Электростатика

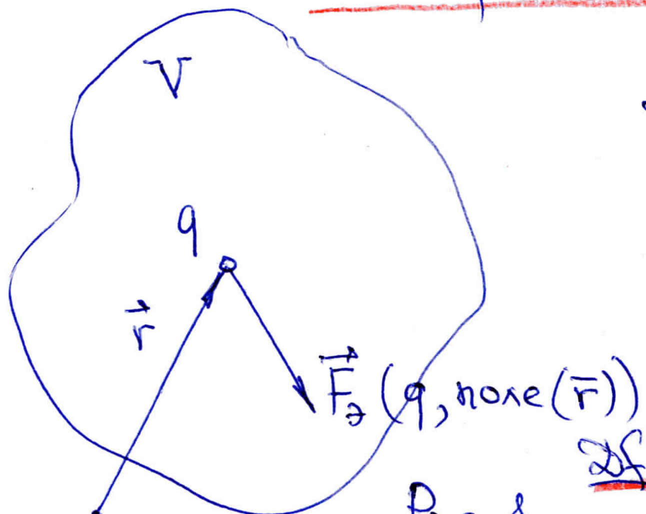

Рис. 1.

Экспериментально установлено, что

$$\frac{\vec F_э(q, поле(\vec r))}{q} = \vec f(поле(\vec r)) = \vec E(поле(\vec r)) \overset{Df}{=} \vec E(\vec r) \quad (1)$$

$$\vec F_э = q\vec E(\vec r) \quad (1^*)$$

Df $\vec E(\vec r)$ является функцией только поля и может использоваться для его описания, как х-ка поля. При $q=1$ (пробный) $\vec E = \vec F$.

Основные законы электростатики

① Закон Кулона

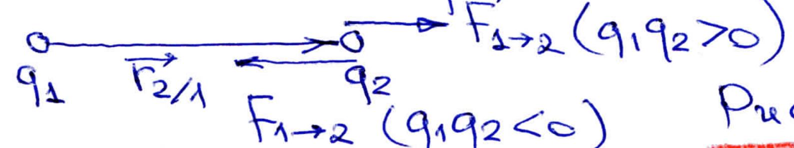

Рис. 2.

$$\vec F_{1\to 2} = \frac{k_э}{\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^3_{2/1}}\vec r_{2/1} \quad (2)$$

$$\vec F_{q\to q_1} = \frac{k_э}{\varepsilon}\frac{qq_1}{r^3}\vec r = q_1\vec E_q(\vec r), \quad \vec E_q(\vec r) = \frac{k_э}{\varepsilon}\frac{q}{r^3}\vec r$$

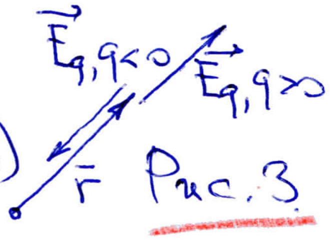

Рис. 3

$$k_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ldots, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,Ф\cdot м \quad (3)\ (СИ)$$

$k_э = 1$ – рационализированная (Гауссова) система.

Поле (3) центрально-симметрично (рис. 3), $E_q(\vec r) = \frac{k_э}{\varepsilon}\frac{|q|}{r^2}$ (4)

Роль закона (3) в описании поля простейшего источника (точечного заряда). Но это не простейшее поле. Поля более сложных источников считаются через

② Принцип суперпозиции (ПС)

Любая характеристика поля (векторная, или скалярная) в произвольной точке A рассчитывается суммированием (суперпозицией) определенных для A характеристик полей отдельных источников системы (парциальных полей). Суммирование парциальных характеристик векторное, если рассчитываемая векторная характеристика поля, и алгебраическое, если рассчитываемая хар-ка поля скалярна.

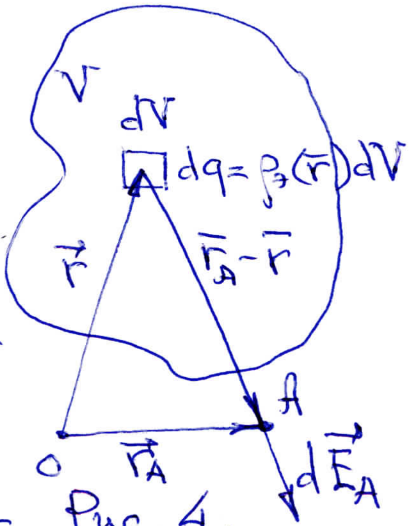

Рис. 4.

Экспериментально установлено, что напряженность поля ПС удовлетворяет. В частности для поля системы точечных источников $\{q_k, \vec r_k\}$, $k=1..n$ выполняется рав-во

$$\vec E_\Sigma(\vec r_A) = \sum_{k=1}^{n}\vec E_{q_k}(\vec r_A - \vec r_k), \quad \vec E_{q_k} \text{ из } (3) \quad (5)$$

Но обычно реальными точечными носителями заряда являются такие элементарные частицы, как электрон и протон

$$q_e = -e,\ q_p = +e,\ m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ кг,\ m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ кг$$

$e = 1{,}6\ 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд ($m_p/m_e \approx 1836$)

Их характерный радиус ($\sim 10^{-15}$ м) обычно << характерных размеров задач в инженерных и физических приложениях. Поэтому в таких случаях используется модель заряда, непрерывно распределенного

$$dq = \rho_э(\bar{r})\,dV,\quad [\rho_э] = \frac{Кл}{м^3} \text{ — по объему}$$

(6)

$$dq = \sigma_э(\bar{r})\,dS,\quad [\sigma_э] = Кл/м^2 \text{ — по поверхности}$$

$$dq = \tau_э(\bar{r})\,dl,\quad [\tau_э] = Кл/м \text{ — по линии}$$

Здесь dV, dS, dl — бесконечно малые элементы заряженных конфигураций (объема, поверхности, линии), $\bar{r}$ — некоторая их внутренняя точка, dq — заряд элементов, $\rho_э, \sigma_э, \tau_э$ — объемная, поверхностная и линейная плотности распределения заряда соответственно.

Согласно принципу суперпозиции поля заряженного объема (см. рис. 4) мы получаем

$$\vec{E}_\Sigma(\vec{r}_A) = k_э \int_V \frac{\rho_э(\bar{r})\,dV}{\varepsilon(\bar{r})\,|\bar{r}_A - \bar{r}|^3}(\bar{r}_A - \bar{r}) \qquad (7)$$

В (3÷5, 7) ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды по отношению к вакууму. Это безразмерный коэффициент, описывающий эффект ослабления поля средой при её поляризации (см. далее). $\varepsilon = 1$ для вакуума, отличается от 1 в 5м знаке для воздуха, $\varepsilon \sim 3$ (керосин), $\varepsilon \sim 30 \div 60$ (дистиллированная вода), $\varepsilon \sim 2000$ (аморфный кварц (стекло)).

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф·м — фундаментальная константа (СИ), абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

$\varepsilon\varepsilon_0$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Пример: Рассчитать $\vec{F}_{Q\to q}$

q — равномерно распределен по тонкому стержню длины L (см. Рис. 5)

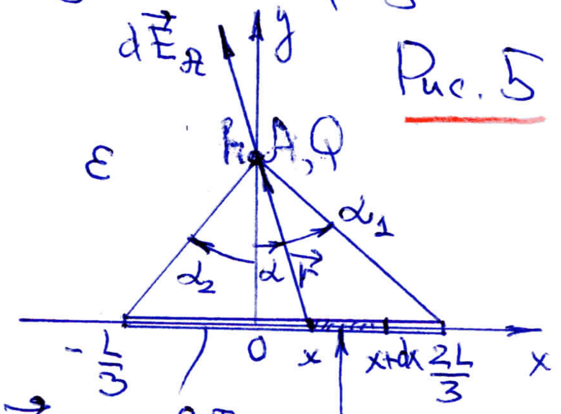

Рис. 5

$$\vec{F}_{Q\to q} = -\vec{F}_{q\to Q} = -Q\vec{E}_q(A) \Rightarrow \vec{E}_q(A) = ?$$

(8) $$d\vec{E}_A = \frac{k_э}{\varepsilon}\frac{dq}{r^3}\vec{r},\quad dq = \tau_э dx,\quad \tau_э = \frac{q}{L}$$

Суммирование парциальных полей $d\vec{E}_A$ сводится к интегрированию по стержню, т.е. по $x \in \left[-\frac{L}{3}; \frac{2L}{3}\right]$. Поэтому $d\vec{E}_A$ из (8) надо представить как функцию только переменной x. Все компоненты $d\vec{E}_A$ надо выразить через x и константы.

Заметим, что $\vec{r} = -\vec{i}x + \vec{j}h$, $r = (x^2 + h^2)^{1/2}$

$$\vec{E}_A = \frac{k\tau}{\varepsilon} \int\limits_{-L/3}^{2L/3} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \left(-\vec{i}x + \vec{j}h\right) =$$

$$= \frac{k\tau\tau}{\varepsilon} \Bigg[-\vec{i} \underbrace{\int\limits_{-L/3}^{2L/3} \frac{x\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}}_{J_1} + \vec{j}h \underbrace{\int\limits_{-L/3}^{2L/3} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}}_{J_2} \Bigg] \qquad (9)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{x=-L/3}^{x=2L/3} \frac{d(x^2+h^2)}{(\underbrace{x^2+h^2}_{u})^{3/2}} = \frac{1}{2} \int\limits_{h^2+\frac{L^2}{9}=u}^{h^2+\frac{4L^2}{9}=u} u^{-3/2} du = \frac{1}{2} \frac{1}{\underbrace{-\frac{3}{2}+1}_{-1}} u^{-\frac{3}{2}+1} \Bigg|_{h^2+\frac{L^2}{9}}^{h^2+\frac{4L^2}{9}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h^2+\frac{L^2}{9}}} - \frac{1}{\sqrt{h^2+\frac{4L^2}{9}}} \qquad (10)$$

J_2 считается сложнее

$$J_2 = \int\limits_{-\frac{L}{3}}^{2L/3} \frac{dx}{h^3\left(1+\left(\frac{x}{h}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{h^2} \int\limits_{\alpha_2<0}^{\alpha_1>0} \frac{d\,tg\,\alpha}{(1+tg^2\alpha)^{3/2}} =$$

$\frac{x}{h} = tg\,\alpha$

α – алгебраич. угол

$$d\,tg\,\alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}; \quad (1+tg^2\alpha)^{3/2} = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^{3/2} = \frac{1}{\cos^3\alpha}$$

$$= \frac{1}{h^2} \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\cos^3\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} d\alpha = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{h^2} = \frac{\sin\alpha_1 + \sin(-\alpha_2)}{h^2}$$

α_1 и $(-\alpha_2) > 0$ – геометрические углы (все детали с рисунка, включая знаки переменных, надо учитывать строго), поэтому из рис. 5 $\Rightarrow$

$$\sin\alpha_1 = \frac{2L/3}{\sqrt{h^2+4L^2/9}}; \quad \sin(-\alpha_2) = \frac{L/3}{\sqrt{h^2+L^2/9}}$$

$$\therefore J_2 = \frac{L}{3h^2}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+L^2/9}} + \frac{2}{\sqrt{h^2+4L^2/9}}\right) \qquad (11)$$

Важные следствия, которые подтверждают корректность решения:

а) $E_{Ay}(h) = -E_{Ay}(-h)$ – поле зеркально симметрично
$E_{Ax}(h) = E_{Ax}(-h)$ относительно линии стержня Ox.

б) При $h \to \pm\infty$ $\vec{E}_A \to 0$ (источник конечен)

в) Пусть $\tau_\tau = const \Rightarrow$ при $L \to \infty$ $E_{Ax} \to 0$, поле становится симметричным относительно Oy.

Подобное "осмысление" полученных результатов всегда необходимо при решении физических задач. Также видно, что получив формулу для поля, мы получаем возможность анализировать его свойства.