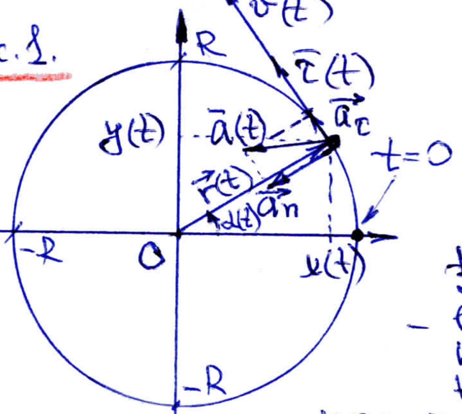
# Кинематика вращения

Рис.1.




Рассмотрим вращение точки по окружности (вращ. вокруг фиксир. оси $Oz$). Проведем ось $Ox$ через $\vec r(0)$. Тогда

$$x(t)=R\cos\alpha(t),\quad y=R\sin\alpha(t) \qquad (1)$$

Видно, что $\alpha(t)$ всё определяет $\Rightarrow \alpha(t)$ – вращательный з-н движ., $\alpha$ – угловая координата (алгебраическая, часть полярной или цилиндрической (К)). Дифф-е (1) получаем:

$$\begin{cases} v_x=\dot x(t)=-R\omega(t)\sin\alpha(t)=-\omega(t)\,y(t) \\ v_y=\dot y(t)=R\omega(t)\cos\alpha(t)=\omega(t)\,x(t) \end{cases},\ \omega(t)=\dot\alpha(t) \text{ – угл. скор. (алг.)} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} a_x=\dot v_x(t)=-\varepsilon(t)y(t)-\omega(t)\dot y(t)\overset{(2)}{=}-\varepsilon(t)y(t)-\omega^2(t)x(t) \\ a_y=\dot v_y(t)=\varepsilon(t)x(t)+\omega(t)\dot x(t)\overset{(2)}{=}\varepsilon(t)x(t)-\omega^2(t)y(t) \\ \varepsilon(t)=\dot\omega(t)=\ddot\alpha(t) \text{ – угл. ускор. (алгебраическое)} \end{cases} \qquad (3)$$

Переходя к векторам ($t$ опускается для краткости)

$$\vec v \underset{(2)}{=} \vec i v_x+\vec j v_y=\omega\left[-\vec i y+\vec j x\right]=\omega R\vec\tau,\quad \vec\tau=\frac{-\vec i y+\vec j x}{R} \qquad (4)$$

Заметим, что $v=|\omega|R$, $\vec\tau\cdot\vec r=0$ ($\vec\tau\perp\vec r$, $|\vec\tau|=1$) (4*)

$\vec\tau$ – мгновенный вектор направления движения (направляющий для скорости), он, как и скорость, касается окружности (рис.1)

$$\vec a \underset{(3)}{=} \vec i a_x+\vec j a_y=\varepsilon(t)\left[-\vec i y+\vec j x\right]-\omega^2\left[\vec i x+\vec j y\right]=$$
$$=\varepsilon(t)R\vec\tau(t)-\omega^2(t)R\vec n_r(t),\quad \vec n_r=\vec r/r \qquad (5)$$

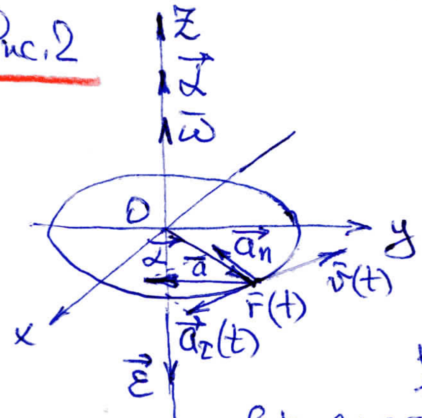
Видно, что $\vec a_\tau(t)=\varepsilon(t)R\vec\tau(t)$, $\vec a_n(t)=\vec a_y(t)=-\omega^2R\vec n_r$ (5*)

С учетом (4*), последнее из соотношений (5*) можно переписать в виде

$$\vec a_n=\vec a_y=-\frac{v^2(t)}{R}\vec n_r(t),\quad a_n=\frac{v^2}{R} \qquad (6)$$

Этой формулой мы пользовались ранее для определения радиуса кривизны.

Рис.2




Связи вращательных величин упрощаются, если дать векторные определения алгебраическим величинам $\alpha,\omega,\varepsilon$ трактуя их как проекции аксиальных векторов $\vec\alpha,\vec\omega,\vec\varepsilon$ на ось вращения ($Oz$, рис.2).

Опр. Будем считать, что направление $\vec\alpha$ (лежащего вдоль $Oz$) определяется направлением ввинчивания правого винта, ориентированного вдоль $Oz$, и вращаемого по направлению поворота, заданного углом $\alpha(t)$ (алгебраический).

Тогда очевидно, что $\text{Пр}_z\vec\alpha=\alpha$ – алгебр. величина.

Остальные вращательные векторы определим так

$$(7)\qquad \vec\omega(t)=\frac{d\vec\alpha(t)}{dt}=\frac{\vec\alpha(t+dt)-\vec\alpha(t)}{dt};\quad \vec\varepsilon(t)=\frac{d\vec\omega(t)}{dt}$$

– аксиальные векторы.

Чтобы понять это, заметим, что $\vec{\alpha}(t)$ и $\vec{\alpha}(t+dt)$ аксиальны (по опр.) $\Rightarrow$ аксиальна и $\forall$ их линейная комбинация. А т.к. $dt$ – скаляр, то $\omega(t)$ из (7) аксиален. Аналогичные рассуждения показывают аксиальность $\bar{\varepsilon}(t)$.

Для определения направлений $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ существует очень удобное правило (см. рис. 2). Если правый винт, расположенный вдоль оси $OZ$ закручивать по $\vec{v}$, то он будет ввинчиваться (двигаться вдоль $OZ$) в направлении $\bar{\omega}$. Если винт вращать по $\bar{a}_\tau$, то он ввинчивается по $\bar{\varepsilon}$.

Так определённый вектор $\bar{\omega}$ удовлетворяет ф-ле

$$\vec{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (8)$$

которая легко проверяется с учётом рис. 2 и (4), и которую иногда рассматривают, как опр. $\vec{\omega}$.

Дифференцируя (8) с учётом опр. $\vec{v}$, дистрибутивность векторного произведения и правила

$$\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c} = \bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{c})\bar{b} - (\bar{a},\bar{b})\bar{c} \qquad (9)$$

для вычисления двойного векторного произведения, получим

$$\bar{a} = \bar{v}' \underset{(8)}{=} \bar{\omega}'\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{r}' \underset{(7)}{=} \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{v} \underset{(8)}{=} \bar{\varepsilon}\times\bar{r} +$$

$$+ \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} \underset{(9)}{=} \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\underbrace{(\bar{\omega},\bar{r})}_{0,\ \text{т.к.}\ \bar{\omega}\perp\bar{r}} - \omega^2\bar{r} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} - \omega^2\bar{r} \qquad (10)$$

Из рис. 2 нетрудно понять, что

$$\vec{a}_\tau = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_y = -\omega^2\bar{r} \qquad (11)$$

Эти ф-лы более компактны, чем (5). Наконец, переход к вращательным векторам позволяет классифицировать простейшие вращ. движения. Сначала, чтобы его окончательно оформить, заметим во всех предыдущих ф-х (2)÷(5) алгебраические скаляры не проекции

$$\alpha\to\alpha_z,\ \omega\to\omega_z,\ \varepsilon\to\varepsilon_z \qquad (12)$$

вращательных векторов, а через величины без индексов будем, как это принято, обозначать модули $\alpha = |\vec{\alpha}|$ и т.д.

По аналогии с поступ. движением, дифференциальные связи (7) обратим с помощью интегральных равенств

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{\omega}(\tau)\,d\tau, \quad \bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{\varepsilon}(\tau)\,d\tau \qquad (13)$$

Тогда можно легко прийти к частным алгебраическим следствиям:

$\bar{\omega}(t) = const$, $\bar{\varepsilon}(t)\equiv 0$, $\bar{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0) + \vec{\omega}\cdot(t-t_0)$ – равномерное вращение. (14)

$\bar{\varepsilon}(t) = const$, $\bar{\omega}(t) = \omega(t_0) + \bar{\varepsilon}\cdot(t-t_0)$, $\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0) + \vec{\omega}(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\cdot(t-t_0)^2$ – равнопеременное вращение (15)

И хотя ни одно из этих движений не является ни равномерным ($\vec{v} \neq const$), ни равнопеременным ($\vec{a} \neq const$), мы имеем для них простые параметрич. законы.

В заключение отметим, что без $\vec{a}_n$ вращение не возмож.