

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной
математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Уравнения математической физики»

Студент: Д. С. Пивницкий
Преподаватель: С. А. Колесник
Группа: М8О-306Б-19
Вариант: 19
Дата:
Оценка:
Подпись:

Москва, 2022

Содержание

1	Задача №1	2
2	Задача №2	11
3	Задача №3	16

1 Задача №1

Постановка задачи: Сформулировать и решить задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0; l]$ с начальным распределением $T_0 = 300(a^2 = 10^{-6})$ и наличием конвективного члена $\left(+b\frac{\partial u}{\partial x}, b = 10^{-6}\right)$, когда на левом конце задан теплообмен по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1 = 0,1$ и температурой окружающей среды $u_e = 1000$, а на правый конец теплоизолирован. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики $u(x, t)$, ($l = 0,05\text{м}$), $l = 0,1\text{м}$.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x, & x \in (0; l); t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 = 300, & x \in (0; l); t = 0; \\ u_x(0, t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ u(l, t) = T_1 = 500, & x = l; t > 0; \end{cases} \quad (I)$$

Для решения задачи (I) необходимо избавиться от конвективного члена bu_x . Для этого искомое решение $u(x, t)$ будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t)e^{\mu t + \lambda x}$$

В дальнейшем вместо $e^{\mu t + \lambda x}$ будем писать E .

$$\begin{aligned} u_t &= v_t E + \mu E v = E(v_t + \mu v) \\ u_x &= v_x E + \lambda E v = E(v_x + \lambda v) \\ u_{xx} &= (v_{xx} + \lambda v_x)E + \lambda E(v_x + \lambda v) = E(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) \end{aligned}$$

Подставляем u_t , u_x и u_{xx} в уравнение (1).

$$E(v_t + \mu v) = a^2 E(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) + bE(v_x + \lambda v)$$

$$a^2 v_{xx} - v_t + (2\lambda a^2 + b)v_x + (a^2 \lambda^2 + b\lambda - \mu)v = 0$$

Теперь выберем λ и μ так, чтобы коэффициенты перед v_x и v стали равны 0.

$$\begin{cases} 2\lambda a^2 + b = 0, \\ a^2 \lambda^2 + b\lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-b}{2a^2}, \\ \mu = a^2 \lambda^2 + b\lambda = \frac{a^2 b^2}{4a^4} - \frac{b^2}{2a^2} = -\frac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

Сформулируем краевые и начальные условия:

$$u(x, 0) = v(x, 0)e^{\mu \cdot 0 + \lambda x} = v(x, 0)e^{\lambda x} = T_0 = 300$$

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= T_0 e^{-\lambda x} \\
u_x(0, t) &= e^{\mu t + \lambda \cdot 0} (v_x(0, t) + \lambda v(0, t)) = 0 \\
v_x(0, t) + \lambda v(0, t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(l, t) &= e^{\mu t + \lambda l} v(l, t) = T_1 = 500 \\
v(l, t) &= T_1 e^{\mu t - \lambda l}
\end{aligned}$$

Получаем начально-краевую задачу для $v(x, t)$:

$$\begin{cases} a^2 v_{xx} = v_t, & x \in (0; l); t > 0 \\ v(x, 0) = T_0 e^{-\lambda x}, & x \in (0; l); t = 0; \\ v_x(0, t) + \lambda v(0, t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ v(l, t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}, & x = l; t > 0; \end{cases} \quad (II)$$

Будем искать $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \omega(x, t) + \nu_1(x, t) + \nu_2(x, t)$$

$$\begin{cases} \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(0, t) + \lambda \omega(0, t) = 0, \\ \omega(l, t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \end{cases} \quad (III)$$

$$\begin{cases} a^2 \nu_{1xx} = \nu_{1t}, \\ \nu_1(x, 0) = T_0 e^{\lambda x} - \omega(x, 0), \\ \nu_{1x}(0, t) + \lambda \nu_1(0, t) = 0, \\ \nu_1(l, t) = 0 \end{cases} \quad (IV)$$

$$\begin{cases} \nu_{2t} = a^2 \nu_{2xx} - \omega_t, \\ \nu_{2t}(x, 0) = 0, \\ \nu_{2x}(0, t) + \lambda \nu_2(0, t) = 0, \\ \nu_2(l, t) = 0 \end{cases} \quad (V)$$

Решаем систему III

$$\begin{cases} \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(0, t) + \lambda \omega(0, t) = 0, \\ \omega(l, t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \end{cases}$$

Будем искать $\omega(x, t)$ в виде

$$\omega(x, t) = c_1(t)x + c_2(t)$$

Подставляем в краевые условия

$$\omega_x(0, t) + \lambda\omega(0, t) = c_1(t) + \lambda c_2(t)$$

$$\omega(l, t) = c_1(t)l + c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$

$$-\lambda l c_2(t) + c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$

$$(1 - \lambda l) c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$

$$c_2(t) = \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l}$$

$$\Rightarrow c_1(t) = -\lambda c_2(t)$$

$$c_1(t) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l}$$

$$\omega(x, t) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l} x + \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l}$$

$$\omega(x, 0) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\lambda l}}{1 - \lambda l} x + \frac{T_1 e^{-\lambda l}}{1 - \lambda l}$$

$$\omega_t = \frac{\lambda \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l} x - \frac{\mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l}$$

Решим задачу *IV*. Запишем её в виде:

$$\begin{cases} \nu_{1t} = a^2 \nu_{1xx}, \\ \nu_1(x, 0) = \varphi(x), \\ \nu_{1x}(0, t) + \lambda \nu_1(0, t) = 0, \\ \nu_1(l, t) = 0 \end{cases} \quad (VI)$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} \omega(x, 0) = T_0 e^{-\lambda x} - \frac{T_1 e^{-\lambda l} (1 - \lambda x)}{1 - \lambda l}$$

Решение будем искать в виде

$$\nu_1(x, t) = X(x)T(t)$$

Подставим в уравнение (2)

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \alpha^2$$

Будем решать задачу Штурма — Лиувилля о нахождении собственных значений α_n и собственных функций $X_n(x)$.

$$\begin{cases} X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0, \\ X'(0) + \lambda X(0) = 0, \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

1) $\alpha^2 > 0$

$$X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

$$X'(x) + \alpha X(x) = -c_1 e^{-\alpha x}(\lambda + \alpha) + c_2 e^{\alpha x}(\alpha - \lambda)$$

$$X'(x) = -\alpha c_1 e^{-\alpha x} + \alpha c_2 e^{\alpha x}$$

$$\begin{cases} -(\alpha + \lambda)c_1 + (\alpha - \lambda)c_2 = 0, \\ -\alpha e^{-\alpha x}c_1 + \alpha e^{\alpha x}c_2 = 0 \end{cases}$$

Определитель данной системы отличен от нуля

$$\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0 \Rightarrow X(0) \equiv 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0 \quad \text{не подходит}$$

2) $\alpha^2 = 0$

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_1 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X'(0) + \lambda X(0) = c_1 + \lambda c_2 = 0$$

$$X'(l) = l_1 = 0$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 0$$

Не подходит.

3) $\alpha^2 < 0$

$$X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x$$

$$X'(0) + \lambda X(0) = \alpha c_1 + \lambda c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{\lambda}{\alpha} c_2$$

$$X(l) = c_1 \sin \alpha l + c_2 \cos \alpha l = 0$$

$$-\frac{\lambda}{\alpha} \sin \alpha l + \cos \alpha l = 0$$

$$-\frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha l + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n l = \frac{\alpha_n}{\lambda}$$

Трансцендетное уравнение решается численными методами.

$$X_n(x) = -\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x$$

Теперь решим уравнение.

$$T'(t) + \alpha^2 a^2 T(t) = 0$$

Его решением является

$$T_n(t) = c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

Получаем

$$\nu_{1n}(x, t) = X_n(x) T_n(t) = c_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

$$\nu_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{1n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

Определим константы c_n . Для этого разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

и подставим это в начальное условие:

$$\nu_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \Rightarrow c_n = \varphi_n$$

$$\nu_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x} \right) e^{-a^2 \alpha_n^2 t}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

Решим задачу V. Запишем задачу V в виде:

$$\begin{cases} \nu_{2t} = a^2 \nu_{2xx} + f(x, t), \\ \nu_{2t}(x, 0) = 0, \\ \nu_{2x}(0, t) + \lambda \nu_2(0, t) = 0, \\ \nu_2(l, t) = 0 \end{cases} \quad (VII)$$

$$f(x, t) = -\omega_t = -\frac{\mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l} (\lambda \alpha - 1)}{1 - \lambda l}$$

Переобозначим ν как μ . Решение будем искать в виде

$$\mu_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}(t) X_n(x)$$

Разложим $f(x, t)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l f(\xi, t) X_n(\xi) d\xi$$

Подставим $\mu_2(x, t)$ и $f(x, t)$ в (3) и учтём, что

$$X_n''(x) = (-\lambda \cos \alpha_n x - \alpha_n \sin \alpha_n x)' = \lambda \alpha_n \sin \alpha_n x - \alpha_n^2 \cos \alpha_n x = -\alpha_n^2 X_n(x)$$

Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu'_{2n}(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}(t) X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \mu'_{2n}(t) + a^2 \alpha_n^2 \mu_{2n}(t) - f_n(t) \} X_n(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu'_{2n}(t) + a^2 \alpha_n^2 \mu_{2n}(t) - f_n(t) = 0$$

Решением этого ОДУ является функция

$$\mu_{2n}(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} d\tau$$

Решением задачи V является:

$$\mu_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} X_n(x) d\tau$$

Решение задачи II :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \omega(x, t) + \nu_1(x, t) + \nu_2(x, t) = \\ &= T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} X_n(x) d\tau \end{aligned}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l f(\xi, t) X_n(\xi) d\xi$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} - \omega(x, 0) = T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l}$$

$$f(x, t) = -\omega_t = \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l}$$

Ответ:

$$v(x, t) = \omega(x, t) + \nu_1(x, t) + \nu_2(x, t) =$$

$$= T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} X_n(x) d\tau$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l f(\xi, t) X_n(\xi) d\xi$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} - \omega(x, 0) = T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l}$$

$$f(x, t) = -\omega_t = \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1 - \lambda x)}{1 - \lambda l}$$

Решение задачи I . Решением задачи I является функция

$$u(x, t) = v(x, t) e^{\mu t + \lambda x}$$

$$\mu = -\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\lambda = -\frac{b}{2a^2}$$

$$u(x, t) = v(x, t) e^{\mu t + \lambda x}$$

Проверка:

$$V(x, 0) = T_0 e^{-\lambda x} = T_1 e^{-\lambda l} \frac{1 - \lambda x}{1 - \lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^0 d\tau X_n(x) =$$

$$= T_1 e^{-\lambda l} \frac{1 - \lambda x}{1 - \lambda l} + T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l} \frac{1 - \lambda x}{1 - \lambda l} = T_0 e^{-\lambda x}$$

$$V_x(0, t) + \lambda V(0, t) = \frac{-\lambda T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X'_n(0) e^{-a^2 \alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(x) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} d\tau X'_n(0) +$$

$$+\frac{\lambda T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1 - \lambda l} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X'(0) e^{-a^2 \alpha_n^2 t} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} d\tau X(0) = 0$$

$$X'(0) = (-\lambda \cos \alpha_n x - \alpha_n \sin \alpha_n x)_{x=0} = -\lambda$$

$$\Rightarrow v_x(0, t) + \lambda v(0, t) = 0$$

$$v(l, t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(l) e^{-a^2 \alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\tau)} X_n(l)$$

Из задачи Штурма — Лиувилля следует, что $X_n(l) = 0$

$$\Rightarrow v(l, t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$

2 Задача №2

Постановка задачи: О вынужденных колебаниях ограниченного стержня $x \in [0; l]$, $l = 0,1\text{м}$, $a^2 = 10^6$ с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью, когда на левом конце задана неоднородная линейная комбинация усилия и перемещения $\mu_1 = e^{-t}$, а правый конец перемещается по закону $\mu_2 = t$.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}, & x \in [0; l]; t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0; l]; t = 0; \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, & x \in [0; l]; t = 0; \\ u(0, t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ u(l, t) = \mu_2(t) = 10^{-3}t, & x = l; t > 0. \end{cases}$$

Решим задачу методом редукции:

$$u = u_1 + u_2$$

$$\begin{cases} u_{1tt} + u_{2tt} = a^2(u_{1xx} + u_{2xx}) \\ u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = 0 \\ u_{1t}(x, 0) + u_{2t}(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_1(0, t) + u_2(0, t) = 0 \\ u_1(l, t) + u_2(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Решим относительно u_1 :

$$\begin{cases} u_{1tt} = 0 \\ u_1(0, t) = 0 \\ u_1(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$u_1 = c_1 x + c_2$$

$$u_1(0, t) = c_2 = 0 \Rightarrow u_1(l, t) = c_1 l = \mu_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\mu_2}{l}$$

$$u_1(x, t) = \frac{\mu_2}{l} x = \frac{10^{-3}}{l} x \Rightarrow u_1(x, 0) = 0$$

$$u_{1t} = \frac{10^{-3}}{l} x$$

$$u_{1tt} = 0$$

Решим относительно u_2 :

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} \\ u_2(x, 0) = -u_1(x, 0) = 0 \\ u_{2t}(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{10^{-3}x}{l} = \varphi(x) \\ u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Решим данную задачу методом разделения переменных:

$$u_2(x, t) = XT \quad (1)$$

Заметим, что это задача о свободных колебаниях конечного стержня с ненулевой начальной скоростью, когда концы жёстко зажаты.

Подставим (1) в систему (I):

$$\begin{cases} XT'' = a^2 X''T \\ X(x)T(0) = 0 \\ X(x)T'(t) = \varphi(x) \\ X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} T'' + a^2 \lambda^2 T = 0 & (2) \\ X'' + \lambda^2 X = 0 & (3) \end{cases}$$

Из теории известно, что $\lambda^2 < 0$ и $T(t) \neq 0$, иначе задача бы имела одно тривиальное решение.

Сформулируем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

Подставим краевые условия и решим полученную задачу Штурма — Лиувилля:

$$X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0$$

$$X(l) = c_2 \sin \lambda l = 0 \Rightarrow c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi k}{l}$$

λ_k — собственные значения,

$\sin \frac{\pi k}{l} x$ — собственные функции,

$$X_k(x) = c_k \sin \frac{\pi k}{l} x$$

Решим (2):

$$T'' + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T = 0 \Rightarrow T_n = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t$$

$$u_2(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^* \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n^* \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Найдём A_n^* и B_n^* из начальных условий:

$$u_{2t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{a\pi n}{l} A_n^* \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{a\pi n}{l} B_n^* \cos \frac{a\pi n}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_2(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{\pi n}{l} x = 0 \Rightarrow A_n^* = 0$$

$$u_{2t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n^* \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\Rightarrow B_n^* = \frac{l}{a\pi n} \varphi_n(x) = \frac{l}{a\pi n} \frac{2}{l} = \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$$

Подставим полученные значения:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1(x, t) = \frac{t}{10^3 l} x$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^l \int_0^l \frac{2}{a\pi n} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Ответ:

$$u = \frac{t}{10^3 l} x + \sum_{n=1}^l \int_0^l \frac{2}{a\pi n} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\varphi(x) = \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{x}{l10^3}$$

Проверка:

$$u_t(x, t) = u_{1t} + u_{2t} = \frac{x}{l10^3} + \sum_{n=1}^l \int_0^l \frac{2}{a\pi n} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cos \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \varphi_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{x}{10^3 l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cos \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

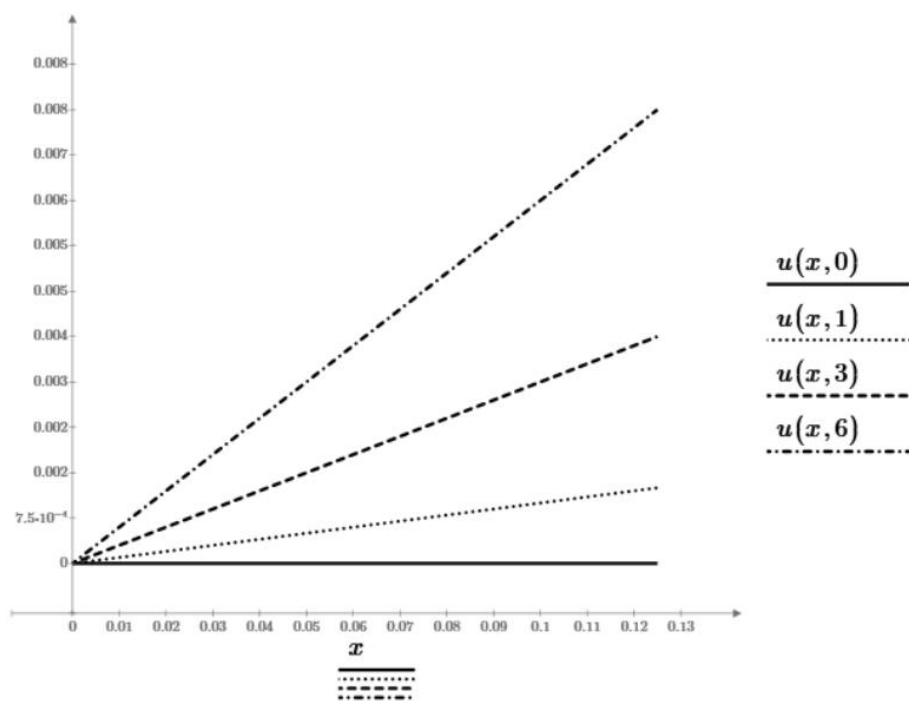
$$u(x, 0) = 0 + \int_0^l \sum_{n=1}^l \dots = 0$$

$$u_t(x, 0) = \frac{x}{10^3 l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin \frac{\pi n}{l} x = \frac{x}{10^3 l} + \varphi x = \frac{x}{10^3 l} + \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{x}{10^3 l} = \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$u(0, t) = 0 + \int_0^l \sum_{n=1}^l \dots = 0$$

$$u(l, t) = \frac{t}{10^3 l} l + \int_0^l \sum_{n=1}^l \sin \pi n \cdot \dots = 10^{-3} t$$

График:



3 Задача №3

Постановка задачи: Задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда на нижней границе задан поток $\frac{\delta u(x, 0)}{\delta u} = \cos\left(3\frac{\pi x}{l_1}\right)$, а на остальных границах заданы нулевые значения.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in (0; l_1), y \in (0, l_2) \\ u(0, y) = \sin \frac{\pi y}{l_2}, & y \in [0; l_2]; \\ u(l_1, y) = \sin \frac{\pi y}{l_2}, & y \in [0; l_2]; \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0; l_1]; \\ u(x, l_2) = 0, & x \in [0; l_1]. \end{cases}$$

$$u = u(x, y)$$

Решение будем искать в виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n^{(r)}, \text{ где } u_n^{(r)} = X_n(x) Y_n(y)$$

Тогда:

$$X'' y + Y'' X = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda_n$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda_n Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(l_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow Y_n(y) = A \sin \frac{\pi n y}{l_2}, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

$$X'' - \lambda_n X = 0$$

$$X(x) = \tilde{A} e^{-\sqrt{\lambda_n} x} + \tilde{B} e^{\sqrt{\lambda_n} x}$$

Выберем другую ФСР в виде:

$$X(x) = \left\{ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} l_1}, \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (l_1 - x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} l_1} \right\}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{l_2} \left(\tilde{A}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n x}{l_2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n l_1}{l_2}} + \tilde{B}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n (l_1 - x)}{l_2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n l_1}{l_2}} \right)$$

При $x = 0$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi y}{l_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \sin \frac{\pi n y}{l_2} \\ \Rightarrow \tilde{B}_n &= 0, \forall n \neq 1, \tilde{B}_1 = 1 \end{aligned}$$

При $x = l_1$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi y}{l_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \sin \frac{\pi n y}{l_2} \\ \Rightarrow \tilde{A}_n &= 0, \forall n \neq 1, \tilde{A}_1 = 1 \end{aligned}$$

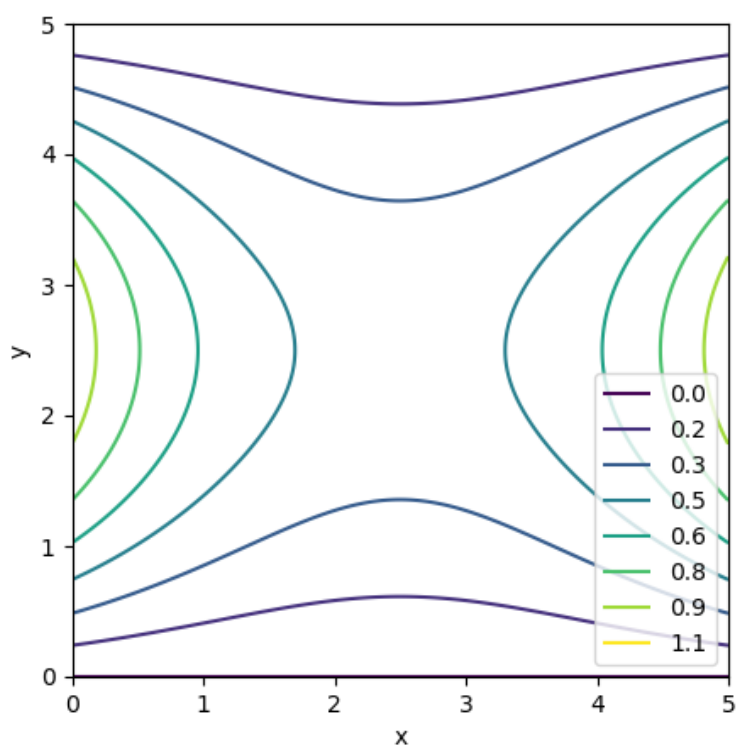
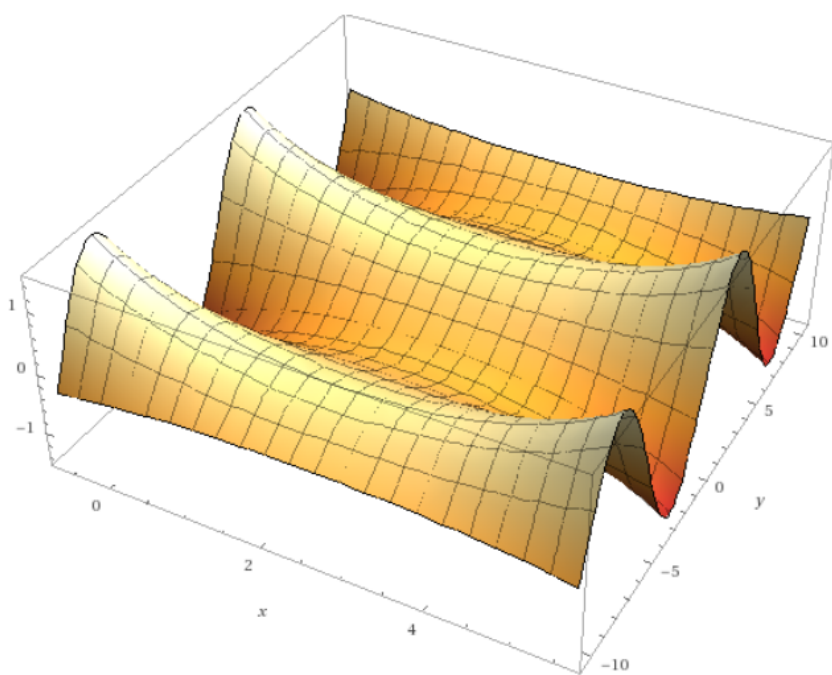
Тогда:

$$u(x, y) = \sin \frac{\pi y}{l_2} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi l_1}{l_2}} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{\pi x}{l_2} + \operatorname{sh} \frac{\pi (l_1 - x)}{l_2} \right)$$

Ответ:

$$u(x, y) = \sin \frac{\pi y}{l_2} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi l_1}{l_2}} \right) \left(\operatorname{sh} \frac{\pi x}{l_2} + \operatorname{sh} \frac{\pi (l_1 - x)}{l_2} \right)$$

График:



Список литературы

- [1] Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Изд. 5, стереотипное.* — М.: «Наука», 1977.
- [2] Будаков Б. М, Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Сборник задач по математической физике.* — М.: «Наука», 1980.
- [3] Боголюбов А. Н, Кравцов В. В. *Задачи по математической физике* — М.: «Издательство Московского университета», 1998.