Лабораторная работа №1
Выполнил студент группы М8О-300Б-19
Иванов И.И.

Задание 1. Построить линию уровня функции, проходящую через заданную точку. Построить градиент функции в заданной точке.

$$f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1, \qquad X^0 = (1;\ -1).$$

Решение:

I. Построим линию уровня функции в точке $X^0 = (1;\ -1)$.

1. Вычислим значение функции в точке $f(X^0) = 2 + 1 + 2 - 2\cdot 1 + 1 = 4$.

2. Запишем уравнение линии уровня: $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 4$.

Найдем инвариант для определения типа линии уровня $D = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$, следовательно, линия уровня окружность или эллипс.

3. Для построения чертежа выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$\underbrace{2\left(x_1^2 + x_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{\left(x_2^2 + 2x_2 + 1\right)} = 4$$

$2\cdot\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + 1\right)^2 = \frac{9}{2}$ – это уравнение эллипса с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Для построения эллипса используем точки:

x_1	x_2
$-\frac{1}{2}$	$-3/\sqrt{2} - 1 \approx -3{,}121$ $3/\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}121$
-2 1	-1

II. Построим градиент функции в точке $X^0 = (1;\ -1)$.

1. Найдем градиент функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 2.$$

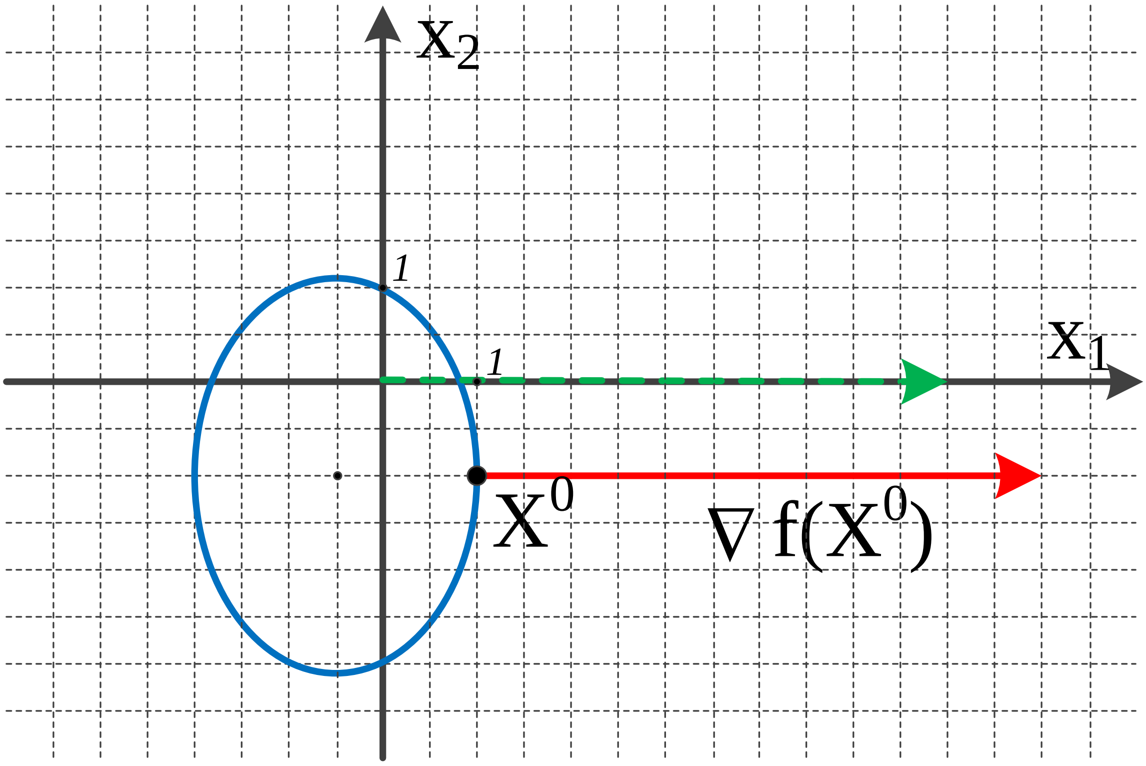
$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2 \\ 2x_2 + 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим градиент в точке $X^0 = (1;\ -1)$:

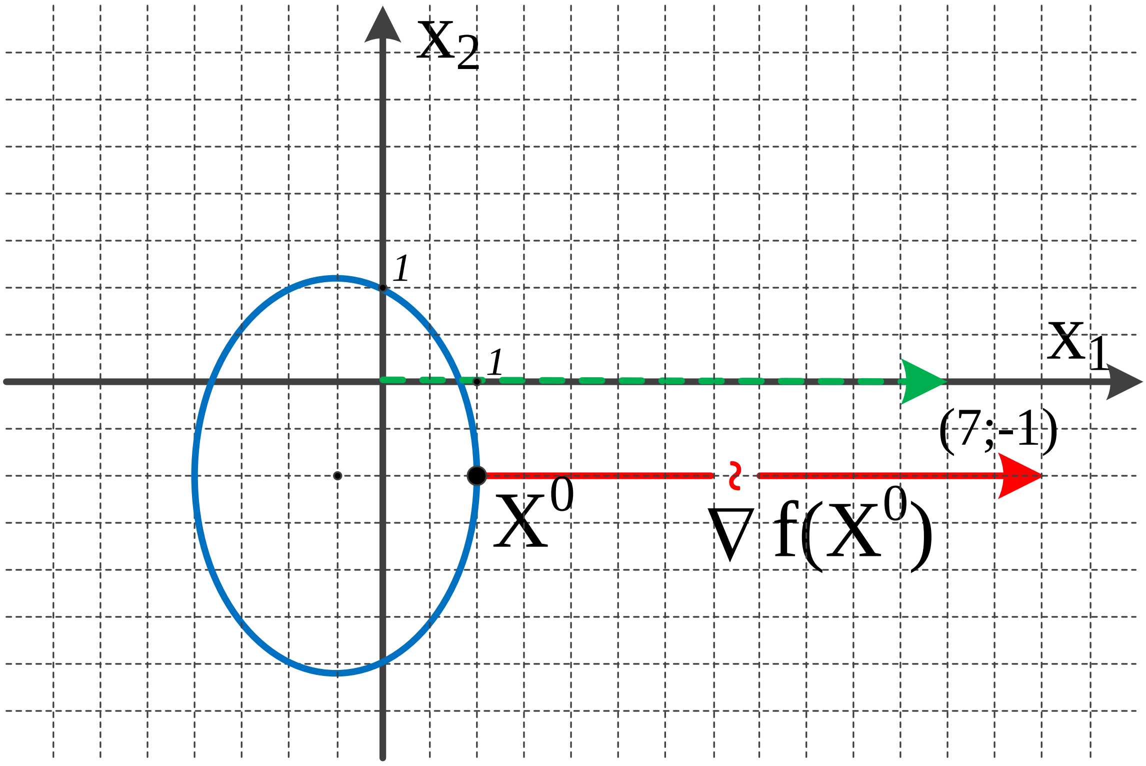
$$\nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Построим полученный вектор $\nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ на координатной плоскости из точки $(0;\ 0)$.

4. Перенесем построенный вектор в заданную точку X^0, используя параллельный перенос.



Замечание.
Если вектор градиента не умещается на чертеже целиком, то его следует построить с «разрывом» с обязательным указанием координат конца вектора.



Задание 2. Аналитически отыскать безусловный экстремум функции в задача, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

$$f(X) = 3x_1^3 + x_2^2 - 9x_1 + 4x_2 \to \text{extr}.$$

Решение:

1. Найдем градиент функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9x_1^2 - 9; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 4.$$

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 9x_1^2 - 9 \\ 2x_2 + 4 \end{pmatrix}.$$

2. Запишем необходимые условия экстремума в задаче $\nabla f(X) = 0$:

$$\begin{cases} 9x_1^2 - 9 = 0 \\ 2x_2 + 4 = 0 \end{cases}.$$

3. Решаем систему:

$$\begin{cases} 9x_1^2 - 9 = 0 \\ 2x_2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, получены 2 **стационарные** точки функции: $A = (1, -2)$; $B = (-1, -2)$.

4. Составим матрицу Гессе:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 18x_1; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2.$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} 18x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим:

$$H(A) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad H(B) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Исследуем знакоопределенность матриц по критерию Сильвестра.

В точке $A = (1, -2)$: $\Delta_1 = 18 > 0$; $\Delta_2 = 18 \cdot 2 - 0 = 36 > 0$, значит $H(A) > 0$, следовательно, A – локальный минимум

В точке $B = (-1, -2)$: $\Delta_1 = -18 < 0$; $\Delta_2 = -18 \cdot 2 - 0 = -36 < 0$, в этом случае критерий Сильвестра ответа на поставленный вопрос не дает.

Вычислим собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -18-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-18-\lambda)\cdot(2-\lambda)-0=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -18 < 0 \qquad \lambda_2 = 2 > 0,$$

значит матрица $H(B) <> 0$, следовательно, в B экстремума нет.

__Ответ:__ функция имеет локальный минимум в точке $A = (1, -2)$, $f(A) = -10$.