_1 e^t \sin t - C_2 e^t \cos t \end{cases}$.

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения (35.4) имеются $m \geq 2$ кратных действительных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_m$, $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$. В этом случае *часть фундаментальной системы решений, соответствующая данным m кратным корням*, может быть получена *двумя способами*, применение которых не является сложным, но доказательство их не рассматриваем. При необходимости можно ознакомиться в известной литературе (см.[17],[20] и др.).

Первый метод состоит в следующем. Сначала, как и в случае простых действительных корней, определяются собственные векторы, соответствующие данному кратному собственному значению λ_1 . В данном случае кратных корней фактически учитывается возможный вид преобразования матрицы системы к жордановой структуре, изучаемого в курсе алгебры (см.[10]). Количество собственных векторов возможно в пределах от 1 до m. Так как в любом случае собственные векторы независимы, то при умножении на $e^{\lambda_1 x}$ они уже составляют соответствующую часть фундаментальной системы решений. Если собственных векторов меньше m, то требуется вычисление так называемых *присоединённых векторов*.

Алгоритм их вычисления состоит в следующем. Сначала определяется собственный вектор H_1 как результат решения уравнения $(A - \lambda_1 E)H_1 = 0$. Затем составляется следующее уравнение $(A - \lambda_1 E)H_2 = H_1$ и, при выполнении условий теоремы Кронекера-Капелли (см.[20]), вычисляется соответствующий присоединённый вектор H_2 . Затем, при необходимости, вычисляются следующие присоединённые векторы из аналогичной последовательности уравнений $(A - \lambda_1 E)H_3 = H_2$, $(A - \lambda_1 E)H_4 = H_3$, …, и этот процесс последовательного вычисления присоединённых векторов продолжается до получения общей суммы собственных и присоединённых векторов, равной кратности рассматриваемого корня, то есть m . После этого, в случае одного собственного вектора H_1 и результата вычисления присоединённых к нему векторов H_2 , H_3 , H_4 , … , соответствующая часть общего решения данной системы представляет собой следующую линейную комбинацию с произвольными постоянными:

$$y = C_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 [\tfrac{x}{1!} H_1 + H_2] e^{\lambda_1 x} + C_3 [\tfrac{x^2}{2!} H_1 + \tfrac{x}{1!} H_2 + H_3] e^{\lambda_1 x} +$$
$$+ C_4 \left[\tfrac{x^3}{3!} H_1 + \tfrac{x^2}{2!} H_2 + \tfrac{x}{1!} H_3 + H_4 \right] + \ \dots \qquad (35.6)$$

и так далее до слагаемого, замыкающего m слагаемых фундаментальной системы решений, соответствующих рассматриваемому кратному корню характеристического уравнения данной системы.

Рассмотрим *второй из методов решения данной системы* в случае указанного кратного корня. Он состоит в следующем. Сначала вычисляется вспомогательное число k по формуле $k = \mathrm{Rang}\,(A - \lambda_1 E) - (n - m)$, где n –порядок системы, а m –кратность корня λ_1 . Затем составляется выражение для части общего решения данной системы, соответствующего этому кратному корню в виде:

$$y = [H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + \dots + H_k x^k] e^{\lambda_1 x} \ , \qquad (35.7)$$

где H_0 , H_1 , H_2 , …, H_k – числовые векторы $n-$го порядка с неопределёнными коэффициентами. Это выражение подставляется в данную систему (35.1) и затем в результате подстановки приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного x. В итоге получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов векторов H_0 , H_1 , H_2 , …, H_k . Далее определяем общее решение этой системы, которое обязательно будет содержать m произвольных постоянных. Затем подставляем полученные значения всех коэффициентов в (35.7) и разрешаем это выражение относительно m произвольных постоянных. Результатом оказывается часть фундаментальной системы решений данного уравнения, соответствующая этой совокупности m кратных корней.

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Решая уравнение, определяем его корни: $(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=0$, $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Решим данную систему сначала первым из рассмотренных методов. Вычисляем собственный вектор: $(A-1\cdot E)H_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=0$, $\begin{cases} 2h_1-h_2=0\\ 4h_1-2h_2=0\end{cases}$, $2h_1-h_2=0$, $2h_1=h_2$, $h_2=2$, $h_1=1$, $H_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. Теперь вычисляем присоединённый вектор: $(A-E)H_2=H_1$, $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\begin{cases} 2h_1-h_2=1\\ 4h_1-2h_2=2\end{cases}$. Очевидно, условия теоремы Кронекера-Капелли выполнены и, по аналогии с предыдущим, имеем: $2h_1-h_2=1$, $2h_1=h_2+1$, $h_2=1$, $h_1=1$, $H_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Следовательно, решение данной системы имеет вид :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^t+C_2\left[\frac{t}{1!}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]e^t=C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}t+1\\ 2t+1\end{pmatrix}e^t . \qquad (35.8)$$

Решим данный пример вторым способом. Вычислим вспомогательное число $k=\mathrm{Rang}\,(A-\lambda_1E)-(n-m)=\mathrm{Rang}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}-(2-2)=1-0=1$. Следовательно, решение ищем в виде $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}t\right]e^t$ или, что то же $\begin{cases} x=(a_1+b_1t)e^t\\ y=(a_2+b_2t)e^t\end{cases}$.

Подставляя в данную систему получаем :

$$\begin{cases} b_1e^t+(a_1+b_1t)e^t=3a_1e^t+3b_1te^t-a_2e^t-b_2te^t\\ b_2e^t+(a_2+b_2t)e^t=4a_1e^t+4b_1te^t-a_2e^t-b_2te^t\end{cases}, \quad \begin{cases} b_1+a_1=3a_1-a_2\\ b_2+a_2=4a_1-a_2\\ b_1 \quad\;\; =3b_1-b_2\\ b_2 \quad\;\; =4b_1-b_2\end{cases} .$$

$$\begin{cases} 2a_1-a_2-b_1=0\\ 4a_1-2a_2-b_2=0\\ 2b_1-b_2=0\\ 4b_1-2b_2=0\end{cases} .$$ Определим ранг основной матрицы данной однородной системы:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$ Итак, ранг матрицы равен двум и, выбирая в качестве базисного минор матрицы $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}$, удаляя лишние уравнения и перенося свободные переменные направо, получим: $\begin{cases} b_1=2a_1-a_2\\ 2b_1-b_2=0\end{cases}$. Полагая свободные переменные произвольными постоянными, имеем: $a_1=C_1$, $a_2=C_2$, откуда $b_1=2C_1-C_2$, $b_2=4C_1-2C_2$. Подставляем в искомый вид решения: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2C_1-C_2\\ 4C_1-2C_2\end{pmatrix}t\right]e^t$ и разрешаем относительно произвольных постоянных: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1+2t\\ 4t\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}-t\\ 1-2t\end{pmatrix}e^t$. Данный ответ отличается от ответа (35.8), полученного предыдущим методом, но невырожденным преобразованием произвольных постоянных:

$\begin{cases} C_1 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \\ C_2 = 2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \end{cases}$ приводим данный ответ к виду, совпадающему с предыдущим ответом:

$$\binom{x}{y} = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)\binom{1+2t}{4t}e^t + (2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)\binom{-t}{1-2t}e^t = \tilde{C}_1\binom{1}{2}e^t + \tilde{C}_2\binom{t+1}{2t+1}e^t .$$

Замечание. Что касается возможных m кратных пар комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$, то, несмотря на то, что соответствующие примеры в задачниках отсутствуют, тем не менее, поясним, как строить фундаментальную систему решений в этом случае. Как и в случае пары комплексных корней выбираем один из них, например, $\lambda = \alpha + i\beta$ и в комплексной форме проводим решение по аналогии с указанными двумя методами в случае кратного действительного корня. В итоге получаем линейную комбинацию m комплексных решений фундаментальной системы с произвольными постоянными. Затем в соответствии с Теоремой 3 §33 выделяем в каждом комплексном решении полученной фундаментальной системы действительную и мнимую части и получаем полную фундаментальную действительную систему решений, соответствующую данной совокупности $2m$ комплексных корней. Линейная комбинация этих $2m$ действительных решений с произвольными постоянными и составляет искомую фундаментальную систему решений.

§36. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \ , \qquad (36.1)$$

где a_1 , a_2 , a_3 , … , a_n – постоянные числа .

Введём в рассмотрение оператор дифференцирования $\frac{d}{dx} = p$ и, следовательно, с использованием данного оператора имеем: $y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\right)y = py$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{d}{dx})^2 y = p^2 y$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = (\frac{d}{dx})^3 y = p^3 y$, … , $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = (\frac{d}{dx})^n y = p^n y$. В этом случае уравнение может быть записано в следующей форме: $p^n y + a_1 p^{n-1} y + a_2 p^{n-2} y + \dots + a_{n-1} p y + a_n y = 0$ или в форме $(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n)\, y = 0$. Теперь, в результате введения оператора $L(p)$ вида $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$, уравнение (36.1) записывается в следующей операторной форме: $L(p)y = 0$. (36.2)

Рассмотрим свойства операторного уравнения (36.2):

1) $L(p)(y+z) = L(p)y + L(p)z$;

2) $L(p)(ky) = kL(p)y$;

3) $[L_1(p) + L_2(p)]y = L_1(p)y + L_2(p)y$;

4) $[L_1(p)\cdot L_2(p)]y = L_1(p)\cdot[L_2(p)y] = L_2(p)\cdot[L_1(p)y]$.

Свойства 1) – 4) практически очевидны вследствие многочленной структуры оператора $L(p)$.

5) $L(p)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$. (36.3)

Данное равенство справедливо, так как $pe^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, $p^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$, … , $p^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$, и, следовательно, выполняется $L(p)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$.

6) $L(p)[f(x)e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}L(p+\lambda)f(x)$. (36.4)

Свойство 6) докажем по индукции. Сначала рассмотрим многочлен $L(p)$ первой степени по степеням p, то есть $L_1(p) = ap + b$. Итак, $(ap+b)f(x)e^{\lambda x} = apf(x)e^{\lambda x} + bf(x)e^{\lambda x} =$
$= a\left[e^{\lambda x}pf(x) + f(x)\lambda e^{\lambda x}\right] + e^{\lambda x}bf(x) = e^{\lambda x}a[pf(x) + \lambda f(x)] + e^{\lambda x}bf(x) =$
$= e^{\lambda x}[a(p+\lambda) + b]f(x) = e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)f(x)$. Полагаем по индукции, что выполнено $L_{n-1}(p)f(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)f(x)$. Тогда на следующем шаге получаем: $L_n(p)f(x)e^{\lambda x} = L_1(p)L_{n-1}(p)f(x)e^{\lambda x} = L_1(p)[e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)f(x)]$. Полагая теперь, что $L_{n-1}(p+\lambda)f(x) = \varphi(x)$ имеем $L_1(p)\left[e^{\lambda x}\varphi(x)\right] = L_1(p)\left[\varphi(x)e^{\lambda x}\right]$ и, как это доказано в начале, $L_1(p)\left[\varphi(x)e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)\varphi(x) = e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)L_{n-1}(p+\lambda)f(x) =$
$= e^{\lambda x}L_n(p+\lambda)f(x)$. Итак, следовательно, $L_n(p)f(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}L_n(p+\lambda)f(x)$.

Рассмотрим решение данного однородного линейного уравнения (36.1) . Предположим, что решение имеет вид $y = e^{\lambda x}$, где λ – постоянное число. Подставив данный вид решения в уравнение (36.2), на основании равенства (36.3) получаем: $L(p)e^{\lambda x} = 0$, $L(p)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x} = 0$ и, сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, определяем $L(\lambda) = 0$ или

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad . \tag{36.5}$$

Полученное уравнение относительно λ называется *характеристическим уравнением* соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (36.1).

Рассмотрим решение уравнения (36.1) в различных случаях корней характеристического уравнения (36.5).

Пусть все корни характеристического уравнения (36.5) являются простыми различными действительными корнями $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \dots, \lambda_n \in R$. В этом случае решениями рассматриваемого уравнения (36.1) являются функции $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ e^{\lambda_3 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$. Данная совокупность решений является независимой, так как определитель Вронского этой системы решений имеет вид: $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots\cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots\cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 x} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$ и не равен нулю так как

$W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\,x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$. Таким образом, данный определитель отличен от нуля, так как его вычисление свелось к вычислению известного *определителя Вандермонда* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots\dots & \lambda_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots\dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$, который не равен нулю при различных действительных значениях λ.

Следовательно, совокупность независимых решений $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, $e^{\lambda_3 x}$, … , $e^{\lambda_n x}$ составляет фундаментальную систему, и общее решение уравнения (36.1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \ .$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$ или $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Очевидно, корнями данного уравнения являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ и, следовательно, решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$.

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения (36.5) имеется пара комплексно-сопряжённых корней: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, ... В этом случае, очевидно, этой паре комплексных корней соответствует пара комплексных решений $y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$, которые представляются с помощью формулы Эйлера (35.5) в виде $y_{1,2} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \cdot \sin\beta x)$. По Теореме 3 §33 действительная и мнимая части комплексного решения являются решениями. В данном случае эти части решений с точностью до знака совпадают, и так как они не зависимы между собой вследствие независимости функций $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$, то в данном случае комплексно-сопряжённых корней соответствующую часть действительной фундаментальной системы решений уравнения (36.1) составляют решения $\mathrm{Re}\big(e^{(\alpha + i\beta)x}\big) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\mathrm{Im}\big(e^{(\alpha + i\beta)x}\big) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Эта пара действительных решений практически может быть получена на основании выбора только одного из комплексно-сопряжённых корней, например, $\lambda = \alpha + i\beta$, записью для него комплексного решения $e^{(\alpha + i\beta)x}$ и выделения из него действительной и мнимой частей. Следовательно, в рассматриваемом случае наличия пары комплексных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, ... соответствующая часть общего решения уравнения (36.1) записывается следующим образом: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Очевидно, корнями данного уравнения являются $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$.

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения (36.5) имеются $m \geq 2$ кратных действительных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m$, $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$. В этом случае часть фундаментальной системы решений, соответствующая данным m кратным корням может быть получена с использованием свойства 6) оператора $L(p)y = 0$ [см. (36.4)] . Итак, предполагается, что характеристическое уравнение $L(\lambda) = 0$ имеет корень λ_1 кратности m . Следовательно, из многочлена $L(\lambda)$ может быть выделен множитель $(\lambda - \lambda_1)^m$. Тогда, очевидно, $L(\lambda) = L_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m L_{n-m}(\lambda)$, причём $L_{n-m}(\lambda_1) \neq 0$. Из отмеченного свойства оператора (36.4) следует тот факт, что, заменив в полученном равенстве $L(\lambda) = L_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m L_{n-m}(\lambda)$ переменную λ на $p + \lambda_1$, получим:

$$L(p + \lambda_1) = L_n(p + \lambda_1) = p^m L_{n-m}(p + \lambda_1) = L_{n-m}(p + \lambda_1)\, p^m \quad . \qquad (36.6)$$

Используя полученный результат, покажем, что в этом случае кратных корней решениями данного уравнения (36.1) являются $y = x^k e^{\lambda_1 x}$, $k = 0\,, 1\,, 2\,, \dots, m-1$. Действительно, подставив этот вид решений в уравнение $L(p)y = 0$, на основании свойства 6) в (36.4) и формулы (36.6) , получаем: $L(p) x^k e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} L(p + \lambda_1) x^k = e^{\lambda_1 x} L_{n-m}(p + \lambda_1)\, p^m x^k = 0$ при $k = 0\,, 1\,, 2\,, \dots, m-1$. Следовательно, в данном случае кратных корней решениями будут: $e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, $x^2 e^{\lambda_1 x}$, $x^3 e^{\lambda_1 x}, \dots,$ $x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$. Эти решения составляют совокупность m независимых решений фундаментальной системы, соответствующих рассматриваемым кратным корням, и, таким образом, общее решение данного уравнения (36.1) в рассматриваемом случае кратных корней имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_m x^{m-1} e^{\lambda_1 x} + \cdots \ .$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y^{IX} - 4y^{VIII} + 6y^{VII} - 4y^{VI} + y^V = 0$.
Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^9 - 4\lambda^8 + 6\lambda^7 - 4\lambda^6 + \lambda^5 = 0$, $\lambda^5 \cdot (\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$, $\lambda^5 (\lambda - 1)^4 = 0$. Очевидно, корнями данного уравнения являются $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 1$. Общее решение данного однородного уравнения, следовательно, имеет следующий окончательный вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 e^x + C_7 x e^x + C_8 x^2 e^x + C_9 x^3 e^x \ .$$

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения (36.5) имеются $m \geq 2$ пар кратных комплексных корней $\lambda_{1,2,3,4,\dots,2m-1,2m} = \alpha \pm i\beta$, … . В этом случае часть фундаментальной системы решений, соответствующая данным $2m$ кратным корням, может быть получена следующим образом. Выбрав один из данных комплексных корней, например, $\lambda = \alpha + i\beta$, определяем по аналогии с кратными действительными корнями m соответствующих комплексных решений: $e^{\alpha + i\beta x}$, $x e^{\alpha + i\beta x}$, $x^2 e^{\alpha + i\beta x}$, … , $x^{m-1} e^{\alpha + i\beta x}$. Выделив в каждом из этих комплексных решений действительную и мнимую части, получаем $2m$ независимых действительных решений фундаментальной системы решений. В результате получаем следующее общее решение данного однородного уравнения (36.1) в виде:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 x e^{\alpha x}\cos\beta x + C_4 x e^{\alpha x}\sin\beta x + C_5 x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x +$$
$$+ C_6 x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + \ \dots + C_{2m-1} x^{m-1} e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{2m} x^{m-1} e^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y^{VI}+3y^{IV}+3y^{II}+y=0$.
Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^6+3\lambda^4+3\lambda^2+1=0$, $(\lambda^2+1)^3=0$. Очевидно, корнями данного уравнения являются $\lambda_{1,2,3,4,5,6}=\pm i$. В данном случае, очевидно, $\alpha=0$, $\beta=1$. Следовательно, общее решение данного однородного уравнения имеет следующий окончательный вид:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x+C_5x^2\cos x+C_6x^2\sin x\ .$$

§37. Интегрирование линейных неоднородных систем и уравнений.

В *операторной форме*, как это показано в §32, линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений и линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка имеют следующий вид:

$$L(y)=f(x) \tag{37.1}$$

Рассмотрим Теоремы о свойствах решений и методах интегрирования $L(y)=f(x)$.

Замечания. Так как в данной форме одновременно могут рассматриваться свойства и методы определения решений операторного уравнения (37.1) как для линейной системы, так и для линейного уравнения высшего порядка, то при рассмотрении свойств решений уточнять, какие решения рассматриваются, будем только в случае необходимости (это будет касаться построений матриц и определителей на основе совокупности этих решений). Отдельно для случая линейной неоднородной системы и линейного неоднородного уравнения будут рассматриваться Теоремы 3, 4 и 5. Эти теоремы будут даны без доказательств, с которыми при необходимости можно ознакомиться, например, в [13].

Теорема 1. Если правая часть уравнения $L(y)=f(x)$ представляет собой сумму m слагаемых, то есть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_m(x)$, и, если $y_k(x)$ является решением уравнения $L(y_k)=f_k(x)$, $k=1,2,3,\dots,m$, то решением данного уравнения $L(y)=f(x)$ будет и сумма этих решений $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)+\cdots+y_m(x)$.
Доказательство. Вследствие линейности оператора имеем, подставляя в него сумму указанных решений: $L(y)=L(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_m)=L(y_1)+L(y_2)+L(y_3)+\cdots+L(y_m)=$ $=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_m(x)=f(x)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если известно или каким–либо образом определено частное решение y_1 уравнения (37.1), то есть $L(y_1)=f(x)$, то определение общего решения данного уравнения $L(y)=f(x)$ сводится к определению общего решения уравнения $L(y)=0$.
Доказательство. В данном уравнении проведём замену искомой функции: $y=u+y_1$, где u – новая функция, y_1 – известное решение данного уравнения, то есть $L(y_1)=f(x)$. Используя свойство линейности оператора $L(y)$ в результате данной замены, получаем: $L(y)=L(u+y_1)=L(u)+L(y_1)=f(x)$. Отсюда $L(u)=0$. Что и требовалось доказать.

Следствие из Теоремы 2. Разность двух различных решений $L(y) = f(x)$ является решением уравнения $L(y) = 0$.

Доказательство. Действительно, если y_1 и y_2 решения $L(y_1) = f(x)$ и $L(y_1) = f(x)$, то, подставив в уравнение их разность, получим $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f(x) - f(x) = 0$.

На основании доказанной Теоремы 2 можно сделать следующий важный вывод:

Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений, так же как и *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка* $L(y) = f(x)$, *представляет собой сумму* $y = u + y_1$ *общего решения* $L(u) = 0$ соответствующей *линейной однородной системы* или *линейного однородного уравнения высшего порядка* и *частного решения* $L(y_1) = f(x)$ соответственно *данной неоднородной системы* или *данного неоднородного уравнения.*

Замечание. Так как общее решение $L(y) = f(x)$ представляет собой сумму общего решения $L(y) = 0$ и частного решения $L(y) = f(x)$ и так как определение общего решения $L(y) = 0$ рассмотрено в предыдущих разделах учебника, то последующие Теоремы имеют своей целью представление методов определения частных решений $L(y) = f(x)$.

Теорема 3. Если известно или каким-либо образом определено общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, то определение общего решения $L(y) = f(x)$ может быть проведено по *методу вариации произвольных постоянных Лагранжа* или по *методу Коши.*

Доказательство. Известное общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ имеет вид $y_{\text{одн}} = G(x)C$, где $G(x)$ – фундаментальная матрица. Общее решение $y = y_{\text{неодн}}$ соответствующего неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ по *методу вариации произвольных постоянных Лагранжа* определяем в виде $y = y_{\text{неодн}} =$ $= G(x)C(x)$, где $C(x)$ – искомый вектор неизвестных функций. Для определения $C(x)$ подставляем искомый вид решения в данное неоднородное уравнение: $L[G(x)C(x)] = f(x)$. Раскрывая оператор применительно к линейной системе дифференциальных уравнений имеем: $\frac{d[G(x)C(x)]}{dx} - A(x)G(x)C(x) = f(x)$, или $\frac{dG(x)}{dx} C(x) + G(x) \frac{dC(x)}{dx} - A(x)G(x)C(x) = f(x)$, $G(x)\frac{dC(x)}{dx} + C(x)\left[\frac{dG(x)}{dx} - A(x)G(x)\right] = f(x)$ и так как $G(x)$ – фундаментальная матрица, то $\frac{dG(x)}{dx} - A(x)G(x) \equiv 0$, и, следовательно, искомая вектор-функция $C(x)$ является решением уравнения:

$$G(x) \frac{dC(x)}{dx} = f(x) \quad . \qquad (37.2)$$

Далее рассмотрим метод вариации произвольных постоянных сначала применительно к решению неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений:

Раскрывая вид фундаментальной матрицы $G(x)$ в системе (37.2), векторов $\frac{dC(x)}{dx}$ и $f(x)$, имеем:

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \dots\dots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}. \qquad (37.3)$$

В координатной форме система (37.2) – (37.3) для определения неизвестных функций $C_k'(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, записывается в виде:

$$\begin{cases} y_{11}(x)C_1'(x) + y_{12}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{1n}(x)C_n'(x) = f_1(x) \\ y_{21}(x)C_1'(x) + y_{22}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{2n}(x)C_n'(x) = f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}(x)C_1'(x) + y_{n2}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{nn}(x)C_n'(x) = f_n(x) \end{cases}. \qquad (37.4)$$

Система (37.4) является совместной и определённой, так как удовлетворяет условиям *теоремы Крамера* (см.[10]). Решив (37.4), определяем $C_k'(x) = \psi_k(x)$, а затем и неизвестные функции $C_k(x) = \int \psi_k(x)dx + \tilde{C}_k = \varphi_k(x) + \tilde{C}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. В векторной форме результат имеет вид: $C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \dots\dots \\ C_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \\ \dots\dots \\ \tilde{C}_n \end{pmatrix} = \Phi(x) + \tilde{C}$. Подставляя в искомый вид решения данной системы, получаем ответ:

$$y = y_{\text{неодн}} = G(x)C(x) = = G(x)\tilde{C} + G(x)\Phi(x).$$

Прежде, чем применить алгоритм метода вариации произвольных постоянных Лагранжа по Теореме 3 к линейным дифференциальным уравнениям высшего порядка, решим пример применительно к линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = y + \text{tg}^2 t \\ \dot{y} = -x + \text{tg} t \end{cases}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение системы $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни, очевидно, $\lambda_{1,2} = \pm\, i$. Выбрав корень $\lambda_1 = i$, далее из системы $\begin{cases} -ih_1 + h_2 = 0 \\ -h_1 - ih_2 = 0 \end{cases}$ определяем координаты комплексного вектора H_1: $ih_1 = h_2$, $h_2 = i$, $h_1 = 1$, $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Составляем комплексное решение $H_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}$ соответствующей однородной системы. Выделив в этом решении действительную и мнимую части: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\text{cos}t + i\text{sin}t) =$ $= \begin{pmatrix} \text{cos}t + i\text{sin}t \\ i\text{cos}t - \text{sin}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}t \\ -\text{sin}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \text{sin}t \\ \text{cos}t \end{pmatrix}$, получаем общее решение соответствующей однородной системы в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{одн}} = C_1\begin{pmatrix} \text{cos}t \\ -\text{sin}t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \text{sin}t \\ \text{cos}t \end{pmatrix}$. По методу вариации произвольных постоянных Лагранжа решение неоднородной системы определяем в следующем виде:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{неодн}} = C_1(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ и для определения функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ составляем систему (37.4) : $\begin{cases} \cos t \cdot C_1' + \sin t \cdot C_2' = \mathrm{tg}^2 t \\ -\sin t \cdot C_1' + \cos t \cdot C_2' = \mathrm{tg} t \end{cases}$. Решаем полученную систему по *методу Крамера*: $\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}^2 t & \sin t \\ \mathrm{tg} t & \cos t \end{vmatrix} = \mathrm{tg}^2 t \cdot \cos t -$ $- \mathrm{tg} t \cdot \sin t = 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \mathrm{tg}^2 t \\ -\sin t & \mathrm{tg} t \end{vmatrix} = \sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$; $C_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0$; $C_1(t) = \tilde{C}_1$; $C_2'(t) =$ $= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin t + + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} = \sin t + \frac{\sin t(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t} = \sin t + \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$; $C_2(t) = \frac{1}{\cos t} + \tilde{C}_2$. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в искомый вид решения, получаем общее решение данной системы уравнений в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{неодн}} = \tilde{C}_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{tg} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Применительно к линейному неоднородному дифференциальному уравнению высшего порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (37.5)$$

в соответствии с утверждением Теоремы 3 алгоритм метода вариации произвольных постоянных Лагранжа применяется следующим образом. Для данного уравнения предполагается известным или определённым общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n\ , \qquad (37.6)$$

то есть известными являются решения $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots\ , y_n$ фундаментальной системы решений. Следовательно, известна и соответствующая фундаментальная матрица:

$$G(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} . \qquad (37.7)$$

Искомое решение данного неоднородного уравнения по методу вариации произвольных постоянных полагаем в виде:

$$y = y_{\text{неодн}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + \dots + C_n(x)y_n\ . \qquad (37.8)$$

Далее предполагаем, что рассматриваемое линейное неоднородное уравнение (37.5) сведено к соответствующей линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений вида аналогичного (17.2) (см. §17) и искомый вид решения в переменных системы подставлен в эту полученную неоднородную систему. Затем, по аналогии с предыдущим, в результате подстановки получаем в итоге для определения неизвестных функций систему типа (37.4). После проведения в полученной системе обратного преобразования переменных линейной неоднородной системы в переменные уравнения, очевидно, полученная система типа (37.4) уже в переменных данного уравнения будет иметь вид (37.9):

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) & + & y_2(x)C_2'(x) & + & \dots & + \; y_n(x)C_n'(x) & = & 0 \\ y'_1(x)C_1'(x) & + & y'_2(x)C_2'(x) & + & \cdots & + \; y'_n(x)C_n'(x) & = & 0 \\ y''_1(x)C_1'(x) & + & y''_2(x)C_2'(x) & + & \cdots & + \; y''_n(x)C_n'(x) & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \cdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-2}(x)C_1'(x) + & & y_2^{n-2}(x)C_2'(x) + & & \cdots & + \; y_n^{n-2}(x)C_n'(x) & = & 0 \\ y_1^{n-1}(x)C_1'(x) + & & y_2^{n-1}(x)C_2'(x) + & & \cdots & + \; y_n^{n-1}(x)C_n'(x) & = & f(x) \end{cases} . \tag{37.9}$$

Заметим, что особенностью системы (37.9) является тот факт, что в правой части этой системы во всех уравнениях, кроме последнего, стоят нули, а в последнем уравнении правой частью является функция правой части данного неоднородного уравнения (37.5). Это, очевидно, следует из того факта, что при приведении данного уравнения к системе (17.2) (см. §17) правая часть будет совпадать с правой частью (37.9). Итак, в данном случае искомые функции $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x), \dots, C_n(x)$ определяем, решив данную систему (37.9). Система (37.9) является совместной и определённой, так как удовлетворяет условиям теоремы Крамера (см.[10]). Решив (37.9), определяем $C_k'(x) = \psi_k(x)$, и затем и неизвестные функции $C_k(x) = \int \psi_k(x)dx + \tilde{C}_k = \varphi_k(x) + \tilde{C}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Подставляя в искомый вид решения (37.8) данного линейного неоднородного дифференциального уравнения (37.5) найденные значения неизвестных функций, получаем следующий окончательный ответ:

$$y = y_{\text{неодн}} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \tilde{C}_3 y_3 + \dots + \tilde{C}_n y_n + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \varphi_3 y_3 + \dots + \varphi_n y_n .$$

Замечание. Обратим внимание, что практически, в соответствии с изложенным, для решения линейного неоднородного уравнения высшего порядка методом вариации произвольных постоянных Лагранжа, необходимо сначала определить общее решение соответствующего однородного уравнения, затем заменить константы на функции независимого переменного. Далее для определения этих неизвестных функций следует составить соответствующую систему (37.9). Решив эту систему, определяем неизвестные функции и в результате их подстановки в искомый вид решения получаем окончательный вид этого решения.

Прежде, чем в Теореме 3 перейти к доказательству метода Коши, приведём пример решения линейного неоднородного уравнения высшего порядка доказанным методом вариации произвольных постоянных Лагранжа:

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xy'' - y' = x^2$.

Решение. Решим сначала соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$. Применив подстановку $y' = z$, $y'' = z'$, имеем $xz' - z = 0$, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\ln z = \ln x + \ln(2C_1)$, $z = 2C_1 x$, $y' = 2C_1 x$, $y_{\text{одн}} = C_1 x^2 + C_2$. В полученном решении однородного уравнения с фундаментальной системой решений $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ заменяем постоянные на неизвестные функции. Искомым решением, следовательно, будет: $y = y_{\text{неодн}} = C_1(x)x^2 + C_2(x)$. Этот искомый вид решения подставляем в систему (37.9):

$$\begin{cases} x^2\, C_1'(x) + 1 \cdot C_2'(x) = 0 \\ 2x\, C_1'(x) + 0 \cdot C_2'(x) = x \end{cases} . \qquad (37.10)$$

Замечание. Обратить внимание, что в правой части второго уравнения системы (37.10) подставлен x, а не x^2, так как система (37.9) составлена применительно к виду (37.5) линейного неоднородного уравнения, то есть к виду, в котором коэффициент при старшей производной равен 1. В рассматриваемом же примере коэффициент при старшей производной равен x. Для приведения к виду с коэффициентом 1 обе части рассматриваемого примера следует поделить на x, после чего правая часть и окажется равной x. Заметим, в связи с делением на x, что $x = 0$ решением данного уравнения не является.

Решая (37.10), определяем $C_1'(x) = \frac{1}{2}$, $C_1(x) = \frac{1}{2}x + \tilde{C}_1$, $C_2'(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $C_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \tilde{C}_2$. Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в искомый вид решения $y_{\text{неодн}} = C_1(x)x^2 + C_2(x)$, получаем ответ для решения данного уравнения:

$$y = y_{\text{неодн}} = C_1(x)x^2 + C_2(x) = \left(\frac{1}{2}x + \tilde{C}_1\right)x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \tilde{C}_2 = \tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2 + \frac{1}{3}x^3 .$$

Перейдём теперь снова к доказательству утверждения Теоремы 3 о возможности применения для решения $L(y) = f(x)$ так называемого *метода Коши.* По условию теоремы известно решение $L(y) = 0$, то есть $y_{\text{одн}} = G(x)C$. Далее, поступая также, как и в методе вариации произвольных постоянных Лагранжа, определяем искомое решение $L(y) = f(x)$ в виде $y = y_{\text{неодн}} = G(x)C(x)$, где $C(x)$ – искомый вектор неизвестных функций. Искомый вид решения подставляется в данное неоднородное уравнение: $L[G(x)C(x)] = f(x)$ и после раскрытия оператора применительно к линейной системе дифференциальных уравнений, по аналогии с предыдущим, получаем, что $C(x)$ является решением уравнения (37.2): $G(x)\frac{dC(x)}{dx} = f(x)$. Таким образом, метод Коши до данного момента полностью совпадает с методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Однако затем метод Коши имеет своим продолжением следующее.

Так как фундаментальная матрица $G(x)$ является невырожденной матрицей, то она имеет обратную матрицу $G(x)^{-1}$. Умножая обе части уравнения $G(x)\frac{dC(x)}{dx} = f(x)$ слева на $G(x)^{-1}$ получим: $G(x)^{-1}G(x)\frac{dC(x)}{dx} = G(x)^{-1}f(x)$ или $\frac{dC(x)}{dx} = G(x)^{-1}f(x)$, $dC(x) = G(x)^{-1}f(x)dx$. Интегрируя обе части в пределах от x_0 до x, получаем:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} G(\xi)^{-1}f(\xi)d\xi + C .$$

Подставим полученный результат в искомый вид решения:

$$y = y_{\text{неодн}} = G(x)\mathrm{C}(x) = G(x)[\int\limits_{x_0}^{x} G(\xi)^{-1} f(\xi)d\xi + C] = G(x)C + \int\limits_{x_0}^{x} G(x)G(\xi)^{-1} f(\xi)d\xi\ .$$

Очевидно, произведение матриц $G(x)G(\xi)^{-1}$ представляет собой матрицу Коши (см. в §34 (34.5)), то есть $G(x)G(\xi)^{-1} = K(x,\xi)$. Следовательно, по методу Коши искомым решением $L(y) = f(x)$ является:

$$y = y_{\text{неодн}} = G(x)C + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (37.11)$$

Таким образом, по методу Коши для решения уравнения (37.1) достаточно решить соответствующее однородное уравнение, построить фундаментальную матрицу $G(x)$, вычислить обратную к ней, составить матрицу Коши вида $K(x,\xi) = G(x)G(\xi)^{-1}$, полученные данные подставить в (37.11) и провести необходимые вычисления в рамках (37.11).

В рамках метода Коши можно получить и формулу решения задачи Коши. Действительно, если $y(x_0) = y_0$, то, подставив в (37.11) $x = x_0$, имеем $y_0 = G(x_0)C + 0$,

$C = G^{-1}(x_0)y_0$, $y = G(x)G^{-1}(x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$, где $G(x)G^{-1}(x_0) = K(x,x_0)$

и, следовательно, $y = K(x,x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$ – решение задачи Коши .

В частном случае, когда $G(x)$ – нормальная фундаментальная матрица, то $G^{-1}(x_0) = E$, и решение задачи Коши имеет более простой вид: $y = G(x)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$.

Замечание. Метод Коши приведён в данном учебнике только с целью ознакомления с данным замечательным методом интегрирования линейных неоднородных систем и уравнений и с целью предоставления возможности его использования в необходимых для этого случаях. Для оперативного же решения линейных уравнений и систем более простым для использования при решении соответствующих задач является метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.

Теорема 4. (*Метод подбора частного решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае специальной правой части*). Если правая часть линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dx} - Ay = f(x)$, где $A -$ постоянная матрица, имеет так называемый следующий *специальный вид*:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)=\sum_{k=1}^{n}[P_k(x)\cos(\beta_k x)+Q_k(x)\sin(\beta_k(x)]\cdot e^{\alpha_k x}\quad, \qquad (37.12)$$

где α_k , β_k – действительные числа, $P_k(x)$, $Q_k(x)$ $-$ вектор-многочлены по x , то частное решение данной системы может быть найдено по *методу неопределённых коэффициентов* в виде:

$$y_{\text{частн}}(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)=\sum_{k=1}^{n}[R_k(x)\cos(\beta_k x)+S_k(x)\sin(\beta_k(x)]\cdot e^{\alpha_k x}\ , \qquad (37.13)$$

где $R_k(x)$, $S_k(x)$ $-$ вектор-многочлены по x , координаты которых являются многочленами с неопределёнными коэффициентами одинаковой степени, равной сумме чисел – числа наибольшей степени многочленов – координат векторов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ и числа m_k , равного кратности действительного корня $\lambda_k=\alpha_k$ (при $\beta_k=0$) или кратности пары комплексных корней $\lambda_k=\alpha_k\pm i\beta_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы, то есть:

$$\deg R_k(x)=\deg S_k(x)=\max\,[\deg P_k(x)\,,\ \deg Q_k(x)]+m_k\quad. \qquad (37.14)$$

Неопределённые коэффициенты многочленов – координат векторов $R_k(x)$ и $S_k(x)$, определяются с учётом утверждения Теоремы 1 через подстановку последовательно слагаемых частного решения (37.13) , то есть искомых частных решений $y_k(x)=y_{k\,\text{частн}}$, в данное уравнение $\frac{dy_k}{dx}-Ay_k=f_k(x)$ с соответствующим слагаемым $f_k(x)$ специальной правой части уравнения для каждого $k=1,2,3,\dots,n$ и последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых функциях в обеих частях результата такой подстановки.

Следствие из теоремы 4. Если среди слагаемых правой части (37.12) специального вида имеются слагаемые при $\beta_k=0$, то есть вида $f_k(x)=P_k(x)e^{\alpha_k x}$, то соответствующее частное решение определяется в виде $y_k(x)=R_k(x)e^{\alpha_k x}$, где $R_k(x)$ – вектор-многочлен по x , координаты которого являются многочленами с неопределёнными коэффициентами одинаковой степени, равной сумме чисел – числа наибольшей степени многочленов – координат вектора $P_k\,(x)$ и числа m_k , равного кратности корня $\lambda_k=\alpha_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то есть, $\deg R_k(x)=\max\deg P_k(x)+m_k$. Неопределённые коэффициенты многочленов координат векторов $R_k(x)$ определяются по аналогии с предыдущим через подстановку искомого вида решения $y_k(x\ )$ в данное уравнение, то есть $\frac{dy_k}{dx}-Ay_k=f_k(x)$ с соответствующим слагаемым $f_k(x)$ специальной правой части и последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых функциях в обеих частях результата такой подстановки.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 6e^{3t} \\ \dot{y} = 2y - x - 5\text{sint} \end{cases}$.

Решение. Сначала решаем соответствующую однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$.

Решаем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2 = 0$, $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Определим собственные векторы для каждого из корней. Для $\lambda_1 = 0$ $\begin{cases} h_1 - 2h_2 = 0 \\ -h_1 + 2h_2 = 0 \end{cases}$, $h_1 = 2h_2$, $h_2 = 1$, $h_1 = 2$, $H_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 3$ $\begin{cases} -2h_1 - 2h_2 = 0 \\ -h_1 - h_2 = 0 \end{cases}$, $h_1 = -h_2 = 1$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Итак, общее решение однородной системы будет $C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t}$. Следовательно, общее решение данной неоднородной системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{1\text{ частн}} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\text{ частн}}.$$

Так как неоднородная часть данной системы уравнений состоит из двух слагаемых специального вида $f_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}e^{3t}$ и $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\text{sint}$, то, следовательно, будем определять два частных решения, соответствующие этим слагаемым.

Так как слагаемое $f_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}e^{3t}$ соответствует специальному виду (37.12) при $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 3$, а степень многочленов – координат вектора $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ равна нулю и $m = 1$, так как среди корней характеристического уравнения имеется простой корень $\lambda = 3$, то первое частное решение в соответствии со Следствием из Теоремы 4 определяем в виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{1\text{частн}} = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right]e^{3t}$. Для определения неизвестных коэффициентов векторов $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ в данную систему подставляем искомый вид частного решения $\begin{cases} x = (at + c)e^{3t} \\ y = (bt + d)e^{3t} \end{cases}$, при этом в неоднородной правой части системы имеется только слагаемое $f_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}e^{3t}$, то есть подставляем в систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 6e^{3t} \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$. Результат подстановки имеет вид:

$$\begin{cases} (a + 3at + 3c)e^{3t} = (at + c - 2bt - 2d)e^{3t} + 6e^{3t} \\ (b + 3bt + 3d)e^{3t} = (2bt + 2d - at - c)e^{3t} \end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях: $\begin{cases} a + 3c = c - 2d + 6 \\ 3a = a - 2b \\ b + 3d = 2d - c \\ 3b = 2b - a \end{cases} \sim \begin{cases} a + 2c + 2d = 6 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} a+b=0 \\ b+c+d=0 \\ a+2c+2d=6 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b=0 \\ b+c+d=0 \\ c+d=2 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=-d \\ c=-d+2 \end{cases}$. Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, определяем искомые коэффициенты частного решения: $d=1$, $c=1$, $b=-2$, $a=2$. Итак, первое искомое частное решение данной системы имеет вид: $\binom{x}{y}_{1\text{частн}} = \left[\binom{2}{-2}t + \binom{1}{1}\right]e^{3t}$.

Далее, отметим, что слагаемое $f_2 = \binom{0}{-5}\sin t$ соответствует специальному виду (37.12) при $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$, степень многочленов – координат вектора $\binom{0}{-5}$ равна нулю и $m_1 = 0$, так как среди корней характеристического уравнения корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ отсутствуют. Следовательно, второе частное решение определяем в соответствии с (37.13) в виде: $\binom{x}{y}_{2\text{ частн}} = \left[\binom{a}{b}\cos t + \binom{c}{d}\sin t\right]e^{0\cdot t}$ или $\begin{cases} x = a\cos t + c\sin t \\ y = b\cos t + d\sin t \end{cases}$. Для определения неизвестных значений координат векторов $\binom{a}{b}$ и $\binom{c}{d}$, подставляем этот искомый вид частного решения в следующую систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2y - x - 5\sin t \end{cases}$, то есть, в данную систему уравнений, при этом в её неоднородной правой части имеется только соответствующее слагаемое $f_2 = \binom{0}{-5}\sin t$. Результат данной подстановки искомого частного решения в эту систему имеет вид: $\begin{cases} -a\sin t + c\cos t = a\cos t + c\sin t - 2b\cos t - 2d\sin t \\ -b\sin t + d\cos t = 2b\cos t + 2d\sin t - a\cos t - c\sin t - 5\sin t \end{cases}$.

В полученном равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях:

$\begin{cases} -a = c - 2d \\ c = a - 2b \\ -b = 2d - c - 5 \\ d = 2b - a \end{cases}$ или $\begin{cases} a + c - 2d = 0 \\ a - 2b - c = 0 \\ b - c + 2d = 5 \\ a - 2b + d = 0 \end{cases}$. Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, определяем значения искомых неизвестных коэффициентов частного решения: $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$. Следовательно, вторым искомым частным решением системы будет $\binom{x}{y}_{2\text{ частн}} = \binom{3}{2}\cos t + \binom{-1}{1}\sin t$.

Таким образом, общее решение данной линейной неоднородной системы уравнения имеет вид: $\binom{x}{y} = C_1\binom{2}{1} + C_2\binom{1}{-1}e^{3t} + \left[\binom{2}{-2}t + \binom{1}{1}\right]e^{3t} + \binom{3}{2}\cos t + \binom{-1}{1}\sin t$.

Теорема 5. (*Метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами в случае специальной правой части*). Если правая часть линейного неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \qquad (37.15)$$

имеет так называемый *специальный вид*:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)=\sum_{k=1}^{n}[p_k(x)\cos(\beta_k x)+q_k(x)\sin(\beta_k x)]\cdot e^{\alpha_k x}\quad, \qquad (37.16)$$

где α_k , β_k – действительные числа, $p_k(x),\ q_k(x)$ $-$ многочлены по x , то частное решение данной системы может быть найдено по *методу неопределённых коэффициентов* в виде:

$$y_{\text{частн}}(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)=\sum_{k=1}^{n}[r_k(x)\cos(\beta_k x)+s_k(x)\sin(\beta_k x)]\cdot e^{\alpha_k x}\cdot x^{m_k}\ , \qquad (37.17)$$

где $r_k(x)$, $s_k(x)$ $-$ многочлены по x с неопределёнными коэффициентами одинаковой степени, равной наибольшей степени многочленов $p_k(x)$ и $q_k(x)$, то есть $\deg r_k(x) =$ $= \deg s_k(x) = \max\,[\deg p_k\ (x),\ \deg q_k(x)]$. Число m_k равно кратности действительного корня $\lambda_k=\alpha_k$ (при $\beta_k=0$) или кратности пары комплексных корней $\lambda_k=\alpha_k\pm i\beta_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы.

Неопределённые коэффициенты многочленов $r_k(x)$ и $s_k(x)$ определяются с учётом утверждения Теоремы 1 через подстановку последовательно слагаемых (37.17) , то есть $y_k(x)=y_{k\,\text{частн}}$, $k=1,2,3,\dots,n$, в данное уравнение (37.15) с соответствующим слагаемым $f_k(x)$ специального вида правой части уравнения и последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых функциях в обеих частях результата такой подстановки.

Следствие из теоремы 5. Если среди слагаемых правой части уравнения (37.16) специального вида имеются слагаемые, в которых $\beta_k=0$, то есть $f_k(x)=p_k(x)e^{\alpha_k x}$, то соответствующее частное решение определяется также в виде $y_k(x)=r_k(x)e^{\alpha_k x}\cdot x^{m_k}$, где $r_k(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени, равной степени многочлена $p_k(x)$, то есть $\deg r_k(x)=\deg p_k(x)$. Число m_k равно кратности корня $\lambda_k=\alpha_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

Неопределённые коэффициенты определяются по аналогии с предыдущим через подстановку искомого вида решения в данное уравнение с соответствующим слагаемым неоднородной правой части уравнения.

Пример. Решить неоднородное линейное уравнение

$$y'''+2y''+y'=1-2x+2(1+25e^x)\cos x-4e^{-x}\ .$$

Решение. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение. Решаем характеристическое уравнение $\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0$, $\lambda(\lambda+1)^2=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$. Следовательно, общее решение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид: $y_{\text{однор}}=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}$. Общее решение данного уравнения должно состоять из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, которое в данном случае, очевидно, состоит из следующих слагаемых специального вида, соответствующих одновременно различным значениям α и β, а именно $f_1 = 1 - 2x$, $f_2 = 2\cos x$, $f_3 = 50\cos x \cdot e^x$, $f_4 = -4e^{-x}$, то есть $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + y_{1\text{частн}} + y_{2\text{частн}} + y_{3\text{частн}} + y_{4\text{частн}}$. (37.18)

Исследуем соответствие этих слагаемых значениям α и β, затем определим, каковы максимальные степени многочленов – множителей слагаемых и чему равно для каждого из них значения m – кратность соответствующего корня $\lambda = \alpha$ или пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Определим эти значения для каждого из слагаемых неоднородной правой части уравнения. Очевидно, для $f_1 = 1 - 2x$ имеем: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, степень многочлена равна 1 и $m_1 = 1$, так как среди корней характеристического уравнения имеется один корень $\lambda_1 = 0$. Следовательно, первое частное решение с неопределёнными коэффициентами в соответствии со Следствием из Теоремы 5 записывается в виде: $y_{1\text{частн}} = (a_1x + b_1)x$. Для $f_2 = 2\cos x$ имеем: $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, степень многочлена равна 0 и $m_2 = 0$, так как среди корней характеристического уравнения отсутствуют корни $\lambda = \pm i$. Второе частное решение здесь в соответствии с (37.17) имеет вид: $y_{2\text{частн}} = a_2\cos x + b_2\sin x$. Для $f_3 = 50\cos x \cdot e^x$ имеем: $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 1$, степень многочлена при $\cos x \cdot e^x$ равна 0 и $m_3 = 0$, так как среди корней характеристического уравнения отсутствуют корни $\lambda = 1 \pm i$. Третье частное решение здесь в соответствии с (37.17) имеет вид: $y_{3\text{частн}} = (a_3\cos x + b_3\sin x)e^x$. Наконец, для $f_4 = -4e^{-x}$ имеем: $\alpha_4 = -1$, $\beta_4 = 0$, степень многочлена равна 0 и $m_4 = 2$, так как среди корней характеристического уравнения имеются два корня $\lambda = -1$. Следовательно, частное решение с неопределёнными коэффициентами в соответствии со Следствием из Теоремы 5 записывается в виде: $y_{4\text{частн}} = a_4x^2e^{-x}$.

Определим последовательно неизвестные коэффициенты частных решений, подставляя их в левую часть данного уравнения, при этом в правой части уравнения остаётся лишь соответствующее слагаемое специального вида. В результате такой подстановки приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях x и, решив полученную систему алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных коэффициентов, получаем:

$y_{1\text{частн}} = (a_1x + b_1)x$, $y_1' = 2a_1x + b_1$, $y_1'' = 2a_1$, $y_1''' = 0$. Подставляем в уравнение: $0 + 4a_1 + 2a_1x + b_1 = 1 - 2x$. Отсюда: $4a_1 + b_1 = 1$, $2a_1 = -2$, и, следовательно, $a_1 = -1$, $b_1 = 5$, и $y_{1\text{частн}} = (-x + 5)x$. Далее, по аналогии, определяем коэффициенты следующих частных решений: $y_{2\text{частн}} = a_2\cos x + b_2\sin x$, $y_2' = -a_2\sin x + b_2\cos x$, $y_2'' = -a_2\cos x - b_2\sin x$, $y_2''' = a_2\sin x - b_2\cos x$. Подставляем в уравнение:

$a_2\sin x - b_2\cos x - 2a_2\cos x - 2b_2\sin x - a_2\sin x + b_2\cos x = 2\cos x$, $a_2 - 2b_2 - a_2 = 0$, $-b_2 - 2a_2 + b_2 = 2$. Отсюда: $b_2 = 0$, $a_2 = -1$. Следовательно: $y_{2\text{частн}} = -\cos x$.

Для следующего частного решения имеем: $y_{3\text{частн}} = (a_3\cos x + b_3\sin x)e^x$, $y_3' = [(-a_3 + b_3)\sin x + (a_3 + b_3)\cos x]e^x$, $y_3'' = [-2a_3\sin x + 2b_3\cos x]e^x$, $y_3''' = [-2(a_3 + b_3)\sin x + 2(-a_3 + b_3)\cos x]e^x$. Подставляем в уравнение: $[-2(a_3 + b_3)\sin x + 2(-a_3 + b_3)\cos x]e^x + 2[-2a_3\sin x + 2b_3\cos x]e^x + [(-a_3 + b_3)\sin x + +(a_3 + b_3)\cos x]e^x = 50\cos x \cdot e^x$, $-2(a_3 + b_3) - 4a_3 + (-a_3 + b_3) = 0$, $2(-a_3 + b_3) + 4b_3 + (a_3 + b_3) = 50$, или $7a_3 + b_3 = 0$, $-a_3 + 7b_3 = 50$. Отсюда: $a_3 = -1$, $b_3 = 7$. Следовательно, $y_{3\text{частн}} = (-\cos x + 7\sin x)e^x$. Наконец, для частного решения $y_{4\text{частн}} = a_4x^2e^{-x}$, определяем $y_4' = a_4(2x - x^2)e^{-x}$, $y_4'' = a_4(2 - 4x + + x^2)e^{-x}$, $y_4''' = a_4(-6 + 6x - x^2)e^{-x}$. Подставляем в данное уравнение: $a_4(-6 + 6x - x^2)e^{-x} + 2a_4(2 - 4x + x^2)e^{-x} + a_4(2x - x^2)e^{-x} = -4e^{-x}$, и, сокращая на e^{-x}, имеем: $a_4(-6 + 6x - x^2 + 4 - 8x + 2x^2 + 2x - x^2) = -4$, $-2a_4 = -4$, $a_4 = 2$. Следовательно, $y_{4\text{частн}} = 2x^2e^{-x}$.

Полностью определённые частные решения подставляем в (37.18) и получаем общее решение данного уравнения: $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + y_{1\text{частн}} + y_{2\text{частн}} + y_{3\text{частн}} + y_{4\text{частн}} =$
$= C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + (-x + 5)x - \cos x + (-\cos x + 7\sin x)e^x + 2x^2e^{-x}$.

§38. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Уравнения Эйлера и их интегрирование.

Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с переменными коэффициентами называется *уравнением Эйлера* , если оно имеет следующий вид:

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \ . \qquad (38.1)$$

Данное уравнение сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимого переменного $x = e^t$, при этом, очевидно, $t = \ln x$. Действительно $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(\dot{y}e^{-t})}{dt}e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}, \ldots$

$\ldots, y^{(n)} = \left(\overset{(n)}{\dddot{y}} + b_1\overset{(n-1)}{\dddot{y}} + \cdots + b_{n-1}\dot{y}\right)e^{-nt}$. Подставляя в уравнение (38.1) получим:

$$e^{nt}\left(\overset{(n)}{\dddot{y}} + b_1\overset{(n-1)}{\dddot{y}} + \cdots + b_{n-1}\dot{y}\right)e^{-nt} + a_1e^{(n-1)t}\left(\overset{(n-1)}{\dddot{y}} + c_1\overset{(n-2)}{\dddot{y}} + \cdots + c_{n-1}\dot{y}\right)e^{-(n-1)t} +$$

$$+ \cdots + a_{n-1}e^t\dot{y}e^{-t} + a_ny = f(e^t) \quad \text{или} \quad \overset{(n)}{\dddot{y}} + d_1\overset{(n-1)}{\dddot{y}} + \cdots + d_{n-1}\dot{y} + d_ny = g(t) \ . \qquad (38.2)$$

Характеристическое уравнение полученного уравнения с постоянными коэффициентами будет: $\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n = 0$. Рассмотрим возможные виды корней данного уравнения, например: λ_1 , λ_2 , λ_3 – действительные и различные; $\lambda_{4,5} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ – комплексно-сопряжённые; $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8$ – действительные и кратные; $\lambda_{9,10} = \lambda_{11,12} = $ $= \lambda_{13,14} = \alpha_2 \pm i\beta_2$ – кратные комплексно-сопряжённые корни. Общее решение соответствующего однородного уравнения, очевидно, в этом случае будет иметь следующий вид:

$$y = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + C_3e^{\lambda_3 t} + C_4e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t + C_5e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t + C_6e^{\lambda_6 t} + C_7te^{\lambda_6 t} + C_8t^2e^{\lambda_6 t} +$$
$$+ C_9e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t + C_{10}e^{\alpha_2 t}\sin\beta_2 t + C_{11}te^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t + C_{12}t\sin\beta_2 t + C_{13}t^2e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t +$$
$$+ C_{14}t^2e^{\alpha_2 t}\sin\beta_2 t \ .$$

Проведя обратную подстановку $t = \ln x$, получаем:

$$y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + C_3x^{\lambda_3} + C_4x^{\alpha_1}\cos(\beta_1\ln x) + C_5x^{\alpha_1}\sin(\beta_1\ln x) + C_6x^{\lambda_6} + C_7x^{\lambda_6}\ln x +$$
$$+ C_8x^{\lambda_6}\ln^2 x + C_9x^{\alpha_2}\cos(\beta_2\ln x) + C_{10}x^{\alpha_2}\sin(\beta_2\ln x) + C_{11}\ln x \cdot x^{\alpha_2}\cos(\beta_2\ln x) + \qquad (38.3)$$
$$+ C_{12}\ln x \cdot x^{\alpha_2}\sin(\beta_2\ln x) + C_{13}\ln^2 x \cdot x^{\alpha_2}\cos(\beta_2\ln x) + C_{14}\ln^2 x \cdot x^{\alpha_2}\sin(\beta_2\ln x) \ .$$

Анализируя полученный результат, можно сделать следующий вывод. Если сравнить соответствующие решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами с видом полученных здесь решений, видно, что выражение x^λ в данном случае соответствует выражению $e^{\lambda x}$, которое используется для построения характеристического уравнения в случае линейного уравнения с постоянными коэффициентами путём подстановки $y = e^{\lambda x}$. В данном случае λ является также степенью x^λ , поэтому, вследствие такой аналогии, для определения значений λ и, следовательно, *для построения характеристического уравнения Эйлера достаточно провести в соответствующем однородном уравнении Эйлера подстановку* $y = x^\lambda$ *и затем, в зависимости от вида корней характеристического уравнения, записать общее решение однородного уравнения по образцу* (38.3).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного однородного уравнения определяем с помощью подстановки в данное уравнение $y = x^\lambda$. Следовательно, $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, и, подставляя в данное уравнение, получаем $x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 3x\lambda x^{\lambda-1} + 5x^\lambda = 0$. После сокращения на общий множитель x^λ, получаем: $\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Следовательно, общее решение данного уравнения Эйлера в соответствии с (38.3) будет: $y = C_1x^2\cos(\ln x) + C_2x^2\sin(\ln x)$.

Неоднородное линейное уравнение Эйлера (38.1) может решаться либо с помощью метода вариации произвольных постоянных Лагранжа, либо с помощью метода подбора частного решения в случае специальной правой части, которая для рассматриваемого уравнения Эйлера имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} [p_k(\ln x)\cos(\beta_k \ln x) + q_k(\ln x)\sin(\beta_k \ln x)] \cdot x^{\alpha_k} \quad , \tag{38.4}$$

где α_k , β_k – действительные числа, $p_k(\ln x)$, $q_k(\ln x)$ $-$ многочлены по степеням $\ln x$. Тогда частное решение данной системы может быть найдено по методу неопределённых коэффициентов в виде:

$$y_{\text{частн}}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) = \sum_{k=1}^{n} [r_k(\ln x)\cos(\beta_k \ln x) + s_k(\ln x)\sin(\beta_k \ln x)] \cdot x^{\alpha_k} \cdot (\ln x)^{m_k}, \tag{38.5}$$

где $r_k(\ln x)$, $s_k(\ln x)$ $-$ многочлены по $\ln x$ с неопределёнными коэффициентами одинаковой степени, равной наибольшей степени многочленов $p_k(\ln x)$ и $q_k(\ln x)$, то есть $\deg r_k(\ln x) = \deg s_k(\ln x) = \max\,[\deg p_k\,(\ln x),\ \deg q_k(\ln x)]$. Число m_k равно кратности действительного корня $\lambda_k = \alpha_k$ (при $\beta_k = 0$) или кратности пары комплексных корней $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы. Неопределённые коэффициенты многочленов $r_k(x)$ и $s_k(x)$ определяются с помощью метода неопределённых коэффициентов через подстановку последовательно слагаемых (38.5) , то есть $y_k(x) = y_{k\,\text{частн}}$ в данное уравнение (38.1) с соответствующим слагаемым $f_k(x)$ специального вида правой части уравнения (38.4) для каждого $k = 1, 2, 3, \dots, n$ и последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых функциях в обеих частях результата такой подстановки.

По аналогии с предыдущим заметим, что если среди слагаемых правой части уравнения (38.4) специального вида имеются слагаемые при $\beta_k = 0$, то есть вида $f_k(x) = p_k(\ln x)x^{\alpha_k}$, то соответствующее частное решение определяется в виде $y_k(x) = r_k(\ln x)x^{\alpha_k}(\ln x)^{m_k}$,
где $r_k(\ln x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени, равной степени многочлена $p_k(\ln x)$, то есть $\deg r_k(\ln x) = \deg p_k(\ln x)$. Число m_k равно кратности корня $\lambda_k = \alpha_k$ среди корней характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. Неопределённые координаты определяются по аналогии с предыдущим через подстановку искомого вида решения в данное уравнение с соответствующим слагаемым $f_k(x)$ неоднородной правой части.

Пример. Решить уравнение $x^2y'' - 3xy' + 5y = 4x^3 + 25\ln x - 2x^2\sin(\ln x)$.
Решение. Так как соответствующее однородное уравнение решено в предыдущем примере, то, следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:
$y_{\text{однор}} = C_1x^2\cos(\ln x) + C_2x^2\sin(\ln x)$. Общее решение данного уравнения должно состоять из общего решения соответствующего однородного уравнения и трёх слагаемых частного решения неоднородного уравнения, которые в данном случае соответствуют следующим слагаемым специального вида правой части уравнения $f_1 = 4x^3$, $f_2 = 25\ln x$,

$f_3 = -2\ln x \cdot \sin(\ln x)$, соответствующих одновременно различным значениям α и β , то есть $$y = C_1x^2\cos(\ln x) + C_2x^2\sin(\ln x) + y_{1\text{частн}} + y_{2\text{частн}} + y_{3\text{частн}}. \qquad (38.6)$$

Исследуем, каким значениям α и β соответствуют эти слагаемые и затем – каковы степени многочленов по степеням $\ln x$ – множителей слагаемых и чему равно для каждого из них значение m – кратность соответствующего корня $\lambda = \alpha$ или пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Очевидно, для $f_1 = 4x^3$ имеем: $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 0$, степень многочлена по степеням $\ln x$ равна 0 и $m_1 = 0$, так как среди корней характеристического уравнения корень $\lambda_1 = 3$ отсутствует. В соответствии с (38.5) первое частное решение имеет вид: $y_{1\text{частн}} = a_1x^3$. Далее, для $f_2 = 25\ln x$ имеем: $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$, степень соответствующего многочлена по степеням $\ln x$ равна 1 , и $m_2 = 0$, так как среди корней характеристического уравнения отсутствуют корни $\lambda = 0$. Поэтому второе частное решение в соответствии с (38.5) имеет вид: $y_{2\text{частн}} = a_2\ln x + b_2$. Наконец, для $f_3 = -2x^2\sin(\ln x)$ имеем: $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 1$, степень многочлена равна 0 и $m_3 = 1$, так как среди корней характеристического уравнения имеются корни $\lambda = 2 \pm i$. В данном случае частное решение в соответствии с (38.5) имеет вид: $y_{3\text{частн}} = [a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)]x^2\ln x$.

Определим последовательно неизвестные коэффициенты частных решений, подставляя их в левую часть данного уравнения, при этом в правой части уравнения остаётся лишь соответствующее слагаемое специального вида. В результате подстановки приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях $\ln x$ и решаем полученную систему алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных коэффициентов. Итак, $y_{1\text{частн}} = a_1x^3$, $y_1' = 3a_1x^2$, $y_1'' = 6a_1x$. Подставляем в уравнение: $x^2 6a_1x - 3x3a_1x^2 + 5a_1x^3 = 4x^3$. Сократив на x^3 обе части уравнения, получаем $2a_1 = 4$, $a_1 = 2$ и, следовательно, $y_{1\text{частн}} = 2x^3$. Далее, $y_{2\text{частн}} = a_2\ln x + b_2$, $y_2' = a_2\frac{1}{x}$, $y_2'' = -a_2\frac{1}{x^2}$. Подставляем в уравнение: $-x^2a_2\frac{1}{x^2} - 3xa_2\frac{1}{x} + 5(a_2\ln x + b_2) = 25\ln x$, $-4a_2 + 5a_2\ln x + 5b_2 = 25\ln x$, $a_2 = 5$, $b_2 = 4$. Следовательно, $y_{2\text{частн}} = 5\ln x + 4$. Наконец, рассмотрим $y_{3\text{частн}}$: $y_{3\text{частн}} = [a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)]x^2\ln x$. $y_3' = [-a_3\sin(\ln x) + b_3\cos(\ln x)]x\ln x +$ $+[a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)](2x\ln x + x)$, $y_2'' = [a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)](\ln x + 3) +$ $+[-a_3\sin(\ln x) + b_3\cos(\ln x)](3\ln x + 2)$. Подставляем в данное уравнение:
$x^2[a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)](\ln x + 3) + x^2[-a_3\sin(\ln x) + b_3\cos(\ln x)](3\ln x + 2) -$
$-3x[-a_3\sin(\ln x) + b_3\cos(\ln x)]x\ln x - 3x[a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)](2x\ln x + x) +$
$+5[a_3\cos(\ln x) + b_3\sin(\ln x)]x^2\ln x = -2x^2\sin(\ln x)$. Сократив на x^2 и приравнивая коэффициенты при функциях $\cos(\ln x)$ и $\sin(\ln x)$, получаем:

$$\begin{cases} a_3(\ln x + 3 - 6\ln x - 3 + 5\ln x) + b_3(3\ln x + 2 - 3\ln x) = 0 \\ a_3(-3\ln x - 2 + 3\ln x) + b_3(\ln x + 3 - 6\ln x - 3 + 5\ln x) = -2 \end{cases}$$ или

$\begin{cases} a_3 \cdot 0 + 2b_3 = 0 \\ -2a_3 + b_3 \cdot 0 = -2 \end{cases}$. Отсюда определяем значения $a_3 = 1$, $b_3 = 0$ и, следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_{3\text{частн}} = \cos(\ln x)x^2\ln x$.

Полностью определённые частные решения подставляем в (38.6) и получаем общее решение данного уравнения:

$$y = C_1x^2\cos(\ln x) + C_2x^2\sin(\ln x) + 2x^3 + 5\ln x + 4 + \cos(\ln x)x^2\ln x\,.$$

Замечание. В общем случае произвольного линейного неоднородного уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами общего алгоритма интегрирования указать нельзя. Могут рекомендоваться лишь некоторые частные подходы к интегрированию некоторых таких уравнений специального вида. В данном изложении остановимся лишь на некотором подходе при интегрировании такого уравнения второго порядка, который будет использован в последующей главе данного учебника.

Итак, рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\ , \tag{38.7}$$

где $p_0(x)$, $p_0(x)$, $p_0(x)$ – непрерывные функции.

Рассматриваемый подход состоит в следующем. В данном уравнении применяется подстановка метода Бернулли с целью приведения данного уравнения к виду, в котором отсутствует слагаемое с первой производной искомой функции. Иногда такое преобразование приводит данное уравнение к интегрируемому виду. Алгоритм такого подхода состоит в следующем. В уравнении (38.7) проводим замену функции $y = uv$: $p_0(x)(u''v + 2u'v' + uv'') + p_1(x)(u'v + uv') + p_2(x)uv = f(x)$. Полагаем, что $2p_0u'v' + p_1u'v = 0$, $2p_0v' + p_1v = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{p_1}{2p_0}dx$, $\ln v = -\int\frac{p_1}{2p_0}dx$ (напоминаем, что в методе Бернулли при первом интегрировании константа C не ставится), $v = e^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}$.

В этом случае, таким образом, с помощью подстановки $y = ue^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}$ данное уравнение приводится к виду $p_0v\,u'' + (\mathrm{p}_0v'' + p_1v' + p_2v)u = f(x)$, или к виду

$$p_0e^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}\,u'' + [p_0\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}\right) + p_1\frac{d}{dx}\left(e^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}\right) + p_2e^{-\int\frac{p_1}{2p_0}dx}]u = f(x)\ , \tag{38.8}$$

в котором отсутствует слагаемое с производной u' . В результате такого преобразования данное уравнение может быть приведено к одному из интегрируемых случаев, рассмотренных в начальных главах данного учебника.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $x^2y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = -x^4$.
Решение. Данное уравнение не относится к ранее рассмотренным интегрируемым видам уравнений. Применим подстановку $y = uv$ с целью преобразовать уравнение к виду без первой производной неизвестной функции. В результате подстановки получаем: $x^2(u''v + 2u'v' + uv'') - 4x(u'v + uv') + (6 - x^2)uv = -x^4$. Полагаем $x^2 2u'v' - 4xu'v = 0$, $2x^2v' = 4xv$, $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$, $\ln v = 2\ln x$ (при применении данного метода при первом интегрировании константа C не ставится), $v = x^2$. Следовательно, замена здесь будет $y = ux^2$, и уравнение преобразуется к виду, не содержащему u' : $x^2vu'' + (x^2v'' - 4xv' + 6v - x^2v)u = -x^4$, или $x^4u'' + (2x^2 - 8x^2 + 6x^2 - x^4)u = -x^4$. Сокращая на x^4 , и с учётом того, что $x = 0$ решением в данном случае не является, имеем: $u'' - u = -1$. Решая это уравнение, получаем $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda = \pm 1$. Общее решение здесь: $u = C_1e^x + C_2e^{-x} + u_{\text{частн}}$. Очевидно, в данном случае $u_{\text{частн}} = a = 1$. Итак, $u = C_1e^x + C_2e^{-x} + 1$. И, следовательно, решение данного уравнения имеет вид: $y = C_1x^2\, e^x + C_2x^2\, e^{-x} + x^2$.

Глава 11. **Краевые задачи.**

§39. Краевые задачи. Основные определения. Интегрирование краевых задач.

Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка – это задача определения решения дифференциального уравнения второго порядка

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{39.1}$$

при $x \in [a, b]$, $a \neq b$, удовлетворяющего следующим *краевым условиям*:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases}, \tag{39.2}$$

причём $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

В операторной форме, очевидно, данная задача записывается в виде:

$$L(y) = f(x)\ ,\ \ \Gamma_a(y) = A\ ,\ \ \Gamma_b(y) = B\ , \tag{39.3}$$

где $L(y) = \left(p_o\frac{d^2}{dx^2} + p_1\frac{d}{dx} + p_2\right)y$, $\Gamma_a(y) = \left(\alpha_1 + \alpha_2\frac{d}{dx}\right)y(a)$, $\Gamma_b(y) = \left(\beta_1 + \beta_2\frac{d}{dx}\right)y(b)$.

Краевая задача, которая имеет краевые условия, заданные при двух различных значениях независимой переменной, называется *двухточечной краевой задачей*, если же краевые условия задаются при трёх или более различных значениях независимой переменной, то называется *многоточечной краевой задачей*.

Рассмотрим сначала возможность аналитического решения рассматриваемой краевой задачи. С этой целью применяем *общий аналитический метод решения краевой задачи*, аналогичный методу решения задачи Коши. А именно, сначала определяется общее решение уравнения краевой задачи. Затем с использованием краевых условий, по аналогии с начальными условиями задачи Коши, определяем значения произвольных постоянных и в результате получаем решение краевой задачи, удовлетворяющее заданным краевым условиям. Однако, в отличие от задачи Коши, данный метод практически не применяется. Данный вывод иллюстрирует следующий пример.

Пример. Решить краевую задачу $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(b) = B$, $b \neq 0$.

Решение. Сначала определяем общее решение уравнения данной краевой задачи: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Применяем первое краевое условие $y(0) = 0$, $0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$, $C_2 = 0$. В итоге получаем, что $y = C_1 \sin x$.

Но для определения второй произвольной постоянной следует рассмотреть следующие возможности значений b и B:

1). Пусть сначала $b \neq k\pi$. В этом случае, используя второе краевое условие, получаем $B = C_1 \sin b$, откуда $C_1 = \frac{B}{\sin b}$ и $y = \frac{B}{\sin b} \sin x$ и, следовательно, в данном случае рассматриваемая *краевая задача имеет единственное решение*.

2). Пусть теперь $b = k\pi$, $B = 0$. В этом случае второе краевое условие имеет вид $y(k\pi) = 0$. Следовательно: $0 = C_1 \sin k\pi$, то есть $0 = C_1 \cdot 0$ и $C_1 \in R$. Таким образом, решение краевой задачи здесь: $y = C_1 \sin x$, $C_1 \in R$, то есть в данном случае *краевая задача имеет бесконечное множество решений*.

3). Рассмотрим последнюю возможность $b = k\pi$, $B \neq 0$. В этом случае второе краевое условие имеет вид $y(k\pi) = B$. Следовательно, используя это условие получаем: $0 \neq B = C_1 \sin k\pi = C_1 \cdot 0 = 0$, то есть $0 \neq 0$. Таким образом, в данном случае *краевая задача не имеет решений*.

Данный пример показывает, что, в отличие от решения задачи Коши, даже при выполнении для уравнения условий существования и единственности решения задачи Коши, краевая задача может иметь единственное решение, либо множество решений, либо вообще не иметь решений. И, следовательно, данный метод не позволяет в общем случае решения краевой задачи сформулировать условия, на основании которых можно было бы сделать вывод о том, какой результат должна имеет данная краевая задача. Такие условия могут быть сформулированы при применении следующего рассматриваемого метода решения краевой задачи, а именно метода функции Грина.

§40. Метод функции Грина.

Метод функции Грина решения краевой задачи рассмотрим применительно к следующей краевой задаче:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \ , \quad y(a) = A \ , \ y(b) = B \ , \quad a \neq b \ . \tag{40.1}$$

Упростим постановку данной задачи, применив следующую линейную замену функции: $z = y - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A$. В результате такой подстановки краевая задача примет вид:

$$z'' + p_1(x)z' + q_1(x)z = f_1(x) \ , \quad z(a) = 0 \ , \ z(b) = 0 \ . \tag{40.2}$$

Если далее проведём ещё одну подстановку $z = uv = ue^{-\int \frac{p_1}{2}dx}$, аналогичную подстановке в уравнении (38.7), то уравнение (40.2) сводится к виду, аналогичному (38.8):

$$u'' + q_2(x)u = f_2(x) \ , \quad u(a) = 0 \ , \ u(b) = 0 \ . \tag{40.3}$$

В результате такой подстановки в уравнении отсутствует слагаемое, содержащее первую производную неизвестной функции. Нулевые же краевые условия при этом, очевидно, сохраняются. Если задача (40.3) решена, то обратными подстановками полученное решение может быть преобразовано к виду, содержащему первоначальные переменные данной краевой задачи.

Алгоритм метода функции Грина решения краевой задачи (40.1) в данном случае на начальном этапе и состоит в преобразовании этой задачи к виду (40.3).

Для упрощения вида переменных последующего решения краевой задачи по методу функции Грина рассмотрим задачу (40.3) в более простых и привычных переменных:

$$y'' + q(x)y = f(x) \ , \quad y(a) = 0 \ , \ y(b) = 0 \ . \tag{40.4}$$

Рассмотрим теперь алгоритм построения функции Грина. Для этого решим две вспомогательные задачи Коши, которые ставятся следующим образом:

1). Найти решение задачи Коши:

$$y'' + q(x)y = 0 \ , \quad y(a) = 0 \ , \ y'(a) = k_1 \neq 0 \quad \text{для} \ \ \forall k_1 \in R \ . \tag{40.5}$$

В результате решения данной задачи определяем решение $y_1(x)$.

2). Найти решение задачи Коши:

$$y'' + q(x)y = 0 \ , \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = k_2 \neq 0 \ , \ \text{для} \ \ \forall k_2 \in R \ . \tag{40.6}$$

В результате решения данной задачи определяем решение $y_2(x)$.

После определения решений вспомогательных задач Коши вычислим значение определителя Вронского системы этих двух решений:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} . \tag{40.7}$$

Замечание. В общем аналитическом методе решения краевой задачи, рассмотренном в предыдущем параграфе, не были сформулированы критерии возможностей единственности, множества и отсутствия решений краевой задачи. В данном же случае этим критерием, оказывается, является зависимость от не равенства или равенства нулю величины данного определителя $W(x)$, как это будет подтверждено далее.

Итак, полагаем, что $W(x) \neq 0$, то есть выполнено условие независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Очевидно, *условие независимости этих функций* эквивалентно условию *отсутствия ненулевого решения соответствующего однородного уравнения* $y'' + q(x)y = 0$ *удовлетворяющего данным нулевым граничным условиям*.

На основе полученных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ построим следующую функцию, которая и называется *функцией Грина* :

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1(s)y_1(x)\,, & a \leq x \leq s \\ C_2(s)y_2(x)\,, & s \leq x \leq b \end{cases}, \tag{40.8}$$

где s – переменная, принимающая значения $s \in [a,b]$. Функции $C_1(s)$ и $C_2(s)$ при этом должны удовлетворять следующим условиям: при $x = s$ $C_1(s)y_1(s) = = C_2(s)y_2(s)$, то есть функция $G(x,s)$ – непрерывная функция при любых x и s . В то же время производная $G(x,s)$ по x при $x = s$ имеет разрыв первого рода, при этом постоянного значения, равного 1 .

Таким образом, для функций, составляющих $G(x,s)$ выполняются при $x = s$ одновременно следующие условия:

$$\begin{cases} C_2(s)y_2(s) - C_1(s)y_1(s) = 0 \\ C_2(s)y_2'(s) - C_1(s)y_1'(s) = 1 \end{cases}. \tag{40.9}$$

Соответствующая графическая иллюстрация функции Грина представлена на рис. 18.

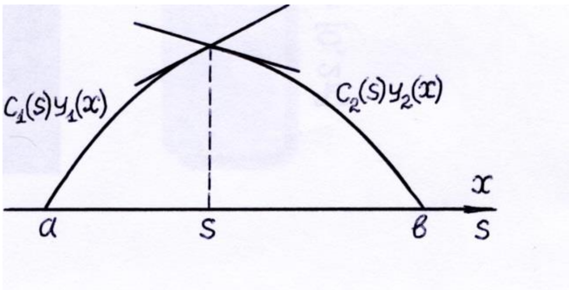

Рис.18. Графическое представление функции Грина.

Замечание. Разрыв производной при $x = s$ является подтверждением того факта, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющие условию $W(x) \neq 0$, независимы.

Решим данную совместную и определённую систему (40.9) относительно неизвестных функций $C_1(s)$ и $C_2(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы Крамера [10] и определим в соответствии с данной теоремой единственные значения этих функций:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y_2'(s) & -y_1'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = W(s) \neq 0\,, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -y_1(s) \\ 1 & -y_1'(s) \end{vmatrix} = y_1(s)\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_2(s) & 0 \\ y_2'(s) & 1 \end{vmatrix} = y_2(s)\ , \qquad C_2(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_1(s)}{W(s)}, \qquad C_1(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_2(s)}{W(s)}\ .$$

Подставив значения функций $C_1(s)$ и $C_2(s)$ в (40.8), получаем окончательное выражение для функции Грина:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)}\ , & a \le x \le s \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)}\ , & s \le x \le b \end{cases}\ . \tag{40.10}$$

На основании данного построения функция Грина удовлетворяет следующим условиям:

1) функция непрерывна по x и s на всём отрезке $[a\,, b]$;

2) удовлетворяет данным краевым условиям (40.4): $G(a,s) = G(b,s) = 0$;

3) на основании второго уравнения системы (40.9) и соответствующей его графической аргументации с помощью иллюстрации на рис. 19, выполняется следующее равенство : $G_x'(x, x-0) - G_x'(x, x+0) = 1$.

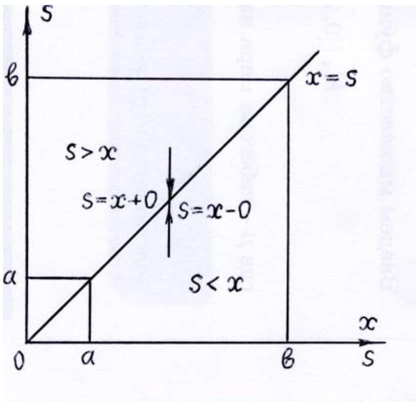

Рис.19. Иллюстрация разрыва производной по x *функции Грина* $G(x,s)$
при $x = s$, *который равен* $G_x'(x, x-0) - G_x'(x, x+0) = 1$.

4) является решением соответствующего однородного уравнения рассматриваемой краевой задачи (40.4), то есть $G_{xx}''(x,s) + q(x)G(x,s) = 0$, так как на интервале [a, s] этому условию удовлетворяет функция $y_1(x)$, а на интервале $[s, b]$ этому условию удовлетворяет функция $y_2(x)$.

Покажем, что если функция Грина (40.10) построена, то решение данной краевой задачи по рассматриваемому методу функции Грина определяется в виде:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds, \qquad y(a) = y(b) = 0\ . \tag{40.11}$$

Сначала с учётом свойств функции Грина вычисляем значения производных этого вида решения (40.11): $y'(x) = \int\limits_a^b G'_x(x,s)f(s)ds = \int\limits_a^x G'_x(x,s)f(s)ds + \int\limits_x^b G'_x(x,s)f(s)ds$,

$$y''(x) = G'_x(x,x-0)f(x) + \int\limits_a^x G''_{xx}(x,s)f(s)ds - G'_x(x,x+0)f(x) + \int\limits_x^b G''_{xx}(x,s)f(s)ds =$$

$$= [G'_x(x,x-0) - G'_x(x,x+0)]f(x) + \int\limits_a^b G''_{xx}(x,s)f(s)ds = f(x) + \int\limits_a^b G''_{xx}(x,s)f(s)ds \ .$$

Подставим этот вид решения (40.11) и его производной y'' в уравнение краевой задачи (40.4), то есть в $y'' + q(x)y = f(x)$:

$f(x) + \int\limits_a^b G''_{xx}(x,s)f(s)ds + q(x)\int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds = f(x)$, и на основании четвёртого свойства функции Грина имеем: $\int\limits_a^b [G''_{xx}(x,s) + q(x)G(x,s)]f(s)ds = 0$, $0 = 0$.

Итак, функция (40.11) удовлетворяет уравнению краевой задачи (40.4) и, как нетрудно видеть, удовлетворяет и нулевым краевым условиям, так как выполняется условие 2) функции Грина. Таким образом, функция (40.11) представляет собой искомое решение краевой задачи (40.4).

Докажем единственность полученного решения $y(x)$ данной краевой задачи. Пусть, кроме полученного решения, имеется другое, не совпадающее с данным, решение $z(x)$ данной задачи . В таком случае разность данных решений $y(x) - z(x)$ является решением соответствующего однородного уравнения. Но так как ненулевого решения, удовлетворяющего краевым условиям, быть не может вследствие $W(x) \neq 0$, то, следовательно, это – только нулевое решение, то есть $y(x) - z(x) \equiv 0$, или что то же, $y(x) \equiv z(x)$. Что и доказывает единственность решения данной краевой задачи.

Таким образом, наличие бесконечного множества решений краевой задачи или отсутствие решений по методу функции Грина возможно лишь в случае, когда соответствующее однородное уравнение имеет ненулевое решение, удовлетворяющее данным краевым условиям рассматриваемой краевой задачи. Действительно, если ненулевые решения вспомогательных задач Коши таковы, что $W(s) = 0$, то линейная их комбинация представляет ненулевое решение, удовлетворяющее данным краевым условиям. Если после подстановки полученного решения в данное уравнение краевой задачи получается справедливое тождество, то краевая задача может иметь бесконечное множество решений, если же тождество не получается, то данная задача решений не имеет.

Итак, полученный итоговый результат можно сформулировать в виде утверждения следующей теоремы.

Теорема. Если соответствующее однородное уравнение неоднородного уравнения краевой задачи (40.4) не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих данным нулевым краевым условиям рассматриваемой краевой задачи, то данная краевая задача имеет единственное решение, которое может быть определено с помощью метода функции Грина в виде (40.11). Если же такое ненулевое решение однородного уравнения существует, то краевая задача либо имеет бесконечное множество решений, либо решений не имеет.

Замечание. По аналогии с решением краевой задачи (40.1) метод функции Грина можно применить и к решению общего вида двухточечной краевой задачи (39.3): $L(y) = f(x)$, $\Gamma_a(y) = A$, $\Gamma_b(y) = B$. То есть решаются две вспомогательные задачи Коши, определяются два решения этих задач, каждое из которых удовлетворяет одному из краевых условий. Если эти решения независимы, следовательно, для них $W(s) \neq 0$, то с помощью построения функции Грина и вычисления соответствующего интеграла, аналога (40.11), определяется единственное решение данной краевой задачи. В случае же $W(s) = 0$, то есть когда решения задач Коши линейно зависимы, справедливо аналогичное утверждение о возможности наличия множества решений или их отсутствия.

Пример. Решить краевую задачу $y'' + y = 1$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Решение. Для построения функции Грина решаем две вспомогательные задачи Коши:

1) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (это значение, не равное нулю, выбираем произвольно). Итак, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Применяем первое начальное условие $y(0) = 0$, $0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$, $C_2 = 0$. В итоге получаем, что $y = C_1 \sin x$ и $y' = C_1 \cos x$. Применив второе начальное условие, получаем $1 = C_1 \cdot 1$, $C_1 = 1$ и решением первой вспомогательной задачи является $y_1 = \sin x$.

2) $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (это значение, не равное нулю, выбираем произвольно). Аналогично предыдущему $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Применяем первое начальное условие: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, $C_1 = 0$. В итоге получаем, что $y = C_2 \cos x$, и $y' = -C_2 \sin x$. Применив второе начальное условие, получаем $-1 = -C_2 \cdot 1$, $C_2 = 1$, и решением второй вспомогательной задачи является $y_2 = \cos x$.

На основании решений $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x$ вспомогательных задач Коши для однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению данной краевой задачи, вычисляем значение соответствующего определителя Вронского:

$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$. Так как $W(x) \neq 0$, то, следовательно, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ независимы, и это свидетельствует о том, что соответствующее однородное уравнение не имеет ненулевого решения, удовлетворяющего нулевым краевым условиям данной краевой задачи. На основании формулы (40.10) построим функцию Грина рассматриваемой краевой задачи:

$$G(x,s) = \begin{cases} -y_1(x)y_2(s), & 0 \le x \le s \\ -y_1(s)y_2(x), & s \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad G(x,s) = \begin{cases} -\sin x\cos(s), & 0 \le x \le s \\ -\sin(s)\cos x, & s \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}. \qquad (40.12)$$

Применив формулу (40.11), определяем решение данной краевой задачи:

$y(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,s)f(s)ds$, $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Заметим, что $y(x)$ удовлетворяет данным краевым условиям, так как им удовлетворяет функция Грина $G(x,s)$. Прежде, чем вычислить значение решения $y(x)$, обратим внимание, что $f(s) = 1$ в соответствии с условием задачи. Итак, $y(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,s)f(s)ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,s)ds = \int\limits_0^{x} G(x,s)ds +$

$$+\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} G(x,s)ds = -\int\limits_0^{x} \sin(s)\cos x ds - \int\limits_0^{x} \sin x\cos(s) ds = -\cos x \int\limits_0^{x} \sin(s)\, ds -$$

$$-\sin x \int\limits_0^{x} \cos(s) ds = -\cos x[-\cos(s)]\Big|_0^x - \sin x[\sin(s)]\Big|_x^{\frac{\pi}{2}} = \cos^2 x - \cos x - \sin x + \sin^2 x =$$

$= 1 - \sin x - \cos x$. Таким образом, решением данной краевой задачи, полученном с помощью вычисления методом функции Грина, является $y(x) = 1 - \sin x - \cos x$.

§41. Приближённо-аналитические методы интегрирования краевых задач.

Приближённо-аналитические методы рассматриваем применительно к решению краевой задачи следующего общего вида (39.3): $L(y) = f(x)$, $\Gamma_a(y) = A$, $\Gamma_b(y) = B$. Все приближённо-аналитические методы основаны на приближённом определении решения рассматриваемой задачи в виде:

$$y(x) \cong u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x), \qquad (41.1)$$

где C_k – некоторые постоянные, $u_0(x)$ и $u_k(x)$ – выбранная для решения задачи последовательность независимых дифференцируемых функций $u_0(x)$ и $u_k(x)$ таких, что

$\varGamma_a(u_0) = A$, $\varGamma_b(u_0) = B$, $\varGamma_a(u_k) = \varGamma_b(u_k) = 0$, при $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Запишем уравнение данной краевой задачи в виде $L(y) - f(x) = 0$ и подставим в него приближённый вид решения в виде (41.1):

$$L\left(u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x)\right) - f(x) = R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)\,. \tag{41.2}$$

Функция $R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ правой части (41.2) называется *невязкой*. Целью всех далее рассматриваемых приближённо-аналитических методов решения данной краевой задачи является определение значений постоянных C_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$, такими, чтобы величина невязки была либо рана нулю, либо была сколь угодно малой. При этом, как следует из определения краевых значений последовательности независимых функций, краевые условия данной задачи для $y(x)$ удовлетворяются при любых значениях $k \geq 1$.

Рассмотрим сначала так называемый *приближённо аналитический метод коллокаций*. Этот метод состоит в следующем. На рассматриваемом отрезке $[a, b]$ выбираем n различных точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, которые далее называются *точками коллокаций*. Числовые значения координат данных точек подставляем в (41.2) и результат приравниваем нулю:

$$\begin{cases} R\big(x_{1,} C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\big) = 0 \\ R\big(x_{2,} C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\big) = 0 \\ R\big(x_{3,} C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\big) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R\big(x_{n,} C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\big) = 0 \end{cases} . \tag{41.3}$$

Особенность данного метода состоит в том, что в точках коллокаций невязка равна нулю.

Перейдём к рассмотрению двух так называемых *методов наименьших квадратов*. Сначала рассмотрим *приближённо-аналитический интегральный метод наименьших квадратов*. Данный метод состоит в определении минимального значения следующей

функции: $$\varphi(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) = \int_a^b R^2(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)\,dx\ . \tag{41.4}$$

Из курса математического анализа известно, что для определения минимального значения функции (41.4) необходимо равенство нулю соответствующих частных производных:

$$\frac{\partial\varphi(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}{\partial C_i} = 0\ , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n\ . \tag{41.5}$$

Решив данную систему, определяем искомые значения постоянных, которые и минимизируют невязку.

Приближённо-аналитический точечный метод наименьших квадратов состоит в выборе m точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ и составления функции $$\varphi(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) = \sum_{k=1}^{m} R^2(x_k, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) \quad . \qquad (41.6)$$

Минимум этой функции, а следовательно и невязки, определяется с помощью аналогичного вычисления решений системы частных производных (41.5). Отметим, что при $m = n$ точечный метод наименьших квадратов, очевидно, совпадает с методом коллокаций.

Приближённо-аналитический метод Галёркина решения данной краевой задачи требует выполнения для выбираемой системы независимых функций $u_0(x)$ и $u_k(x)$ уже при $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, кроме условий независимости и соответствующего указанного выполнения краевых условий, ещё и выполнения следующих двух условий. А именно, эта система функций должна быть *полной и ортогональной*. Полнота состоит в отсутствии ненулевых функций, не входящих в совокупность рассматриваемой системы функций. Условие же ортогональности имеет вид:

$$\begin{cases} \int_a^b u_i(x) u_j(x) dx = 0 \ , \ i \neq j \ , \ \text{для} \ \forall i, j = 1,2, \dots \\ \int_a^b u_i^2 dx \neq 0 \ , \ \text{для} \ \forall i = 1,2, \dots \ . \end{cases} \qquad (41.7)$$

В основе метода Галёркина лежит использование формул вычисления коэффициентов C_k разложения непрерывной функции в сходящий ряд по ортогональной системе функций, то есть, применительно к функции невязки, это ряд, коэффициенты которого имеют вид: $$C_k = \frac{\int_a^b R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) u_k(x) dx}{\int_a^b u_k^2(x) dx} \ , \quad k = 1, 2, 3, \dots \qquad (41.8)$$

Так как соответствующий ряд сходится, то, в соответствии с признаком сходимости, остаток ряда, начиная с некоторого момента, становится меньше любой заданной величины. Если все слагаемые такого ряда, которые расположены в его начале перед слагаемыми остатка, равны нулю, то сумма такого ряда становится равной его остатку и, следовательно, достаточно малой. Этот факт и лежит в основе обнуления коэффициентов первых рассматриваемых слагаемых (41.8). Таким образом, для определения значений постоянных $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ невязки $R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ по методу Галёркина приравниваются нулю первые n слагаемых (41.8) её разложения в ряд по данной полной ортогональной системе функций, то есть эти коэффициенты определяются из следующей системы:

$$\begin{cases} \int_a^b R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) u_1(x) dx = 0 \\ \int_a^b R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) u_2(x) dx = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^b R(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) u_n(x) dx = 0 \end{cases} . \qquad (41.9)$$

При применении всех указанных приближённо-аналитических методов после определения из условий минимизации невязки значений постоянных, их следует подставить в выражение (41.1) и тем самым получить искомое приближённое решение данной краевой задачи.

§42. Численные методы интегрирования краевых задач.

Методы численного приближённого решения краевых задач, дающие это решение в виде последовательности дискретных числовых значений искомой функции, применяются в случае, если ни один из приближённо-аналитических методов не является достаточно эффективным, в частности, если решение требуется с большой точностью на большом интервале изменения аргумента. Кроме того, эти методы применяются в расчётах с использованием современной вычислительной техники.

Рассмотрим некоторые численные методы на примере решения следующей краевой задачи:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad ,$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases} , \qquad (42.1)$$

где $x \in [a, b]$, $a \neq b$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Для применения этих методов интервал численного решения краевой задачи $x \in [a, b]$ разбивается на n частей с *шагом расчёта* $h = \frac{b-a}{n}$, как это показано на рис. 20.

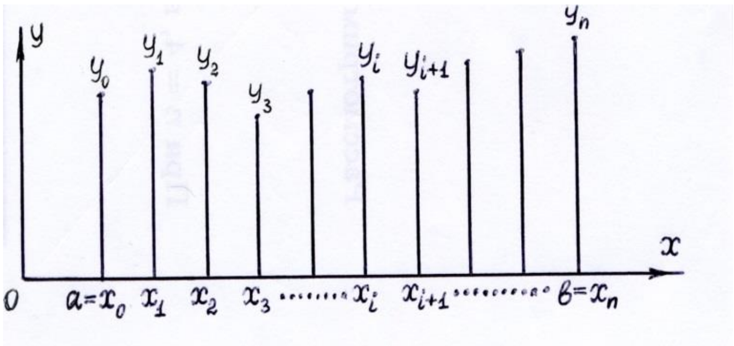

Рис.20. Деление интервала расчёта при применении численных методов решения краевой задачи.

Каждую из последовательных точек деления данного отрезка, начиная с $a = x_0$, обозначаем через: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Целью каждого из рассматриваемых численных методов является приближённое вычисление дискретных численных значений искомого решения краевой задачи в каждой из точек деления, то есть определение следующих значений решения: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $y(x_3) = y_3$, … … , $y(x_i) = y_i$, $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, …, $y(x_n) = y_n$.

Сначала рассмотрим так называемый *метод конечных разностей численного решения краевой задачи* (42.1). По данному методу производные в точках деления заменяем конечными разностями следующим образом: $y_i' \cong \frac{y_{i+1}-y_i}{h}$, $y_i'' \cong \frac{y_{i+1}'-y_i'}{h} = \frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}$. Эти разности вычисляем, очевидно, при значениях $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$. Подставив эти разностные значения в уравнение краевой задачи и в краевые условия, получаем систему следующих разностных соотношений:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2, \\ \alpha_1 y_0 + \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \beta_1 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \tag{42.2}$$

В результате получена система из $n+1$ алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, то есть искомые значения приближённого численного решения данной краевой задачи. Недостатком данного метода является трудоёмкость вычислений при достаточно больших значениях n. Поэтому предпочтительным является более удобный с точки зрения вычислительного процесса приближённый численный метод прогонки.

Приближённый численный метод прогонки решения краевой задачи (42.1) состоит в решении системы (42.2) более простым способом с помощью применения последовательности несложных формул, содержащих как вычисление необходимых промежуточных вспомогательных коэффициентов, так и затем на их основе вычисление последовательности искомых численных значений $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ данной краевой задачи.

Для вывода последовательности формул метода прогонки сначала запишем первое уравнение системы (42.2) в следующем виде:

$$y_{i+2} + (p_i h - 2)y_{i+1} + (q_i h^2 - p_i h + 1)y_i = f_i h^2, \tag{42.3}$$

где введены обозначения $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

В качестве первых двух формул метода прогонки вводим следующие формулы: $m_i = p_i h - 2$ и $n_i = q_i h^2 - p_i h + 1$ с последовательностью их вычисления в следующем порядке $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$. В результате формула (42.3) принимает более простой вид:

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + n_i y_i = f_i h^2 . \tag{42.4}$$

Запишем (42.4) при $i = 0$: $y_2 + m_0 y_1 + n_0 y_0 = f_0 h^2$ и разрешим относительно y_0: $y_0 = \dfrac{f_0 h^2 - y_2 - m_0 y_1}{n_0}$. Подставим это значение формулу первого краевого условия (42.2) и, разрешив результат подстановки относительно переменной y_1 , получим :

$$y_1 = \frac{\alpha_1 h - \alpha_2}{m_0(\alpha_1 h - \alpha_2) - n_0 \alpha_2}\left(f_0 h^2 - \frac{n_0 h A}{\alpha_1 h - \alpha_2} - y_2\right) \quad \text{или, что то же,} \quad y_1 = c_0(d_0 - y_2),$$

где $c_0 = \dfrac{\alpha_1 h - \alpha_2}{m_0(\alpha_1 h - \alpha_2) - n_0 \alpha_2}$ и $d_0 = f_0 h^2 - \dfrac{n_0 h A}{\alpha_1 h - \alpha_2}$ составляют соответственно третью и четвёртую формулы метода прогонки. На основании формулы $y_1 = c_0(d_0 - y_2)$ с помощью метода математической индукции докажем справедливость следующей формулы:

$$y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2}) . \tag{42.5}$$

Так как данная формула выполняется при $i = 0$, то полагаем, что она выполняется по отношению к (42.5) на предыдущем шаге, то есть: $y_i = c_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$. Подставив данное выражение для y_i в формулу (42.4) и разрешив результат этой подстановки относительно y_{i+1} , в результате получим:

$$y_{i+1} = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}(f_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+2}) \qquad \text{или} \qquad y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2}) ,$$

где $c_i = \dfrac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}$ и $d_i = f_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}$ составляют соответственно пятую и шестую формулы метода прогонки.

При $i = n-2$ формула (42.5) имеет вид: $y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n)$. Данное выражение для y_{n-1} подставляем во второе краевое условие системы (42.2) и, разрешив относительно y_n , получаем $y_n = \dfrac{hB + \beta_2 c_{n-2} d_{n-2}}{\beta_1 h + \beta_2(1 + c_{n-2})}$. Этот результат составляет очередную седьмую формулу метода прогонки. Восьмой формулой по порядку её практического использования является формула (42.5). Выведем последнюю девятую формулу метода прогонки, разрешив относительно y_0 формулу первого краевого условия (42.2): $y_0 = \dfrac{hA - d_2 y_1}{\alpha_1 h - \alpha_2}$.

Для практического применения сведём воедино все формулы численного метода прогонки в порядке их использования при приближённом численном решении данной краевой задачи (42.1) :

1. $m_i = p_i h - 2$, используется в порядке $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$.
2. $n_i = q_i h^2 - p_i h + 1$, используется в порядке $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$.

3. $c_0 = \dfrac{\alpha_1 h - \alpha_2}{m_0(\alpha_1 h - \alpha_2) - n_0\alpha_2}$.

4. $d_0 = f_0 h^2 - \dfrac{n_0 hA}{\alpha_1 h - \alpha_2}$.

5. $c_i = \dfrac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}$, используется в порядке $i = 1, 2, 3, \dots, n-2$.

6. $d_i = f_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}$, используется в порядке $i = 1, 2, 3, \dots, n-2$.

7. $y_n = \dfrac{hB + \beta_2 c_{n-2} d_{n-2}}{\beta_1 h + \beta_2(1 + c_{n-2})}$.

8. $y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2})$, используется в порядке $i = n-2,\ n-3, \dots, 3,\ 2,\ 1,\ 0$.

9. $y_0 = \dfrac{hA - d_2 y_1}{\alpha_1 h - \alpha_2}$.

При применении формул метода прогонки результат соответствующих вычислений вносится в соответствующую таблицу, которая приведена ниже. Сначала производится вычисление координат точек x_i разделения отрезка $[a, b]$ и значений в этих точках функций $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Результат этих и последующих вычислений вносится в таблицу расчёта. Далее проводятся вычисления по формулам 1 – 6 метода прогонки в порядке возрастания соответствующих индексов – это так называемый *прямой ход вычисления метода прогонки*. Значения же искомого решения проводятся по формулам 7 – 9 в обратном порядке – это *обратный ход метода прогонки*, в результате которого и определяются искомые численные значения ординат искомого решения данной краевой задачи (42.1).

Таблица расчёта по методу прогонки.

i	0	1	2	3	………………	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	………………	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
p_i	p_0	p_1	p_2	p_3	………………	p_{n-3}	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n
q_i	q_0	q_1	q_2	q_3	………………	q_{n-3}	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
f_i	f_0	f_1	f_2	f_3	………………	f_{n-3}	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n
m_i	m_0	m_1	m_2	m_3	→ → → → → → → →	m_{n-3}	m_{n-2}	–	–
n_i	n_0	n_1	n_2	n_3	→ → → → → → → →	n_{n-3}	n_{n-2}	–	–
c_i	c_0	c_1	c_2	c_3	→ → → → → → → →	c_{n-3}	c_{n-2}	–	–
d_i	d_0	d_1	d_2	d_3	→ → → → → → → →	d_{n-3}	d_{n-2}	–	–
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	← ← ← ← ← ← ← ←	y_{n-3}	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

При практическом применении алгоритмов численных методов решения краевой задачи с целью достижения заданной точности расчёта сначала проводится расчёт с выбранным значением шага расчёта, соответствующему, например, разбиению отрезка $[a, b]$, на котором производится расчёт, с числом делений n, то есть $h = \frac{b-a}{n}$. После этого проводится разбиение с числом делений $2n$. Таким образом, выполняется так называемый *двойной пересчёт*, и оценка точности расчёта проводится по следующей *формуле Рунге* (см. [6]):

$$\left| \ y(x) - y_{(2n)}(x) \right| \leq \underbrace{\max}_{1 \leq i \leq n} \frac{\left| y_{(n)}(x_i) - y_{(2n)}(x_i) \right|}{3} \leq \varepsilon \ ,$$

где $\varepsilon -$ величина заданной точности расчёта, $y(x)$ – неизвестное точное решение краевой задачи, $y_{(2n)}(x) -$ решение краевой задачи с числом делений отрезка расчёта $2n$, $y_{(n)}(x_i) -$ результат расчёта с числом делений n, $y_{(2n)}(x_i) -$ результат расчёта с числом делений $2n$. В оценке точности разность рассматривается, естественно, в точках деления, соответствующих числу делений n.

Глава 12. **Элементы качественной теории дифференциальных уравнений.**

§43. Динамические системы. Фазовое пространство.

В данной главе рассматриваем системы дифференциальных уравнений, полагая независимым переменным время t. В векторной форме теперь система дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \ . \qquad (43.1)$$

Переменные $y_1, \ y_2, \ y_3, \dots, y_n$ – координаты вектора $y = \{y_1, \ y_2, \ y_3, \dots, y_n\}$ полагаем координатами пространства R^n, которое здесь называется *фазовым пространством*. В данном случае степень n определяет размерность фазового пространства. Координаты вектора $y = \{y_1, \ y_2, \ y_3, \dots, y_n\} \in R^n$ называются *фазовыми координатами*. Траектория решения системы (43.1) $y = y(t, y_0)$ с начальным условием $y(t_0) = y_0$ здесь называется *фазовой траекторией в фазовом пространстве* R^n. Вектор $\frac{dy}{dt}$ левой части системы (43.1) в данном случае называется *вектором фазовой скорости*. Вектор правой части (43.1), равный $\frac{dy}{dt}$, то есть $f(t, y)$ также называется *вектором фазовой скорости*. В этом случае фазовая траектория $y = y(t, y_0)$ называется *движением по фазовой траектории*, так как практически изменение t определяет закон движения по фазовой траектории.

При такой интерпретации система дифференциальных уравнений (43.1) называется *динамической системой*. Динамические системы подразделяются на *автономные динамические системы*, если правая часть системы (43.1) явно не зависит от переменной t, то есть

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad , \qquad (43.2)$$

и на *неавтономные динамические системы* в противном случае, когда t явно в правую часть входит, как в (43.1).

Итак, в данном случае, очевидно, имеем $y \in R^n$, $t \in R^1$, $(y,t) \in R^{n+1}$, и в дальнейшем траектория $y = y(t, y_0)$ в отдельных случаях будет рассматриваться как фазовая траектория или движение в фазовом пространстве R^n, а так же как траектория решения в пространстве R^{n+1}, которое называем *пространством переменных системы* (43.1).

Замечание. В дальнейшем, фазовое пространство и фазовые траектории в этом пространстве, рассматриваемые в общем виде, то есть в R^n, в случаях их наглядной иллюстрации без ущерба для общности, будут рассматриваться применительно к двумерному случаю, то есть при $(y_1, y_2) \in R^2$.

§44. Свойства фазовых траекторий автономных динамических систем.

Рассмотрим свойства фазовых траекторий автономных динамических систем (43.2):

1. Множество фазовых траекторий автономной динамической системы в фазовом пространстве $y \in R^n$ является множеством, зависящим от $n-1$ параметров.

Действительно, запишем автономную динамическую систему (43.2) в симметрической форме: $dt = \frac{dy_1}{f_1(y)} = \frac{dy_2}{f_2(y)} = \frac{dy_3}{f_3(y)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(y)}$. Отсюда следует, что множество фазовых траекторий в результате исключения равенства dt определяют $n-1$ уравнений, которые в общем решении имеют $n-1$ произвольных постоянных. Что и требовалось доказать.

2. Множество движений по фазовым траекториям автономной динамической системы является множеством, зависящим от одного параметра.

Из предыдущей записи данной системы в симметрической форме это уже следует, так как общее число постоянных в общем решении системы $n-$го порядка содержит n произвольных постоянных. Покажем справедливость данного утверждения также и следующим образом. Рассмотрим любое решение $y = y(t, y_0)$ автономной динамической системы $\frac{dy}{dt} = f(y)$ и иллюстрацию принципиального вида траектории этого решения в пространстве переменных автономной системы (см. рис. 21). Если, выбрав произвольное число $\tau > 0$, отсчёт текущего значения времени t сдвинуть на эту величину, то есть $t \to t + \tau$, то в этом случае рассматриваемое решение примет вид $y = y(t + \tau, y_0)$, а система уравнений – вид $\frac{dy}{d(t+\tau)} = f(y)$. Но так как $d(t + \tau) = dt$, то $\frac{dy}{d(t+\tau)} = \frac{dy}{dt} = f(y)$, то есть решение $y = y(t + \tau, y_0)$ наряду с решением $y = y(t, y_0)$ удовлетворяют одной и той же автономной динамической системе дифференциальных уравнений.

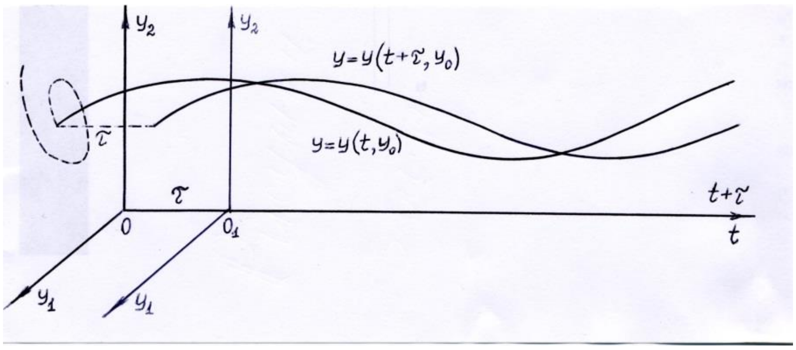

Рис.21. Траектории решений уравнения автономной динамической системы в пространстве переменных системы $(y,t) \in R^{n+1}$.

На фазовую же плоскость все такие решения $y = y(t+\tau, y_0)$ при любом значении τ проектируются в одну и ту же фазовую траекторию. Это свидетельствует о том, что каждая фазовая траектория несёт на себе бесконечное множество движений, зависящее от одного параметра. Данный вывод позволяет сформулировать следующее утверждение:

3. Множество фазовых траекторий автономной динамической системы в фазовом пространстве представляет собой проекцию множества траекторий решений этой системы из R^{n+1} пространства решений на n мерное фазовое пространство R^n.

4. Любые две фазовые траектории автономной динамической системы в фазовом пространстве либо не пересекаются, либо совпадают. Данное утверждение справедливо вследствие предполагаемого выполнения условий теоремы Коши.

5. С учётом выполнения предыдущих свойств рассмотрим *классификацию фазовых траекторий автономных динамических систем.* Данные фазовые траектории подразделяются на траектории без самопересечения и самопересекающиеся траектории, которые ещё подразделяются на два типа различных траекторий. Таким образом, существует всего три следующих возможных вида фазовых траекторий автономных динамических систем:

Фазовая траектория $y = y(t, y_0)$ является *фазовой траекторией без самопересечения*, если для любых t_1, t_2, таких, что $t_1 \neq t_2$, выполняется $y(t_1, y_0) \neq y(t_2, y_0)$.

Фазовая траектория $y = y(t, y_0)$ является *фазовой самопересекающейся траекторией – циклом*, если существует такая постоянная $T > 0$, что при любом значении t выполняется условие $y(t+T, y_0) = y(t, y_0)$, однако, при этом одновременно существуют значения t_1, t_2, такие, что $t_1 \neq t_2$, и выполняется условие $y(t_1, y_0) \neq y(t_2, y_0)$.

Фазовая траектория $y = y(t, y_0)$ является *фазовой самопересекающейся траекторией – точкой покоя*, если при любом значении постоянной $T > 0$ и при любом значении t выполняется условие $y(t+T, y_0) = y(t, y_0)$, точнее, для любых значений t_1, t_2 выполняется условие $y(t_1, y_0) = y(t_2, y_0)$, а это значит, что $y(t, y_0) = y_0 = \text{Const}$ для $\forall\, t$.

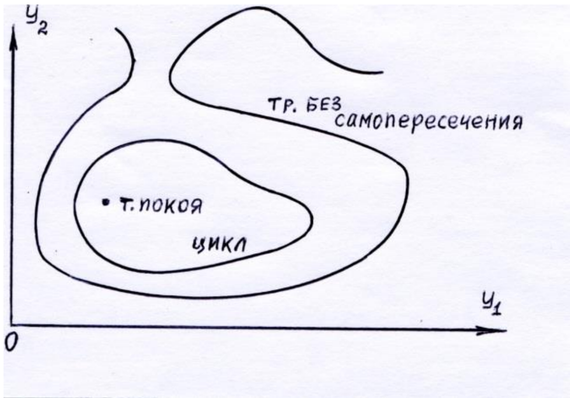

Рис.22. Типы фазовых траекторий автономных динамических систем.

Далее остановимся подробнее на фазовых траекториях – точках покоя.

Теорема (*о принадлежности фазовой траектории состоянию равновесия автономной динамической системы*). Для того, чтобы фазовая траектория была точкой покоя необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость в этой точке была равна нулю.

Доказательство. Сначала остановимся на доказательстве необходимости. Пусть при любом значении t выполняется условие $y(t, y_0) = y_0 = \text{Const}$, или, что то же, $y = y_0$. Дифференцируя обе части данного равенства по t, получаем $\frac{dy}{dx} = 0$, то есть, действительно, в точке покоя фазовая скорость равна нулю. Перейдём к доказательству достаточности. Пусть теперь в точке $y = y_0$ фазовая скорость равна нулю, то есть $\frac{dy}{dt}\Big|_{y=y_0} = 0$. Интегрируя, получаем следующее $y = \text{Const}$. Подставляя начальное условие, окончательно получаем $y(t, y_0) = y_0 = \text{Const}$, то есть данная траектория – точка покоя. Что и требовалось доказать.

На основании доказанной теоремы и на основании того, что из уравнения автономной динамической системы $\frac{dy}{dt} = f(y)$ следует, что наряду с $\frac{dy}{dt}$ вектором фазовой скорости можно считать и $f(y)$, то, следовательно, можно сделать для дальнейшего следующее основополагающее и важное следствие.

Следствие. Если автономная динамическая система имеет фазовые траектории – точки покоя, то координаты точек покоя являются решениями уравнения $f(y) = 0$.

Рассмотрим типы точек покоя применительно к автономной динамической системе 2-го порядка. Такая автономная динамическая система 2-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \end{cases} . \qquad (44.1)$$

В соответствии с утверждением Следствия координаты точек покоя автономной динамической системы (44.1) являются решениями системы:

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = 0 \\ f_2(y_1, y_2) = 0 \end{cases} . \qquad (44.2)$$

Наряду с системой (44.1) далее будем одновременно рассматривать уравнение фазовых траекторий, которое, очевидно, имеет вид:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)} . \qquad (44.3)$$

Обратим внимание, что координаты точек покоя системы (44.1) обращают в нуль уравнения координат вектора фазовой скорости (44.2). Таким образом, в точках покоя системы (44.1) правая часть уравнения фазовых траекторий (44.3) имеет вид неопределённости $\frac{0}{0}$, и, следовательно, в таких точках нарушается условие существования решения теоремы Коши. В Главе 5 были рассмотрены так называемые *особые решения*, каждое из которых представляет собой множество, на котором нарушаются условия единственности решения теоремы Коши. Точки же, в каждой из которых нарушаются условия существования решения теоремы Коши, называются *особыми точками.* Таким образом, фазовые траектории – точки покоя системы (44.1) являются особыми точками уравнения фазовых траекторий (44.3). В связи с этим, при исследовании множества фазовых траекторий автономной динамической системы 2-го порядка в фазовом пространстве, в соответствии с данной аргументацией, и, в соответствии с тем, как это принято в известной литературе, точки покоя далее называем особыми точками.

§45. Особые точки линейных автономных динамических систем 2-го порядка.

Исследование особых точек сначала проведём для частного случая автономной динамической системы (44.1), а именно для линейной автономной динамической системы 2-го порядка вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} , \qquad (45.1)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – постоянные коэффициенты. В векторно-матричной форме эта система записывается в виде:

$$\frac{dy}{dt} = Ay , \quad \text{где матрица } A \quad \text{имеет вид} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \qquad (45.2)$$

Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2} . \qquad (45.3)$$

Особые точки являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0 \end{cases} . \qquad (45.4)$$

Рассмотрим решения системы (45.4) при различных возможных случаях значения ранга матрицы A этой системы.

1. Пусть сначала $Rang\,A = 2$. В этом случае определитель матрицы системы (45.4) отличен от нуля, и данная линейная однородная система имеет единственное нулевое решение. То есть в этом случае имеется только одна особая точка (0,0) . Исследуем далее уравнения и вид фазовых траекторий в окрестности данной особой точки в зависимости от характера корней характеристического уравнения матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (45.5)$$

Рассмотрим последовательно различные возможные случаи корней данного характеристического уравнения:

1.1. Сначала пусть корни λ_1 , λ_2 – действительные, различные и одного знака. В этом случае данная особая точка (0,0) носит название *особой точки – узел*. Как известно из курса алгебры [10] , матрица A системы (45.2) в рассматриваемом случае невырожденным преобразованием $y = Bz$ может быть приведена к диагональному виду, то есть

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \;\; y = Bz, \;\; \frac{dz}{dt} = B^{-1}ABz, \;\; \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z, \;\; \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 \end{cases}, \;\; \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}. \qquad (45.6)$$

Уравнение фазовых траекторий в этом случае принимает следующий вид:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{\lambda_1 z_1}{\lambda_2 z_2} . \qquad \text{Решением этого уравнения будет} \qquad z_2 = C z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} , \;\; z_1 = 0 \; . \qquad (45.7)$$

Геометрическая интерпретация может быть пояснена так. Невырожденное преобразование $y = Bz$ преобразует декартову систему координат Oy_1y_2 в афинную систему координат Oz_1z_2 , в которой в соответствии с (45.7) фазовыми траекториями являются параболы $z_2 = C z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ и прямые линии – оси координат $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$. Эти прямые линии будут прямыми линиями и в предыдущей системе координат, следовательно, они имеют уравнения $y_2 = ky_1$. Эти фазовые траектории, занимающие особое место среди остальных фазовых траекторий, в данном случае – парабол, носят название *сепаратрис узла*. Подставив искомое уравнение $y_2 = ky_1$ сепаратрис узла в уравнение фазовых траекторий (45.3), имеем: $\frac{1}{k} = \frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{21}+a_{22}k}$. Решив данное квадратное уравнение, определяем угловые коэффициенты k_1 , k_2 и, следовательно, уравнения искомых сепаратрис $y_2 = k_1y_1$ и

$y_2 = k_2 y_1$. Важным фактором является направление движения по фазовым траекториям. Из формул (45.6) следует, что, если знаки корней отрицательные, то движение с ростом t направлено к началу координат, если же знаки корней положительные, то движение по траекториям происходит от начала координат. И последнее. Так как остальные фазовые траектории – параболы, то они касаются одной из осей координат, то есть одной из сепаратрис, и идут в направлении другой. Для того, чтобы построить полное расположение фазовых траекторий узла с направлением движения по ним, достаточно взять любую точку на одной из осей координат, вычислить в ней координаты вектора фазовой скорости и, с учётом направления этого вектора и направления движения по траекториям, получить однозначное представление, как о расположении фазовых траекторий, так и о направлении движения по ним. Данный алгоритм построения фазового портрета в окрестности особой точки – узла продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на фазовой плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{-4y_1 + y_2}{2y_1 - 3y_2} . \qquad (45.8)$$

Решение. Определяем особые точки: $\begin{cases} -4y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1 - 3y_2 = 0 \end{cases}$. Так как $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, то система имеет единственную особую точку (0,0). Определим тип этой особой точки. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы системы: $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$ $= \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Таким образом, особая точка (0,0) – *узел*. Построение фазового портрета в плоскости Oy_1y_2 начнём с вычисления угловых коэффициентов сепаратрис. В данное уравнение фазовых траекторий подставляем $y_2 = ky_1$. В результате получаем: $\frac{1}{k} = \frac{-4+k}{2-3k}$, $k^2 - k - 2 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. В плоскости Oy_1y_2 проводим прямые линии $y_2 = -y_1$ и $y_2 = 2y_1$, являющиеся одновременно сепаратрисами и фазовыми траекториями. Остальные фазовые траектории – параболы, касающиеся одной из этих сепаратрис , ветви которых идут в направлении другой из сепаратрис, определяем, вычислив вектор фазовой скорости в любой точке на одной из осей координат. Пусть это точка будет (0,1) , то есть $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Подставив эти данные в правую часть (45.8), получаем следующие значения координат вектора фазовой скорости: вдоль оси Oy_1 координата вектора фазовой скорости равна 1 , а координата вдоль оси Oy_2 равна -3 .

Изобразив направление этого вектора фазовой скорости в данной точке и, учитывая, что вследствие отрицательности корней характеристического уравнения, движение по фазовым траекториям направлено к началу координат, окончательно изображаем картину фазовых траекторий в окрестности данной особой точки – узла так, как это следует на рис. 23.

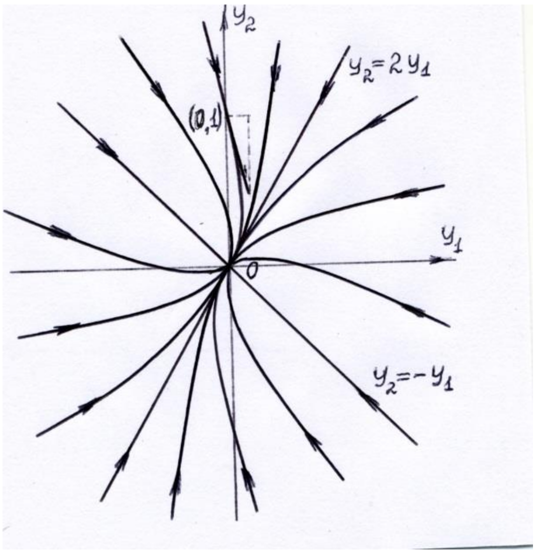

Рис.23. Фазовые траектории в окрестности особой точки – узел.

1.2. Пусть теперь корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 – действительные и разных знаков. В этом случае данная особая точка (0,0) носит название *особой точки – седло*. В данном случае, как и в случае узла, матрица A системы (45.2) невырожденным преобразованием $y = Bz$ приводится к диагональному виду, то есть

$$\frac{dy}{dt} = Ay,\ \ y = Bz,\ \ \frac{dz}{dt} = B^{-1}ABz\,,\ \ \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z\,,\ \ \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 \end{cases},\ \ \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}. \qquad (45.9)$$

Следовательно, уравнение фазовых траекторий в этом случае принимает следующий вид:

$\dfrac{dz_1}{dz_2} = \dfrac{\lambda_1 z_1}{\lambda_2 z_2}$. Решением этого уравнения будет $\quad z_2 = C\dfrac{1}{z_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}\,,\ \ z_1 = 0\,, \qquad (45.10)$

где степень $\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ переменной z_1 в знаменателе является положительным числом и, следовательно, фазовые траектории в данном случае – гиперболы и две прямые линии – сепаратрисы $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$. Уравнения сепаратрис определяем аналогично в виде уравнения $y_2 = ky_1$, и далее их угловые коэффициенты вычисляем из уравнения $\dfrac{1}{k} = \dfrac{a_{11}+a_{12}k}{a_{21}+a_{22}k}$.

Решив уравнение, определяем угловые коэффициенты k_1, k_2 и, следовательно, уравнения искомых сепаратрис $y_2 = k_1 y_1$ и $y_2 = k_2 y_1$. Построив эти сепаратрисы и, проведя фазовые траектории – гиперболы, осями которых, очевидно, являются сепаратрисы, определяем направление движения по фазовым траекториям с помощью построения, как и в случае узла, вектора фазовой скорости. Алгоритм построения фазового портрета в окрестности особой точки – седла продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы: $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1+2y_2}{2y_1-2y_2}$. (45.11)

Решение. Определяем особые точки: $\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, то система имеет единственную особую точку (0,0). Определим тип этой особой точки. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы системы: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$ $= \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Таким образом, особая точка (0,0) – седло. Построение фазового портрета в плоскости Oy_1y_2 начнём с вычисления угловых коэффициентов сепаратрис. В уравнение фазовых траекторий (45.11) подставляем $y_2 = ky_1$. В результате получаем: $\frac{1}{k} = \frac{1+2k}{2-2k}$, $2k^2 + 3k - 2 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. В плоскости Oy_1y_2 проводим прямые линии $y_2 = -2y_1$ и $y_2 = \frac{1}{2}y_1$, являющиеся одновременно сепаратрисами и фазовыми траекториями. Остальные фазовые траектории – гиперболы. Для определения направления движения по фазовым траекториям построим вектор фазовой скорости в какой-либо точке. Пусть это точка будет (0,1), то есть $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Подставив эти данные в правую часть (45.11), получаем следующие значения координат вектора фазовой скорости: вдоль оси Oy_1 координата вектора фазовой скорости равна 2, а координата вдоль оси Oy_2 равна -2 . Изобразив направление этого вектора фазовой скорости в данной точке и учитывая, что движение по близким фазовым траекториям не может иметь противоположного направления, окончательно изображаем картину фазовых траекторий в окрестности данной особой точки – седла так, как это следует на рис. 24.

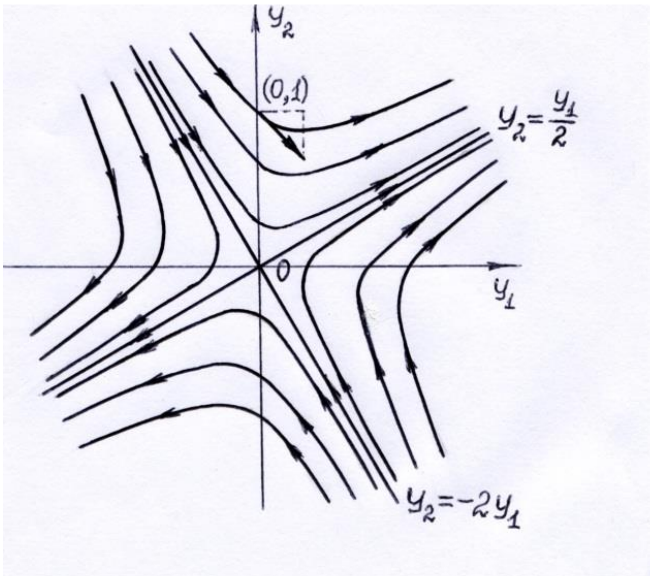

Рис. 24. Фазовые траектории в окрестности особой точки –седло.

1.3. Рассмотрим теперь наличие комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения, причём, $\alpha \neq 0$. В этом случае данная особая точка (0,0) носит название *особой точки – фокус*. Тогда, как и в случае узла, матрица A системы (45.2) невырожденным комплексным преобразованием $y = Bz$ приводится к диагональному комплексному виду:

$$\frac{dy}{dt} = Ay\,,\ \ y = Bz\,,\ \ \frac{dz}{dt} = B^{-1}ABz\,,\ \ \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} z\,,\ \text{ или } \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = (\alpha + i\beta)\, z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = (\alpha - i\beta)\, z_2 \end{cases},$$

и, следовательно, $\begin{cases} z_1 = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} \\ z_2 = C_2 e^{(\alpha - i\beta)t} \end{cases}$, откуда можно сделать вывод, что при $\alpha > 0$ движение по фазовым траекториям направлено от начала координат, а при $\alpha < 0$ это движение направлено к началу координат. К полученной системе $\begin{pmatrix} \dfrac{dz_1}{dt} \\ \dfrac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

применим следующее невырожденное комплексное преобразование вида $z = Du,$ где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \text{то есть,} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z_1 = u_1 + i\, u_2 \\ z_2 = u_1 - i\, u_2 \end{cases}.$$

Проведя эту подстановку, имеем:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = (\alpha + i\beta)(u_1 + iu_2) \\ \frac{du_1}{dt} - i\frac{du_2}{dt} = (\alpha - i\beta)(u_1 - iu_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = \alpha u_1 - \beta u_2 + i(\alpha u_2 + \beta u_1) \\ \frac{du_1}{dt} - i\frac{du_2}{dt} = \alpha u_1 - \beta u_2 - i(\alpha u_2 + \beta u_1) \end{cases}.$$

В полученной системе из равенства действительных и мнимых частей следует: $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \alpha u_1 - \beta u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = \alpha u_2 + \beta u_1 \end{cases}$. Таким образом, итоговое невырожденное преобразование $y = BDu$ данной системы (45.2) явилось невырожденным действительным преобразованием, в результате которого имеем: $\frac{du_1}{du_2} = \frac{\alpha u_1 - \beta u_2}{\alpha u_2 + \beta u_1}$, $\alpha u_2 du_1 + \beta u_1 du_1 = \alpha u_1 du_2 - \beta u_2 du_2$,

$u_1 du_1 + u_2 du_2 = \frac{\alpha}{\beta}(u_1 du_2 - u_2 du_1)$. Поделив обе части последнего равенства на $u_1^2 + u_2^2$, получим: $\frac{u_1 du_1 + u_2 du_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{u_1 du_2 - u_2 du_1}{u_1^2 + u_2^2} \right)$, $\frac{1}{2}\frac{d(u_1^2 + u_2^2)}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{d(\frac{u_2}{u_1})}{1 + (\frac{u_2}{u_1})^2}$,

$\frac{1}{2}\ln|u_1^2 + u_2^2| = \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \ln C$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = C\, e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)}$. Перейдя от системы координат Ou_1u_2 к полярным координатам $\begin{cases} u_1 = r\cos\varphi \\ u_2 = r\sin\varphi \end{cases}$, получаем окончательное выражение для уравнения фазовых траекторий в окрестности особой точки фокуса: $r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$.

Полученное уравнение представляет собой уравнение траекторий – так называемых *логарифмических спиралей.* Для определения направления закрутки или раскрутки спиралей важно использовать знак действительной части данных комплексных корней $\alpha \neq 0$, так как при $\alpha > 0$ движение по фазовым траекториям направлено от начала координат, а при $\alpha < 0$ это движение направлено к началу координат. Кроме того, как и в предыдущих случаях особых точек, требуется построение в одной из точек, в частности на любой из осей координат, вектора фазовой скорости. Построение фазового портрета в окрестности особой точки – фокуса продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы: $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1 - 2y_2}{2y_1 + y_2}$. (45.12)

Решение. Определяем особые точки: $\begin{cases} y_1 - 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$. Так как $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то система имеет единственную особую точку (0,0). Определим тип этой особой точки. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы системы: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
$= \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,\ \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Таким образом, особая точка (0,0) – фокус. Для определения направления закрутки спиралей – фазовых траекторий фокуса с учётом движения от начала координат, так как здесь $\alpha = 1 > 0$, вычислим вектор фазовой скорости в точке (0,1). Подставив эти данные в правую часть (45.12), получаем следующие значения координат вектора фазовой скорости: вдоль оси Oy_1 координата равна – 2 , а координата вдоль оси Oy_2 равна 1 . Изобразив направление этого вектора фазовой скорости в данной точке и учитывая направление движения по траекториям, окончательно строим фазовый портрет логарифмических спиралей в окрестности особой точки – фокуса, как это следует на рис. 25.

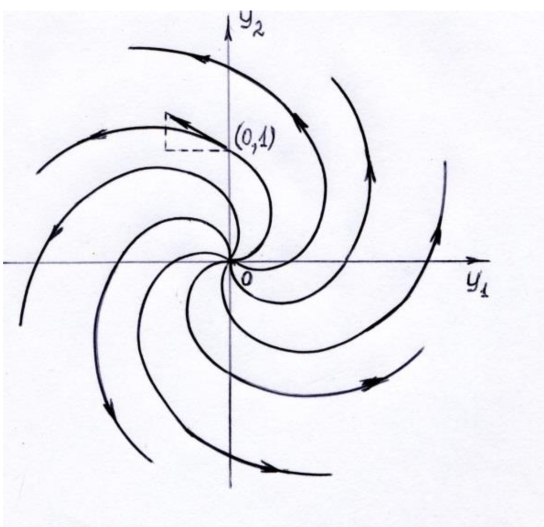

Рис.25. Фазовые траектории в окрестности особой точки – фокуса.

1.4. Рассмотрим теперь возможность чисто мнимых комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm\, i\beta$ характеристического уравнения. Соответствующая особая точка (0,0) носит название *особой точки – центр*. В данном случае, как и в случае фокуса, матрица A системы (45.2) невырожденным действительным преобразованием $y = BDu$ и последующим преобразованием к полярным координатам приводится к аналогичному виду $r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, но здесь при $\alpha = 0$ равному $r = C$. Таким образом, здесь фазовые траектории – замкнутые линии, окружающие начало координат. Для определения направления движения по фазовым траекториям, остаётся лишь вычислить какой-либо вектор фазовой скорости. Построение фазового портрета в окрестности особой точки – центра продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы: $\dfrac{dy_1}{dy_2} = \dfrac{-y_1-2y_2}{y_1+y_2}$. (45.13)

Решение. Определяем особые точки: $\begin{cases} -y_1 - 2y_2 = 0 \\ \;\;y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$. Так как $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то система имеет единственную особую точку (0,0). Определим тип этой особой точки. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы системы: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $= \lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\, i$. Таким образом, особая точка (0,0) – центр. Для определения направления движения по замкнутым траекториям в окрестности (0,0) вычислим вектор фазовой скорости в точке (0,1). Подставив эти данные в правую часть (45.13), получаем следующие значения координат вектора фазовой скорости: вдоль оси Oy_1 координата вектора фазовой скорости равна – 2 , а координата вдоль оси Oy_2 равна 1 . Изобразив направление этого вектора фазовой скорости в данной точке, окончательно строим фазовый портрет в окрестности особой точки – центра, как это следует на рис. 26 .

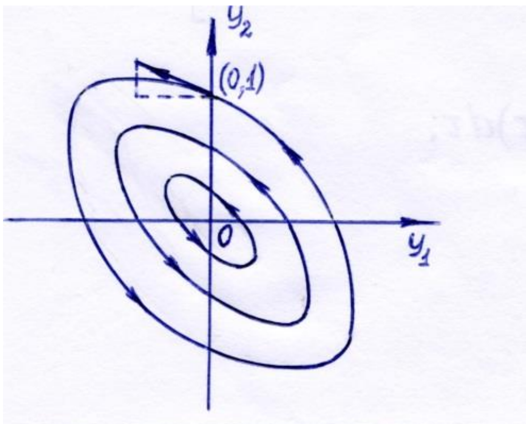

Рис.26. Фазовые траектории в окрестности особой точки – центра.

1.5. Рассмотрим теперь возможность кратного корня характеристического уравнения, то есть $\lambda_1 = \lambda_2$. Пусть в этом случае выполняется условие $\mathrm{Rang}\,(A - \lambda_1 E) = 1$. Покажем, что это условие эквивалентно условию $a_{12}^2 + a_{21}^2 + (a_{11} - a_{22})^2 \neq 0$. Действительно, из характеристического уравнения (45.5) $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ или, что то же, $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ в случае существования кратного корня определяем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$. Следовательно, в этом случае $A - \lambda_1 E$ имеет вид: $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{a_{11}+a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{a_{22}-a_{11}}{2} \end{pmatrix}$ и, очевидно, выполнение равенства $\mathrm{Rang}\,(A - \lambda_1 E) = 1$ возможно при условии, что $a_{12}^2 + a_{21}^2 + (a_{11} - a_{22})^2 \neq 0.$

При выполнении указанных условий рассматриваемая особая точка (0,0) носит название *вырожденный узел.* В этом случае, как это следует из курса алгебры [10] , преобразованием $y = Bz$ рассматриваемая система (45.2) : $\frac{dy}{dt} = Ay$ приводится к виду $\frac{dz}{dt} = B^{-1}ABz$ или $\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} z$. То есть в координатной форме приводится к виду $\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = \lambda_1 z_2 \end{cases}$. Уравнение фазовых траекторий имеет вид: $\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{\lambda_1}$. Это линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных: $\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{z_1}{z_2}$, $z_1 = C(z_2)z_2$, $\frac{dC(z_2)}{dz_2} z_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $dC(z_2) = \frac{1}{\lambda_1}\frac{dz_2}{z_2}$, $C(z_2) = \frac{1}{\lambda_1}\ln|z_2| + \tilde{C}$, и окончательно получаем уравнение фазовых траекторий в окрестности особой точки – вырожденного узла в виде $z_1 = \hat{C}z_2 + \frac{z_2}{\lambda_1}\ln|z_2|$, $z_2 = 0$. Отсюда следует, что в данном случае фазовая траектория – прямая линия – сепаратриса только одна, которую можно определить в виде $y_2 = ky_1$ из уравнения $\frac{1}{k} = \frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{21}+a_{22}k}$, аналогичного уравнению в случаях узла и седла. Фазовые траектории здесь имеют вид траекторий типа полупарабол, касающихся фазовой траектории – сепаратрисы с разных сторон в окрестности особой точки с ветвями, идущими в направлении сепаратрисы (см. рис.27 – фазовых траекторий следующего конкретного примера). Направление движения по траекториям, как и ранее, зависит от знака корней $\lambda_1 = \lambda_2$. Кроме того, для определения направления касания траекторий сепаратрисы следует вычислить в одной из точек вектор фазовой скорости. Построение фазового портрета в окрестности особой точки – вырожденного узла продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{3y_1 - y_2}{4y_1 - y_2} \quad . \tag{45.14}$$

Решение. Определяем особые точки: $\begin{cases} 3y_1 - y_2 = 0 \\ 4y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$. Так как $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то система имеет единственную особую точку (0,0). Определим тип этой особой точки. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы системы: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$ $= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Кроме того, $\mathrm{Rang}\,(A - 1 \cdot E) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 1$ и, следовательно, данная особая точка – вырожденный узел. Определим уравнение сепаратрисы $y_2 = ky_1$. Подставив это уравнение в (45.14) , имеем: $\frac{1}{k} = \frac{3-k}{4-k}$, $k^2 - 4k + 4 = 0,$ $(k-2)^2 = 0$, $k = 2$. Следовательно, сепаратрисой является прямая $y_2 = 2y_1$. Вычислим теперь вектор фазовой скорости в точке (0,1). В данном случае этот вектор имеет следующие значения координат вектора фазовой скорости: вдоль оси Oy_1 координата вектора фазовой скорости равна – 1 и координата вдоль оси Oy_2 равна -1 . Изобразив направление этого вектора фазовой скорости в данной точке, с учётом движения от начала координат, так как здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$, окончательно строим фазовый портрет в окрестности особой точки – вырожденного узла, как это следует на рис. 27.

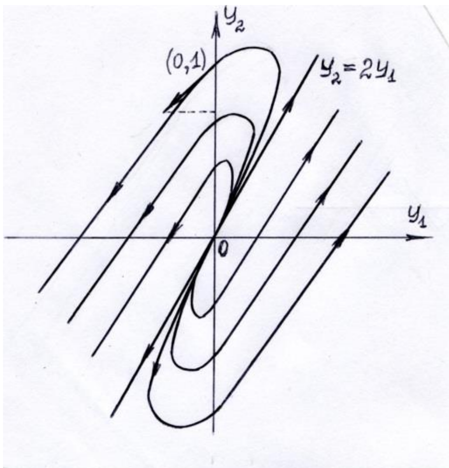

Рис.27. Фазовые траектории в окрестности особой точки – вырожденного узла.

1.6. Пусть теперь корни характеристического уравнения кратные $\lambda_1 = \lambda_2$ и при этом $\mathrm{Rang}\,(A - \lambda_1 E) = 0$, что, очевидно, эквивалентно условию $a_{12}^2 + a_{21}^2 + (a_{11} - a_{22})^2 = 0$ или, что то же, $a_{11} = a_{12}$, $a_{21} = a_{22} = 0$. В данном случае исходная система (45.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{22}y_2 \end{cases}.$$

При выполнении указанных условий данная особая точка (0,0) имеет название *дикритический узел*. Уравнение фазовых траекторий в этом случае имеет вид: $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1}{y_2}$ или $\frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_1}{y_1}$. Решив данное уравнение, определяем, что фазовыми траекториями, имеющими следующий вид: $y_2 = Cy_1$, $y_1 = 0$, являются прямые линии, проходящие через начало координат. Направление движения по этим фазовым траекториям – прямым линиям зависит от знака корней $\lambda_1 = \lambda_2$. Приведённый рисунок (рис.28) фазовых траекторий особой точки – дикритического узла приведён для случая отрицательных значений таких корней.

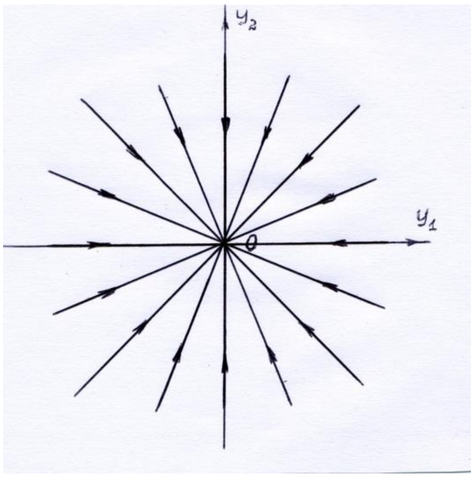

Рис.28. Фазовые траектории в окрестности особой точки – дикритического узла.

2. Пусть теперь $Rang\, A = 1$. В этом случае, как известно из курса алгебры (см.[10]) , строки матрицы A пропорциональны с некоторым коэффициентом k : $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = k$, и, таким образом, исходная система (45.3) принимает вид: $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = k(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \end{cases}$.

Система равенства нулю координат вектора фазовой скорости приобретает вид: $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0 \\ k(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) = 0 \end{cases}$, следовательно, решением этой системы является множество $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0$, или что то же, прямая $y_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}\, y_1$, то есть в данном случае имеем *прямую из особых точек*, проходящую через начало координат. Уравнение фазовых траекторий принимает вид: $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{1}{k}$, и множество фазовых траекторий – это множество прямых линий $y_2 = ky_1 + C$. Направление же движения по фазовым траекториям определяется с помощью вычисления векторов фазовой скорости справа и слева от прямой из особых точек. Построение фазового портрета в окрестности прямой из особых точек продемонстрируем на следующем примере.

Пример. Исследовать особые точки и построить фазовые траектории в их окрестности на плоскости Oy_1y_2 для следующего уравнения фазовых траекторий автономной динамической системы:
$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{3y_1 - 3y_2}{y_1 - y_2} \, . \qquad (45.15)$$

Решение. Исходная же автономная динамическая система (45.15), очевидно, принимает вид: $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3(y_1 - y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 \end{cases}$. Следовательно, в данном случае ранг матрицы данной системы равен 1. Определим особые точки из системы: $\begin{cases} 3(y_1 - y_2) = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$. Так как координаты вектора фазовой скорости пропорциональны с коэффициентом 3, то решением этой системы является множество $y_1 - y_2 = 0$. Следовательно, прямая $y_2 = y_1$ в данном случае является прямой из особых точек, проходящей через начало координат. Уравнение же фазовых траекторий принимает вид: $\frac{dy_1}{dy_2} = 3$, и множество фазовых траекторий – это множество параллельных прямых линий $y_2 = \frac{1}{3}y_1 + C$. Направление же движения по фазовым траекториям определяем с помощью вычисления векторов фазовой скорости справа и слева от прямой из особых точек. Выберем в качестве таких точек (0,1) и $(0,-1)$. Координаты векторов фазовой скорости в этих точках будут соответственно $\{-3,-1\}$ и $\{3,1\}$. Изобразив направление этих векторов фазовой скорости в данных точках, окончательно строим фазовый портрет в данном случае прямой из особых точек, как это следует на рис. 29.

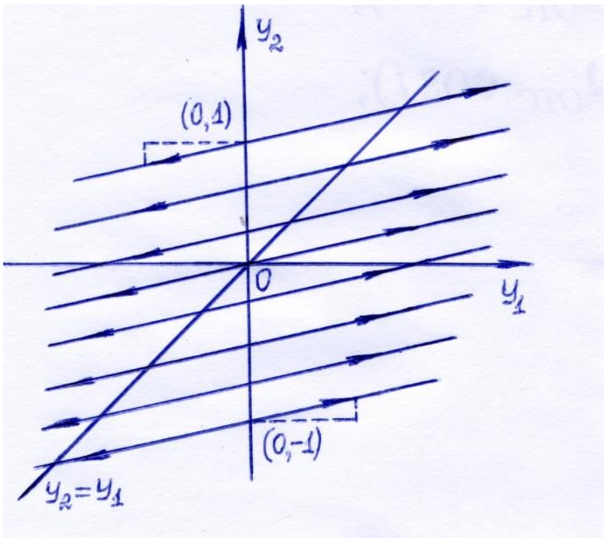

Рис. 29. Фазовые траектории в окрестности прямой из особых точек.

3. Рассмотрим исключительный, скорее теоретический, чем практичный, случай линейной автономной динамической системы 2-го порядка, когда $Rang\, A = 0$, то есть, это случай, когда все элементы матрицы A равны нулю. В этом случае система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 0 \\ \frac{dy_2}{dt} = 0 \end{cases}.$$ Таким образом, в этом случае координаты вектора фазовой скорости равны нулю для всех значений y_1 и y_2. Следовательно, в этом случае *вся плоскость* Oy_1y_2 состоит *из особых точек*.

§46. Особые точки нелинейных автономных динамических систем 2-го порядка.

Перейдём к рассмотрению особых точек нелинейной автономной динамической системы второго порядка вида (44.1) :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \end{cases}. \tag{46.1}$$

Сначала определяем особые точки данной системы из условия равенства нулю координат вектора фазовой скорости: $\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = 0 \\ f_2(y_1, y_2) = 0 \end{cases}$. Пусть в результате решения этой системы определены её решения – особые точки: $(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_3), \dots$ Далее проводим исследование каждой из данных особых точек. Так как дальнейшее исследование полностью идентично для каждой из особых точек, то для удобства обозначим исследуемую точку через (a, b). Функции – координаты вектора фазовой скорости представим формулой Тейлора в окрестности точки (a, b) до слагаемых первого порядка малости включительно, а именно: $f_1(y_1, y_2) = f_1(a, b) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\big|_{(a,b)}(y_1 - a) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\big|_{(a,b)}(y_2 - b) + \propto_1$,

$f_2(y_1, y_2) = f_2(a, b) + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\big|_{(a,b)}(y_1 - a) + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\big|_{(a,b)}(y_2 - b) + \propto_2$, где $\propto_1$ и $\propto_2$ – остаточные слагаемые более высокого порядка малости, то есть $\propto_1 = o(x)$ и $\propto_2 = o(x)$ при $x \to 0$. Так как $f_1(a, b) = f_2(a, b) = 0$ и, если обозначить числа значений производных следующим образом: $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\big|_{(a,b)} = a_{11}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\big|_{(a,b)} = a_{12}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\big|_{(a,b)} = a_{21}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\big|_{(a,b)} = a_{22}$, то, подставив все эти значения в уравнение фазовых траекторий данной системы $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)}$, получим: $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}(y_1 - a) + a_{12}(y_2 - b) + \propto_1}{a_{21}(y_1 - a) + a_{22}(y_2 - b) + \propto_2}$.

Введём замену координат: $\begin{cases} z_1 = y_1 - a \\ z_2 = y_2 - b \end{cases}$: $\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \propto_1}{a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \propto_2}$. В результате этой подстановки особая точка (a, b) в координатах Oy_1y_2 преобразована в точку (0,0) в системе координат Oz_1z_2. Отбросив остаточные слагаемые $\propto_1$ и $\propto_2$, получим систему вида:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{a_{11}z_1 + a_{12}z_2}{a_{21}z_1 + a_{22}z_2}, \tag{46.2}$$

которая имеет особую точку (0,0) и называется *системой первого приближения*.

Сформулируем без доказательства следующую, почти очевидную теорему, касающуюся определения типа исследуемой особой точки (a,b) .

Теорема. Тип особой точки (a,b) данной системы (46.1) совпадает с типом особой точки (0,0) системы первого приближения (46.2) во всех случаях, кроме центра. Если особая точка (0,0) системы первого приближения является центром, то соответствующая особая точка (a,b) данной системы (46.1) является либо центром, либо фокусом. И для окончательного определения типа особой точки (a,b) требуется дополнительное исследование. Иллюстрацией такого выбора будет служить пример, рассматриваемый в следующем параграфе.

Замечание. В соответствии с утверждением теоремы тип особой точки предполагает в данном случае изображение картины фазовых траекторий только вблизи рассматриваемых особых точек. При удалении от точек на фазовой плоскости благодаря наличию остаточных слагаемых $\propto_1$ и $\propto_2$ направление фазовых траекторий может существенно измениться, что находит своё подтверждение в далее рассматриваемом исследовании автономной динамической системы 2-го порядка *методом фазовой плоскости*.

§47. Метод фазовой плоскости при исследовании фазовых траекторий автономной динамической системы второго порядка.

Рассматривается автономная динамическая система второго порядка (46.1):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \end{cases}.$$

Метод фазовой плоскости исследования фазовых траекторий данной системы состоит в следующем. Сначала определяется множество особых точек системы. Затем проводится определение типа особых точек и построение фазовых траекторий в их окрестности по аналогии с тем, как это изложено в предыдущих §45 и §46 . Затем на плоскости Oy_1y_2 изображаются данные точки, и только в их окрестности изображаются соответствующие фазовые траектории. С целью изображения полной картины фазовых траекторий во всей плоскости следует привлечь также предварительное построение во всей плоскости изоклин уравнения фазовых траекторий для рассматриваемой системы.

После реализации отмеченного предварительного этапа построения требуемого фазового портрета на всей плоскости следует перейти к следующему этапу, целью которого является проведения фазовых траекторий, изображённых только вблизи особых точек, уже во всей плоскости. С этой целью сначала используя изоклины и, при необходимости, построение векторов фазовой скорости, следует продлить сепаратрисы, которые либо гладко переходят в траектории других особых точек, в том числе сепаратрисы, либо идут за пределы фазовой плоскости. После установления траекторий сепаратрис проводится также с использованием изоклин и векторов фазовой плоскости продление остальных фазовых траекторий с результатом, аналогичным результату проведения сепаратрис. Критерием правильности построения цельной картины фазовых траекторий на всей фазовой плоскости является полное удовлетворение рассмотренным в §44 свойствам этих траекторий. При этом на рядом расположенных фазовых траекториях не должно возникать ситуации противоположного направления движения.

Пример. Построить фазовый портрет свободных колебаний математического маятника, в виде колебаний материальной точки единичной массы, подвешенной на идеально жёстком невесомом нерастяжимом стержне в однородном поле тяготения, математическая модель которого записывается в виде нелинейного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\ddot{x} + \frac{l}{g}\sin x = 0 \ , \qquad (47.1)$$

где x – угол отклонения маятника от вертикали, l – длина подвеса маятника, g – ускорение свободного падения. В результате следующей замены $\frac{l}{g} = \omega^2$, уравнение (47.1) запишется в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \ . \qquad (47.2)$$

Иллюстрация данной рассматриваемой задачи колебаний маятника приведена на рис.30:

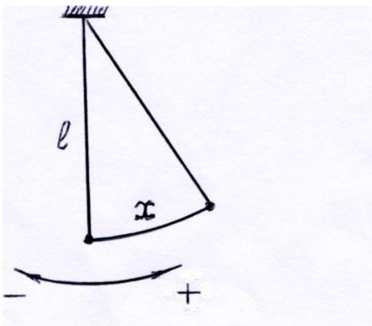

Рис. 30. Рассматриваемая схема свободных колебаний математического маятника.

Запишем вид автономной динамической системы второго порядка, соответствующей данному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases} . \qquad (47.3)$$

Таким образом, данная система описывает процесс нелинейных колебаний, имеющих одну степень свободы.

Проведём исследование данной автономной динамической системы с помощью метода фазовой плоскости. Сначала для этого определим все состояния равновесия, или, что то же, точки покоя, приравнивая координаты вектора фазовой скорости данной системы к нулю:

$\begin{cases} y = 0 \\ -\omega^2 \sin x = 0 \end{cases}$. Отсюда получаем: $x = k\pi$, $y = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. (47.4)

Следовательно, данная система имеет бесконечное множество изолированных особых точек. Исследуем каждую из них.

Рассмотрим сначала особую точку (0,0) . Представляя в окрестности этой точки правые части системы (47.3) с помощью формул Тейлора, имеем: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha_1 \end{cases}$, где $\alpha_1 = o(x)$ при $x \to 0$. Характеристическое уравнение матрицы системы первого приближения $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm\, i$. Следовательно, особая точка (0,0) системы первого приближения является центром. Так как в данном случае уравнение фазовых траекторий $\dfrac{dy}{dx} = -\omega^2 \dfrac{\sin x}{y}$ не изменяется при замене x на $-x$, y на $-y$ порознь и одновременно, то фазовые траектории симметричны относительно начала и осей координат. Отсюда следует, что особая точка (0,0) и для системы (47.3) является центром.

Особые точки (2π,0) , $(-2\pi, 0)$ и, более того, все точки $(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, включая и точку (0,0) , будут центрами, в чём нетрудно убедиться, так как вследствие $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ параллельный перенос системы координат $x_1 = x + 2k\pi$, $y_1 = y$ в каждую из этих точек приводит систему (47.3) в новой системе координат опять к виду, аналогичному (47.3) .

Рассмотрим теперь особую точку (π,0) . Система (47.3) в окрестности этой точки представляется с помощью формулы Тейлора в виде: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega^2 (x - \pi) + \alpha_2 \end{cases}$, где $\alpha_2 = o(x - \pi)$ при $x \to \pi$. Переместив начало координат а данную особую точку с помощью параллельного переноса осей координат $x_1 = x - \pi$, $y_1 = y$, получим $\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = \omega^2 x_1 + \alpha_2 \end{cases}$. Характеристическое уравнение матрицы системы первого приближения $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\, \omega$. Следовательно, особая точка (π,0) является седлом. Определим сепаратрисы для данного седла из уравнения фазовых траекторий первого приближения $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \omega^2 \dfrac{x_1}{y_1}$, подставляя в это уравнение $y_1 = kx_1$. Получим $k = \dfrac{\omega^2}{k}$, $k^2 = \omega^2$, $k = \pm\omega$. Следовательно, сепаратрисы седла вблизи точки покоя (π,0) удовлетворяют уравнениям $y_1 = \pm\, \omega\, x_1$ (точнее, траектории этих сепаратрис «входят» в особую точку с угловыми коэффициентами $k = \pm\omega$) .

Рассмотрим теперь особую точку (−π,0) . Эта точка будет седлом с аналогичными параметрами, так как все вычисления для неё совпадают с вычислениями для предыдущей точки (π,0) с точностью до замены в них π на $-\pi$. Аналогично и все точки $((2k+1)\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будут сёдлами с теми же параметрами относительно каждой из них, что и исследованная особая точка (π,0) .

Перейдём теперь к построению фазового портрета колебаний маятника. На оси Ox отметим особые точки $(k\pi, 0)$ и вблизи этих точек изобразим траектории соответственно центров и сёдел. Кроме того, отметим изоклины уравнения фазовых траекторий $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{\sin x}{y}$. В данном случае строим изоклины $\frac{dy}{dx} = 0$, то есть $-\omega^2 \frac{\sin x}{y} = 0$ или $\sin x = 0$, и в результате получаем уравнения этих изоклин $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, представляющие собой прямые линии, параллельные оси Oy и проходящие через особые точки. Далее строим изоклины $\frac{dy}{dx} = \infty$ или $\frac{dx}{dy} = 0$, то есть $-\frac{y}{\omega^2 \sin x} = 0$, откуда $y = 0$ и эта изоклина определена во всех точках оси Ox за исключением особых точек. Далее при построении фазового портрета следует использовать практически тот факт, что фазовые траектории симметричны относительно начала и осей координат.

Теперь проводим фазовые траектории – сепаратрисы из особых точек $((2k+1)\pi, 0)$ – сёдел, привлекая изоклины, условия имеющейся симметрии и характер изменения вектора фазовой скорости вдоль этих сепаратрис. В результате эти фазовые сепаратрисные кривые смыкаются в верхней и нижней частях полуплоскостей, образуя границы областей с различным характером фазовых траекторий. Фазовые траектории – сепаратрисы при удалении от особых точек – сёдел искривляются вследствие влияния нелинейности правой части $\propto_2$ системы. Внутри областей, ограниченных сепаратрисами, траектории замкнутые, представляющие собой циклы с движением по ним, охватывающим особые точки – центры с координатами $(2k\pi, 0)$. При этом вне областей, ограниченных сепаратрисами, фазовые траектории – траектории без самопересечений, асимптотически приближаются по своему геометрическому характеру к прямой линии, параллельной оси Ox, при удалении от этой оси.

После завершения построения картины фазовых траекторий для определения направления движения по ним достаточно определить в какой-либо точке вектор фазовой скорости. Выберем, например, точку (0,1). Вектор фазовой скорости в этой точке будет иметь следующие координаты: вдоль оси Ox координата равна 1, а вдоль оси Oy координата равна 0. Следовательно, движение по фазовым траекториям в верхней полуплоскости направлено слева направо, в нижней же полуплоскости справа налево. По траекториям – циклам движение будет направлено по часовой стрелке. Итак, фазовый портрет колебаний динамической системы с одной степенью свободы (47.3) или, что то же, фазовый портрет колебаний математического маятника, уравнение колебаний которого имеет вид (47.1), представлен на Рис. 31.

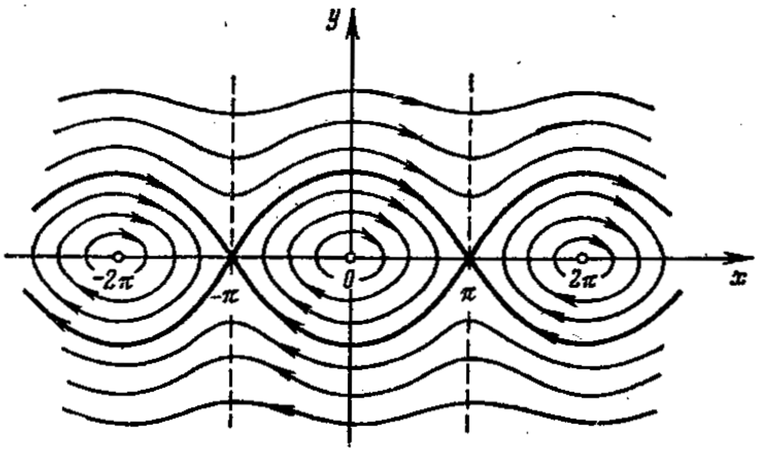

Рис.31. Фазовый портрет колебаний математического маятника.

Координаты каждой точки фазового портрета для данной динамической системы определяют соответствующие значения угла x отклонения от вертикали и величины угловой скорости $y = \dot{x}$. Особые же точки или, что то же, точки покоя – это состояния равновесия, причём точки $(2k\pi, 0)$ – устойчивого, а точки $((2k+1)\pi, 0)$ – неустойчивого состояния равновесия. Замкнутые фазовые траектории – циклы в областях, ограниченных сепаратрисными фазовыми траекториями, определяют так называемые *либрационные движения*, то есть колебательные движения маятника в пределах отклонения от $-\pi$ до $+\pi$ относительно нижнего положения устойчивого равновесия. За пределами же областей, ограниченных сепаратрисами, фазовые траектории соответствуют совершению маятником, так называемых *ротационных движений*, то есть соответствуют вращению маятника вокруг точки подвеса с неограниченным возрастанием фазового угла. При этом, такие траектории в верхней полуплоскости определяют направление ротационных движений в одну сторону, в нижней – в другую. Движение же по сепаратрисным фазовым траекториям имеет определённое направление всюду, за исключением особых точек – точек покоя $((2k+1)\pi, 0)$. При достижении движущейся по сепаратрисе точки этого состояния равновесия дальнейшее движение имеет неопределённость. Эта неопределённость выражается в том, что либо далее движения нет, и движущаяся точка находится в этом положении, либо движение продолжается в одну из сторон – сторону убывания или сторону возрастания значений фазового угла, каждому из которых соответствует одно из направлений движения по сепаратрисам, направленным из этого состояния равновесия. Этому движению соответствуют колебания маятника, причём такие, когда движущаяся точка достигает максимального вертикального положения с нулевой угловой скоростью. В этом случае маятник может либо находиться в неустойчивом верхнем положении, либо колебания маятника продолжатся в любом из двух возможных для этого направлений.

Глава 13. **Устойчивость решений дифференциальных уравнений.**

§48. Основные определения устойчивости по Ляпунову.

Математическая теория устойчивости изучает поведение решений динамической системы уравнений: $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ при $t \to \infty$. Как правило, на устойчивость исследуется конкретное выделенное решение данной системы. Это исследуемое на устойчивость решение называется *невозмущённым решением*, которое обозначаем через $\xi(t)$ или, что тоже, $\xi(t,\xi_0)$, где $\xi_0(t_0) = \xi_0$. Остальные решения при этом $y(t)$ или $y(t,y_0)$ называются возмущёнными решениями или возмущениями невозмущённого.

Определение 1. Невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$ называется *устойчивым (устойчивым по Ляпунову)*, если для любого $\forall\, \varepsilon > 0$ существует $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для $\forall\, y_0$, такого, что $|y_0 - \xi_0| < \delta$ выполняется условие $|y(t,y_0) - \xi(t,\xi_0)| < \varepsilon$ для любого $\forall\, t \geq t_0$. Геометрическая иллюстрация на рис. 32 устойчивости невозмущённого решения в пространстве переменных динамической системы состоит в следующем. Любое решение $y(t,y_0)$ с начальным значением y_0 при t_0 в δ – окрестности ξ_0 при $t_0 \leq t \leq \infty$ находится внутри ε – трубки, осью которой является невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$.

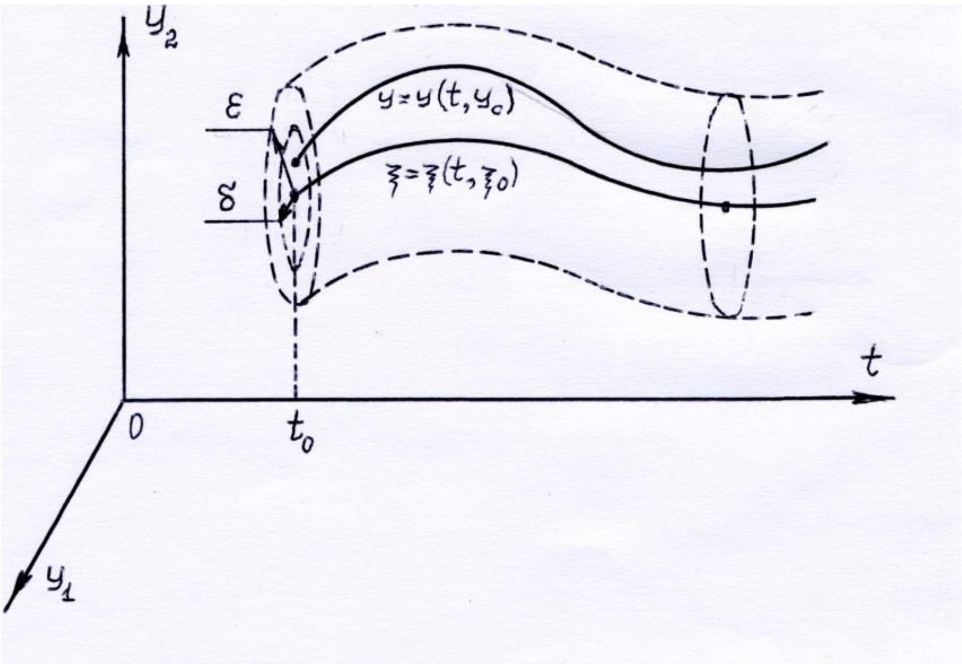

Рис.32. Геометрическая интерпретация устойчивости невозмущённого решения.

Определение 2. Невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво и если $\exists H > 0$ такое, что для $\forall\, y_0$, удовлетворяющего условию $|y_0 - \xi_0| < H$, выполняется условие: $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t,y_0) - \xi(t,\xi_0)| = 0.$

Иллюстрация асимптотической устойчивости приведена на Рис. 33.

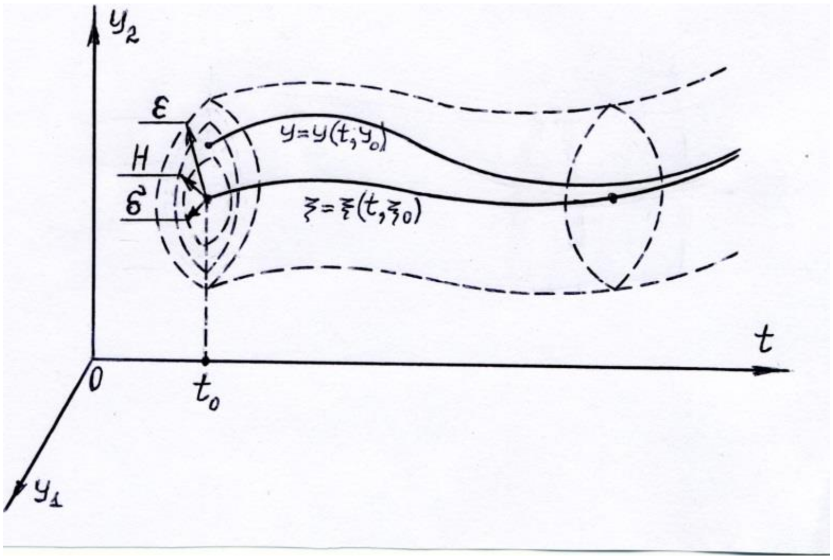

Рис.33. Геометрическая интерпретация асимптотической устойчивости невозмущённого решения.

Определение 3. Невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$ называется *устойчивым в целом по Ляпунову*, если оно асимптотически устойчиво и если $H=\infty$.

Определение 4. Невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*, если $\exists\,\varepsilon>0$ такое, что для $\forall\,\delta>0$ существует $\exists\,y_0$, принадлежащее окрестности $|y_0-\xi_0|<\delta$, и существует такое $\exists\,t_1>t_0$, при достижении значения которого выполняется условие $|y(t_1,y_0)-\xi(t_1,\xi_0)|>\varepsilon$. Геометрическая иллюстрация на рис. 34 неустойчивости невозмущённого решения в пространстве переменных динамической системы состоит в следующем. Существует такая окрестность $\varepsilon>0$ невозмущённого решения и существует такое решение $y(t,y_0)$ с начальным значением y_0 , которое при t_0 находится в δ – окрестности ξ_0 и внутри ε – трубки при $t_0\le t_1$, осью которой является невозмущённое решение $\xi(t,\xi_0)$, однако покидает эту трубку при $t\ge t_1$.

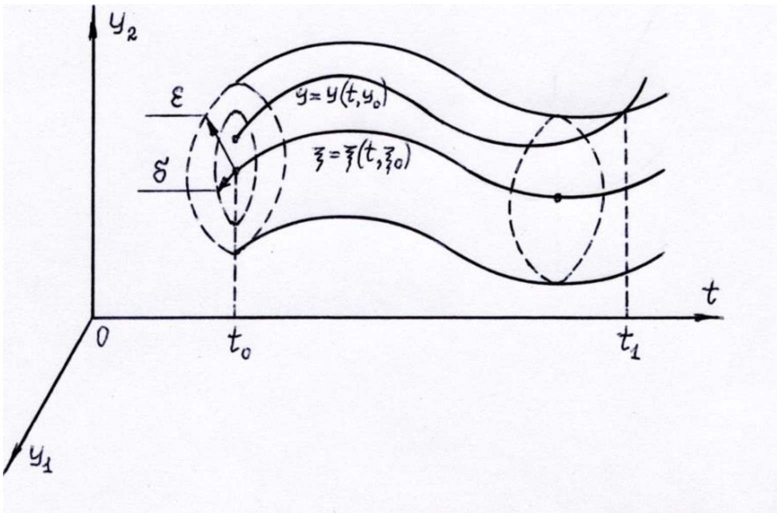

Рис.34. Геометрическая интерпретация неустойчивости невозмущённого решения.

Замечание. Все приведённые определения справедливы, если y – вектор и данные соотношения выполняются одновременно для всех координат вектора y .

Рассмотрим ряд примеров, характеризующих приведённые определения устойчивости и неустойчивости.

Пример. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову исследовать на устойчивость решение $\xi(t)$ уравнения $\dfrac{dy}{dt} = 1 + t$ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0 = 1$.

Решение. Общее решение уравнения, очевидно, имеет вид: $y = t + \dfrac{t^2}{2} + C$. Подставив начальное условие $\xi(0) = 0 + C = 1,$ определяем $C = 1$. Следовательно, исследуемое невозмущённое решение имеет вид: $\xi(t) = \xi(t, \xi_0) = 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$. Рассмотрим некоторое решение $y(t, y_0)$ с начальным значением y_0 при $t = 0$. Подставив это значение в общее решение, получим $y_0 = 0 + C$, откуда $y(t, y_0) = y_0 + t + \dfrac{t^2}{2}$. Выберем некоторое значение $\varepsilon > 0$ и полагаем $\delta = \varepsilon$. Пусть теперь y_0 такое, что $|y_0 - \xi_0| = |y_0 - -1| < \delta$. Тогда, очевидно, имеем: $|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = \left|y_0 + t + \frac{t^2}{2} - 1 - t - \frac{t^2}{2}\right| = |y_0 - 1| < \delta = \varepsilon$ при $t_0 \le t \le \infty$. Следовательно, данное невозмущённое решение является устойчивым.

Пример. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову определить устойчивость нулевого решения следующей системы $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \ \ y_1 \end{cases}$.

Решение. Невозмущённое решение имеет вид: $\xi(t, \xi_0) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, \xi_{10}) \\ \xi_2(t, \xi_{20}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Вычислим общее решение системы: $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \ \ \lambda_{1,2} = \pm\, i.$ Выбрав $\lambda = i,$ определяем вектор $H = \{h_1, h_2\}$: $\begin{cases} -ih_1 - h_2 = 0 \\ \ \ h_1 - ih_2 = 0 \end{cases}$, $h_1 = 1$, $h_2 = -i$. Выделим действительную и мнимую части решения: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t) =$ $= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ и, следовательно, общее решение имеет вид: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} +$ $+ C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$. Рассмотрим вид решения $y(t, y_0),$ которое при $t = 0$ имеет значение $y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Так как здесь $C_1 = y_{10}$, $C_2 = -y_{20}$, то решение $y(t, y_0)$ может быть записано в виде: $y(t, y_0) = \begin{pmatrix} y_1(t, y_{10}) \\ y_2(t, y_{20}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10}\cos t - y_{20}\sin t \\ y_{10}\sin t + y_{20}\cos t \end{pmatrix}$. Выбираем $\forall \varepsilon > 0$ и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Полагаем теперь, что y_0 выбрано так, что $|\, y_0 - \xi_0 \,| =$

$= \begin{pmatrix} |y_{10} - \xi_{10}| \\ |y_{20} - \xi_{20}| \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} |y_{10} - 0| \\ |y_{20} - 0| \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} |y_{10}| \\ |y_{20}| \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}$. Отсюда разность решений имеет вид:

$| y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = \begin{pmatrix} |y_1(t, y_{10}) - \xi_1(t, \xi_{10})| \\ |y_2(t, y_{20}) - \xi_2(t, \xi_{20})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y_1(t, y_{10}) - 0| \\ |y_2(t, y_{20}) - 0| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y_1(t, y_{10})| \\ |y_2(t, y_{20})| \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} |y_{10}\mathrm{cos}t - y_{20}\mathrm{sin}t| \\ |y_{10}\mathrm{sin}t + y_{20}\mathrm{cos}t| \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} |y_{10}| + |y_{20}| \\ |y_{10}| + |y_{20}| \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2\delta \\ 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$. Следовательно, рассматриваемое невозмущённое решение устойчиво.

Пример. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову определить устойчивость невозмущённого решения $\xi(t) = \xi(t, \xi_0)$ с начальным значением $\xi(0, \xi_0) = \xi_0 = 0$ следующего уравнения $\frac{dy}{dt} + y = 1 + t$.

Решение. Невозмущённое решение в данном случае – это $\xi(t, \xi_0)$ такое, что при $t = 0$ $\xi(0, \xi_0) = \xi_0 = 0$. Решим данное линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной: $\frac{dy}{dt} + y = 0$, $\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -1$, $y_{\text{одн}} = Ce^{-t}$, $y_{\text{неодн}} = C(\mathrm{t})e^{-t}$,

$\frac{dC(\mathrm{t})}{dt} e^{-t} = 1 + t$, $dC(t) = (1 + t)e^t dt$, $C(t) = (1 + t)e^t - e^t + \tilde{C} = te^t + \tilde{C}$, и окончательно имеем $y = y_{\text{неодн}} = C(\mathrm{t})e^{-t} = \tilde{C}\, e^{-t} + t$. Если $\xi(0, \xi_0) = \xi_0 = 0$, то, подставив в общее решение, имеем $0 = \tilde{C} \cdot 1 + 0$, откуда $\tilde{C} = 0$ и невозмущённое решение имеет вид $\xi(t, \xi_0) = \tilde{C}\, e^{-t} + t = 0 \cdot e^{-t} + t = t$. Теперь для произвольного решения $y(t, y_0)$ аналогично имеем: так как $y(0) = y_0$, то $y_0 = \tilde{C} \cdot 1 + 0$, и $\tilde{C} = y_0$. Таким образом, в данном случае имеем решение: $y(t, y_0) = y_0 e^{-t} + t$. Выберем $\varepsilon = \delta > 0$. Тогда, если y_0 таково, что $|y_0 - 0| < \delta$, то $|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = |y_0 e^{-t} + t - t\,| = |y_0 e^{-t}| \leq |\, y_0| < \delta = \varepsilon$. Кроме того $\lim_{t \to \infty} |y_0 e^{-t}| = 0$ и, следовательно, в данном случае рассматриваемое невозмущённое решение асимптотически устойчиво.

Пример. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову определить устойчивость невозмущённого решения $\xi(t, \xi_0)$ с начальным значением $\xi(0, \xi_0) = \xi_0 = 1$ следующего уравнения $\frac{dy}{dt} = y + t$.

Решение. Невозмущённое решение в данном случае – это $\xi(t, \xi_0)$. Решим данное линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной: $\frac{dy}{dt} - y = 0$, $\lambda - 1 = 0$, $\lambda = 1$, $y_{\text{одн}} = Ce^t$, $y_{\text{неодн}} = C(\mathrm{t})e^t$, $\frac{dC(\mathrm{t})}{dt} e^t = t$, $dC(t) = te^{-t}dt$, $C(t) = -te^{-t} - e^{-t} + \tilde{C} =$ $= -(t + 1)e^{-t} + \tilde{C}$ и окончательно $y = y_{\text{неодн}} = \tilde{C}\, e^t - (t + 1)$. Так как $\xi(0, \xi_0) = \xi_0 = 1$, то, подставляя в полученное общее решение, получим $\xi_0 = \tilde{C} \cdot 1 - 1$, $1 = \tilde{C} - 1$, откуда $\tilde{C} = 2$ и, таким образом, невозмущённое решение имеет вид $\xi(t, \xi_0) = 2\, e^t - (t + 1)$. Теперь для произвольного решения $y(t, y_0)$ аналогично имеем: если $y(0) = y_0$, то, подставляя в общее решение, имеем $y_0 = \tilde{C} \cdot 1 - 1$, и $\tilde{C} = y_0 + 1$. Таким образом, в данном случае имеем решение: $y(t, y_0) = (y_0 + 1)e^t - (t + 1)$. Выбираем произвольное значение $\delta > 0$ и такое y_0, которое удовлетворяет неравенству: $|y_0 - \xi_0| = |y_0 - 1| < \delta$. В этом случае: $|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = |(y_0 + 1)e^t - (t + 1) - 2e^t + (t + 1)| = |(y_0 - 1)e^t| \le \varepsilon$ при выборе $\varepsilon = |(y_0 - 1)e^{t_1}|$, где $t_0 < t \le t_1$, однако при $t > t_1$ $|(y_0 - 1)e^t| > \varepsilon$. Следовательно, $y(t, y_0)$ покидает при $t > t_1$ ε – окрестность невозмущённого решения $\xi(t, \xi_0)$, которое в данном случае, следовательно, является неустойчивым.

§49. Устойчивость решений линейных уравнений и систем.

Рассмотрим устойчивость решений линейных динамических систем, которые в общем случае могут быть представлены в виде:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) \quad . \tag{49.1}$$

Замечание. Все утверждения здесь и в дальнейшем, доказываемые для линейной неоднородной системы, могут быть аналогично сформулированы и доказаны и для линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка и наоборот.

Теорема 1. Для того чтобы любое решение системы (49.1) было устойчивым, асимптотически устойчивым, устойчивым в целом или неустойчивым необходимо и достаточно, чтобы было соответственно устойчивым, асимптотически устойчивым, устойчивым в целом или неустойчивым нулевое решение соответствующей однородной системы.

Доказательство. Докажем, например, что из устойчивости любого решения системы (49.1) следует устойчивость нулевого решения соответствующей однородной системы. Действительно, пусть решение $\xi(t, \xi_0)$ устойчиво. Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, и для $\forall\, y_0$, такого, что $|y_0 - \xi_0| < \delta$, выполняется условие $|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| < \varepsilon$ для $\forall\, t > t_0$.

Так как разность двух решений неоднородной системы $y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)$ является решением соответствующей однородной системы, то обозначим такое решение однородной системы в виде разности рассматриваемых решений $y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0) = z(t, z_0)$. Тогда в соответствии с тем, что любому рассматриваемому y_0 теперь соответствует $\forall\, z_0 = y_0 - \xi_0$, сформулированное утверждение об устойчивости решения $\xi(t, \xi_0)$ теперь можно перефразировать так: для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, и для любого $\forall\, z_0$, такого, что $|z_0 - 0| < \delta$, выполняется условие $|z(t, y_0) - 0| < \varepsilon$ для $\forall\, t > t_0$. Что и требовалось доказать. Остальные утверждения теоремы, касающиеся как необходимых, так и достаточных условий, доказываются аналогично.

Теорема 2. Для того, чтобы все решения $\dfrac{dy}{dt} = A(t)y$ или, что то же, $L(y) = 0$, были устойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы все решения $L(y) = 0$ были ограниченными.

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть все решения $L(y) = 0$, то есть решения вида $G(t)y_0$, где $G(t)$ – фундаментальная матрица, ограничены. Следовательно, $\exists\, M > 0$, такое, что $|G(t)| \leq M$. Выбираем $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для $\forall\, y_0$, такого, что $|y_0 - 0| < \delta,$ следует выполнение неравенства $|y(t, y_0) - 0| = |y(t, y_0)| = |G(t)y_0| \leq$ $\leq |\,G(t)| \cdot |y_0| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$ Следовательно, по Теореме 1 все решения $L(y) = 0$ устойчивы.

Необходимость докажем от противного. То есть, полагая устойчивость всех решений , предположим, что среди решений имеется неограниченное решение $y(t, y_0)$. Тогда, выбрав $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, \delta > 0$, можно утверждать, что, вследствие неограниченности $y(t, y_0)$ $\exists\, t_1 > 0$, при котором $|y(t_1, y_0)| > \frac{2\varepsilon|y_0|}{\delta}$. Построим следующее решение $L(y) = 0$: $\frac{y(t,y_0)\delta}{2|y_0|}$. При $t = t_0$ это решение $\left|\frac{y(t,y_0)\delta}{2|y_0|} - 0\right| \leq \frac{|y_0|\delta}{|y_0|2} = \frac{\delta}{2} < \delta$. При значении же $t = t_1$ имеем $\left|\frac{y(t,y_0)\delta}{2|y_0|} - 0\right| = |y(t_1, y_0)| \cdot \left|\frac{\delta}{2|y_0|}\right| > \frac{2\varepsilon|y_0|}{\delta}\frac{\delta}{2|y_0|} = \varepsilon$. То есть неограниченное решение по Теореме 1 неустойчиво. Полученное противоречие относительно условия данной Теоремы об устойчивости всех решений доказывает утверждение теоремы.

Следствие. Из доказательства данной теоремы следует, что если решения $L(y) = 0$ не ограничены, то они неустойчивы.

Замечание. Утверждение Теоремы 2 для неоднородной системы (49.1) неверны. Влияние правой части $f(t)$ в общем случае состоит в том, что все устойчивые решения $L(y) = f(t)$ одновременно ограничены или не ограничены.

Теорема 3. Если все корни характеристического уравнения системы (49.1) имеют неположительные вещественные части, при этом корни с нулевыми вещественными частями только простые, то все решения данной системы устойчивы.

Доказательство. Общее решение данной системы в различных возможных случаях корней характеристического уравнения в соответствии с условием теоремы, имеет вид (при $\beta_k \neq 0$) :

$$y = \sum_{k=1}^{l} C_k P_k(t)\, e^{\alpha_k t} + \sum_{k=l+1}^{l+r} \{C_k \mathrm{Re}[P_k(t)\, e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}] + C_{k+r}\mathrm{Im}\left[P_k(t) e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}\right]\} +$$

$$+ \sum_{k=l+2r+1}^{l+2r+m} \left\{C_k \mathrm{Re}\left[e^{i\beta_k t}\right] + C_{k+m}\mathrm{Im}\left[e^{i\beta_k t}\right]\right\} + \; y_{\text{частн}} \;,$$

где $\alpha_k < 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots, n = l + 2r + 2m$. Так как $P_k(t)e^{\alpha_k t} \to 0$ при $t \to \infty$, а $e^{i\beta_k t}$ и $e^{i\beta_s t}$ ограничены, то все решения соответствующей однородной системы ограничены. Таким образом, по Теореме 2 решения однородной системы устойчивы. Следовательно, по Теореме 1 при устойчивости решений однородной системы устойчивы так же и все решения данной неоднородной системы.

Теорема 4. Если все корни характеристического уравнения системы (49.1) имеют отрицательные вещественные части, то все решения данной системы асимптотически устойчивы.

Доказательство. Общее решение данной системы в соответствии с условием теоремы, записывается в виде (при $\beta_k \neq 0$):

$$y = \sum_{k=1}^{l} C_k P_k(t)\, e^{\alpha_k t} + \sum_{k=l+1}^{l+r} \{C_k \mathrm{Re}[P_k(t)\, e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}] + C_{k+r}\mathrm{Im}\big[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}\big]\} + y_{\text{частн}} ,$$

где $\alpha_k < 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots, n = l + 2r$. Так как $P_k(t)e^{\alpha_k t} \to 0$ при $t \to \infty$, то все решения соответствующей однородной системы ограничены и асимптотически устойчивы, а, следовательно, по Теореме 1, и все решения данной системы асимптотически устойчивы.

Теорема 5. Если среди корней характеристического уравнения системы (49.1) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то все решения данной системы неустойчивы.

Доказательство. Так как в общем решении соответствующей однородной системы имеется слагаемое фундаментальной системы решений, соответствующее данному корню с положительной вещественной частью, например, $C_k \mathrm{Re}\big[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}\big]$ при $\alpha_k > 0$, то, полагая все остальные произвольные постоянные равными нулю, получаем решение соответствующей однородной системы в виде $C_k \mathrm{Re}\big[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}\big] \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, в соответствии с теоремами 2 и 1 все решении данной системы (49.1) в данном случае неустойчивы.

Пример. Исследовать на устойчивость решения данной линейной неоднородной системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -ax + y + f_1(t) \\ \dot{y} = x - ay + f_2(t) \end{cases}$ при различных значениях параметра a.

Решение. Решение характеристического уравнения имеет вид $\begin{vmatrix} -a-\lambda & 1 \\ 1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $(a+\lambda)^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = -a \pm 1$. Определяем общее решение соответствующего однородного уравнения: $\lambda_1 = -a + 1$, $\begin{cases} -h_1 + h_2 = 0 \\ h_1 - h_2 = 0 \end{cases}$, $h_1 = h_2 = 1$, $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 = -a - 1$, $\begin{cases} h_1 + h_2 = 0 \\ h_1 + h_2 = 0 \end{cases}$, $h_1 = 1,\ h_2 = -1$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, решение данного уравнения имеет вид: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-a+1)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(-a-1)t} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{частн}}$.

В соответствии с Теоремами 3 – 5 в данном случае имеем следующий вывод об устойчивости всех решений данной системы в зависимости от значений параметра a и соответствующих значений корней характеристического уравнения.

– при $a = 1$ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2$ $-$ все решения устойчивы;

– при $a > 1$ $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ $-$ все решения асимптотически устойчивы;

– при $a < 1$ $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ или > 0 $-$ все решения неустойчивы.

§50. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости.

Замечание. Здесь и далее рассматриваются алгоритмы исследования нулевого решения только однородной системы, так как любое решение линейной неоднородной системы по Теоремам 1 – 5 предыдущего §49 имеет практически тот же тип устойчивости, который имеет нулевое решение однородной системы.

Введём определения рассматриваемых далее функций. Функцию $V(y)$ будем называть *знакопостоянной функцией*, если при $\forall y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ функция $V(y) \geq 0$ и при этом $V(0) = 0$, или $V(y) \leq 0$ и при этом $V(0) = 0$. Если же знакопостоянная функция $V(0) = 0$ только при $y = 0$, то такая функция называется *знакоопределённой функцией*.

Пример. Функции $V(x,y,z) = (x-y)^2 + z^2$ и $V(x,y,z) = -(x+y)^2 - z^2$ являются знакопостоянными функциями. Функции же $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ и $V(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$ являются знакоопределёнными функциями, при этом функция $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ называется также *положительно – определённой функцией*, а функция $V(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$ называется *отрицательно – определённой функцией.*

В дальнейшем такие функции $V(y)$ или $V(x,y,z)$ будут называться *функциями Ляпунова.* Кроме того, если рассматривается автономная динамическая система:

$\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ или, в координатной форме, $\dfrac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, $i = 1,2,3, \dots, n$, (50.1)

то *производной функции Ляпунова* $V(y) = V(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ *в силу такой системы* называется следующая производная:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \ . \qquad (50.2)$$

Справедливы следующие теоремы Ляпунова, доказательство которых приведено в [5].

Теорема 1 (*Ляпунова об устойчивости*). Если существует знакоопределённая функция $V(y)$ и если её производная в силу данной системы $\frac{dV}{dt}$ является либо знакопостоянной функцией, имеющей противоположный знак по отношению к функции $V(y)$, либо эта производная $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, то нулевое решение данной системы (50.1) является устойчивым.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение автономной динамической системы: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

Решение. Выберем в качестве функции Ляпунова положительно – определённую функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$. При этом $\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(y) + 2y(-x) \equiv 0$, следовательно, условия Теоремы 1, очевидно, выполнены, и нулевое решение данной системы является устойчивым.

Теорема 2 (*Ляпунова об асимптотической устойчивости*). Если существует знакоопределённая функция $V(y)$ и если её производная в силу данной системы $\frac{dV}{dt}$ является также знакоопределённой функцией, но имеющей противоположный знак по отношению к функции $V(y)$, то нулевое решение данной системы (50.1) является асимптотически устойчивым.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы: $\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$.

Решение. Выберем в качестве функции Ляпунова положительно – определённую функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$. При этом $\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4)$. Следовательно, условия Теоремы 2, очевидно, выполнены и нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Замечание. В качестве функций Ляпунова могут быть не только ранее указанные функции, а также функции вида $V(x, y) = x^2 + y^4$, $V(x, y) = x^4 + y^4$, либо даже $V(x, y) = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, и числа a и b подбираются так, чтобы были выполнены условия Теорем Ляпунова.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2\,y + x^2 y^2 \\ \dot{y} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3 y}{2} \end{cases}.$$

Решение. Выберем в качестве функции Ляпунова положительно – определённую функцию $V(x, y) = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b = 2a$. При этом производная функции Ляпунова в силу системы будет:

$\frac{dV}{dt} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}\right) = -2ax^2 - 4axy +$

$+ 2ax^3y^2 + 2bxy - by^2 - bx^3y^2 = -2ax^2 - 4axy + 2ax^3y^2 + 4axy - 2ay^2 - 2ax^3y^2 =$

$= -2a(x^2 + y^2)$. Следовательно, условия Теоремы 2, очевидно, выполнены и нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Теорема 3 (*Ляпунова о неустойчивости*). Если существует дифференцируемая в области G функция $V(y)$, такая, что $V(0) = 0$, и в этой области производная в силу системы $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределённой функцией, а в подобласти $G_1 \subset G$, содержащей нулевое решение данной системы, знаки функции $V(y)$ и её производной $\frac{dV}{dt}$ в силу системы совпадают, то нулевое решение данной системы неустойчиво.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы: $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$.

Решение. Выберем в качестве функции $V(x,y) = x^2 - y^2$ и вычислим производную в силу системы $\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 2x(x) - 2y(-y) = 2(x^2 + y^2)$ и в области $G_1 \subset G$, содержащей нулевое решение системы, то есть $y = 0\,\big|_{G_1}$, $\operatorname{sign}\,[\,V(x,y) = x^2]\,\big|_{G_1} =$

$= \operatorname{sign}\,[\frac{dV}{dt} = 2x^2]\,\big|_{G_1}$. Следовательно, условия Теоремы 3 выполнены и нулевое решение данной системы неустойчиво.

Замечание. В утверждениях неустойчивости решений в Теоремах 3 и 4 (см. [5]) функция Ляпунова $V(x,y)$ может быть и не знакоопределённой и даже не знакопостоянной.

Теорема 4 (*Четаева о неустойчивости*). Если существует дифференцируемая в области G функция $V(y)$, такая, что $V(0) = 0$, а в подобласти $G_1 \subset G$, содержащей нулевое решение данной системы, знаки функции $V(y)$ и её производной $\frac{dV}{dt}$ в силу системы совпадают, то нулевое решение данной системы неустойчиво.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы: $\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$.

Решение. Выберем в качестве функции $V(x,y) = x^4 - y^4$ и вычислим производную в силу системы $\frac{dV}{dt} = 4x^3\dot{x} - 4y^3\dot{y} = 4x^3(x^5 + y^3) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8)$. Тогда в подобласти $G_1 \subset G$, в которой содержится нулевое решение системы и в которой $y = 0\,\big|_{G_1}$, выполняется равенство $\operatorname{sign}\,[V(x,y) = x^4]\,\big|_{G_1} = \operatorname{sign}\,[\frac{dV}{dt} = 4x^8]\,\big|_{G_1}$. Следовательно, условия Теоремы 4 выполнены и нулевое решение данной системы является неустойчивым решением.

§51. Критерии устойчивости Рауса-Гурвица и Михайлова.

Рассмотрим методы исследования устойчивости нулевого решения только однородного дифференциального уравнения высшего порядка, так как по Теоремам 1 и 2 §49 устойчивость решений линейной неоднородной системы и, соответственно, линейного неоднородного уравнения высшего порядка, определяется в зависимости от устойчивости нулевого решения соответствующих однородной системы или однородного уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0 \ , \qquad (51.1)$$

где $a_i = \text{Const.}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Нулевое решение данного уравнения (по Теореме 4 §49) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (51.2)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Вместо определения корней такого характеристического уравнения высшего порядка можно применить так называемый *критерий Рауса–Гурвица*. Данный критерий формулируется в виде соответствующей теоремы, которая содержит ссылку на составленную на основе коэффициентов уравнения (51.1) и, что то же, уравнения (51.2) , так называемую *матрицу Гурвица* порядка $(n \times n)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} . \qquad (51.3)$$

Теорема 1 (*критерий Рауса–Гурвица*). Для того, чтобы все корни данного уравнения (51.1) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица (51.3) , то есть:

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \ , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \ , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \ , \dots , \Delta_{n-1} = |\dots| > 0 \ ,$$

$\Delta_n = |\dots| > 0$. Так как $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$, то последнее из неравенств можно заменить на $a_n > 0$ вместо $\Delta_n > 0$.

Замечание. Данный критерий Рауса–Гурвица также как и последующий критерий Михайлова приводим без доказательства ввиду их достаточно простой конструктивности. При необходимости можно воспользоваться ссылками на указанную в конце учебника известную литературу (см. [5]).

Пример. Исследовать устойчивость нулевого решения данного однородного уравнения

$$y^{V} + 7y^{IV} + 19y''' + 25y'' + 16y' + 4y = 0$$

на основании критерия Рауса–Гурвица отрицательности вещественных частей всех корней характеристического уравнения .

Решение. Характеристическое уравнение данного однородного дифференциального уравнения имеет вид: $\lambda^5 + 7\lambda^4 + 19\lambda^3 + 25\lambda^2 + 16\lambda + 4 = 0$. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 19 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & 25 & 19 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим последовательно величины главных диагональных миноров данной матрицы: $\Delta_1 = 7 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 25 & 19 \end{vmatrix} = 153 - 25 = 128 > 0$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 25 & 19 & 7 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 19 & 7 \\ -12 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 7 \\ 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} > 0 \; ,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 19 & 7 & 1 \\ 4 & 16 & 25 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 19 & 7 & 1 \\ -12 & 16 & 25 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 7 & 1 \\ 0 & 18 & 25 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = ,$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} > 0 \quad , \qquad \Delta_5 = 4 \cdot \Delta_4 > 0 \quad .$$

Следовательно, в соответствии с критерием Рауса – Гурвица, все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части и нулевое решение, а вместе с ним, в соответствии с Теоремами 1 и 4 §49 , все решения данного уравнения асимптотически устойчивы.

Решение проблемы устойчивости решений уравнения (51.1) позволяет определить так называемый *критерий Михайлова*, по которому вместо определения корней характеристического уравнения (51.2), можно получить вывод о видах корней этого уравнения, а следовательно решить вопрос об устойчивости решений (51.1) через возможность определения расположении всех этих корней на комплексной плоскости. Указанный способ реализуется следующим образом. В характеристическое уравнение (51.2): $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ вместо λ подставляется $i\omega$ и в полученном комплексном выражении $f(i\omega)$ выделяются действительная и мнимая части, то есть $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, при этом, очевидно:

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots \; , \qquad v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \cdots \; .$$

Величина $f(i\omega)$ может быть изображена в виде вектора с координатами $u(\omega)$ и

$v(\omega)$ в комплексной плоскости Ouv в зависимости от параметра ω . При изменении параметра ω в пределах $(-\infty, +\infty)$ конец вектора $f(i\omega)$ описывает некоторую кривую, которая называется *кривой Михайлова*. Пример кривой Михайлова представлен на рис. 35. Так как функция $u(\omega)$ является чётной функцией, то кривая Михайлова симметрична относительно оси Ou и поэтому достаточно строить лишь часть кривой Михайлова, соответствующую изменению параметра ω от 0 до $+\infty$.

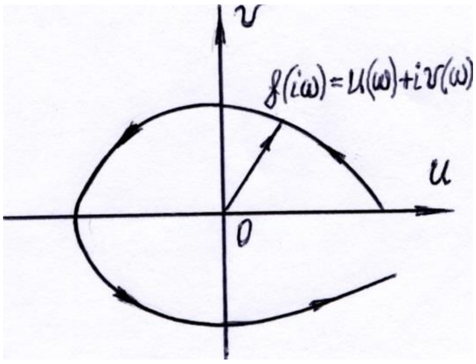

Рис. 35. Кривая годографа вектора $f(i\omega)$, описывающего кривую Михайлова.

Если многочлен $f(\lambda)$ степени n имеет m корней с положительной вещественной частью и $n-m$ корней с отрицательной вещественной частью, то угол φ поворота вектора $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ равен $\varphi = (n-2m)\dfrac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что для асимптотической устойчивости решений уравнения (51.1) необходимо и достаточно, чтобы $m = 0$. Итак, критерий Михайлова формулируется следующим образом:

Теорема 2 (*критерий Михайлова*). Для устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения $y \equiv 0$ дифференциального уравнения (51.1) необходимо и достаточно, чтобы вектор $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$, не проходя через начало координат, совершал поворот на угол $\varphi = n\dfrac{\pi}{2}$, то есть сделал $\dfrac{n}{4}$ оборотов против часовой стрелки.

Из критерия Михайлова следует, что для устойчивости решения уравнения (51.1) необходимо, чтобы все корни уравнений $u(\omega) = 0$ и $v(\omega) = 0$ были действительными и перемежающимися друг с другом, то есть между любыми двумя корнями одного уравнения должен находиться корень другого уравнения.

Замечание. При практическом решении примеров для данного n определяется угол φ поворота вектора $f(i\omega)$, и затем решается уравнение $\varphi\big|_{f(i\omega),\ \omega\in[0,+\infty)} = (n-2m)\dfrac{\pi}{2}$, откуда определяется число $m,$ равное числу корней с положительной вещественной частью. Тогда число корней с отрицательной вещественной частью будет равно $n-m$.

Пример. Исследовать устойчивость нулевого решения однородного уравнения

$$y^V + 7y^{IV} + 19y''' + 25y'' + 16y' + 4y = 0$$

на основании критерия Михайлова.

Решение. Характеристическое уравнение данного однородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(\lambda) = \lambda^5 + 7\lambda^4 + 19\lambda^3 + 25\lambda^2 + 16\lambda + 4 = 0$.

Проведём подстановку $\lambda = i\omega$ и так как $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, то функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ имеют вид: $u(\omega) = 7\omega^4 - 25\omega^2 + 4 = 0$ и $v(\omega) = \omega^5 - 19\omega^3 + 16\omega = 0$. Решая каждое из данных уравнений относительно ω , получаем: из $u(\omega) = 0$ следует, что $\omega_{1,2}{}^2 = \frac{25\pm\sqrt{625-112}}{14} = \frac{25\pm\sqrt{513}}{14} \cong 3{,}4$ или $0{,}168$. Отсюда, так как отрицательные значения не рассматриваются, имеем $\omega_1 = \sqrt{3{,}4} \cong 1{,}84$, $\omega_2 = \sqrt{0{,}168} \cong 0{,}4$. И по аналогии из $v(\omega) = 0$ следует, что $\omega_3 = 0$, $\omega^4 - 19\omega^2 + 16 = 0$, $\omega_{4,5}^2 = \frac{19\pm\sqrt{361-64}}{2} = \frac{19\pm\sqrt{297}}{2} \cong$ $\cong 18{,}1$ и $0{,}9$. Отсюда положительными значениями являются $\omega_4 \cong 4{,}25$, $\omega_5 \cong 0{,}95$. Вычислим соответствующие значения $u(\omega)$ и $v(\omega)$ при полученных значениях ω и результаты сведём в следующую таблицу:

ω	0	0,4	0,95	1,84	4,25	+∞
$u(\omega)$	4	0	<0	0	>0	→ 0
$v(\omega)$	0	>0	0	<0	0	→ +∞

При этом, очевидно, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = \infty$ Иллюстрация годографа $f(\,i\omega)$ данной задачи Коши приведена на рис.36.

В результате угол оборота годографа $f(\,i\omega)$ равен $5\,\frac{\pi}{2} = (5 - 2m)\,\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $m = 0$, $n - m = 5$, корни с положительными вещественными частями отсутствуют, все корни имеют отрицательные вещественные части, нулевое решение, а вместе с ним и все решения уравнения (51.1) асимптотически устойчивы.

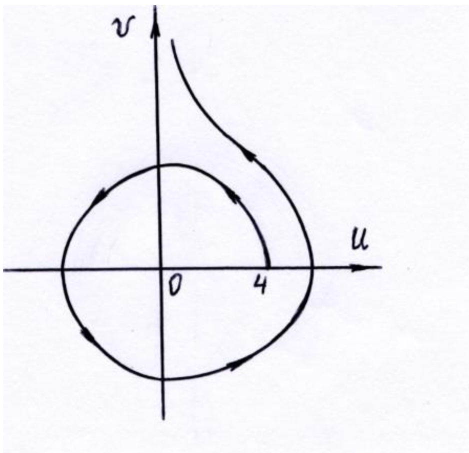

Рис. 36. Кривая годографа $f(\,i\omega)$ решения данной задачи Коши.

Пример. Исследовать устойчивость нулевого решения однородного уравнения

$$y^V + 3y^{IV} + 2y''' - 2y'' - 4y' - y = 0$$

на основании критерия Михайлова.

Решение. Характеристическое уравнение данного однородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda - 1 = (\lambda+1)^3(\lambda^2-1) = 0$.

Проведём подстановку $\lambda = i\omega$ и так как $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, то функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ имеют вид: $u(\omega) = 3\omega^4 + 2\omega^2 - 1 = 0$ и $v(\omega) = \omega^5 - 2\omega^3 - 4\omega = 0$. Решая каждое из данных уравнений относительно ω , получаем: $u(\omega) = 0$, откуда следует, что $\omega_1{}^2 = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2\pm4}{6} = \frac{1}{3}$. Отрицательный корень не рассматривается. Отсюда имеем $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \cong 0{,}58$. И по аналогии: $v(\omega) = 0$, откуда вытекает, что $\omega_2 = 0$, $\omega^4 - 2\omega^2 - 4 = 0$, $\omega_3^2 = 1 \pm \sqrt{5} \cong 2{,}24$. Отрицательный корень не рассматривается. Отсюда положительный корень: $\omega_3 \cong 1{,}5$. Вычислим соответствующие значения $u(\omega)$ и $v(\omega)$ при полученных значениях ω, и результаты сведём в следующую таблицу:

ω	0	0,58	1,5	+∞
$u(\omega)$	– 1	0	>0	→ 0
$v(\omega)$	0	<0	0	→ +∞

При этом, очевидно, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = \infty$. Иллюстрация годографа $f(\,i\omega)$ данной задачи Коши приведена на рис.37.

В результате угол оборота годографа $f(\,i\omega)$ равен $3\,\frac{\pi}{2} = (5 - 2m)\,\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $m = 1$, $n = 5 - m = 4$. Следовательно, в данном случае имеется один корень с положительной вещественной частью. В результате в соответствии с Теоремой 5 §49 нулевое решение, а вместе с ним и все решения уравнения (51.1) в данном случае неустойчивы.

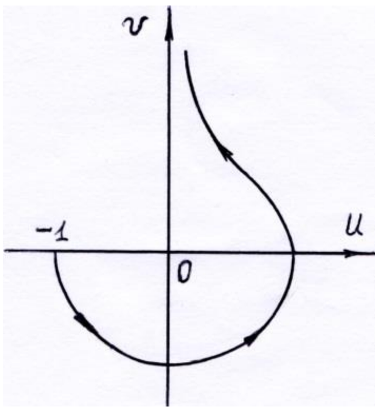

Рис. 37. Кривая годографа $f(\,i\omega)$ решения данной задачи Коши.

§52. Устойчивость по первому приближению.

Рассмотрим устойчивость невозмущённого решения общего вида $\xi(t, \xi_0)$ неавтономной динамической системы
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad . \qquad (52.1)$$

Очевидно, в этом случае $\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi)$. Введя следующую замену $y = z + \xi$, имеем $\frac{dz}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(t, z + \xi)$ и, выделив линейную часть, получим так называемую в этом случае *систему первого приближения:*
$$\frac{dz}{dt} = f(t, z + \xi) - f(t, \xi) = Az + \varphi(t, z) \ . \qquad (52.2)$$

Таким образом, исследуемое невозмущённое решение $\xi(t, \xi_0)$ данной динамической системы (52.1) сведено к исследованию нулевого решения системы первого приближения (52.2) . Справедливы следующие так называемые *теоремы об устойчивости по первому приближению* (доказательство данных теорем см. в [5]) .

Теорема 1 (*об устойчивости по первому приближению*). Если корни характеристического уравнения системы первого приближения (52.2) имеют отрицательные вещественные части и, кроме того, $\exists\, M > 0$ и $\exists\, \alpha > 0$ $(0 < \alpha < 1)$, такие, что $|\varphi(t, z)| \le M|z|^{\alpha}$, то нулевое решение $z = 0$ системы первого приближения (52.2) , а, следовательно, невозмущённое решение $\xi(t, \xi_0)$ данной системы (52.1) является устойчивым.

Теорема 2 (*о неустойчивости по первому приближению*). Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения (52.2) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью и, кроме того, $\exists\, M > 0$ и $\exists\, \alpha > 0$ $(0 < \alpha < 1)$, такие, что $|\varphi(t, z)| \le M|z|^{\alpha}$, то нулевое решение $z = 0$ системы первого приближения (52.2) , а, следовательно, невозмущённое решение $\xi(t, \xi_0)$ данной системы (52.1) является неустойчивым.

Замечания. 1). Неравенство $|\varphi(t, z)| \le M|z|^{\alpha}$, цитируемое в Теоремах 1 и 2 , при $\exists\, M > 0$ и $\exists\, \alpha > 0$ $(0 < \alpha < 1)$, очевидно, выполняется, если $|\varphi(t, z)| \le o(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$.

2). Если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения (52.2) имеют неположительные вещественные части и вещественная часть хотя бы одного корня равна нулю, то при исследовании на устойчивость по первому приближению в общем случае требуется привлечение дополнительного исследования, так как в этом случае сказывается влияние нелинейного слагаемого $\varphi(t, z)$.

Пример. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = -8x + 7y + \sin^2 x - 3y^3 \\ \dot{y} = x - 2y - x^2 e^y + 2y^2 \end{cases}.$$

Решение. Для исследования нулевого решения $x = y = 0$ данной системы первого приближения решим соответствующее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -8-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -9$. Итак, корни характеристического уравнения являются действительными и отрицательными. Осталось провести оценку нелинейных слагаемых. Так как здесь $|\sin^2 x - 3y^3| \le o(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$ и $|-x^2 e^y + 2y^2| \le o(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$, то, следовательно, условия Теоремы 1 выполнены и нулевое решение данной системы устойчиво.

Пример. Исследовать на устойчивость точки покоя следующей динамической системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2 \\ \dot{y} = 3x - y - x^2 \end{cases}. \tag{52.3}$$

Решение. Для определения точек покоя приравниваем нулю вектор фазовой скорости:

$$\begin{cases} y - x - x^2 = 0 \\ 3x - y - x^2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = 2x \end{cases}.$$

Таким образом, данная динамическая система (52.3) имеет следующие две точки покоя: $x_1 = 0,\ y_1 = 0$; $x_2 = 1,\ y_2 = 2$.

Исследуем сначала устойчивость нулевого решения системы первого приближения, соответствующее точке покоя (0,0). Решаем соответствующее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 3$, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3} - 1$. Так как $\lambda_1 = (\sqrt{3} - 1) > 0$ и так как нелинейная правая часть системы содержит слагаемое $x^2 < |x|^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$, то в соответствии с тем, что условия Теоремы 2 выполнены, нулевое решение данной системы (52.3) неустойчиво. Следовательно, точка покоя (0,0) является неустойчивой.

Рассмотрим теперь устойчивость точки покоя (невозмущённого решения) данной динамической системы: $x_2 = 1,\ y_2 = 2$. Сведём данное исследование к исследованию нулевого решения системы первого приближения следующим образом. Сначала с помощью применения невырожденной замены переменных $\begin{cases} u = x_2 - 1 \\ v = y_2 - 2 \end{cases}$, или, что тоже, с помощью подстановки в данную систему $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$, в результате получим следующую систему: $\begin{cases} \dot{u} = v + 2 - u - 1 - u^2 - 2u - 1 \\ \dot{v} = 3u + 3 - v - 2 - u^2 - 2u - 1 \end{cases}$, или $\begin{cases} \dot{u} = -3u + v - u^2 \\ \dot{v} = u - v - u^2 \end{cases}$, и тем самым исследуемой точке ставится в соответствие нулевое решение следующей системы первого приближения $\begin{cases} \dot{u} = -3u + v \\ \dot{v} = u - v \end{cases}$.

Таким образом, необходимо в данной системе, полученной в результате преобразования системы (52.3), исследовать на устойчивость по первому приближению её нулевое решение $u = v = 0$. Для этого решим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,\quad \lambda^2+4\lambda+2=0\,,\quad \lambda_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}\;.$$

Так как оба корня отрицательны и нелинейное слагаемое данной системы таково, что $u^2 < |u|^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$, то, так как условия Теоремы 1 выполнены, нулевое решение системы первого приближения устойчиво. Следовательно, устойчиво невозмущённое решение $x_2 = 1,\ y_2 = 2$ системы (52.3) , то есть точка покоя (1,2) является устойчивой.

Глава 14. **Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.**

§53. Основные определения.

В Главе 8 настоящего издания были рассмотрены методы определения первых интегралов – координат общего интеграла:

$$\Phi(x,y) = C \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n) = C_1 \\ \varphi_2(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n) = C_2 \\ \varphi_3(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n) = C_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n) = C_n \end{cases} \qquad (53.1)$$

нормальной системы дифференциальных уравнений: $y' = f(x,y)$.

Независимость системы первых интегралов определяется через не равенство нулю якобиана: $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\dots,\varphi_n)}{\partial(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)} \neq 0$. Если первые интегралы данной системы определены, то можно сделать следующие выводы, необходимые для дальнейшего.

Если на основе совокупности первых интегралов составить произвольную дифференцируемую функцию, аргументами которой являются отмеченные первые интегралы, то есть функцию $F\big(\varphi_1(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n),\varphi_2(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n),\dots,\varphi_n(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)\big) = C$, то данная функция также будет являться первым интегралом системы $y' = f(x,y)$. В соответствии с определением первых интегралов на решениях системы все аргументы функции F – левые части первых интегралов (53.1) становятся постоянными. Следовательно, на решениях системы $F = C$, то есть по определению первого интеграла $F = C$ тоже является первым интегралом рассматриваемой нормальной системы дифференциальных уравнений.

Кроме того, рассмотрим любой из первых интегралов $\varphi_k(x,y_1,y_2,y_3,\dots,y_n) = C_k$, $k = 1,2,3,\dots,n$, и вычислим полную производную по x обеих его частей. В результате получим:

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dx} + \cdots + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0$$

или в силу системы $y' = f(x,y)$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1} f_1(x,y) + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2} f_2(x,y) + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_3} f_3(x,y) + \cdots + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_n} f_n(x,y) = 0 \ .$$

Таким образом оказывается, что левая часть первого интеграла является решением полученного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка относительно функции φ_k и независимых переменных $x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Рассмотрим теперь общую теорию и методы интегрирования таких уравнений, полагая функцией u , а независимыми переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Итак, *дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка* называется уравнение вида $F\left(u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$,

связывающее искомую функцию u , независимые переменные $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, $n \geq 2$, и частные производные первого порядка от искомой функции по данным независимым переменным.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка зависит от произвольной функции. Покажем, что это так, рассмотрев лишь частный пример.

Пример. Решить уравнение вида $u = \frac{\partial u}{\partial x} x + x^2 y^2$.

Решение. По аналогии с решением обыкновенного дифференциального уравнения в полных дифференциалах решаем данное уравнение как линейное относительно функции u переменного x , полагая y параметром: $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} = -xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} = 0$, $u = C(x,y)x$, $\frac{\partial C}{\partial x} x = -xy^2$, $\frac{\partial C}{\partial x} = -y^2$, $C(x,y) = -y^2 x + \tilde{C}(y)$, $u = \tilde{C}(y)x - x^2 y^2$.

Таким образом, если требуется решить задачу Коши, то, в случае дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, для определения решения задачи Коши следует полагать, что при заданном значении одной из переменных должна быть задана функция остальных переменных.

Замечание. Всюду далее, по аналогии с предыдущим, полагаем, что все величины, переменные и функции принимают только действительные значения. Все рассматриваемые функции являются дифференцируемыми и, в соответствии с известной теоремой, доказанной С.В.Ковалевской (см.[12]), предполагается, что искомые решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка существуют.

§54. Линейные однородные уравнения. Решение задачи Коши.

Дифференциальное уравнение называется *линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка*, если его можно записать в виде:

$$X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0\ . \qquad (54.1)$$

Наряду с этим уравнением рассмотрим следующую нормальную систему дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}\ . \qquad (54.2)$$

Замечание. Обратить внимание, что здесь, в отличие от (53.1) уже только $n-1$ уравнений, а не n .

Итак, пусть в данном случае, в отличие от (53.1) некоторый первый интеграл системы (54.2) имеет вид $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=C_k$. Полный дифференциал от обеих частей данного первого интеграла имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3}dx_3+\dots+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}dx_n=0\ . \qquad (54.3)$$

Рассмотрим полученное равенство (54.3) как скалярное произведение двух ортогональных векторов $\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2},\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3},\dots,\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\right)$ и $(dx_1,dx_2,dx_3,\dots,dx_n)$. Заменим второй вектор на ему коллинеарный в соответствии с (54.2) . В результате получим:

$$X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}+\dots+X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}=0\ . \qquad (54.4)$$

Таким образом, левая часть $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ рассматриваемого первого интеграла является решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (54.4) , а, следовательно, и уравнения вида (54.1) .

Итак, рассматривается однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (54.1) . Одновременно рассматриваем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение в симметрической форме (54.2) , общий интеграл которого представляет систему из $n-1$ независимых первых интегралов $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=C_k$, $k=1,2,3,\dots,n-1$.

Покажем, что решением уравнения (54.1) является сложная функция следующего вида: $u=F(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})$. Для этого составим систему из результатов (54.4) подстановки этих первых интегралов в уравнение (54.1) и добавим к этой системе само данное уравнение (54.1) с неизвестной функцией $u\,(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$:

$$\begin{cases} X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} = 0 \\ X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0 \\ X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (54.5)$$

Данную систему (54.5) рассмотрим как линейную однородную систему алгебраических уравнений с неизвестными $X_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $k = 1,2,3,\dots,n$, и матрицей, элементами которой являются частные производные системы из $n-1$ независимых первых интегралов и частных производных неизвестной функции $u\,(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$. Для того, чтобы система имела ненулевые решения, полагаем определитель матрицы системы равным нулю. Равенство нулю определителя матрицы системы (54.5) можно выразить в виде якобиана, равного нулю, то есть: $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1},u)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)} = 0$. Ранг матрицы системы равен $n-1$, так как главным минором $n-1$ – го порядка является минор $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})} \neq 0$, вследствие того, что этот минор одновременно является якобианом, определяющим независимость данных $n-1$ первых интегралов. Выбрав данный минор в качестве базисного минора утверждаем, что, согласно теореме о базисном миноре (см. [10]), последняя строка системы (54.5) является линейной комбинацией предыдущих её строк. А это значит, что рассматриваемая функция $u\,(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ является сложной функцией вида $u = F(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})$, аргументами которой являются функции левых частей данной независимой системы первых интегралов $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$, $k = 1,2,3,\dots,n-1$. Следовательно, полученный результат свидетельствует о том, что $u = F(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})$ является решением рассматриваемого уравнения в частных производных первого порядка (54.1). Покажем, более того, что:

Решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (54.1) *является* $u = F(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})$, *где* F *– произвольная дифференцируемая функция, а функции* $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$, $k = 1,2,3,\dots,n-1$, *являются левыми частями первых интегралов соответствующей нормальной системы дифференциальных уравнений в симметрической форме* (54.2).

Для того, чтобы это доказать, сначала запишем в более компактной форме результат подстановки функций левой части рассматриваемых первых интегралов $\varphi_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ в уравнение (54.4) как:

$$\sum_{l=1}^{n} X_l \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l} = 0\,, \quad k = 1,2,\dots,n-1\,. \qquad (54.6)$$

Если же решение данного уравнения (54.1) имеет вид: $u = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, то оно должно удовлетворять этому уравнению (54.1) , то есть

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \ . \tag{54.7}$$

Рассмотрим частные производные функции $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \ , \quad l = 1, 2, \dots, n \ . \tag{54.8}$$

Подставив (54.8) в (54.7) покажем, что получаем в итоге справедливое равенство с учётом (54.6), откуда и будет следовать, что $u = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ – решение (54.7) или, что то же, (54.1):

$$X_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + X_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \cdots + X_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0 \qquad \text{или}$$

$$\sum_{l=1}^{n} X_l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \sum_{l=1}^{n} X_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0 \, , \qquad \text{где} \quad \sum_{l=1}^{n} X_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0 \qquad \text{в соответствии с}$$

(54.6) или, что тоже, с (54.4). Что и требовалось доказать.

Пример. Решить уравнение $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (2z^2 - xy)\frac{\partial u}{\partial y} - xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Решение. Сначала составим соответствующую нормальную систему дифференциальных уравнений в симметрической форме: $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{2z^2 - xy} = \frac{dz}{-xz}$. Определяем первые интегралы методом интегрируемых комбинаций (см. Главу 8). $\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-xz}$, $zdx + xdz = 0$,

$\varphi_1(x, y, z) = xz = C_1$, $\frac{ydx + xdy + 2zdz}{yx^2 + 2xz^2 - x^2y - 2xz^2} = \frac{dx}{x^2}$ или $\frac{ydx + xdy + 2zdz}{0} = \frac{dx}{x^2}$,

$ydx + xdy + 2zdz = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = xy + z^2 = C_2$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет следующий вид: $u = F(\varphi_1, \varphi_2) = F(xz,\ xy + z^2)$, где F – произвольная дифференцируемая функция. Покажем, что это действительно так, проведя подстановку полученного решения в данное уравнение: $x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + (2z^2 - xy)\frac{\partial F}{\partial y} - xz\frac{\partial F}{\partial z} =$

$$= x^2 \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right] + (2z^2 - xy)\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right] - xz\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right] =$$

$$= x^2 \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} z + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} y\right] + (2z^2 - xy)\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} 0 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} x\right] - xz\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} 2z\right] =$$

$= x^2 z \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + x^2 y \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} + 2xz^2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} - x^2 y \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} - x^2 z \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} - 2xz^2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = 0$, то есть $0 = 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторую связь уравнений в частных производных первого порядка с динамическими системами. Рассмотрим динамическую систему вида:

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad \text{или в координатной форме} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} . \qquad (54.9)$$

Наряду с данной системой рассмотрим соответствующую ей систему уравнений фазовых траекторий в симметрической форме (54.2) :

$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}$. Решения этой системы – фазовые траектории рассматриваемой динамической системы (54.9), удовлетворяющие системе первых интегралов $\varphi_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = C_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, левые части которых являются одновременно решениями соответствующего уравнения в частных производных первого порядка вида (54.4) или, что то же (54.1), называются *характеристиками дифференциального уравнения в частных производных первого порядка*. Рассматриваемая же в этом случае динамическая система (54.9) называется *системой дифференциальных уравнений характеристик для соответствующего линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка* (54.1). Общее же решение уравнения в частных производных первого порядка вида: $u = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ является *многомерной поверхностью, состоящей из характеристик*.

Задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка ставится следующим образом. Найти решение уравнения (54.1) , удовлетворяющее условию $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ при $x_n = x_{no}$. Геометрический смысл задачи Коши состоит в следующем: найти некоторую многомерную поверхность, проходящую через заданную линию $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ при заданном значении $x_n = x_{no}$. *Решение задачи Коши* состоит в следующем (см.[17]). Сначала составляется соответствующая нормальная система дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}$ и определяется её решение в виде системы независимых первых интегралов:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_{n-1} \end{cases} . \qquad (54.10)$$

В данную систему подставляем $x_n = x_{no}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{no}) = \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{no}) = \bar{\varphi}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{no}) = \bar{\varphi}_{n-1} \end{cases} , \qquad (54.11)$$

где вместо $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ подставлены $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$. К системе (54.11) применим теорему о системе $n-1$ неявных функций, зависящих от следующих $2(n-1)$ переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$. Так как соответствующий якобиан, очевидно, отличен от нуля: $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})} \neq 0$, то, в соответствии с теоремой о системе неявных функций, получаем следующую систему, эквивалентную системе (54.11):

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}) \\ x_2 = \omega_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}) \end{cases} . \tag{54.12}$$

Подставляя значения переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ в соответствии с (54.12) в заданное условие задачи Коши $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$, получаем:

$$u = f\big(\omega_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}), \omega_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1})\big) . \tag{54.13}$$

Заменив в (54.13) переменные $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$ на соответствующие $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, получим: $u = f\big(\omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \omega_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})\big)$. Подставив теперь из системы (54.10) выражения левых частей первых интегралов в переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$, получаем окончательно искомое решение данной задачи Коши в виде $u = \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, которое удовлетворяет условию $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ при $x_n = x_{no}$.

Пример. Определить решение данной задачи Коши

$$(y-z)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0 , \quad u = 2y(y-z) \quad \text{при} \quad x = 0 .$$

Решение. Составим и решим следующую систему дифференциальных уравнений в симметричной форме: $\frac{dx}{(y-z)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$, $ydy - zdz = 0$, $\varphi_1(x,y,z) = y^2 - z^2 = C_1$, $\frac{dx}{(y-z)^2} = \frac{dy-dz}{z-y}$, $dx + (y-z)d(y-z) = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = 2x + (y-z)^2 = C_2$. Отсюда следует: $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = y^2 - z^2 = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = 2x + (y-z)^2 = C_2 \end{cases}$. Подставим $x = 0$ и заменим в правой части постоянные C_1 и C_2 соответственно на $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$: $\begin{cases} y^2 - z^2 = \bar{\varphi}_1 \\ (y-z)^2 = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$. Полученную систему разрешим относительно y и z: $\begin{cases} y - z = \sqrt{\bar{\varphi}_2} \\ y + z = \frac{\bar{\varphi}_1}{\sqrt{\bar{\varphi}_2}} \end{cases}$, $\begin{cases} y = \frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{2\sqrt{\bar{\varphi}_2}} \\ z = \frac{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2}{2\sqrt{\bar{\varphi}_2}} \end{cases}$. Подставляем в условие задачи Коши: $u = 2y(y-z)$, $u = 2\frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{2\sqrt{\bar{\varphi}_2}}\left(\frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{2\sqrt{\bar{\varphi}_2}} - \frac{\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2}{2\sqrt{\bar{\varphi}_2}}\right)$, $u = \frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{\sqrt{\bar{\varphi}_2}}\sqrt{\bar{\varphi}_2}$, $u = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$. Вместо $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ подставляем φ_1 и φ_2: $u = \varphi_1 + \varphi_2$. Наконец, подставляем содержание левых частей первых интегралов φ_1 и φ_2 и в результате получаем

окончательное выражение решения данной задачи Коши, которое, как затем легко проверить непосредственно, удовлетворяет заданному условию $u = 2y(y - z)$ при $x = 0$:
$u = y^2 - z^2 + 2x + (y - z)^2 = 2y^2 - 2yz + 2x = 2[x + y(y - z)]$.

Пример. Определить решение задачи Коши: $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u = \sin x$ при $y = 0$.

Решение. Решим сначала уравнение $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, $xdx + ydy = 0$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = C_1$.

Подставим $y = 0$ и справа заменим C_1 на $\bar{\varphi}$: $x^2 = \bar{\varphi}$. Отсюда $x = \sqrt{\bar{\varphi}}$. Заменяем $\bar{\varphi}$ на φ , $x = \sqrt{\varphi}$. Подставляем в заданное условие задачи Коши: $u = \sin x$, $u = \sin\sqrt{\varphi}$, далее подставляем $\varphi = x^2 + y^2$ и получаем окончательный ответ решения данной задачи Коши: $u = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример. Определить решение задачи Коши: $x\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^y$ при $z = 1$.

Решение. Решим сначала уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{yz}$. $dy = 0$, $\varphi_1(x, y, z) = y = C_1$,

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{C_1 z}$, $C_1\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, $x^{C_1} = C_2 z$, $x^y = C_2 z$, $\varphi_2(x, y, z) = \frac{x^y}{z} = C_2$. Отсюда

$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = y = C_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = \frac{x^y}{z} = C_2 \end{cases}$. Подставим $z = 1$ и заменим в правой части постоянные C_1 и C_2 соответственно на $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$: $\begin{cases} y = \bar{\varphi}_1 \\ x^y = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$. Подставляем в условие задачи Коши:

$u = x^y$, $u = \bar{\varphi}_2$. Вместо $\bar{\varphi}_2$ подставляем φ_2 : $u = \varphi_2$. Так как $\varphi_2(x, y, z) = \frac{x^y}{z}$, то, следовательно, окончательно получаем решение данной задачи Коши в виде: $u = \frac{x^y}{z}$.

§55. Линейные неоднородные и квазилинейные уравнения. Решение задачи Коши.

Дифференциальное уравнение называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка*, если его можно записать в виде:

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} =$$
$$= R(x_1, x_2, \dots, x_n) . \quad (55.1)$$

Дифференциальное уравнение называется *квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка*, если его можно записать в виде:

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} =$$
$$= R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) . \quad (55.2)$$

Оба данных вида уравнений (55.1) и (55.2) решаются в предположении решения каждого из уравнений в виде произвольной дифференцируемой функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. Оба данных рассматриваемых уравнения сводятся к решению линейного однородного уравнения относительно функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ следующим образом. Заменяем $\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial z}}$, … , $\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}$. Подставив в любое из данных уравнений в краткой записи, имеем: $P_1\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) + P_2\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) + \dots + P_n\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right) = R$ и, следовательно, получаем линейное однородное уравнение вида:

$$P_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + P_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + R\frac{\partial V}{\partial z} = 0 . \qquad (55.3)$$

Для этого уравнения составляем соответствующую систему дифференциальных уравнений в симметрической форме вида: $\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$.

Пусть $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = \mathrm{C}$ – это первый интеграл данной симметрической системы уравнений. Тогда, очевидно, его полный дифференциал имеет вид: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0$. Или, заменяя вектор $\{dx_1, dx_2, \dots , dx_n, dz\}$ на коллинеарный вектор $\{P_1,\ P_2,\ P_3, \dots ,\ P_n, R\}$, получаем:

$P_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + P_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + R\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, то есть левая часть первого интеграла $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C$ является решением этого уравнения в частных производных первого порядка (55.3). Так как $\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$ имеет систему из n первых интегралов: $\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_n \end{cases}$, то левая часть каждого из этих первых интегралов, по доказанному для произвольного первого интеграла $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C$, является аналогично решением уравнения (55.3) .

Покажем, что, более того, *решением уравнения* (55.3*) является произвольная дифференцируемая функция* $V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$. Для доказательства этот вид решения подставляем в уравнение (55.3) . Сначала вычислим те производные, что необходимо подставить в (55.3):

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} .$$

Подставив в (55.3) получаем:

$$\sum_{l=1}^{n} P_l \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + R\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \quad \text{или, что тоже,} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k}\left[\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + R\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right] = 0 \ .$$

Результат в скобках равен нулю, так как, по отмеченному, уравнению (55.3) удовлетворяет левая часть каждого из первых интегралов $\varphi_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z) = C_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Что и требовалось доказать.

Пример. Определить решение уравнения: $(1 + \sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Решение. Искомым решением полагаем $V(x,y,z) = 0$. Сначала определим первые интегралы системы $\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$, то есть $dz - 2dy = 0$, $\varphi_1(x,y,z) = z - 2y = C_1$ и $\frac{dz-dx-dy}{-\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1}$, $\frac{dy}{1} + \frac{d(z-x-y)}{\sqrt{z-x-y}} = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = y + 2\sqrt{z-x-y} = C_2$. Следовательно, решением данного уравнения является $V(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ или $V(z-2y,\ y + 2\sqrt{z-x-y}) = 0$.

Покажем, что это действительно является решением данного уравнения. Так как

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = V(z-2y,\ y+2\sqrt{z-x-y}) = 0 \ , \quad \text{то} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \ , \quad \text{и,}$$

подставляя в данное уравнение, имеем: $(1+\sqrt{z-x-y})(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial z}}) + (-\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial z}}) = 2$, или ,

$$\left(1 + \sqrt{z-x-y}\right)\left[-\frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot 0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}2\frac{1}{2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}2\frac{1}{2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}}\right] + \left[-\frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot(-2) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}[1+2\frac{1}{2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}(-1)]}{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}2\frac{1}{2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}}\right] = 2 \ ,$$

$$\left(1 + \sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}} + 2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}} =$$

$= 2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} + 2\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}$, или, взаимно уничтожая слагаемые $2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}$ и затем, сокращая на $\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}$, имеем: $(z-x-y)^{-\frac{1}{2}} + 1 - 1 + (z-x-y)^{-\frac{1}{2}} = 2(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}$, откуда $0 = 0$. Что и требовалось доказать.

Пример. Определить общее решение уравнения: $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

Решение. Искомым решением полагаем $V(x,y,z) = 0$. Найдём первые интегралы системы $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x-y}$. Очевидно, $x^2 - y^2 = C_1$, $\frac{dz+dx-dy}{0} = \frac{dx}{y}$, $z + x - y = C_2$.

Следовательно, искомое решение уравнения имеет вид: $V(x^2 - y^2,\ z + x - y) = 0$.

Задачи Коши для линейного неоднородного или квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка ставится следующим образом. Найти решение уравнения (55.1) или (55.2) , каждое из которых приводится к следующему аналогичному виду: $P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, при этом искомое решение должно удовлетворять следующему заданному условию: $z=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})$ при $x_n=x_{no}$.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в следующем: найти некоторую многомерную поверхность, проходящую через заданную линию $z=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})$ при заданном значении $x_n=x_{no}$.

Решение задачи Коши как для (55.1), так и для (55.2), состоит в следующем (см.[17]). Сначала составляется соответствующая нормальная система дифференциальных уравнений в симметрической форме: $\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}$ и определяется её общее решение в виде системы: $\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,z)=C_1\\ \varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n,z)=C_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x_1,x_2,\dots,x_n,z)=C_n\end{cases}$. Затем вместо x_n подставляется x_{no} и справа константы C_k заменяются на $\bar{\varphi}_k$: $\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n0},z)=\bar{\varphi}_1\\ \varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n0},z)=\bar{\varphi}_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n0},z)=\bar{\varphi}_n\end{cases}$. Так как координатами общего решения являются независимые первые интегралы, то $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},z)}\neq 0$. Неравенство нулю данного якобиана позволяет по теореме о системе неявных функций последнюю систему записать в следующей эквивалентной форме: $\begin{cases}x_1=\omega_1(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)\\ x_2=\omega_2(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)\\ z=\omega_n(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)\end{cases}$.

Полученные значения переменных $x_1,x_2,\dots,x_{n-1},z$ подставляем в заданное условие задачи Коши $z=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})$. В результате получаем следующее равенство:

$$\omega_n(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)=f\big(\omega_1(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n),\omega_2(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n),\dots,\omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\dots,\bar{\varphi}_n)\big).$$

Далее в этом равенстве заменяем все переменные $\bar{\varphi}_k$ на переменные φ_k :

$$\omega_n(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)=f\big(\omega_1(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n),\omega_2(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n),\dots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)\big)$$

и раскрываем выражения функций $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ через $x_1,x_2,\dots,x_n,z$. В результате получим искомое решение данной задачи Коши, удовлетворяющее заданному условию.

Пример. Определить решение задачи Коши: $x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$, $z=x^2$ при $y=1$.

Решение. Найдём сначала первые интегралы системы $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{x^2+y^2}$, $2\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, $x^2y=C_1$, $\frac{-2xdx+ydy}{-2x^2-2y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2}$, $2xdx-ydy=2dz$, $2z-x^2+\frac{y^2}{2}=C_2$. Составим из них систему: $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x^2y = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = 2z - x^2 + \frac{y^2}{2} = C_2 \end{cases}$. Подставив $y = 1$ и заменив C_1, C_2 на $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, получим $\begin{cases} x^2 = \bar{\varphi}_1 \\ 2z - x^2 + \frac{1}{2} = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = \bar{\varphi}_1 \\ z = \frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{2} - \frac{1}{4} \end{cases}$. Отсюда значения переменных подставляем в заданное условие задачи Коши $z = x^2$, $\frac{\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2}{2} - \frac{1}{4} = \bar{\varphi}_1$ или $2\bar{\varphi}_2 - 2\bar{\varphi}_1 = 1$. Далее заменяем $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ на φ_1 и φ_2: $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 1$ и, подставляя содержание функций φ_1 и φ_2, получаем окончательное выражение решения данной задачи Коши: $4z - 2x^2 + y^2 - 2x^2y = 1$, или $z = \frac{1}{4}(2x^2y + 2x^2 - y^2 + 1)$. Полученное решение, как легко проверить, удовлетворяет заданному условию $z = x^2$ при $y = 1$.

Пример. Определить решение задачи Коши $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$, проходящее через линию пересечения плоскостей $\begin{cases} y = 2z \\ x + 2y = z \end{cases}$.

Решение. Система дифференциальных уравнений имеет вид: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$, откуда, как легко видеть, общим решением будет $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = y^2 - z^2 = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = x(y - z) = C_2 \end{cases}$. Линию пересечения плоскостей можно записать следующим образом: $\begin{cases} y = 2z \\ x = -3z \end{cases}$. Подставляем эти значения в выражения первых интегралов и заменяем C_1, C_2 на $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$: $\begin{cases} 3z^2 = \bar{\varphi}_1 \\ -3z(2z - z) = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3z^2 = \bar{\varphi}_1 \\ -3z^2 = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$. Отсюда следует: $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = 0$, или, заменяя на φ_1 и φ_2, получаем $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ и, учитывая значения φ_1 и φ_2, определяем искомое решение задачи Коши: $y^2 - z^2 + x(y - z) = 0$ или окончательно $(x + y + z)(y - z) = 0$.

В заключение рассмотрим геометрическую интерпретацию решения в трёхмерном пространстве следующего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка $P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$. Предположим, что $z = f(x,y)$ является решением этого уравнения. Известно, что в этом случае вектор $\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\}$ является нормальным вектором к этой поверхности $z = f(x,y)$. В то же время, если данное уравнение записать как скалярное произведение ортогональных векторов $(\{P,Q,R\}, \{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\}) = 0$, то отсюда следует, что вектор $\{P,Q,R\}$ определяет касательную к поверхности $z = f(x,y)$ в любой её точке, то есть касательную $\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}$, так как $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. Эта касательная, таким образом, касается любого решения уравнения $P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$ в каждой такой точке, то есть касается характеристики. Поверхность же $z = f(x,y)$ – это интегральная поверхность, состоящая из характеристик. Общий вид характеристик – это пересечение поверхностей $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = C_2 \end{cases}$, а общий вид поверхности, состоящей из характеристик, имеет вид: $V\big(\varphi_1(x,y,z),\ \varphi_2(x,y,z)\big) = 0$.

Пример. Решить задачу Коши $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$ $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Сначала решаем соответствующую систему дифференциальных уравнений:
$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$, $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x^2 - y^2 = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = x^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$, проводим замену: $x = a$ $\begin{cases} a^2 - y^2 = \bar{\varphi}_1 \\ a^2 - z^2 = \bar{\varphi}_2 \end{cases}$,
$\begin{cases} y^2 = a^2 - \bar{\varphi}_1 \\ z^2 = a^2 - \bar{\varphi}_2 \end{cases}$. Далее подставляем в условие $y^2 + z^2 = a^2$ задачи Коши:
$a^2 - \bar{\varphi}_1 + a^2 - \bar{\varphi}_2 = a^2$, $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = a^2$. Проводим соответствующую замену: $\varphi_1 + \varphi_2 = a^2$, $x^2 - y^2 + x^2 - z^2 = a^2$, $2x^2 - y^2 - z^2 = a^2$ – полученное решение данной задачи Коши является двуполостным параболоидом. Характеристики – гиперболы $x^2 - y^2 = C_1$ и $x^2 - z^2 = C_2$. Сечением поверхности двуполостного параболоида при $x = a$ является окружность $y^2 + z^2 = a^2$.

Приложение.

Дифференциальные уравнения в задачах авиационной техники.

Пример № 1. Скорость подъёма реактивного самолёта меняется с высотой по следующему закону: $V = \frac{11000-H}{1000}$. Определить зависимость набранной высоты $H(t)$ от времени подъёма t , если $H\big|_{t=0} = H_0$ $(H_0 < 11000)$. Найти время подъёма на высоту $H_1 = 8000$ м , если $H_0 = 0$.

Решение. Скорость подъёма реактивного самолёта записывается дифференциальным уравнением $\frac{dH}{dt} = \frac{11000-H}{1000}$. В данном дифференциальном уравнении с разделяющимися переменными после разделения переменных получаем: $\frac{dH}{11000-H} = 0{,}001dt$. Проинтегрируем это уравнение: $\int\frac{dH}{11000-H} = 0{,}001\int dt$. Результат интегрирования имеет вид:
$-\ln\big|11000 - H\big| = 0{,}001t + \ln C$ или $\ln\big|C(11000 - H)\big| = -0{,}001t$. Отсюда

$C(11000 - H) = e^{-0,001t}$, и общее решение принимает вид: $H = 11000 - \frac{1}{C} e^{-0,001t}$.

Для решения данной задачи Коши определяем значение произвольной постоянной. При $t = 0$ по условию $H = H_0$. Следовательно, $H_0 = 11000 - \frac{1}{C}$ и $\frac{1}{C} = 11000 - H_0$. В результате получаем $H = H(t) = 11000 - (11000 - H_0)e^{-0,001t}$. Ответ на первый вопрос задачи об определении зависимости набранной высоты от времени подъёма получен.

Определим теперь время подъёма t_1 на высоту $H_1 = 8000$ м . Для этого в полученный ответ по условию задачи подставим H_1 =8000 , $H_0 = 0$ и $t = t_1$. В результате имеем: $8000 = 11000 - (11000 - 0)e^{-0,001t_1}$. Отсюда следует, что: $e^{-0,001t_1} = \frac{3}{11}$ и окончательно имеем: $t_1 = -1000 \ln\frac{3}{11} \cong (-1000)(-1,29929)$ =1299,29 сек. или 21,66 мин .

Пример № 2. Для ракеты с постоянной тягой скорость полёта и высота подъёма связаны дифференциальным уравнением $V\frac{dV}{dH} = \frac{g}{k} - \frac{g}{(1+\frac{H}{R})^2}$, где $R -$ радиус планеты, k и $g -$ постоянные. Найти зависимость $V = V(H)$ при начальном условии $V(0) = 0$.

Решение. Разделяя переменные в данном уравнении с разделяющимися переменными, получим $VdV = (\frac{g}{k} - \frac{gR^2}{(R+H)^2})dH$. В результате интегрирования обеих частей имеем: $\frac{V^2}{2} = \frac{g}{k}H + \frac{gR^2}{R+H} + C$. Используя начальное условие $V(0) = 0$, определяем значение постоянной C : $0 = 0 + \frac{gR^2}{R} + C$, $C = -gR$. Следовательно, искомая зависимость имеет вид : $V^2 = 2g\,(\frac{H}{k} + \frac{R^2}{R+H} - R)$, или $V^2 = 2gH(\frac{1}{k} - \frac{R}{R+H})$.

Пример № 3. Связь абсолютной высоты полёта H и величины атмосферного давления p выражается уравнением вида: $\frac{dH}{dp} = \frac{Rf(p)}{p}$. Найти зависимость $H = H(p)$, если для летательных аппаратов разного типа: $f_1(p) = p$, $f_2(p) = p - a$, $f_3(p) = a - \sqrt{p}$. В задаче $R -$ газовая постоянная, $a -$ константа.

Решение. Разделяя переменные в уравнении, имеем: $dH = R\frac{f(p)}{p}dp$. Интегрируя в различных случаях летательных аппаратов, получаем:

$H_1 = R\int \frac{p}{p}dp + C = R\int dp + C = Rp + C$,

$H_2 = R\int \frac{p-a}{p}dp + C = R\int dp - aR\int \frac{1}{p}dp = Rp - aR\ln p + \ln C = Rp + \ln\frac{C}{p^{aR}}$,

$H_3 = R\int \frac{a-\sqrt{p}}{p}dp + C = R\int \frac{a}{p}dp - R\int \frac{1}{\sqrt{p}}dp + \ln C = aR\ln p - 2R\sqrt{p} + \ln C =$

$= \ln Cp^{aR} - 2R\sqrt{p}$.

Пример № 4. Уравнение, описывающее распределение давления воздуха p с изменением высоты H, имеет вид: $T\frac{dp}{dH} = ap$, где $T -$ температура среды (в градусах Кельвина), $a -$ коэффициент пропорциональности. Определить зависимость $p = p(H)$ при начальном условии $p(0) = p_0$. Найти температуру среды за бортом самолёта, совершающего полёт на высоте 10000 м, если дано, что $a = -0{,}03$ К/м, $p_0 = 101{,}3 \cdot 10^3$ н/м^2, $p(10000) = 26{,}5 \cdot 10^3$ н/м^2 (Ньютон на квадратный метр).

Решение. Разделяя переменные, имеем: $T\frac{dp}{p} = adH$. В результате интегрирования получаем: $T\ln p = aH + C$. Используя начальное условие, находим: $T\ln p_0 = 0 + C$. Следовательно, $T\ln p = aH + T\ln p_0$ или $\ln p = a\frac{H}{T} + \ln p_0$ и зависимость $p(H)$ имеет вид $p(H) = p_0\, e^{a\frac{H}{T}}$. Уравнение же для температуры имеет вид: $T = \frac{aH}{\ln p - \ln p_0}$. Таким образом, искомая температура среды за бортом самолёта, совершающего полёт на высоте 10000 м, будет $T = \frac{-0{,}03 \cdot 10000}{\ln(26{,}5\cdot 10^3) - \ln(101{,}3 \cdot 10^3)} = \frac{-300}{\ln\left(\frac{26{,}5}{101{,}3}\right)} = \frac{-300}{\ln(0{,}262)} = \frac{-300}{-1{,}34} = 223$ К.

Пример № 5. Самолёт касается посадочной полосы со скоростью $V = 230$ км/ч. Составить дифференциальное уравнение, связывающее скорость V и ускорение a при движении, если принять движение равнозамедленным с постоянным ускорением. Каково время пробега самолёта до полной остановки в случае $a = 2$ м/с^2 ?

Решение. Дифференциальное уравнение, очевидно, имеет вид $\frac{dV}{dt} = -a$, так как движение самолёта равнозамедленное. Отсюда $dV = -adt$, $V = -at + C$. Так как при $t = 0$ $V = 230$ км/час $= \frac{230\cdot 1000}{3600}$ м/сек $\cong 64$ м/сек, то из равенства $V = -at + C$ при $t = 0$ следует $64 = 0 + C$. Следовательно, из $V = -at + 64$ следует, что, так как при остановке самолёта $V = 0$, и в процессе пробега самолёта $a = 2$ м/с^2, то $0 = -2t + 64$, откуда искомое время пробега самолёта до полной остановки составляет $t = 32$ сек.

Пример № 6. При исследовании профильного сопротивления лопасти вертолёта рассматривается уравнение $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Найти общий интеграл уравнения. В данном однородном уравнении проводим замену переменных $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$. В результате подстановки в уравнение получаем $u'x + u = e^u + u$. Отсюда $\frac{du}{dx} = e^u$, $e^{-u}du = dx$, $-e^{-u} = x + C$. Проведя обратную подстановку, находим искомый общий интеграл $x + e^{-\frac{y}{x}} + C = 0$.

Пример № 7. В теории газовых двигателей используется следующее дифференциальное уравнение: $xy' = y(\ln y - \ln x)$. Найти его решение.

Решение. В данном однородном дифференциальном уравнении проводим замену переменных $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$. В результате подстановки в уравнение получаем $x(u'x + u) = ux\ln u$. Так как $x = 0$ решением не является, то при $x \neq 0$, сокращая на x , получаем уравнение $u'x + u = u\ln u$ или $u'x = u(\ln u - 1)$. Разделяя переменные, получаем $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$, $\frac{d\ln u}{\ln u - 1} = \frac{dx}{x}$, $\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C$, $\ln u - 1 = Cx$, $u = e^{Cx+1}$. Проведя обратную подстановку, получаем ответ $y = x\, e^{Cx+1}$.

Пример № 8. Дифференциальное уравнение движения самолёта при пассивном методе полёта по направлению на радиостанцию в определённых метеорологических условиях имеет вид $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$, где x, y – координаты месторасположения самолёта относительно радиостанции. Найти общее решение уравнения.

Решение. В данном однородном уравнении проводим замену переменных $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$.
В результате данной подстановки получаем $(x^2 + u^2x^2)dx = x^2u(xdu + udx)$. Заметим, что так как $x = 0$ является решением, то полагая далее, что $x \neq 0$ и сокращая на x^2 , имеем $(1 + u^2)dx = uxdu + u^2dx$, или $dx = uxdu$, $\frac{dx}{x} = udu$, $\ln x = \frac{u^2}{2} + \ln C$, $x = C\, e^{\frac{u^2}{2}}$.

Применив обратную подстановку, получаем ответ $x = C\, e^{\frac{y^2}{2x^2}}$. При этом $x = 0$ находится в составе полученного общего решения при $C = 0$.

Пример № 9. Траектория движения летательного аппарата может быть задана уравнением: $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$, $y\big|_{x=1} = e^{-0,5}$, где x, y – координаты местоположения аппарата относительно станции слежения. Найти частное решение данного уравнения .

Решение. В данном однородном уравнении проводим замену переменных $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$.
В результате подстановки в уравнение получаем $x(u'x + u) = ux\,(1 + \ln u)$. Взаимно уничтожив слагаемые ux и сократив обе части равенства на x , так как $x = 0$ решением не является, имеем $u'x = u\ln u$, $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$, $\ln(\ln u) = \ln x + \ln C$, $\ln u = Cx$, $\ln\frac{y}{x} = Cx$, $\ln y - \ln x = Cx$. Применяя начальное условие, получаем $\ln e^{-0,5} - \ln 1 = C \cdot 1$, то есть $C = -0,5 - 0 = -0,5$. Следовательно, $\ln\frac{y}{x} = -0,5\,x$, откуда получаем ответ $y = xe^{-0,5x}$.

Пример № 10. Поперечная динамическая управляемость самолёта исследуется по решению уравнения $y' + ay = b\,\sin\omega t$, где $y = y(t)$, a, b, ω – постоянные, характеризующие динамические свойства самолёта и параметры возмущения. Найти общее решение уравнения и частное его решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y' + ay = 0$: $\frac{dy}{dt} = -ay$, $\frac{dy}{y} = -adt$, $\ln y = -at + \ln C$, $y = Ce^{-at}$. Искомое решение представляем в виде $y = C(t)\, e^{-at}$ и подставляем в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(t)}{dt} e^{-at} = b \sin\omega t$, $\frac{dC(t)}{dt} = b\, e^{at} \sin\omega t$, $C(t) = b\int e^{at} \sin\omega t\, dt + C_1$. Вычислив интеграл $\int e^{at} \sin\omega t\, dt$ дважды интегрированием по частям с переносом в левую часть, получаем: $\int e^{at} \sin\omega t\, dt = \frac{e^{at}}{a^2+\omega^2}[a \sin\omega t - \omega\cos\omega t]$. Следовательно, результат для $C(t)$ имеет вид $C(t) = \frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}[a \sin\omega t - \omega\cos\omega t] + C_1$. Таким образом, общее решение данного неоднородного уравнения будет $y(t) = C_1\, e^{-at} + \frac{b}{a^2+\omega^2}[a \sin\omega t - \omega\cos\omega t]$. В соответствии с начальным условием $y(0) = 0$ имеем $0 = C_1 + \frac{b}{a^2+\omega^2}(-\omega)$ и $C_1 = \frac{b\omega}{a^2+\omega^2}$. Итак, окончательно, искомое частное решение имеет вид $y(t) = \frac{b}{a^2+\omega^2}[a \sin\omega t - \omega\cos\omega t + +\omega e^{-at}]$.

Пример № 11. Поперечная динамическая управляемость самолёта исследуется по решению уравнения $y' + ay = b\ t$, где $y = y(t)$, $a, b, \omega -$ постоянные, характеризующие динамические свойства самолёта и параметры возмущения. Найти общее решение уравнения и частное его решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y' + ay = 0$: $\frac{dy}{dt} = -ay$, $\frac{dy}{y} = -adt$, $\ln y = -at + \ln C$, $y = Ce^{-at}$. Искомое решение представляем в виде $y = C(t)\, e^{-at}$ и подставляем в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(t)}{dt} e^{-at} = b\ t$, $\frac{dC(t)}{dt} = b\, e^{at} t$, $C(t) = b\int e^{at} t\, dt + C_1 = b\frac{t}{a} e^{at} - b\frac{1}{a^2} e^{at} + C_1$, $y = C_1\, e^{-at} + b\frac{t}{a} - b\frac{1}{a^2}$, $0 = C_1 - b\frac{1}{a^2}$, $C_1 = b\frac{1}{a^2}$. Итак, окончательный ответ имеет вид: $y = b\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$.

Пример № 12. Поперечная динамическая управляемость самолёта исследуется по решению уравнения $y' + ay = be^{-t}$, где $y = y(t)$, $a, b, \omega -$ постоянные, характеризующие динамические свойства самолёта и параметры возмущения. Найти общее решение уравнения и его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y' + ay = 0$: $\frac{dy}{dt} = -ay$, $\frac{dy}{y} = -adt$, $\ln y = -at + \ln C$, $y = Ce^{-at}$. Искомое решение представляем в виде $y = C(t)\, e^{-at}$ и подставляем в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(t)}{dt} e^{-at} = be^{-t}$,

$\frac{dC(t)}{dt} = b\, e^{(a-1)t}$. Сначала рассмотрим случай, когда $a \neq 1$. В этом случае , очевидно, $C(t) = b\int e^{(a-1)t}\, dt + C_1 = b\frac{1}{a-1}e^{(a-1)t} + C_1$, $y = C_1e^{-at} + b\frac{1}{a-1}e^{-t}$, $0 = C_1 + b\frac{1}{a-1}$, $C_1 = -b\frac{1}{a-1}$, $y = b\frac{1}{a-1}(e^{-t} - e^{-at})$. Если теперь полагаем, что $a = 1$, то решением однородного уравнения будет $y = C\, e^{-t}$. Искомое решение представляем в виде $y = C(t)e^{-t}$ и, подставляя в данное неоднородное уравнение, имеем $\frac{dC(t)}{dt}\, e^{-t} = be^{-t}$, $\frac{dC(t)}{dt} = b$, $C(t) = b\int\, dt + C_1 = bt + C_1$, $y = C_1e^{-t} + bte^{-t}$, $0 = C_1$, и, следовательно, получаем окончательный ответ в виде $y = bte^{-t}$.

Пример № 13. Движение груза, сброшенного с вертолёта, при вертикальном падении задано уравнением $S' + S = kt$, где $k -$ постоянный коэффициент, $S = S(t) -$ расстояние, отсчитываемое от точки сбрасывания груза, $t -$ текущее время. Найти зависимость $S(t)$ при начальном условии $S(0) = 0$.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $S' + S = 0$: $\frac{dS}{dt} = -S$, $\frac{dS}{S} = -dt$, $\ln S = -t + \ln C$, $S = Ce^{-t}$. Искомое решение представляем в следующем виде: $y = C(t)\, e^{-t}$ и подставляем в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(t)}{dt}\, e^{-t} = kt,$ $\frac{dC(t)}{dt} = kt\, e^{t},$ $C(t) = \int kte^{t}\, dt + C_1 = ke^{t}(t-1) + C_1$. Используя начальное условие задачи, получаем: $0 = -k + C_1$, $C_1 = k$, и, следовательно, искомая зависимость имеет следующий вид: $S(t) = k(e^{-t} + t - 1)$.

Пример № 14. Движение самолёта при разбеге описывается уравнением $S' + 2\,S = 4t + 4t^2$. Найти закон движения $S = S(t)$ м , если отсчёт пути начинается при $t = 0$ сек. Определить время t до момента отделения носового колеса, если лётчик начинает двигать ручку управления при достижении скорости разбега 170 км/час.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $S' + 2\,S = 0$: $\frac{dS}{dt} = -2\,S$, $\frac{dS}{S} = -2dt$, $\ln S = -2t + \ln C$, $S = C\, e^{-2t}$. Искомое решение представляем в виде $y = C(t)\, e^{-2t}$ и подставляем этот вид решения в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(t)}{dt}\, e^{-2t} = 4t + 4t^2$, $\frac{dC(t)}{dt} = 4(t + t^2)e^{2t}$, $C(t) = 4\int(t + t^2)e^{2t}\, dt + C_1$,

$C(t) = 2(t + t^2)e^{2t} - 2\int(1 + 2t)e^{2t}\, dt = 2(t + t^2)e^{2t} - (1 + 2t)e^{2t} + 2\int e^{2t}\, dt + C_1 =$
$= 2(t + t^2)e^{2t} - (1 + 2t)e^{2t} + e^{2t} + C_1 = 2t^2e^{2t} + C_1$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид: $S(t) = C_1e^{-2t} + 2t^2.$ При $t = 0$ следует, что: $0 = C_1$ и $S(t) = 2t^2,$ $v(t) = \frac{dS}{dt} = 4t$. Таким образом, при $v(t) = 170$ км/час находим,

что искомое время момента отделения носового колеса самолёта равняется:

$t = \frac{v(t)}{4} = \frac{170}{4} = \frac{170 \cdot 1000}{4 \cdot 3600} = \frac{1700}{144} \cong 11{,}8$ сек.

Пример № 15. Для установления зависимости тяги P турбореактивного двигателя от числа оборотов турбины n составлено уравнение $p' + \frac{p}{n} = 4an^2$, где a —постоянная. Определить $P = P(n)$, если $P(1000) = 10^9 a$.

Решение. Данное линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $P' + \frac{P}{n} = 0$: $\frac{dP}{dn} = -\frac{P}{n}$, $\frac{dP}{P} = -\frac{dn}{n}$, $P = -\ln n + \ln C$, $P = C\frac{1}{n}$. Искомое решение представляем в виде $P = C(n)\frac{1}{n}$ и подставляем этот вид решения в данное неоднородное уравнение: $\frac{dC(n)}{dn}\frac{1}{n} = 4an^2$, $dC(n) = 4an^3 dn$, $C(n) = an^4 + C_1$. Следовательно, $P(n) = an^3 + \frac{C_1}{n}$. Используя начальное условие, получаем $P(1000) = 10^9 a$, $10^9 a = a(1000)^3 + \frac{C_1}{1000}$ или $10^9 a = 10^9 a + \frac{C_1}{1000}$, откуда $C_1 = 0$. Таким образом, искомое решение имеет вид: $P(n) = an^3$.

Пример № 16. В горизонтальном полёте самолёта скорость V на данном угле атаки и данной высоте связана с весом самолёта G уравнением $4GV' - V = a\sqrt{G}$, где a — постоянная. Определить зависимость $V = V(G)$ при условии, что $V(10^4) = 100\,a$.

Решение. Данное линейное уравнение, которое может быть записано в следующем виде $V' - \frac{V}{4G} = \frac{a\sqrt{G}}{4G}$, решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение: $V' - \frac{V}{4G} = 0$, $\frac{dV}{dG} = \frac{V}{4G}$, $\frac{dV}{V} = \frac{dG}{4G}$, $\ln V = \frac{1}{4}\ln G + \ln C$, $V = C\,G^{\frac{1}{4}}$. Искомое решение представляем в виде $V = C(G)G^{\frac{1}{4}}$ и в результате подстановки этого вида решения в данное неоднородное уравнение получаем: $\frac{dC(G)}{dG}G^{\frac{1}{4}} = \frac{a\sqrt{G}}{4G}$, $dC(G) = \frac{a}{4}G^{-\frac{3}{4}}dG$, $C(G) = a\,G^{\frac{1}{4}} + C_1$. Следовательно, общее решение имеет вид: $V(G) = C_1 G^{\frac{1}{4}} + aG^{\frac{1}{2}}$. В соответствии с начальным условием получаем: $V(10^4) = 100\,a$, $100\,a = C_1 \cdot 10 + 100\,a$. Таким образом, $C_1 = 0$, и искомая зависимость имеет вид: $V(G) = a\sqrt{G}$.

Пример № 17. Авиационный высотомер состоит из сильфона, разделённого диафрагмой, смещение которой θ возникает за счёт изменения с высотой h статического давления. Диафрагма связана со стрелкой прибора. Система описывается дифференциальным уравнением $\dot{\theta} + a\theta = b\dot{h}$, где a и b — постоянные. Найти реакцию прибора, если самолёт при $t = 0$ после участка горизонтального полёта на высоте h_0 при значении

$\theta = 0$, начал набирать высоту с постоянной вертикальной скоростью V , то есть $h = h_0 + Vt$. Указать вид вынужденной $\theta_{\text{В}}$ и переходной $\theta_{\text{П}}$ составляющих реакции.

Решение. Из равенства $h = h_0 + Vt$ следует, что $\dot{h} = V$, и, следовательно рассматриваемое дифференциальное уравнение теперь может быть записано в виде: $\dot{\theta} + a\theta = bV$. Это линейное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $\dot{\theta} + a\theta = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = -a\theta$, $\frac{d\theta}{\theta} = -\,adt$, $\ln\theta = -at + \ln C$, $\theta = Ce^{-at}$. Искомое решение представляем в следующем виде: $\theta = C(t)e^{-at}$ и в результате подстановки этого вида решения в данное неоднородное уравнение получаем: $\frac{dC(t)}{dt}e^{-at} = bV$, $dC(t) = bVe^{at}dt$, $C(t) = \frac{b}{a}Ve^{at} + C_1$. Таким образом, $\theta(t) = C_1e^{-at} + \frac{b}{a}V$. В соответствии с начальным условием $\theta(0) = 0$ имеем $0 = C_1 + \frac{b}{a}V$, $C_1 = -\frac{b}{a}V$, и, следовательно, $\theta(t) = -\frac{b}{a}Ve^{-at} + \frac{b}{a}V$. В полученном результате можно заметить, что переходная составляющая реакции имеет вид: $\theta_{\text{П}} = -\frac{b}{a}Ve^{-at}$, соответствующая общему решению однородного уравнения. Вынужденная составляющая реакции, соответствующая правой части данного неоднородного уравнения имеет следующий вид $\theta_{\text{В}} = \frac{b}{a}V$.

Пример № 18. Траектория движения самолёта задана в некоторой декартовой системе координат, связанной с пунктом наблюдения уравнением $y'x + y = -xy^2$ при $x \in [e, 10]$. Определить траекторию самолёта $y = y(x)$, проходящую через точку $A(e, e^{-1})$.

Решение. Это уравнение Бернулли решаем методом введения двух функций: $y = uv$. Подставляем в данное уравнение: $u'vx + uv'x + uv = -xu^2v^2$. Приравниваем нулю сумму следующих слагаемых левой части: $u'vx + uv = 0$. После сокращения на v определяем решение уравнения $u'x + u = 0$, $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$, $\ln u = -\ln x$, $u = \frac{1}{x}$. Таким образом, замена переменных имеет вид: $y = \frac{1}{x}v$. Тогда остаётся решить уравнение относительно v : $uv'x = -xu^2v^2$, $v'x = -xuv^2$, $v'x = -x\frac{1}{x}v^2$, $\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{v} = -\ln x - \ln C$, $v = \frac{1}{\ln Cx}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: $y = \frac{1}{x\ln Cx}$. Используя начальное условие $y(e) = e^{-1}$, имеем $e^{-1} = \frac{1}{e\ln Ce}$, откуда получаем $C = 1$. Таким образом, искомая траектория движения самолёта имеет вид: $y = \frac{1}{x\ln x}$.

Пример № 19. Дальность полёта L тела, брошенного с небольшой фиксированной скоростью под углом θ к горизонту, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению $\frac{2}{L}\cos2\theta d\theta - \frac{\sin2\theta}{L^2}dL = 0$. Найти связь между L и θ.

Решение. Так как $\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{2}{L}\cos 2\theta\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin 2\theta}{L^2}\right)=-\frac{\cos 2\theta}{L^2}$, то данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах некоторой функции $U(L,\theta)$.

Решаем это уравнение методом восстановления функции по её полному дифференциалу: $U(L,\theta)=\int\frac{2}{L}\cos 2\theta d\theta+\varphi(L)=\frac{1}{L}\sin 2\theta+\varphi(L)$, $\frac{\partial U}{\partial L}=-\frac{\sin 2\theta}{L^2}+\frac{d\varphi}{dL}=-\frac{\sin 2\theta}{L^2}$, $\frac{d\varphi}{dL}=0$, $\varphi(L)=C$, $U(L,\theta)=\frac{1}{L}\sin 2\theta+C$. Следовательно, решение данного уравнения имеет вид: $\frac{1}{L}\sin 2\theta=C$, или $\sin 2\theta=CL$.

Пример № 20. Зависимость между углом подъёма самолёта θ и качеством самолёта K выражается уравнением $\frac{K}{\cos^2\theta}d\theta+\mathrm{tg}\theta\, dK=0$. Решить уравнение, найдя частное решение, удовлетворяющее условию $K=1$ при $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{K}{\cos^2\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}(\mathrm{tg}\theta)=\frac{1}{\cos^2\theta}$, то данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах некоторой функции $U(K,\theta)$. Решаем это уравнение методом восстановления функции по её полному дифференциалу: $U(K,\theta)=\int\frac{K}{\cos^2\theta}d\theta+\varphi(K)=K\mathrm{tg}\theta+\varphi(K)$, $\frac{\partial U}{\partial K}=\mathrm{tg}\theta+\frac{d\varphi}{dK}=\mathrm{tg}\theta$, $\frac{d\varphi}{dK}=0$, $\varphi(K)=C$, $U(K,\theta)=K\mathrm{tg}\theta+C$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид: $K\mathrm{tg}\theta=C$. Определим частное решение по следующим данным условиям примера $K=1$ при $\theta=\frac{\pi}{4}$, $1\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=C$, $C=1$. Итак, искомое частное решение имеет вид: $K\mathrm{tg}\theta=1$.

Пример № 21. Исследование относительного коэффициента полезного действия турбины, установленной на летательном аппарате, связано с решением дифференциального уравнения $\frac{y(b+2x)}{x(b+x)}dx-dy=0$. Относится ли это уравнение к уравнениям в полных дифференциалах? Показать, что мы придём к уравнению в полных дифференциалах, если умножим обе части данного уравнения на интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{x(b+x)}$. Найти решение полученного уравнения.

Решение. Так как, очевидно, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y(b+2x)}{x(b+x)}\right)\neq\frac{\partial}{\partial x}(-1)$, то данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Однако в результате умножения на интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{x(b+x)}$ получаем уравнение $\frac{y(b+2x)}{(xb+x^2)^2}dx-\frac{1}{x(b+x)}dy=0$. Это уравнение уже является уравнением в полных дифференциалах, так как в данном случае имеем: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y(b+2x)}{(xb+x^2)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xb+x^2}\right)=\frac{b+2x}{(xb+x^2)^2}$. Решим полученное уравнение с помощью интегрирования криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала:

$$U(x,y)=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y\left[-\frac{1}{x(b+x)}\right]dy=-\frac{y}{x(b+x)}+C\ .$$

Следовательно, решение данного уравнения имеет вид: $\frac{y}{x(b+x)}=C$.

Пример № 22. Частный интеграл следующего дифференциального уравнения $3x^2e^y+(x^3e^y-1)y'=0$, удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$, представляет собой траекторию движения самолёта в системе координат, связанной с точкой наблюдения. Найти уравнение кривой траектории самолёта.

Решение. Уравнение можно записать в виде $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$. Так как $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2e^y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^3e^y-1)=3x^2e^y$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Решим полученное уравнение в полных дифференциалах с помощью интегрирования криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала:

$$U(x,y)=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(x^3e^y-1)dy=x^3+x^3e^y-x^3-y+C=x^3e^y-y+C\ .$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид: $x^3e^y-y=C$. Используя начальное условие $y(0)=1$, определяем $0-1=C$. Таким образом, $C=-1$ и искомое уравнение кривой траектории самолёта имеет вид $y=x^3e^y-1$.

Пример № 23. Самолёт весом 500 кН касается посадочной полосы, имея скорость 227 км/час, и движется до полной остановки. Длина пути зависит от эффекта применения тормозящих устройств, включения реверсивной тяги, величины лобового сопротивления. Определить необходимую суммарную величину сил сопротивления, действующих на аппарат, если на длину пути и время движения по полосе наложены следующие ограничения: $S_k=1200$ м , $t_k=30$сек .

Решение. Обозначая сумму сил сопротивления движению самолёта через Q , массу самолёта через m , согласно 2–му закону Ньютона получим $m\,S''(t)=-Q$. Последовательно интегрируя, получаем: $m\,S'(t)=-Qt+C_1$, $m\,S(t)=-Q\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$. Очевидно, начальные условия данной задачи имеют вид: $V(0)=S'(0)=227$км/час или $V(0)=\frac{227\cdot1000}{3600}\cong63$м/сек . Кроме того, так как $S(0)=0$, то, подставляя эти начальные данные в решение, получим: $m\,S'(0)=-0+C_1$, $m\,S(0)=0+C_2$, или $m\,63=C_1$, $m\cdot0=C_2$. Следовательно $C_1=63\,m$, $C_2=0$, и зависимость пройденного самолётом пути от времени выражается формулой $S(t)=-Q\frac{t^2}{2m}+63\,t$, или, что то же, $S(t_k)=S_k=-Q\frac{{t_k}^2}{2m}+63\,t_k$. Отсюда, очевидно, $Q=(63t_k-S_k)\frac{2m}{{t_k}^2}$ или (учитывая, что $m = \frac{P}{g}$, где $g \cong 9{,}8$ м/сек^2) $Q = (63t_k - S_k)\frac{2\cdot P}{g\cdot {t_k}^2}$. Так как по условию задачи $P = 500$ кН , $S_k = 1200$ м , $t_k = 30$сек , то искомое значение необходимой суммарной величины сил сопротивления движению самолёта составляет следующую величину:

$Q = (63\cdot 30 - 1200)\frac{2\cdot 500}{9{,}8\cdot 30^2} \cong 78$ кН .

Пример № 24. Дифференциальное уравнение движения цилиндрической ракеты имеет вид $\frac{d^2y}{d\lambda^2} = \frac{a}{1-\lambda} - b$, где $y -$ высота подъёма; $\lambda -$ отношение израсходованной массы ко всей начальной массе ракеты; $a\,, b -$ постоянные параметры. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным данным: $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$.

Решение. Последовательно интегрируя данное дифференциальное уравнение, получим: $\frac{dy}{d\lambda} = -a\ln|1-\lambda| - b\lambda + C_1$, $y(\lambda) = -a\int \ln|1-\lambda|d\lambda - b\frac{\lambda^2}{2} + C_1\lambda + C_2$ или, в результате вычисления интеграла $\int \ln|1-\lambda|d\lambda$ по частям, имеем значение $y(\lambda)$ в виде: $y(\lambda) = -a\lambda\ln|1-\lambda| + a\lambda + a\ln|1-\lambda| - b\frac{\lambda^2}{2} + C_1\lambda + C_2$. Применяя условий начальных данных для $\frac{dy}{d\lambda}$ и $y(\lambda)$, получаем: $0 = C_1$, $0 = C_2$. Следовательно, частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид: $y(\lambda) = a\lambda - b\frac{\lambda^2}{2} - a\lambda\ln|1-\lambda| + a\ln|1-\lambda|$ или, что то же,

$y(\lambda) = a\lambda - b\frac{\lambda^2}{2} + a(1-\lambda)\ln|1-\lambda|$.

Пример № 25. Изучение колебаний консольной балки в газотурбинном двигателе даёт дифференциальное уравнение вида $y'' = a(b-x)$, где постоянные коэффициенты $a\,, b$ связаны с конструкцией балки. Найти общее решение.

Решение. Последовательно интегрируя данное дифференциальное уравнение, получим: $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2}(b-x)^2 + C_1$, $y(x) = \frac{a}{6}(b-x)^3 + C_1x + C_2$. Полученное общее решение можно также записать так: $y(x) = \frac{a}{6}(b^3 - 3b^2x + 3bx^2 - x^3) + C_1x + C_2$ или

$y(x) = -\frac{a}{6}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + C_1x + C_2$.

Пример № 26. При экспериментальной обработке ракетного двигателя необходимо решение следующей задачи Коши: $2yy'' = (y')^2$, $y'(-1) = 16$, $y(-1) = 4$, где $y(t) -$ функция, которая характеризует изменение давления в камере сгорания при определённых условиях работы двигателя. Найти решение данной задачи Коши.

Решение. Для решения уравнения применяем замену функции $y' = z(y)$. В этом случае $y'' = \frac{dy\prime}{dt} = \frac{dy\prime}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy}z$. Проведём эту замену в данном уравнении $2y\frac{dz}{dy}z = z^2$. Уравнение запишем так $z\left(2y\frac{dz}{dy} - z\right) = 0$. При $z = 0$ имеем $y' = 0$ или $y(t) = C$.

Одно из общих решений получено. Теперь проинтегрируем уравнение $2y\frac{dz}{dy} - z = 0$, $\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dy}{y}$, $\ln z = \frac{1}{2}\ln y + \ln C_1$, $z = C_1\sqrt{y}$. Проведя обратную замену, имеем $y' = C_1\sqrt{y}$ или $\frac{dy}{\sqrt{y}} = C_1 dt$, $2\sqrt{y} = C_1 t + C_2$, и, следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид: $y(t) = \left(\frac{C_1 t + C_2}{2}\right)^2$. Заметим, что ранее полученное решение $y(t) = C$ входит в состав данного общего решения при $C_1 = 0$. Для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями задачи Коши: $y'(-1) = = C_1\sqrt{16} = 4$, $C_1 = 1$, $y(-1) = \left(\frac{-C_1 + C_2}{2}\right)^2 = 16$, $\left(\frac{-1 + C_2}{2}\right)^2 = 16$, $C_2 = 9$. Итак, решение данной задачи Коши будет иметь следующий вид: $y(t) = \left(\frac{C_1 t + C_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{t + 9}{2}\right)^2$.

Пример № 27. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний подвижной части гироскопа имеет вид $S'' + 4S' + 4S = \sin 2t$. Найти зависимость $S(t)$ при нулевых начальных условиях: $S(0) = 0$, $S'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ или $(\lambda + 2)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $S_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$. Частное решение данного уравнения определяем методом подбора в случае специальной правой части. В данном случае подбираемая правая часть в общем случае имеет вид: $S_ч(t) = a\sin 2t + b\cos 2t$. Здесь: $S'_ч(t) = 2a\cos 2t - 2b\sin 2t$, $S''_ч(t) = -4a\sin 2t - 4b\cos 2t$.

Подставляем данный вид частного решения в уравнение $S'' + 4S' + 4S = \sin 2t$. В результате имеем: $-4a\sin 2t - 4b\cos 2t + 8a\cos 2t - 8b\sin 2t + 4a\sin 2t + 4b\cos 2t = \sin 2t.$ Для определения коэффициентов a и b приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях. В результате получаем $\begin{cases} -4a - 8b + 4a = 1 \\ -4b + 8a + 4b = 0 \end{cases}$. Решив систему, находим: $a = 0$ и $b = -\frac{1}{8}$. Таким образом, частное решение имеет вид: $S_ч(t) = -\frac{1}{8}\cos 2t$. Общим же решением данного уравнения является: $S(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} - \frac{1}{8}\cos 2t$.

Вычислим производную общего решения: $S'(t) = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}\sin 2t.$

Для определения значений постоянных C_1 и C_2 подставляем данные начальные условия $S(0) = 0$ и $S'(0) = 0$ в выражения для $S(t)$ и в $S'(t)$. В итоге получаем следующую систему: $\begin{cases} 0 = C_1 - \frac{1}{8} \\ 0 = -2C_1 + C_2 \end{cases}$. Решение этой системы имеет вид $C_1 = \frac{1}{8}$, $C_2 = \frac{1}{4}$.

Итак, следовательно, искомая зависимость имеет вид: $S(t) = \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{8}\cos 2t$.

Литература

Учебники и учебные пособия.

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2011.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Книжный дом «Либроком». 2009.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МЦНМО. 2012.
4. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во ЛАНЬ. 2012.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. СПб.: Изд-во Лань. 2008.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. СПб.: Изд-во Лань. 2010.
7. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
8. Дмитриев В.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во КДУ. 2008.
9. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит. 2005.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит. 2002.
11. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит. 2010.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Либроком. 2009.
13. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Едиториал УРСС. 2011.
14. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГИУ, 2007.
15. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний. 2011.
16. Сергеев И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МГУ. 2004.
17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Изд-во ЛКИ. 2008.
18. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит. 2009.
19. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Либроком. 2009.
20. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига. 2010.
21. Шалдырван В.А., Медведев К.В. Дифференциальные уравнения. М.: Вузовская книга. 2008.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во ЛКИ. 2013.

Задачники.

23. Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Физматлит. 2005.
24. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во ЛКИ. 2009.
25. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ. 2000.
26. Просветов Г. И. Дифференциальные уравнения: задачи и решения: М.: Изд-во «Альфа-Пресс». 2011.
27. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах. М.: Изд-во МГИУ. 2007.
28. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. Изд-во ЛКИ, 2010.

Дополнительная литература.

1. Пунтус А.А. Автор основных статей и редактор раздела «Дифференциальные уравнения» Тома 1 – 1 «Математика» Раздела 1 «Инженерные методы расчётов» Энциклопедии в 40 томах «Машиностроение». М.: Изд-во Машиностроение. 2003.
2. Пунтус А.А. Лекции по курсу дифференциальных уравнений. (Записано студентами и представлено в Интернете http://www.twirpx.com/file/88528/). 2007-2008.
3. Пунтус А.А. Учебное пособие по аналитическим методам решения задачи Коши (Для выполнения домашних заданий и курсовых работ). М.: Изд-во МАИ.1975.
4. Пунтус А.А. Учебное пособие по приближённо-аналитическим и численным методам решения задачи Коши. М.: Изд-во МАИ.1978.
5. Пунтус А.А. Метод малого параметра. М.: Изд-во МАИ.1978.
6. Пунтус А.А. Качественные методы исследования динамических систем. М.: Изд-во МАИ.1987.
7. Пунтус А.А. Конечномерные линейные пространства. Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ.1994.
8. Пунтус А.А. Проблемы новой постановки математических дисциплин в техническом вузе. Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ.1994.
9. Пунтус А.А.(Редактор и соавтор). Методические указания к выполнению курсовых работ по дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МАИ.1994.
10. Вакулич Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах авиационной тематики. М.: Изд-во УАЗ КуАИ. 1981.

Предметный указатель

Об авторе.

Пунтус Артур Агафонович – профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета) – МАИ.

Выпускник МВТУ имени Н.Э. Баумана и МГУ имени М.В. Ломоносова. Имеет почётное звание «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» и почётный знак «За развитие научно-исследовательской работы студентов» (НИРС) Министерства образования и науки Российской Федерации. Награждён почётным знаком «За особые заслуги перед МАИ». Стаж преподавательской работы в Московском авиационном институте 47 лет.

Областью научных исследований являются прикладные методы качественной теории дифференциальных уравнений, методика преподавания курсов высшей математики, проблемы подготовки специалистов высокой квалификации. Автор или соавтор более 190 научных и методических публикаций, включающих 10 учебных пособий и 5 монографий, среди которых «МАИ от А до Я» (1994г.), «Аэрокосмические вузы России» (1996г.), Том № 1 «Математика» (изд. 2003г.) 80-томного издания «Машиностроение».

Постоянно внедряет в учебный процесс новые формы и методы организации и проведения занятий, руководит индивидуальным обучением и научно-исследовательской работой студентов. Студенты, которыми он руководит, часто занимают призовые места на Олимпиадах г. Москвы и на Всероссийских Олимпиадах, на Конкурсах НИРС МАИ и Всероссийских конкурсах, участвуют с докладами на Всероссийских и Международных конференциях, становятся авторами научных публикаций.

Является постоянным членом Научно-Методического Совета по математике при Министерстве образования и науки Российской Федерации (председатель – академик РАН С.В. Емельянов), ежегодно входит в состав оргкомитетов и участников Всероссийских и Международных конференций.