Теорема Гельмгольца

$$\vec a(\vec r) = -\vec\nabla\varphi + \mathrm{rot}\,\vec b(r) \qquad (1)$$

Заметим $\mathrm{rot}\,\vec b = \vec\nabla\times\vec b$

$\mathrm{div}\,\vec b = \vec\nabla\cdot\vec b$

(2) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec b = (\vec\nabla, \vec\nabla\times\vec b) = 0, \quad (\vec c, \vec c\times\vec b) \equiv 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = \vec\nabla\times\vec\nabla f = 0, \quad \bar c\times\bar c = 0$

Поэтому в поле (1) выделяются потенциальная и вихревая составляющие.

$$\mathrm{div}\,\vec a = -\Delta\varphi \Rightarrow \varphi \qquad (3)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec a = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec b = \underset{\bar a}{\vec\nabla}\times\underset{\bar b}{\vec\nabla}\times\underset{\bar c}{\vec b} = \underset{\bar b(\bar a, c)}{\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec b)} - \underset{\bar c(\bar a,\bar b)=(\bar a,\bar b)\bar c}{(\vec\nabla,\vec\nabla)\vec b} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec b - \Delta\vec b$$

Обычно для $\vec b$ используют условие вихревой функции $\mathrm{div}\,\vec b = 0$ (обнуление потенц. части)

$\therefore\ \mathrm{rot}\,\vec a = -\Delta\vec b \Rightarrow \vec b \qquad (4)$

$\therefore\ \varphi$ и $\vec b$ полностью определяются полем $\vec a$.