(1) $\operatorname{div}\vec B = 0$ ; $\operatorname{div}\vec D = \rho$ (2) Система М.

(3) $\operatorname{rot}\vec H = \vec j + \dfrac{\partial \vec D}{\partial t}$ ; $\operatorname{rot}\vec E = -\dfrac{\partial \vec B}{\partial t}$ (4)

$\vec D = \varepsilon\varepsilon_0 \vec E$ $\quad \vec B = \mu\mu_0 \vec H$ (5) Следствие:

Из (2) и (4) $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{div}\vec j + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ (6)

$\boxed{\operatorname{div}\vec j_\Sigma = 0}$ — нет источ. ∴ сил. линии непрерывны (7)

полный ток

$$\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec E \;\Big|\cdot\vec H$$
$$\frac{\partial \vec D}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec H - \vec j \;\Big|\cdot\vec E$$
$$(+) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec B\cdot\vec H + \vec D\cdot\vec E}{2} = \underbrace{\vec E\cdot\operatorname{rot}\vec H - \vec H\cdot\operatorname{rot}\vec E}_{-\operatorname{div}[\vec E,\vec H]} - \vec j\cdot\vec E$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec S + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec j\cdot\vec E = -\sigma E^2} \quad (8)$$
— т. Умова-Пойнтинга.

Решение системы.

Положим $\boxed{\vec B = \operatorname{rot}\vec A \ (9) \quad \vec E = -\vec\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec A}{\partial t} \ (10)}$ Тогда ур-е (1) и (4) выполнены. Остаются ур-е (2) и (3) ист-ки.

$$\operatorname{rot}\vec B \underset{(9)}{=} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec A = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec A - \Delta\vec A =$$
$$\underset{(5)}{=} \mu\mu_0 \operatorname{rot}\vec H = \mu\mu_0\left(\vec j + \frac{\partial \vec D}{\partial t}\right) = \mu\mu_0\vec j + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec E}{\partial t} =$$
$$\underset{(10)}{=} \mu\mu_0\vec j + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec\nabla\varphi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}\right)$$

Сравнивая 1-ю и посл. форму, получим:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec A - \Delta\vec A = \mu\mu_0\vec j - \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}, \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{n}$$

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \Delta\vec A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2} + \mu\mu_0\vec j \quad (11)$$

Положим $\boxed{\operatorname{div}\vec A + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0}$ (12) — калибровка Лоренца. см. стр. (обладает рел. инвар).

$$\boxed{\square\vec A = \Delta\vec A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec j} \quad (13)$$

$$\operatorname{div}\vec E \underset{(10)}{=} -\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}_{\Delta}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec A}_{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \text{см. } (12)} \underset{(2)}{=} \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (11^*)$$

∴ Учитывая (12), получим:

$$\boxed{\square\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (14)$$
— Вместе с (13) образ. НЕЗАВИСИМЫЕ (кр. (6)) ур-я для $\vec A$, $\varphi$.

Если $\vec j = 0$, $\rho = 0$ — свободное поле в непров. среде без зарядов, то реш. (14) является, например

(15) $\varphi \equiv 0$ (это – калибровка Вейля, если её исп. сначала вместо условия Лоренца)

Здесь (15) — не калибровочное условие, а лишь частное (но возможное) решение (14) при $\rho \equiv 0$.
Тогда остаётся решить систему

$$\boxed{\Box \vec{A} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\, \vec{A} = 0} \quad (16) \qquad \boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \mathrm{rot}\, \vec{A} = \mu\mu_0 \vec{H} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

условие поперечности поля.

**Достижимость калибровки**

Убедимся, что калибр. условие (12) мож. быть достигнуто. Воспольз. калибров. инвар-ю поле э/м.

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A} \Rightarrow \text{замена } \vec{A} = \vec{A}_0 - \nabla\psi \quad (17) \text{ не мен. } \vec{B}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\varphi - \varphi_0) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} - \vec{A}_0) \underset{(17)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi$$

Например $\therefore \varphi = \varphi_0 + \dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ (18)

(17), (18) — калибр. пр-е, сохраняющие $\vec{B}$ и $\vec{E}$. $\psi$ — калиб. ф-я ($\forall$ непр. ф-я $\vec{r}$ и $t$). Пусть (12) для $\vec{A}_0$ и $\varphi_0$ не вып. Покажем, что $\psi$ можно подобрать так, чтобы (12) выполнялось для $\vec{A}$ и $\varphi$. Из (12) для $\vec{A}$ и $\varphi$ найдем, с учетом (17) и (18):

$$\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \underset{(18)}{\overset{(17)}{=}} \mathrm{div}(\vec{A}_0 - \nabla\psi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_0 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \underset{(12)}{=} 0$$

$$\therefore -\mathrm{div}\,\nabla\psi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\mathrm{div}\, \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Box\psi = \mathrm{div}\, \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}} \quad (19)$$

Если $\vec{A}_0, \varphi_0$ — какие-либо решения (11) и (11*), то $\psi$ из (19) обеспечит для $\vec{A}, \varphi$ из (17), (18) вып. усл. (12). Главное, что ур. (19) для $\psi$ всегда мож. быть решено (для ур. Даламбера $\exists$ ф-я Грина свобод. пр-ва)

**Свободное гарм. поле**

$$\begin{cases} \vec{A} = -\vec{A}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \quad \varphi \equiv 0 & (20) \\ \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c_0}{n} = c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}; \quad \vec{k} = \vec{k}_0 n, \ n = \sqrt{\varepsilon\mu}; \quad \lambda = \lambda_0/n \\ \mathrm{div}\, \vec{A} = \vec{k}\cdot\vec{A}_0 = 0 \text{ — поперечность.} \end{cases}$$

$$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = k/\sqrt{\mu\mu_0} \quad (20^*)$$

Тогда (21)
$$\begin{cases} \vec{E} \overset{(16)}{=} -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \omega \vec{A}_0 \sin\psi \parallel \vec{A}_0 \\ \vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A} = +\vec{k}\times\vec{A}_0 \sin\psi \perp \vec{A}_0 \end{cases}$$

дать рис. больше!

$$\frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2} = \frac{k^2 A_0^2}{2\mu\mu_0}\sin^2\psi \ ; \ \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 A_0^2 \omega^2}{2}\sin^2\psi \ (22) \underset{(20^*)}{=} \frac{A_0^2 k^2}{2\mu\mu_0}\sin^2\psi = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}$$ — т.е. равн. распр. энер.

Но это, если между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ нет фаз. сдвига.

$$\vec{S}_\Pi = \vec{E}\times\vec{H} \overset{(21)}{=} \omega\frac{\vec{A}_0\times\vec{k}\times\vec{A}_0}{\mu\mu_0}\sin^2(\psi) = \Big[\vec{k}A_0^2 - \vec{A}_0\underbrace{(\vec{k},\vec{A}_0)}_{0,\ \text{см. } (20)}\Big]\frac{\omega\sin^2()}{\mu\mu_0} = \frac{\omega}{\mu\mu_0}\vec{k}A_0^2\sin^2\psi =$$

$$= \frac{\omega k \vec{n}_k A_0^2 \sin^2(\psi)}{\sqrt{\mu\mu_0}\sqrt{\mu\mu_0}} \underset{(20^*)}{=} \vec{n}_k \frac{\omega^2(\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0})^2 A_0^2 \sin^2(\psi)}{\sqrt{\mu\mu_0}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} \underset{(22)}{=} \vec{n}_k c W, \quad W = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}}{2} = \vec{D}\cdot\vec{E} \quad (23)$$

Кр. того из т.е. равн. распр. эн. $H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\, E$ (24) это рав-во только для амплитуд, если меж. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ $\exists$ фаз. сдвиг.

## Давление э/м волны и импульс

Давление э/м волны и импульс: под действием $\vec E$ волны в среде возн. рис. 1 $\vec j = \sigma\vec E$, на кот. действует амперова сила с объем. плотностью $\vec F_1 = \vec j\times\vec B = \sigma\vec E\times\vec B = \mu\mu_0\sigma\vec E\times\vec H = \mu\mu_0\sigma\vec S_п$ (25)

Она и создает давление. При $\sigma = 0$ ($\rho_э = \infty$) давления нет (ид. диэлектрик).

рис. 2

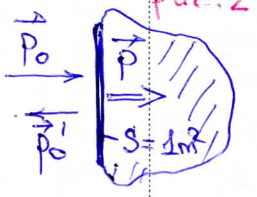
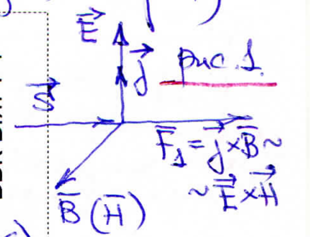



рис. 1




Поскольку есть сила ⇒ есть передача импульса ⇒ есть импульс! Из СТО для света $W = pc$ ⇒

$w_1 = \frac{W}{V} = p_1 c$, $p_1$ – объем. плот. имп.

$w_1 c = S_п = p_1 c^2$, но $\vec S_п$ и $\vec p_1$ ориентированы одинаково ⇒

$\vec p_1 = \vec S_п / c^2$ (26)

$p_1 = w_1 / c$ (27) $w_1$ – плот. э/м энергии

Пусть свет падает нормально на $1\ м^2$ пов-ти тела, см. рис. 2. Тогда $\forall \Delta t$ и $S$

$\vec p_0 = \vec p_0' + \vec p \xRightarrow{рис. 2} p = p_0 + p_0'$ (28)

пад отраж передан пов-ти

Пусть $S = 1м^2$, $\Delta t = 1с$. Тогда с пов-то провзаим. импульс

$P_0 = P_1 c$ т.е. (29) объем плот. имп для отраж. импульсов. Поскольку $S_п$ пульсирует, за $\Delta t = 1$ мы наблюдаем средний импульс

$p = p_0 + p_0' \overset{(28)}{\underset{(29)}{=}} \langle p_1\rangle c + \langle p_1'\rangle c$ (30)

Если $\rho = \frac{\langle W_1'\rangle}{\langle W\rangle}$ (31) – коэф. отражения пов-ти, то $\overset{(30)}{\underset{(27)}{\Rightarrow}} p = \langle w_1\rangle + \langle w_1'\rangle \overset{(31)}{=} \langle w_1\rangle + \rho\langle w_1\rangle = (1+\rho)\langle w_1\rangle = p$ (32) – привыч. ф-ла для давления (которая легко из фотонов получается).

## Интенсивность и световой поток

$\left[\frac{Вт}{м^2}\right]\ I = \frac{\Phi[Вт]}{S_{плоск}} = \frac{1}{\Delta t S_{пл}}\int_0^{\Delta t}\int_{S_{пл}} \vec S\cdot\vec n\, dS_{пл}\, dt = \frac{1}{S_{пл}}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_{S_{пл}} \frac{\omega}{\mu\mu_0}A_0^2\sin^2\psi\, \vec k\cdot\vec n\, dt\, dS_{пл} =$

$\vec k, S_{пл}\perp\vec k$, $\vec n\uparrow\uparrow\vec k$

$\Delta t \sim T = \frac{2\pi}{\omega}$

$= \frac{1}{S_{пл}}\cdot\frac{\omega k}{\mu\mu_0}A_0^2\frac12 S_{пл} \overset{(29*)}{=} \frac12\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\omega^2 A_0^2 \overset{(21)}{=} \frac12\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m^2 \overset{(24)}{=} \frac12 H_m E_m$ – интенсивность (33)

только от среды!

$\langle\sin^2\psi\rangle = \frac12$ $\forall$ частоты

$S_{пл}$ – фотоэл-та,

$\Delta t \sim T$ (кратно)

$\Delta t \gg T$

## Шкала э/м волн. Ф-я видности.

$\lambda > 1\ мм$ – радио волны

$\lambda = 1мм \div 0{,}76$ мкм – инфракрасное

$0{,}76 \div 0{,}4$ мкм – видимое (свет)

$0{,}4 \div 0{,}01$ мкм – ультрафиолет

$\lambda < 0{,}01$ мкм – жесткое (γ/ф, рентген, гамма)

$V_\lambda$ – ф-я видности