

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)**

В. П. ДЕМКОВ, О. И. СУРОВ, А. В. ЦИПЕНКО

Ф И З И К А
Э Л Е К Т Р О Д И Н А М И К А
Магнетизм
Переменный ток

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
14 октября 2019 г.

Москва
Издательство МАИ
2020

Демков В. П., Суров О. И., Ципенко А. В. Физика. Электродинамика. Магнетизм. Переменный ток: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2020. 156 с.: ил.

Пособие отражает содержание второй части раздела «Электродинамика» курса общей физики для инженерно-технических специальностей вузов. Содержание и расположение материала пособия соответствуют курсу лекций, читаемых студентам МАИ.

В книгу включены темы по магнетизму и переменному току. Каждая тема содержит теоретическую часть, задачи с подробными решениями и тесты. Задачи связаны с основным текстом и часто являются его развитием и дополнением. Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения, и тесты снабжены ответами.

Ссылки на §§ 1–20 и формулы с номерами (1.х)–(20.х) адресуют читателя к книгам [14]–[17], продолжением которых является настоящее учебное пособие тех же авторов.

Для студентов и преподавателей высших технических учебных заведений.

Рецензенты:

кафедра физики Уфимского государственного авиационного технического университета (зав. кафедрой доктор техн. наук, профессор *И. В. Александров*);

кандидат физ.-мат. наук, доцент МГУ им. М. В. Ломоносова
В. С. Козловский

§21. Магнитное поле в вакууме

Хорошо известно, что если поднести два магнита друг к другу, то между ними появится сила; магниты будут либо притягивать друг друга, либо отталкивать. Взаимодействие магнитов ощущается даже тогда, когда они не соприкасаются. Любой магнит имеет два полюса – северный и южный. Если к северному полюсу одного магнита поднести северный полюс другого, то магниты будут отталкиваться; то же самое будет, если магниты сблизить южными полюсами. Но если к северному полюсу одного магнита поднести южный полюс другого, то между магнитами возникнет притяжение. Это напоминает взаимодействие зарядов – одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Многочисленные опыты, проводимые с токами, показали, что электрические токи взаимодействуют друг с другом подобно магнитам. Например, два прямолинейных проводника, расположенные в одной плоскости параллельно друг другу, притягиваются при пропускании по проводникам токов одного направления, и отталкиваются, если токи имеют противоположные направления. Однако если ток течет лишь по одному проводнику, то силы взаимодействия между проводниками отсутствуют. Обратимся к другому опыту: если перемещать вокруг проводника с током компас, то в любой точке магнитная стрелка компаса установится по касательной к окружности, очерченной вокруг проводника, то есть проводник с током будет оказывать ориентирующее действие на магнитную стрелку. Если изменить направление тока в проводнике, то и стрелка повернется на 180° .

Как позже было установлено, природа взаимодействия магнитов друг с другом, токов друг с другом, магнитов и токов одна и та же – в ее основе лежит тот факт, что магниты и токи наделяют окружающее пространство особыми физическими свойствами.

Для объяснения взаимодействия неподвижных зарядов [17, §15] требовалось наличие некоторой материальной среды, порождаемой зарядами в окружающем пространстве, которую называли электрическим полем. Появление сил магнитного взаимодействия также объясняют возникновением вокруг магнитов и токов некоторой материальной среды, порождаемой магнитами и токами, которую называют *магнитным полем*. При этом магнитное поле существует, даже если магнитное взаимодействие не наблюдается. О наличии в пространстве магнитного поля можно судить только по его действию на другие магниты, движущиеся заряды или токи.

Из рассмотренных опытов следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Ее называют *магнитной индукцией* \vec{B} (или *вектором индукции магнитного поля*).

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции: индукция магнитного поля, порожденного несколькими токами (магнитами), равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым из токов (магнитов) в отдельности:**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i. \quad (21.1)$$

Магнитное поле так же, как и электрическое, можно изображать графически при помощи линий индукции (силовых линий магнитного поля). *Линиями индукции* называют линии, касательные к которым в каждой точке направлены так же, как и

вектор \vec{B} в данной точке поля. Очевидно, что через каждую точку магнитного поля можно провести лишь одну линию индукции (в противном случае вектор \vec{B} одновременно должен иметь два или более направления). Следовательно, линии индукции нигде не могут пересекаться. Для наглядности на рисунках линии индукции изображают гуще в тех точках поля, где больше величина \vec{B} . При этом на линии индукции изображают стрелку в направлении вектора индукции.

Представление о линиях индукции можно получить с помощью магнитной стрелки. Например, по действию магнитного поля прямолинейного тока на магнитную стрелку можно заключить, что линии магнитной индукции прямолинейного проводника с током представляют собой концентрические окружности, в центре которых находится проводник.

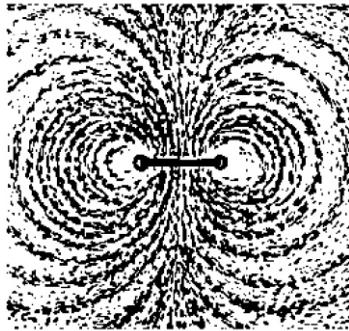


Рис. 21.1

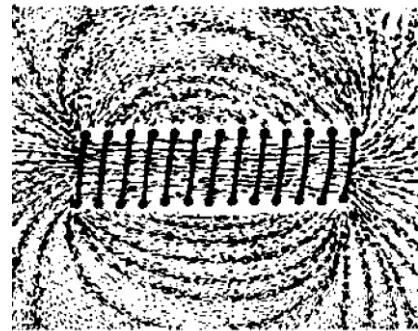


Рис. 21.2

Еще удобнее воспользоваться железными опилками, которые в магнитном поле намагничиваются и становятся подобными маленьким стрелкам компаса. На рис. 21.1 и рис. 21.2 приведены полученные таким способом картины линий индукции поля кругового витка с током и соленоида (так называют длинную катушку с большим числом витков). Из рис. 21.2 видно, что в средней части внутри соленоида линии индукции параллельны друг другу и расположены на равных расстояниях. Такие магнитные поля называют *однородными*.

Несмотря на некоторое сходство описания электрических и магнитных полей между ними имеется принципиальное отличие: линии магнитной индукции непрерывны (они не имеют ни начала, ни конца) и замыкаются сами на себя. Векторные поля, обладающие таким свойством, называют *вихревыми*.

21.1. Магнитная сила. Сила Лоренца

Магнитное поле в отличие от электрического не оказывает действия на покоящиеся заряды. Сила, с которой магнитное поле с индукцией \vec{B} действует на электрический заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} , называется *магнитной силой*. Опытным путем установлено, что эта сила

$$\vec{F}_M = q [\vec{v}, \vec{B}]; \quad F_M = |q| v B \sin \theta, \quad (21.2)$$

где θ — угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Как следует из (21.2), магнитная сила направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{B} . Поскольку сила \vec{F}_M все время перпендикулярна скорости частицы, ее проекция на направление перемещения частицы в любой момент равна нулю. Это означает, что магнитная сила не совершает работы над частицей и не меняет ее кинетическую энергию [14, §4], а, значит, и величину скорости.

Рассмотрим некоторые примеры действия магнитной силы.

Если скорость частицы направлена перпендикулярно линиям индукции (рис. 21.3), то магнитная сила $F_m = |q| v B$, сообщая частице нормальное ускорение $a_n = v^2/R$, будет менять направление скорости. При этом вектор скорости будет все время оставаться перпендикулярным магнитному полю и частица будет двигаться с постоянной по величине скоростью по окружности некоторого радиуса R . Записав уравнение движения частицы

$$m a_n = F_m$$

в виде

$$\frac{m v^2}{R} = |q| v B,$$

найдем радиус окружности и период обращения частицы:

$$R = \frac{mv}{|q|B}; \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (21.3)$$

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет некоторый угол θ с направлением линий магнитной индукции.

Разложим вектор скорости частицы на две составляющие, одна из которых $v \sin \theta$ направлена перпендикулярно силовым линиям поля, а другая $v \cos \theta$ параллельна им (рис. 21.4).

В магнитном поле на частицу действует сила $F_m = |q| v \sin \theta B$, обусловленная составляющей $v \sin \theta$. Эта сила заставит частицу двигаться по окружности. В направлении силовых линий на частицу никакие силы не действуют, поэтому составляющая скорости $v \cos \theta$ не будет меняться ни по величине, ни по направлению. Наличие составляющей $v \cos \theta$ приведет к тому, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий поля. В результате наложения этих двух движений траекторией частицы будет винтовая линия (цилиндрическая спираль), изображенная на рис. 21.4. Ее радиус и период обращения частицы (см. выражения (21.3))

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{m v \sin \theta}{|q|B}; \quad T = \frac{2\pi R}{v \cos \theta} = \frac{2\pi m}{|q|B \cos \theta}. \quad (21.4)$$

Очевидно, что шаг h винтовой линии

$$h = v \cos \theta T = \frac{2\pi R}{v \cos \theta} = \frac{2\pi m}{|q|B \cos^2 \theta}. \quad (21.5)$$

Рассмотрим теперь металлический проводник прямоугольного сечения, по которому течет ток плотностью j , находящийся в однородном магнитном поле, перпендикулярном направлению тока в проводнике (рис. 21.5). На движущиеся электроны в проводнике будет действовать сила F_m , направленная вверх, и электроны будут отклоняться к по-

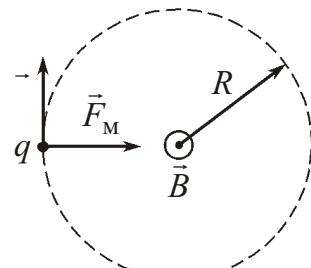


Рис. 21.3

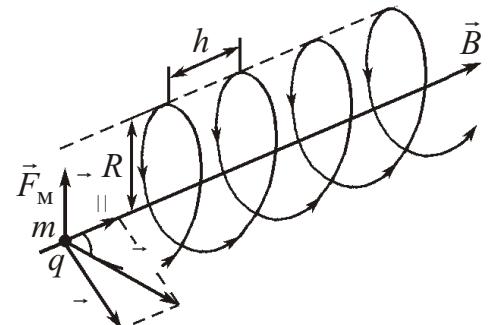


Рис. 21.4

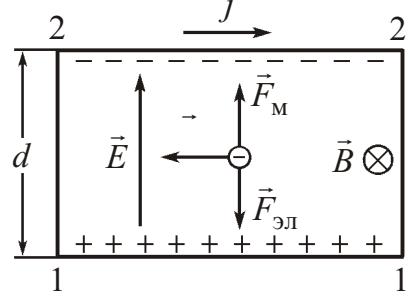


Рис. 21.5

верхности 2 2 проводника. Вследствие этого между поверхностями 1 1 и 2 2 возникнет электрическое поле напряженностью \vec{E} и разность потенциалов . Разность потенциалов будет увеличиваться до тех пор, пока силы $\vec{F}_{\text{эл}}$ электрического поля не уравновесят силы, действующие на заряды со стороны магнитного поля:

$$|\vec{F}_{\text{эл}}| = |\vec{F}_m|, \quad \text{или} \quad |e| E = |e| B,$$

где E величина напряженности электрического поля между рассматриваемыми поверхностями; средняя скорость направленного движения электронов в проводнике [17, §20, (20.4)]:

$$\frac{j}{|e| n}.$$

Следовательно, между поверхностями 1 1 и 2 2 проводника установится разность потенциалов

$$E d = \frac{j B d}{|e| n}.$$

Рассмотренное явление называют *эффектом Холла* для металлов, а возникающую между поверхностями разность потенциалов – *ЭДС Холла*, которую принято записывать в виде

$$R_x j B d,$$

где величина

$$R_x = \frac{1}{|e| n},$$

зависящая от концентрации n электронов в проводнике, называется *постоянной Холла*.

Эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку холловской ЭДС можно определить принадлежность полупроводника к n - либо к p -типу.

В случае, когда одновременно существуют электрическое и магнитное поле, сила, действующая на движущуюся заряженную частицу,

$$\vec{F}_L = q [\vec{u}, \vec{B}] = q \vec{E}. \quad (21.6)$$

Выражение (21.6) было получено путем обобщения экспериментальных данных и называется *силой Лоренца*.

В нерелятивистском приближении сила Лоренца, как и любая другая сила, не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Вместе с тем магнитная составляющая силы (21.6) меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому должна меняться и электрическая составляющая. Таким образом, разделение силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчета; без указания системы отсчета такое разделение не имеет смысла.

21.2. Сила Ампера

Если проводник, по которому течет ток, находится в магнитном поле, то на каждый носитель тока действует сила (21.2)

$$\vec{F}_m = q [(\vec{u} - \vec{v}), \vec{B}], \quad (21.7)$$

где \vec{u} – скорость хаотического движения носителей тока; \vec{v} – скорость их упорядоченного движения. От носителей тока действие этой силы передается проводнику, по которому они перемещаются. В результате на проводник с током, находящийся в магнитном поле, будет действовать некоторая результирующая сила.

Рассмотрим бесконечно малый элемент проводника длиной dl и сечением S . В этом элементе содержится $dN = n dl S$ носителей тока, где n – концентрация носителей.

Умножив (21.7) на число носителей тока, содержащихся в выделенном элементе, и усреднив полученное выражение по всем носителям, найдем силу, действующую со стороны магнитного поля на элемент проводника длиной dl :

$$\vec{F}_m = dN q [\vec{j}, \vec{B}] n dl S = [q n \vec{j}, \vec{B}] dl S = [\vec{j}, \vec{B}] dl S = [\vec{j} dl, \vec{B}] S, \quad (21.8)$$

где учтено, что $\vec{u} = 0$, а плотность тока $\vec{j} = q n \vec{v}$.

Введем вектор $d\vec{l}$, направленный по оси элемента тока в сторону, в которую течет ток (рис. 21.6). Так как направления векторов \vec{j} и $d\vec{l}$ совпадают, то

$$\vec{j} dl = j d\vec{l}.$$

Следовательно,

$$\vec{F}_m = dN [\vec{j} dl, \vec{B}] S = j S [d\vec{l}, \vec{B}] = I [d\vec{l}, \vec{B}].$$

Полученное выражение определяет силу, действующую на элемент тока $I d\vec{l}$ в магнитном поле, которая называется *силой Ампера*:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}]; \quad dF_A = IB dl \sin \theta, \quad (21.9)$$

где θ – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Как следует из (21.9), сила Ампера перпендикулярна плоскости, в которой лежит проводник и вектор \vec{B} .

Рассмотрим, как ведет себя контур с током в однородном магнитном поле.

На элемент $d\vec{l}$ контура действует сила, определяемая выражением (21.9), а на весь контур

$$\vec{F}_A = \oint d\vec{F}_A = \oint I [d\vec{l}, \vec{B}].$$

Вынося постоянные величины I и \vec{B} из-под знака интеграла, получаем

$$\vec{F}_A = I [(\oint d\vec{l}), \vec{B}].$$

Интеграл, стоящий в круглых скобках, равен нулю, следовательно, результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле, также равна нулю. Это означает, что однородное поле не может заставить двигаться контур поступательно; в зависимости от направлений тока и магнитного поля силы Ампера будут или растягивать контур, стремясь его разорвать, или сжимать контур. Это справедливо для контуров любой формы (в том числе и неплоских) при произвольном расположении контура относительно направления поля. Однако при этом результирующий момент сил Ампера, действующий на контур, может быть отличным от нуля.

Рассмотрим плоский квадратный контур, расположенный в магнитном поле так, что линии индукции направлены под углом к нормали контура (рис. 21.7). В положении контура, показанном на рисунке, силы Ампера будут, во-первых, стремиться

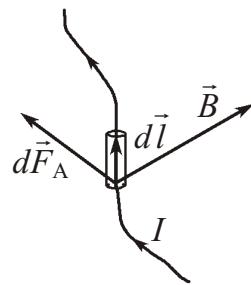


Рис. 21.6

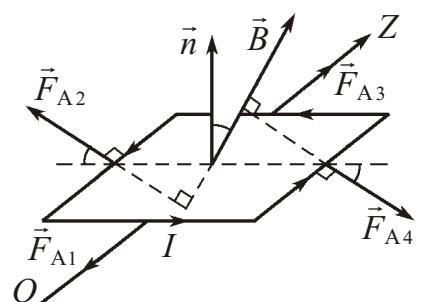


Рис. 21.7

растянуть контур, а во-вторых, повернуть его и расположить в плоскости, перпендикулярной силовым линиям. Относительно оси OZ на контур действует момент сил

$$M_z = F_{A2} \frac{l}{2} \sin \theta = F_{A4} \frac{l}{2} \sin \theta = IB l^2 \sin \theta$$

(где l – длина стороны контура), который стремится развернуть контур. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ момент сил Ампера максимален:

$$M_{\max} = IB l^2 = IBS$$

(где $S = l^2$ – площадь, ограниченная контуром) и обращается в нуль при $\theta = 0$ или (в первом случае контур с током будет находиться в положении устойчивого равновесия, во втором – в положении неустойчивого равновесия).

Величина

$$p_m = IS$$

называется *магнитным моментом* контура с током.

Магнитный момент p_m принято записывать в виде вектора

$$\vec{p}_m = IS \vec{n}, \quad (21.10)$$

где \vec{n} – положительная нормаль к контуру.

Опыт показывает, что момент сил Ампера, действующих в магнитном поле на контур с током относительно произвольной неподвижной оси, зависит от расположения контура, его геометрических размеров и от силы тока в нем, но не зависит от формы контура, и для любого плоского контура справедливо:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]; \quad M_z = p_m B \sin \theta; \quad M_{\max} = p_m B. \quad (21.11)$$

Следовательно, на контур с током в магнитном поле в общем случае действует момент сил Ампера (называемый *механическим моментом*), который стремится расположить контур так, чтобы направление магнитного момента \vec{p}_m контура совпало с направлением вектора индукции поля в данной точке.

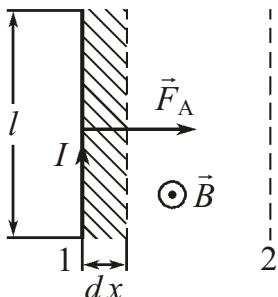


Рис. 21.8

Вычислим работу сил Ампера при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле.

Рассмотрим прямолинейный проводник длиной l с током I , расположенный в однородном магнитном поле, перпендикулярном проводнику (рис. 21.8). На проводник будет действовать сила Ампера $F_A = IBl$, направленная перпендикулярно плоскости, в которой лежат проводник и вектор \vec{B} . При перемещении проводника перпендикулярно направлению поля за бесконечно малое время dt сила Ампера совершила работу

$$dA = (\vec{F}_A, d\vec{r}) = F_A dx = IB l dx = IB dS = I d\Phi, \quad (21.12)$$

где $d\Phi = B dS$ – магнитный поток через поверхность $dS = l dx$, «заметаемую» проводником за время dt . Очевидно, на конечном перемещении 1–2 проводника работа силы Ампера

$$A = \int_1^2 I d\Phi = I \Phi_2 - I \Phi_1. \quad (21.13)$$

Если магнитное поле направлено произвольно, то, разложив вектор \vec{B} на три составляющие,

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$$

(здесь составляющая \vec{B}_n перпендикулярна плоскости, в которой перемещается проводник; \vec{B}_l параллельна проводнику и расположена в плоскости, в которой он перемещается; \vec{B}_x направлена вдоль перемещения проводника), получим

$$dA \cdot (\vec{F}_A, d\vec{r}) = IB_n l dx \cdot I d\Phi,$$

где учтено, что составляющая \vec{B}_l не оказывает на проводник силового действия, а составляющая \vec{B}_x определяет силу, перпендикулярную перемещению, работа которой равна нулю. Таким образом, выражения (21.12) – (21.13) будут справедливы при произвольном направлении магнитного поля. Очевидно, что они будут верны и в случае неоднородного магнитного поля.

Чтобы найти работу сил Ампера при перемещении контура с током в магнитном поле, надо мысленно разбить контур на бесконечно малые элементы тока и найти работу силы Ампера dA над каждым из них по формуле (21.12), где под $d\Phi$ надо понимать вклад в приращение потока сквозь контур от данного элемента тока. Сложив (с учетом знаков) элементарные работы для всех элементов контура, снова придем к выражению (21.13), где Φ – приращение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, на конечном перемещении.

В заключение отметим, что формула (21.13) будет справедливой при любом движении контура с током в магнитном поле, в частности, при повороте контура вокруг некоторой оси.

21.3. Магнитное поле движущегося заряда

Обратимся теперь к способам определения индукции магнитного поля.

Пространство изотропно, поэтому, если заряд неподвижен, все направления оказываются равноправными. Этим обусловлен тот факт, что создаваемое точечным зарядом электростатическое поле является сферически-симметричным.

В случае движения заряда со скоростью \vec{v} в пространстве появляется выделенное направление (направление вектора \vec{v}). Поэтому, можно ожидать, что магнитное поле, создаваемое движущимся зарядом, обладает осевой симметрией. Отметим, что имеется в виду свободное движение заряда, то есть движение с постоянной скоростью. Чтобы возникло ускорение, необходимо действие на заряд какого-то поля (электрического или магнитного). Это поле само по себе нарушило бы изотропность пространства.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое движущимся с постоянной скоростью \vec{v} точечным зарядом q , в некоторой точке P , положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 21.9). Возмущения поля передаются от точки к точке с конечной скоростью, равной скорости света c . Поэтому индукция $\vec{B}(P, t)$ в точке P в момент времени t определяется не положением заряда в тот же момент времени t , а положением заряда в некоторый более ранний момент времени ($t - \tau$). Если скорость движения заряда \vec{v} много меньше c , то время запаздывания τ будет пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что значение \vec{B} в момент t определяется положением заряда в тот же момент времени t .

Вид функции $\vec{B}(P, t)$ установлен экспериментально. Однако прежде чем привести результат эксперимента, попытаемся понять, какой может быть эта зависимость. Простейшее предположение состоит в том, что величина вектора \vec{B} пропор-

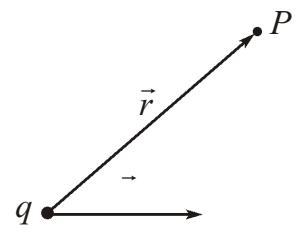


Рис. 21.9

циональна заряду q и скорости \vec{v} (при $\vec{v} = 0$ магнитное поле отсутствует). Кроме того, как показывает опыт, вектор магнитной индукции \vec{B} перпендикулярен векторам \vec{v} и \vec{r} , то есть перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти векторы. «Сконструировать» из скаляра q и двух векторов \vec{v} и \vec{r} интересующий нас вектор \vec{B} можно, перемножив векторы \vec{v} и \vec{r} векторно и умножив затем получившийся результат на скаляр q . В итоге получим выражение $q [\vec{v}, \vec{r}]$. С удалением от заряда (с увеличением расстояния r) модуль этого выражения возрастает. Неправдоподобно, чтобы так вела себя характеристика поля – в случае известных нам полей (электростатического, гравитационного) при удалении от источника поле ослабляется, изменяясь как $1/r^2$. Допустим, что магнитное поле движущегося заряда ведет себя с изменением r таким же образом. Обратную пропорциональность квадрату r можно получить, разделив выражение $q [\vec{v}, \vec{r}]$ на r^3 . Таким образом

$$\vec{B} \sim \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Опыт показывает, что в системе СИ магнитная индукция поля движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (21.14)$$

где коэффициент $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H/A}^2$ называется *магнитной постоянной*.

Из (21.14) следует, что вектор \vec{B} в точке P направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{r} , причем эти три вектора образуют правовинтовую систему.

Отметим, что появление при движении заряда выделенного направления в пространстве приводит к тому, что электрическое поле утрачивает сферическую симметрию и становится осесимметричным.

21.4. Закон Био – Савара – Лапласа

Поскольку для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции, то индукция магнитного поля, порождаемого током, будет равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым из носителей тока в отдельности. Исходя из этого выясним характер магнитного поля, создаваемого произвольным тонким проводником, по которому течет ток.

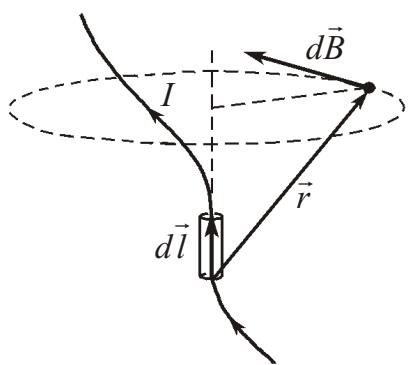


Рис. 21.10

Рассмотрим бесконечно малый элемент проводника длиной dl и сечением S . В этом элементе содержится $dN = n dl S$ носителей тока, где n – концентрация носителей. В точке, положение которой относительно элемента dl определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 21.10), отдельный носитель тока q создает поле с индукцией

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4} \frac{q [(\vec{u} - \vec{v}), \vec{r}]}{r^3}, \quad (21.15)$$

где \vec{u} – скорость хаотического движения носителей тока; \vec{v} – скорость их упорядоченного движения.

Умножив (21.15) на число носителей тока, содержащихся в выделенном элементе, и усреднив полученное выражение по всем носителям, найдем вклад в поле, вносимый элементом проводника длиной dl :

$$d\vec{B} = \vec{B} \cdot n dl S - \frac{q}{4} \frac{[n^\rightarrow, \vec{r}]}{r^3} n dl S = \frac{q}{4} \frac{S [q n^\rightarrow, \vec{r}] dl}{r^3} = \frac{S [\vec{j}, \vec{r}] dl}{4 r^3},$$

где учтено, что $\vec{u} = 0$, а плотность тока $\vec{j} = q n^\rightarrow$.

Введем вектор $d\vec{l}$, направленный по оси элемента тока в сторону, в которую течет ток. Поскольку направления векторов \vec{j} и $d\vec{l}$ совпадают, то

$$\vec{j} dl = j dl.$$

Следовательно, магнитная индукция $d\vec{B}$ бесконечно малого участка тока

$$d\vec{B} = \frac{0}{4} \frac{j S [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{0}{4} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (21.16)$$

где учтено, что $I = j S$.

Формула (21.16) выражает **закон Био – Савара – Лапласа**, который был получен в результате анализа и обобщения экспериментальных данных.

Поскольку любой проводник может быть представлен в виде отдельных прямолинейных участков (в общем случае бесконечно малых) длиной dl , то в соответствии с принципом суперпозиции магнитная индукция \vec{B} проводника с током в каждой точке будет равна векторной сумме элементарных индукций $d\vec{B}$, создаваемых отдельными участками.

21.5. Расчет магнитного поля с помощью принципа суперпозиции

Пусть в пространстве создано магнитное поле проводником с током. Разбив проводник на бесконечно малые элементы $d\vec{l}$, направленные в сторону, в которую течет ток, найдем с помощью закона Био – Савара – Лапласа индукцию $d\vec{B}$ поля, создаваемого каждым отдельным участком. Индукция \vec{B} магнитного поля в произвольной точке пространства может быть определена по принципу суперпозиции как векторная сумма элементарных индукций $d\vec{B}$.

Пример 1. Магнитное поле прямолинейного проводника с током.

Рассмотрим прямолинейный проводник, по которому течет ток силой I , и найдем индукцию магнитного поля в некоторой точке P на расстоянии x от проводника (рис. 21.11).

Мысленно разобьем проводник на бесконечно малые элементы $d\vec{l}$, направленные в сторону, в которую течет ток. Индукция магнитного поля элемента тока $I d\vec{l}$ в точке P , находящейся на расстоянии r от него, равна (см. формулу (21.16))

$$dB = \frac{0}{4} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}$$

(где θ – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r}), причем вектор $d\vec{B}$ на рисунке направлен от нас.

Все векторы $d\vec{B}$ поля, создаваемого разными элементами $d\vec{l}$, имеют одинаковые направления. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

Из рисунка видно, что

$$r = \frac{x}{\sin \theta}; \quad dl = \frac{r d}{\sin \theta} = \frac{x d}{\sin^2 \theta}.$$

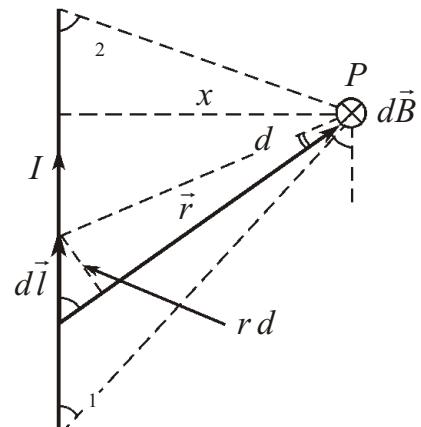


Рис. 21.11

Следовательно,

$$dB = \frac{I}{4} \frac{x \sin \theta \sin^2 \theta d\theta}{x^2 \sin^2 \theta} = \frac{I}{4} \frac{\sin \theta d\theta}{x}.$$

Угол θ для всех элементов проводника изменяется в пределах от 0 до π . Следовательно,

$$B = dB = \frac{I}{4} \frac{\sin \theta d\theta}{x} = \frac{I}{4} \frac{1}{x} \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{I}{4} \frac{1}{x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (21.17)$$

При $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ проводник конечной длины переходит в бесконечно длинный. Для бесконечного прямолинейного проводника с током индукция магнитного поля на расстоянии x от проводника равна

$$B = \frac{I}{2x}. \quad (21.18)$$

Пример 2. Магнитное поле на оси тонкого кольца с током.

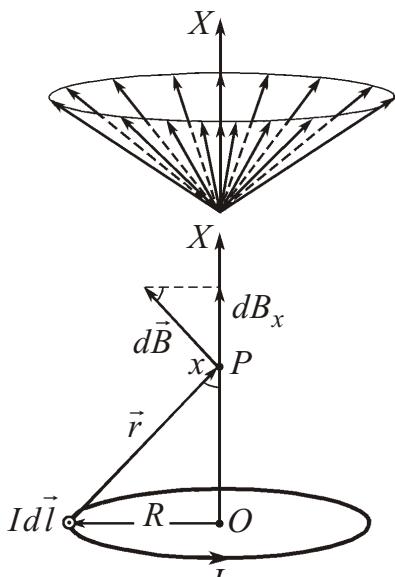


Рис. 21.12

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I , текущим по тонкому проводнику, имеющему форму окружности радиусом R (рис. 21.12). Определим магнитную индукцию на оси кругового тока в точке P на расстоянии x от центра окружности.

Каждый элемент тока $dI d\vec{l}$ создает в точке P индукцию

$$dB = \frac{I}{4} \frac{dI d\vec{l} \sin 90^\circ}{r^2},$$

направленную перпендикулярно векторам $d\vec{l}$ и \vec{r} (вектор \vec{r} проведен от рассматриваемого элемента тока в точку P ; угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} равен 90°), то есть перпендикулярно к плоскости, в которой расположены эти векторы.

Все векторы $d\vec{B}$ поля, созданного разными элементами тока, образуют симметричный относительно

оси OX конический веер. Из соображений симметрии можно заключить, что результирующий вектор \vec{B} направлен вдоль оси OX .

Каждый из составляющих векторов $d\vec{B}$ вносит в результирующий вектор \vec{B} вклад dB_x , равный

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{I}{4} \frac{dI d\vec{l}}{r^2} \sin \theta = \frac{I}{4} \frac{dI d\vec{l}}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{I}{4} \frac{IR dI}{r^3}.$$

Проинтегрировав по всему кольцу и заменив r на $\sqrt{R^2 - x^2}$, найдем величину индукции магнитного поля на оси кругового тока:

$$B = dB_x = \frac{I}{4} \int_0^{2\pi} \frac{IR dI}{(R^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{I}{2} \frac{IR^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{I}{2} \frac{p_m}{(R^2 - x^2)^{3/2}}, \quad (21.19)$$

где $p_m = IS = I \cdot R^2$ – магнитный момент контура с током (см. (21.10)).

При $x = 0$ формула (21.19) определяет индукцию в центре кругового тока:

$$B_0 = \frac{I}{2} \frac{R}{R^2} = \frac{I}{2} \frac{p_m}{R^3}. \quad (21.20)$$

Пример 3. Магнитное поле на оси соленоида.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I внутри соленоида длиной L и радиусом R (рис. 21.13). Определим магнитную индукцию в точке P на оси соленоида, расположенную на расстоянии x_0 от одного из его концов.

Введем ось OX , направленную вдоль оси соленоида с началом у одного из его концов, и мысленно разобьем соленоид на кольца шириной dx .

Если соленоид содержит N витков, то кольцо шириной dx будет содержать $dN = n dx$ витков, где $n = N/L$. Каждое такое кольцо создает в точке P индукцию (см. формулу (21.19))

$$dB_x = \frac{0}{2} \frac{dI R^2}{[R^2 - (x_0 - x)^2]^{3/2}} = \frac{0}{2} \frac{n I R^2 dx}{[R^2 - (x_0 - x)^2]^{3/2}}.$$

Проинтегрировав по всей длине соленоида, найдем величину индукции магнитного поля в точке P :

$$B = dB_x = \frac{0}{2} \frac{n I R^2 dx}{[R^2 - (x_0 - x)^2]^{3/2}} = \frac{0}{2} \frac{n I R^2}{[R^2 - (x_0 - x)^2]^{3/2}} \int_0^L dx.$$

Сделав замену переменных $(x_0 - x) = R \operatorname{ctg} \theta$, получим:

$$B = \frac{0}{2} \frac{n I R^2}{R^3 \sin^2 \theta} = \frac{R d \theta}{2 \sin^3 \theta} = \frac{0}{2} n I \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2};$$

$$B = \frac{1}{2} n I (\cos 0 - \cos \pi/2). \quad (21.21)$$

При $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$ соленоид конечной длины переходит в бесконечный. Для бесконечного соленоида с током индукция магнитного поля на оси соленоида равна

$$B = \frac{0}{2} n I, \quad (21.22)$$

где n – число витков на единицу длины.

Краткие выводы

1. Принцип суперпозиции индукции магнитного поля: индукция магнитного поля, порожденного несколькими токами (магнитами), равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым из токов (магнитов) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i.$$

2. Линией индукции магнитного поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции поля в этой точке. Линии индукции магнитного поля:

- а) замыкаются сами на себя;
- б) не пересекаются и не касаются друг друга;
- в) расположены тем гуще, чем больше величина индукции.

3. Магнитная индукция поля движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{0}{4} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

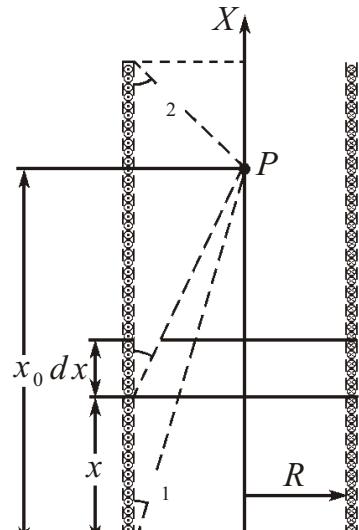


Рис. 21.13

4. Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

5. Магнитная сила (сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле)

$$\vec{F}_m = q [\vec{v}, \vec{B}].$$

6. Сила Лоренца (сила, действующая на заряд, движущийся в электрическом и магнитном полях)

$$\vec{F}_L = q [\vec{v}, \vec{E}] + q \vec{v} \times \vec{B}.$$

7. Сила Ампера (сила, действующая на бесконечно малый элемент тока в магнитном поле)

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}].$$

8. Работа сил Ампера при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле

$$A = I \Phi.$$

9. Магнитный момент контура с током

$$\vec{p}_m = I S \vec{n}.$$

10. Механический момент, действующий на плоский контур с током в магнитном поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Сформулируйте принцип суперпозиции индукции магнитного поля.

2. Изобразите на рисунке линии индукции магнитного поля прямолинейного тока; кругового тока; соленоида.

3. Чему равна работа силы Лоренца, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле?

4. От чего зависит период обращения заряженной частицы, движущейся по окружности в однородном магнитном поле?

5. Зная радиус и шаг винтовой линии, по которой движется протон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} под углом θ к линиям индукции, определите скорость частицы.

6. Что такое сила Ампера?

7. Может ли однородное магнитное поле заставить двигаться поступательно находящийся в нем плоский контур с током?

8. Как будет двигаться плоский контур с током, находящийся в магнитном поле, если нормаль к плоскости контура составляет некоторый угол с направлением линий индукции?

9. Магнитный поток, пронизывающий плоский контур с током I , расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно силовым линиям, равен Φ . Чему равна работа сил Ампера при повороте контура на 180° относительно оси, перпендикулярной полю?

10. Запишите закон Био – Савара – Лапласа.

11. Чему равна индукция магнитного поля на оси прямого провода с током?

12. Что вы можете сказать о магнитном поле внутри бесконечно длинного соленоида с током?

Задачи

1. Плоскость AC является границей раздела двух однородных магнитных полей. Векторы магнитной индукции полей параллельны друг другу и разделяющей их плоскости (рис. 1). Положительно заряженная частица начинает движение от плоскости AC , перпендикулярно ей. Определите отношение величины скорости движения частицы к средней скорости ее перемещения вдоль границы раздела полей, если отношение индукций магнитных полей $B_2/B_1 = n = 1,5$.

Решение

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны скорости частицы (рис. 2).

На частицу, движущуюся в магнитном поле, будет действовать сила

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Поскольку магнитная сила все время перпендикулярна скорости частицы, то ее проекция на направление перемещения частицы в любой момент равна нулю. Это означает, что \vec{F}_m не совершает работы над частицей и не меняет ее кинетическую энергию и величину скорости. При этом сила меняет направление скорости частицы, сообщая ей нормальное ускорение, а вектор скорости остается перпендикулярным вектору \vec{B} . Следовательно, частица будет двигаться по окружности, а сила \vec{F}_m в любой момент времени будет оставаться постоянной по величине

$$F_m = q v B$$

и направленной перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{B} и \vec{v} , к центру окружности.

Записав уравнение движения частицы в проекции на нормаль \vec{n} к траектории

$$m a_n = F_m$$

в виде

$$\frac{m v^2}{R} = q v B,$$

найдем радиус окружности, по которой будет двигаться частица, и период обращения частицы:

$$R = \frac{m}{q B}; \quad T = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{2 \pi m}{q B}.$$

Следовательно, в магнитном поле с индукцией \vec{B}_1 (см. рис. 3) частица будет двигаться по дуге окружности радиусом

$$R_1 = \frac{m}{q B_1}$$

с периодом обращения

$$T_1 = \frac{2 \pi m}{q B_1}.$$

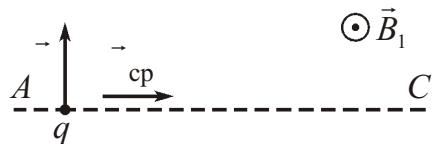


Рис. 1 к задаче №1

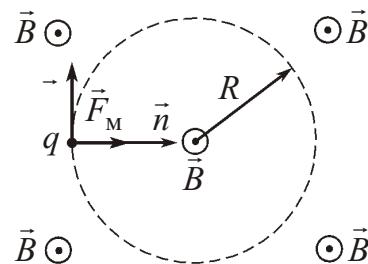


Рис. 2 к задаче №1

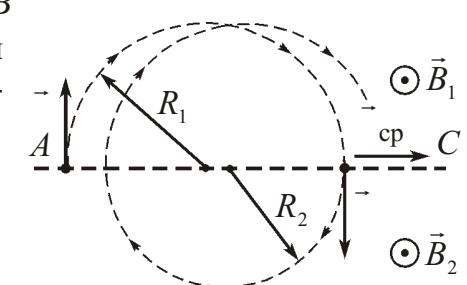
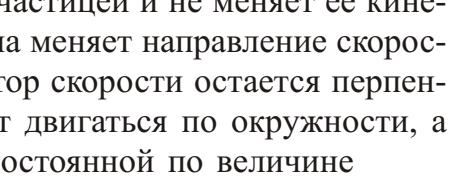


Рис. 3 к задаче №1

Аналогично, в магнитном поле с индукцией \vec{B}_2 :

$$R_2 = \frac{m}{q B_2}; \quad T_2 = \frac{2\pi m}{q B_2}.$$

Следовательно, вдоль границы раздела полей частица будет двигаться со средней скоростью

$$\text{ср} = \frac{\frac{2 R_1}{2 R_2}}{\frac{1}{2} T_1 + \frac{1}{2} T_2} = \frac{2}{(B_1 - B_2)} \cdot \frac{2}{B_1(n-1)} = \frac{2}{(n-1)}.$$

Отсюда находим отношение скорости движения частицы к средней скорости ее перемещения вдоль границы раздела полей:

$$\frac{\text{ср}}{\text{ср}} = \frac{(n-1)}{2(n-1)} = 7,85.$$

Ответ: $\frac{(n-1)}{2(n-1)} = 7,85$.

2. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле под углом 30° к направлению линий индукции. Двигаясь по винтовой линии, частица сделала $n = 7$ оборотов вокруг силовых линий. Какой путь при этом прошла частица, если радиус винтовой линии $R = 2,5$ см? Определите шаг винтовой линии, по которой двигалась частица.

Решение

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет некоторый угол θ с направлением линий индукции. Пусть для определенности заряд частицы $q > 0$.

Разложим вектор скорости \vec{v} частицы на две составляющие, одна из которых $v_{\perp} = v \sin \theta$ направлена перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, а другая $v_{\parallel} = v \cos \theta$ параллельна им.

На частицу в магнитном поле действует сила

$$\vec{F}_M = q [\vec{v}, \vec{B}]; \quad F_M = q v B \sin \theta = q v B,$$

обусловленная составляющей v_{\perp} . Эта сила заставит частицу двигаться по окружности радиусом R . В направлении силовых линий на частицу никакие силы не действуют, поэтому составляющая v_{\parallel} скорости не будет меняться ни по величине, ни по направлению. Наличие составляющей v_{\parallel} приведет к тому, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий поля. В результате наложения этих двух движений траекторией частицы будет винтовая линия, изображенная на рисунке. Ее радиус (см. решение задачи №1)

$$R = \frac{m}{q B} = \frac{m \sin \theta}{q B}, \quad (1)$$

а период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}.$$

Шагом винтовой линии называется перемещение частицы за один период обращения. Очевидно, что шаг h винтовой линии

$$h \parallel T \parallel \frac{2\pi R}{qB} \frac{2\pi m \cos \theta}{qB}. \quad (2)$$

Поскольку магнитная сила меняет только направление скорости частицы, но не меняет ее величину, то за время t , двигаясь по винтовой линии, частица пройдет путь

$$S = t. \quad (3)$$

За это время частица совершил

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t q B}{2\pi m} \quad (4)$$

оборотов.

Из (3) с учетом (1) и (4) получим

$$S = t = \frac{2\pi m}{qB} n = \frac{qBR}{m \sin \theta} \frac{2\pi m}{qB} n = \frac{2\pi R}{\sin \theta} n = 2,2 \text{ м.}$$

Шаг винтовой линии найдем, представив выражение (2) в виде

$$h = \frac{2\pi R}{\tan \theta} = 27,2 \text{ см.}$$

Ответ: $S = \frac{2\pi R}{\sin \theta} n = 2,2 \text{ м}; h = \frac{2\pi R}{\tan \theta} = 27,2 \text{ см.}$

3. Проводник длиной L и сопротивлением R согнут в форме квадрата и помещен в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное плоскости квадрата. Определите силу, действующую на проводник, если на соседние вершины образованной фигуры подать напряжение U .

Решение

Рассмотрим прямолинейный проводник длиной l с током I , расположенный в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярном проводнику (рис. 1).

На каждый элемент тока $I d\vec{l}$ будет действовать сила Ампера

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}]; \quad dF_A = IB d\vec{l},$$

а на весь проводник

$$F_A = \int_0^l dF_A = \int_0^l IB dl = IB l,$$

направленная перпендикулярно плоскости, в которой лежит проводник и вектор \vec{B} .

Вернемся к нашей задаче.

Точки a и b (см. рис. 2), на которые подано напряжение U , разделят проводник на две части с сопротивлениями

$$R_{a-b} = \frac{1}{4}R; \quad R_{a-c-d-b} = \frac{3}{4}R,$$

по которым будут течь токи

$$I_1 = \frac{U}{R_{a-b}} = \frac{4U}{R}; \quad I_2 = \frac{U}{R_{a-c-d-b}} = \frac{4U}{3R}.$$

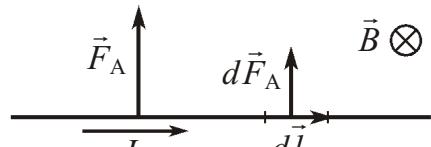


Рис. 1 к задаче №3

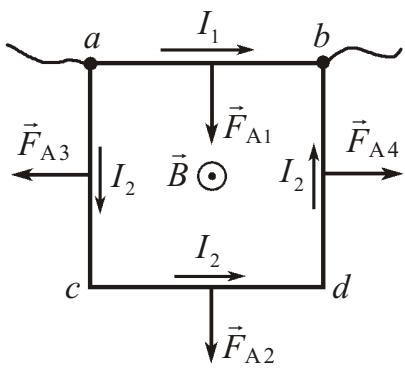


Рис. 2 к задаче №3

Поскольку стороны квадрата представляют собой прямолинейные проводники с током, то на каждую из них в магнитном поле будут действовать силы Ампера, направленные так, как показано на рис. 2, и равные

$$F_{A1} = \frac{1}{4} I_1 B L; \quad F_{A2} = \frac{1}{4} I_2 B L;$$

$$F_{A3} = \frac{1}{4} I_2 B L; \quad F_{A4} = \frac{1}{4} I_2 B L.$$

Так как силы \vec{F}_{A1} и \vec{F}_{A2} направлены в одну сторону, а силы \vec{F}_{A3} и \vec{F}_{A4} равны по величине и противоположны по направлению, то результирующая сила, действующая на проводник,

$$\vec{F} = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} - \vec{F}_{A3} - \vec{F}_{A4}$$

по величине будет равна

$$F = F_{A1} + F_{A2} = \frac{1}{4} (I_1 + I_2) B L = \frac{1}{4} \frac{4U}{R} \frac{4U}{3R} B L = \frac{4UBL}{3R}.$$

Ответ: $F = \frac{4UBL}{3R}$.

4. На горизонтальном столе лежит проводящая плоская рамка, изготовленная из тонкой однородной проволоки в форме правильного треугольника. Рамка находится в горизонтальном однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки (см. рис. 1; вид сверху). Длина стороны рамки a , масса рамки m . К соседним вершинам рамки подведены гибкие провода, по которым течет ток I . При какой величине индукции магнитного поля рамка начнет переворачиваться через вершину C ?

Решение

Точки a и b , к которым подведены провода от источника тока, делят рамку на две части, сопротивления которых отличаются в два раза:

$$R_{a\ C\ b} = 2 R_{a\ b}.$$

Следовательно, в узле a ток I разделится на токи I_1 и I_2 , причем

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{a\ C\ b}}{R_{a\ b}} = 2.$$

Рис. 1 к задаче №4

Поскольку $I = I_1 + I_2$, то

$$I_1 = \frac{2}{3} I; \quad I_2 = \frac{1}{3} I.$$

На рамку с током в магнитном поле действуют сила тяжести $m \vec{g}$ и три силы Ампера (см. решение задачи №3):

$$F_{A1} = I_1 B a = \frac{2}{3} I B a;$$

$$F_{A2} = I_2 B a \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} I B a;$$

$$F_{A3} = I_2 B a \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} I B a$$

(где $\angle a = 60^\circ$), направленные перпендикулярно плоскости рамки так, как показано на рис. 2.

Относительно оси OZ эти силы создают моменты

$$M_z(m\vec{g}) = mgh; \quad M_z(\vec{F}_{A1}) = F_{A1}h_1; \\ M_z(\vec{F}_{A2}) = F_{A2}h_2; \quad M_z(\vec{F}_{A3}) = F_{A3}h_3,$$

где плечи соответствующих сил

$$h = \frac{1}{2}a/\sin \frac{\sqrt{3}}{3}a; \\ h_1 = a \sin \frac{\sqrt{3}}{2}a; \\ h_2 = h_3 = \frac{1}{2}a \sin \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Для переворачивания рамки через вершину C результирующий момент сил Ампера должен быть больше момента силы тяжести. Следовательно,

$$F_{A1}h_1 + F_{A2}h_2 + F_{A3}h_3 > mgh; \quad \frac{\sqrt{3}}{3}IBa^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}IBa^2 > \frac{\sqrt{3}}{3}mga; \quad B > \frac{4m}{5Ia}g.$$

Ответ: $B > \frac{4m}{5Ia}g$.

5. По рамке, согнутой в форме квадрата, течет ток I . Сторона рамки равна a . Рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток I_0 . Ближайшая к проводнику сторона рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние b . Какую минимальную механическую работу надо совершить, чтобы переместить рамку в плоскости ее расположения на расстояние l в направлении от проводника с током?

Решение

Поскольку магнитное поле проводника с током I_0 направлено перпендикулярно плоскости рамки, то на стороны рамки будут действовать силы Ампера, направленные, как показано на рисунке.

При перемещении рамки вдоль оси OX работу будут совершать только силы \vec{F}_{A1} и \vec{F}_{A3} (поскольку силы \vec{F}_{A2} и \vec{F}_{A4} перпендикулярны перемещению, то их работа равна нулю), при этом работа силы \vec{F}_{A1} будет отрицательной, а \vec{F}_{A3} положительной.

Суммарная работа сил Ампера на конечном перемещении рамки в магнитном поле равна

$$A = I\Phi,$$

где $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — приращение магнитного потока через поверхность, ограниченную рамкой. Очевидно, минимальная механическая работа по перемещению рамки по величине будет равна работе сил Ампера:

$$A_{\text{мех}} = I(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Так как по определению поток вектора магнитной индукции \vec{B} через произвольную поверхность S равен

$$\iint_S d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = B_n dS,$$

то магнитные потоки через поверхность, ограниченную рамкой, в начальном и конечном положениях рамки:

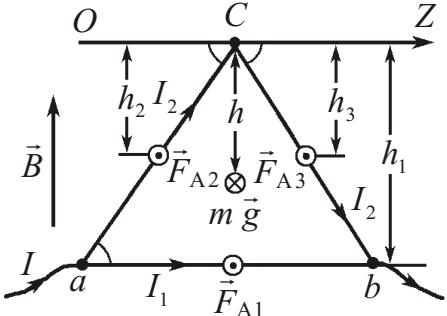


Рис. 2 к задаче №4

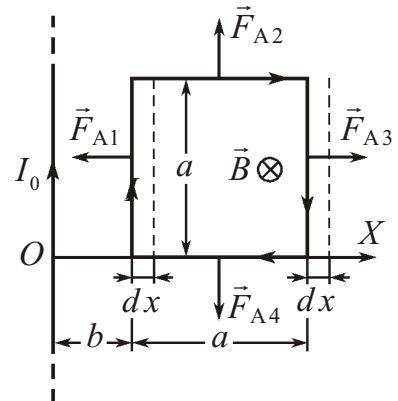


Рис. к задаче №5

$$\Phi_1 = \frac{b-a}{b} \frac{\int_0^a I_0 dx}{2x} = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2} \ln \frac{b-a}{b}; \quad \Phi_2 = \frac{b-l-a}{b-l} \frac{\int_0^a I_0 dx}{2x} = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2} \ln \frac{b-l-a}{b-l},$$

где использована формула (21.18) для индукции магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2x}.$$

Следовательно,

$$A_{\text{мех}} = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2} \ln \frac{b-a}{b} + \ln \frac{b-l-a}{b-l} = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2} \ln \frac{(b-a)(b-l)}{b(b-l-a)}.$$

Ответ: $A_{\text{мех}} = \frac{\int_0^a I_0 dx}{2} \ln \frac{(b-a)(b-l)}{b(b-l-a)}.$

6. По плоскому контуру, изображенному на рис. 1, течет ток силой I . Радиус изогнутой части R . Угол $\frac{\pi}{2}$. Определите величину индукции магнитного поля в точке O .

Решение

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I , текущим по изогнутой части контура (рис. 2), и определим магнитную индукцию этой части контура в точке O .

Мысленно разобьем проводник на бесконечно малые элементы тока $I d\vec{l}$. Индукция магнитного поля такого элемента тока в точке O равна

$$dB_k = \frac{I d\vec{l} \sin 90^\circ}{4r^2} \quad (1)$$

и будет направлена перпендикулярно векторам $d\vec{l}$ и \vec{r} (вектор \vec{r} проведен от рассматриваемого элемента тока в точку O ; угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} равен 90°), то есть перпендикулярно к плоскости, в которой расположены эти векторы.

Все векторы $d\vec{B}_k$ поля, создаваемого разными элементами тока $I d\vec{l}$, будут направлены перпендикулярно чертежу в одну сторону (от нас). Поэтому сложение векторов $d\vec{B}_k$ можно заменить сложением их модулей.

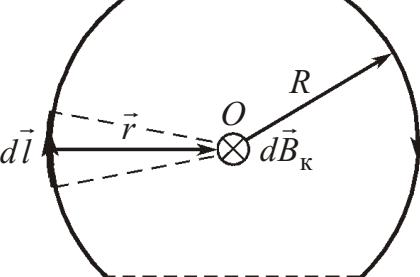


Рис. 2 к задаче №6

Проинтегрировав (1) по всей длине дуги, найдем величину индукции магнитного поля, создаваемого изогнутой частью проводника в точке O :

$$B_k = dB_k \int_0^{3/2\pi} \frac{I d\vec{l}}{4r^2} = \frac{I}{4} \int_0^{3/2\pi} \frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{I}{4} \int_0^{3/2\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{I}{4} \frac{3}{2} R = \frac{3}{8} \frac{I}{R},$$

где учтено, что $r = R$.

Для определения величины индукции магнитного поля, созданного в точке O прямолинейной частью контура, воспользуемся выражением (21.17):

$$B_{\text{пр}} = \frac{\mu_0 I}{4x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

где $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{4}$; $x = R \sin \theta_1$ (см. рис. 3).

Согласно принципу суперпозиции, индукция магнитного поля, порождаемого несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым из токов в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{k}} + \vec{B}_{\text{пр}}.$$

Поскольку в точке O векторы \vec{B}_{k} и $\vec{B}_{\text{пр}}$ направлены в одну сторону, то величина индукции магнитного поля контура с током в рассматриваемой точке

$$B = B_{\text{k}} + B_{\text{пр}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R} + \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{R \sin(\pi/4)} = 2 \cos(\pi/4) \left(\frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{R} \right) = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{R} + \frac{3}{2} \frac{\mu_0 I}{R} = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Ответ: $B = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{R}$.

7. Бесконечно длинный провод, по которому течет ток силой I , изогнут так, как показано на рис. 1. Радиус изогнутой части провода R . Определите величину индукции магнитного поля в точке O .

Решение

Для определения величины индукции магнитного поля, создаваемого в точке O прямолинейными частями провода с током, воспользуемся выражением (21.17):

$$B_{\text{пр}} = \frac{\mu_0 I}{4x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

где $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$; $x = R$. Следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4R}; \quad B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{4R}.$$

Величина индукции магнитного поля, создаваемого в точке O током I_2 , текущим по изогнутой части (см. решение задачи №6),

$$B_2 = dB_2 = \frac{\mu_0 I_2 dl}{4R^2} = \frac{\mu_0 I_2}{4R^2} \cdot R = \frac{\mu_0 I_2}{4R}.$$

Согласно принципу суперпозиции, индукция магнитного поля в точке O

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

В точке O векторы \vec{B}_1 , \vec{B}_2 и \vec{B}_3 будут направлены в разные стороны. Векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_3 лежат в плоскостях, перпендикулярных соответственно токам I_1 и I_3 . При этом вектор \vec{B}_1 направлен вертикально вниз (см. рис. 2), а вектор \vec{B}_3 — перпен-

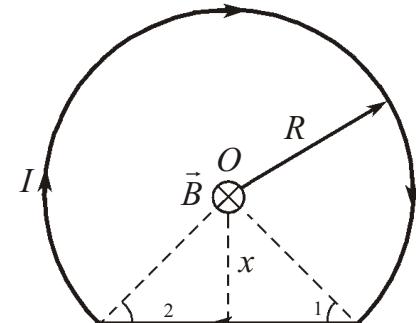


Рис. 3 к задаче №6

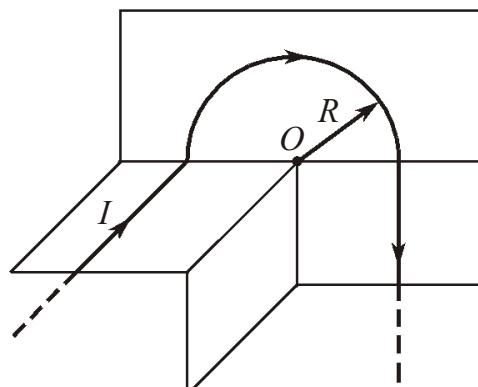


Рис. 1 к задаче №7

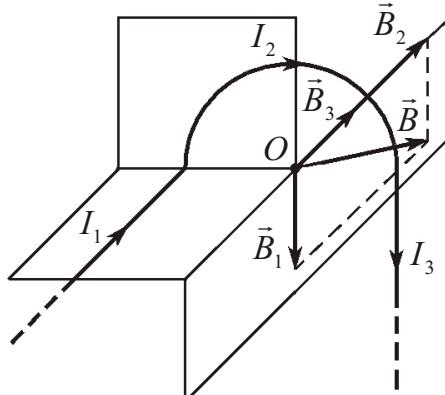


Рис. 2 к задаче №7

дикулярно чертежу от нас. Вектор \vec{B}_2 перпендикулярен плоскости, в которой расположена изогнутая часть провода, и направлен перпендикулярно чертежу от нас. Следовательно, величина индукции магнитного поля в точке O :

$$B = \sqrt{B_1^2 + (B_2 - B_3)^2}; \quad B = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{\frac{I_1^2}{2} + I_2^2 + \frac{I_3^2}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{1 + \left(\frac{I_3}{I}\right)^2},$$

где учтено, что $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{1 + \left(\frac{I_3}{I}\right)^2}$.

8. Ток силой I течет по бесконечно длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму полукольца радиусом R (рис. 1). Определите величину индукции магнитного поля в точке O .

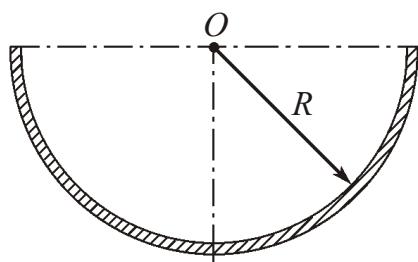


Рис. 1 к задаче №8

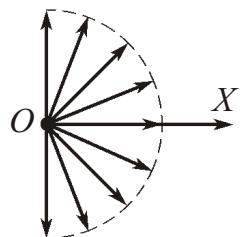
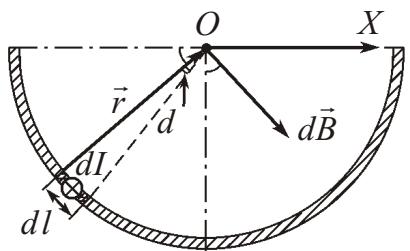


Рис. 2 к задаче №8

Решение

Мысленно разобьем проводник на бесконечно тонкие прямолинейные токи dI (рис. 2). Каждый такой ток в точке O создаст магнитное поле, вектор индукции $d\vec{B}$ которого будет направлен перпендикулярно току и вектору \vec{r} (вектор \vec{r} проведен от рассматриваемого элемента тока в точку O).

Для определения величины индукции $d\vec{B}$, воспользуемся выражением (21.18) для бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x},$$

где $x = R$.

Все векторы $d\vec{B}$ поля, создаваемого различными токами dI , образуют симметричный относительно оси OX веер. Из соображений симметрии можно заключить, что результирующий вектор \vec{B} будет направлен вдоль оси OX .

Каждый из составляющих векторов $d\vec{B}$ вносит в результирующий вектор \vec{B} вклад dB_x , равный

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \sin \theta.$$

Полагая, что ток I равномерно распределен по сечению проводника, представим ток dI в виде

$$dI = \frac{I}{R} dl = \frac{I}{R} R d\theta = \frac{I}{R} d\theta,$$

где длина дуги с током dI равна $dl = R d\theta$. Следовательно,

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin \theta d\theta.$$

Проинтегрировав по всему полукольцу, найдем величину индукции магнитного поля в точке O :

$$B = dB_x \Big|_0 = \frac{I}{2\pi R} \sin d \Big|_0 = \frac{I}{2\pi R} \sin d \Big|_0 = \frac{I}{2\pi R} \cos d \Big|_0 = \frac{I}{2\pi R}.$$

Ответ: $B = \frac{I}{2\pi R}$.

9. Очень длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. Радиус соленоида R . По обмотке соленоида течет ток силой I . Отсчитывая расстояние x вдоль оси соленоида от одного из его торцов, определите:

- 1) величину индукции магнитного поля как функцию x ;
- 2) расстояние x_0 до точки на оси, в которой индукция магнитного поля отличается от индукции на глубине соленоида на 1%.

Решение

Введем ось OX , направленную вдоль оси соленоида с началом у одного из его концов.

Величина магнитной индукции в точке P на оси соленоида, расположенной на расстоянии x от его конца, равна (см. выражение (21.21))

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

где $\theta_2 = 0$.

Выразив угол θ_1 через координату x точки P и радиус соленоида

$$\cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

найдем величину индукции магнитного поля как функцию x :

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1.$$

Следовательно, на расстоянии x_0 от конца соленоида индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{x_0}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} - 1, \quad (1)$$

а далеко от конца ($x \gg R$)

$$B \approx \mu_0 n I. \quad (2)$$

По условию задачи

$$\frac{B - B_0}{B} = 0.01,$$

где $B_0 = 0.01 B$.

Следовательно,

$$1 - \frac{1}{2} \frac{x_0}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} = 0.01.$$

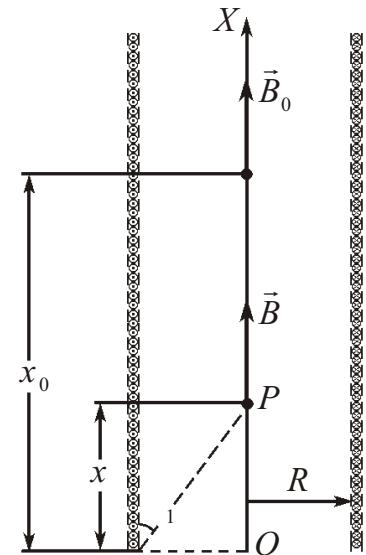


Рис. к задаче №9

Осида получим:

$$\frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} = \frac{1}{2} \frac{2(1 - \epsilon)}{(1 + 2\epsilon)^2}; \quad x_0 = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{(1 + 2\epsilon)^2} R}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2\epsilon)^2}}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{(1 + 2\epsilon)^2} R}{2\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2\epsilon)^2}}} = 5R.$$

Ответ: 1) $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 1$; 2) $x_0 = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2\epsilon)^2}}} R = 5R$.

10. Непроводящая сфера, равномерно заряженная с поверхностью плотностью σ , равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через ее центр. Радиус сферы R . Определите величину индукции магнитного поля в центре сферы.

Решение

Мысленно разобьем поверхность сферы на бесконечно узкие сферические сегменты, которые в свою очередь разобьем на бесконечно малые площадки dS с элементарными зарядами $dq = \sigma dS$, каждый из которых будем считать точечным.

Введем сферическую систему координат R, θ, ϕ , где θ – полярный угол; ϕ – азимутальный угол. Элементарной площадке dS в сферической системе координат соответствует площадь $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

Каждый элементарный заряд dq , двигаясь по соответствующей окружности с линейной скоростью

$$r,$$

можно рассматривать как круговой ток

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dS}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период обращения сферы вокруг оси OZ .

Величину индукции магнитного поля, создаваемого током dI в центре сферы O , найдем по формуле (21.19), полученной в теоретической части:

$$dB = \frac{0}{2} \frac{dI r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

где $r = R \sin \theta$ – радиус кольца, рассматриваемого как круговой ток; $z = R \cos \theta$ – расстояние от центра кольца до точки O .

Следовательно,

$$dB = \frac{0}{2} \frac{R^2 \sin^3 \theta d\theta d\phi}{(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{R^2 \sin^3 \theta d\theta d\phi}{2} = \frac{R^2 \sin^3 \theta d\theta d\phi}{4}.$$

Все векторы $d\vec{B}$ поля, создаваемого сферическими поясами, в точке O будут направлены вертикально вниз. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

Углы α и β изменяются в пределах: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$B = dB = \frac{R}{4} \sin^3 \alpha d\alpha + \frac{R}{2} \cos^2 \beta d\beta = R \left(\frac{2}{3} \sin^3 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \beta \right) d(\cos \beta);$$

Ответ: $B = \frac{2}{3} R$.

Задачи для самостоятельного решения

21.1. Из точечного источника вылетают заряженные частицы со скоростью 10^4 м/с и движутся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,05$ Тл, силовые линии которого перпендикулярны \vec{B} . На некотором расстоянии от источника находится мишень радиусом $r = 10$ см, расположенная перпендикулярно \vec{B} (см. рисунок). При каких расстояниях от источника до мишени частицы попадут на ее поверхность? Масса частицы $m = 2 \cdot 10^{-14}$ кг, ее заряд $q = 10^{-8}$ Кл. Силу тяжести не учитывать.

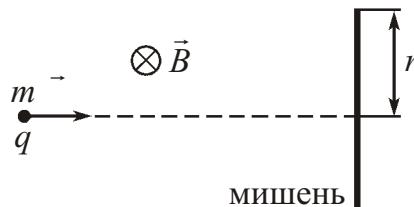


Рис. к задаче №21.1

21.2. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл влетает электрон со скоростью 40 км/с под углом 60° к направлению силовых линий поля. Сколько оборотов совершил электрон за время, в течение которого пройдет вдоль силовых линий расстояние $l = 10$ м? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, величина его заряда $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

21.3. Проводник длиной L и сопротивлением R согнут в форме равностороннего треугольника и помещен в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное плоскости треугольника. Какая сила будет действовать на проводник, если на соседние вершины образованной фигуры подать напряжение U ?

21.4. На горизонтальном столе лежит проводящий плоский контур, изготовленный из тонкой проволоки в форме квадрата. Контур находится в горизонтальном однородном магнитном поле, линии индукции которого параллельны двум его сторонам. Индукция магнитного поля B , длина стороны контура a , масса контура m . Определите минимальный ток, который нужно пропустить по контуру, чтобы он начал переворачиваться через одну из своих сторон.

21.5. По квадратной рамке течет ток $I = 0,9$ А. Сторона рамки $a = 8$ см. Рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I_0 = 5$ А. Проходящая через середину противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние $b = 12$ см. Какую механическую работу надо совершить для поворота рамки вокруг ее оси на 180° ?

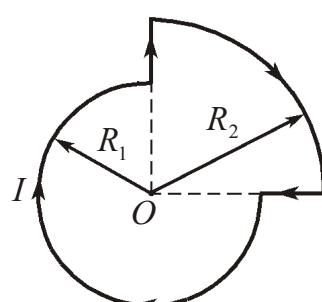


Рис. к задаче №21.6

21.6. По плоскому контуру, изображенному на рисунке, течет ток силой I . Угол между прямолинейными участками контура 90° , радиусы изогнутых частей R_1 и R_2 . Определите величину индукции магнитного поля в точке O .

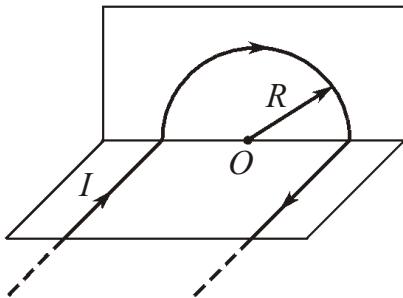


Рис. к задаче №21.7

21.7. Бесконечно длинный провод, по которому течет ток силой I , изогнут так, как показано на рисунке. Радиус изогнутой части провода R . Определите величину индукции магнитного поля в точке O .

21.8. Ток силой I течет по бесконечно длинной тонкостенной трубе радиусом R , имеющей по всей длине прорезь шириной $h \ll R$. Определите величину индукции магнитного поля на оси трубы.

21.9. Прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. Длина соленоида L , его радиус R . По обмотке соленоида течет ток силой I . Определите величину индукции магнитного поля в центре соленоида.

21.10. Непроводящий диск, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ , равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Радиус диска R . Определите величину индукции магнитного поля в центре диска.

Тесты

1. Заряженная частица влетела в однородное магнитное поле вдоль линий индукции. По какой траектории будет двигаться частица в магнитном поле?

- | | |
|----------------------|------------------------------------|
| А. По прямой | Б. По окружности |
| В. По винтовой линии | Г. Зависит от знака заряда частицы |

2. Электрон влетел со скоростью $v = 10^5$ м/с в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-5}$ Тл. В магнитном поле на электрон действует сила $F = 8 \cdot 10^{-20}$ Н. Определите угол между направлением скорости электрона и линиями индукции магнитного поля. Величина заряда электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: _____ °

3. Электрон движется со скоростью $v = 10^5$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-5}$ Тл по окружности некоторого радиуса. Определите ускорение электрона. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, величина заряда $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

- | | |
|---|---|
| А. $a = 0$ | Б. $a = 1,8 \cdot 10^{11}$ м/с ² |
| В. $a = 7,1 \cdot 10^{-3}$ м/с ² | Г. $a = 5,7 \cdot 10^4$ м/с ² |

4. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1,5 \cdot 10^{-6}$ Тл по окружности радиусом $R = 10$ см. Величина заряда электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Импульс электрона равен ...

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| А. $p = 1,2 \cdot 10^{-28}$ кг м/с | Б. $p = 2,4 \cdot 10^{-26}$ кг м/с |
| В. $p = 3,6 \cdot 10^{-24}$ кг м/с | Г. $p = 4,8 \cdot 10^{-22}$ кг м/с |

5. Протон влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл перпендикулярно к линиям индукции. Определите время, через которое вектор скорости протона изменяет направление на противоположное. Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| А. $t = 6,14 \cdot 10^{-6}$ с | Б. $t = 4,16 \cdot 10^{-5}$ с |
| В. $t = 1,64 \cdot 10^{-7}$ с | Г. $t = 4,61 \cdot 10^{-9}$ с |

6. Электрон влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-6}$ Тл перпендикулярно к линиям индукции. Определите частоту обращения частицы. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, величина заряда $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

- A. 140 c^{-1} Б. $1,4 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$
B. $2,5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$ Г. $2,5 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$

7. Протон влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,67 \cdot 10^{-5}$ Тл перпендикулярно к линиям индукции. Определите полное количество оборотов протона в магнитном поле за t с. Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: _____

8. Электрон влетел в однородное магнитное поле под углом 30° к линиям индукции. Отношение шага винтовой линии к ее радиусу равно ...

- A. $h/R = 1$ Б. $h/R = 11$
В. $h/R = 111$ Г. $h/R = 1111$

9. Металлический куб движется горизонтально со скоростью 10 м/с в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл, перпендикулярном направлению движения куба. Длина ребра куба $a = 10 \text{ см}$. Определите разность потенциалов между гранями куба, перпендикулярными полю.

Ответ: _____ мВ

10. На горизонтальном столе лежит прямой проводник, по которому течет ток силой $I = 1 \text{ А}$. Длина проводника $l = 20 \text{ см}$, масса $m = 1 \text{ г}$. Над поверхностью стола создано однородное горизонтальное магнитное поле, перпендикулярное проводнику. При какой величине индукции магнитного поля проводник приподнимется над поверхностью стола?

- A. $B = 5 \cdot 10^{-2}$ Тл Б. $B = 0,5$ Тл
В. $B = 5$ Тл Г. $B = 50$ Тл

11. На горизонтальном столе лежит прямой стержень, по которому течет ток силой $I = 8 \text{ А}$. Длина стержня $l = 15 \text{ см}$. Над поверхностью стола создано однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-4}$ Тл. Стержень перемещают параллельно самому себе на $S = 10 \text{ см}$. Определите работу, совершающую силой Ампера на данном перемещении.

Ответ: _____ мкДж

12. Проволочный контур радиусом $R = 50 \text{ см}$ находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, параллельном плоскости контура. По контуру течет ток силой $I = 50 \text{ А}$. Механический момент, действующий на контур, равен ...

- A. $M = 0,4 \text{ Н м}$ Б. $M = 4 \text{ Н м}$
В. $M = 40 \text{ Н м}$ Г. $M = 400 \text{ Н м}$

13. По квадратной рамке течет ток I . Длина стороны рамки a . Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярном плоскости рамки. Определите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить рамку в плоскости ее расположения на расстояние l .

- A. $A_{\min} = 0$ Б. $A_{\min} = I a^2 l$
В. $A_{\min} = {}_0 I a l$ Г. $A_{\min} = {}_0 I a^2 l$

14. По квадратной рамке течет ток $I = 2$ А. Длина стороны рамки $a = 10$ см. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, перпендикулярном плоскости рамки. Определите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг одной из ее сторон на 90° .

Ответ: _____ мкДж

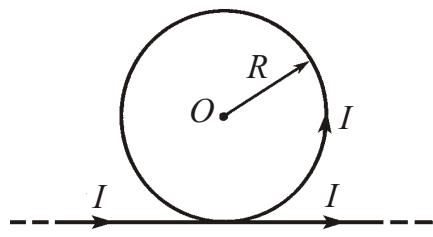


Рис. к тесту №15

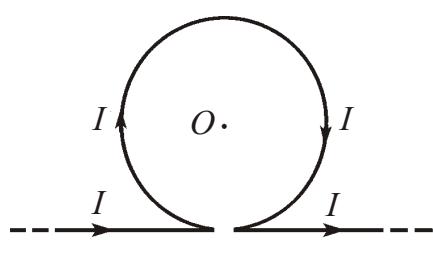


Рис. к тесту №16

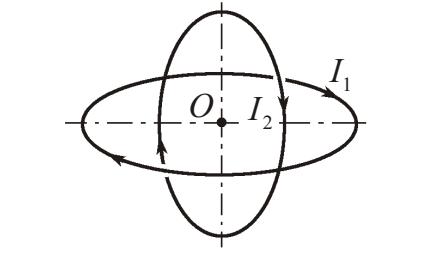


Рис. к тесту №17

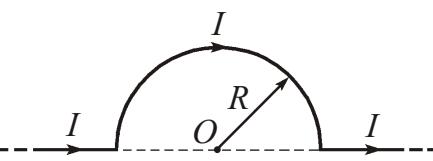


Рис. к тесту №18

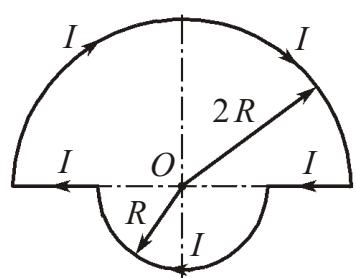


Рис. к тесту №19

прилегают друг к другу. По соленоиду течет ток силой $I = 10$ А. Радиус $R = 50$ см. Индукция магнитного поля в точке O равна ...

A. $B = 0,1$ Тл

B. $B = 10^{-3}$ Тл

Б. $B = 10^{-2}$ Тл

Г. $B = 10^{-4}$ Тл

15. Очень длинный провод, по которому течет ток силой $I = 5$ А, изогнут так, как показано на рисунке. Радиус петли $R = 10$ см. Индукция магнитного поля в точке O равна ...

A. $B = 12,4$ мкТл

Б. $B = 21,4$ мкТл

В. $B = 41,4$ мкТл

Г. $B = 62,8$ мкТл

16. Очень длинный провод, по которому течет постоянный ток I , имеет петлю в форме кольца. Индукция магнитного поля в центре O кольца $B = 10^{-6}$ Тл. При этом само кольцо в точке O создает поле с индукцией $B_0 = 10^{-5}$ Тл. Какой будет индукция магнитного поля в этой же точке, если провод выпрямить и расположить на месте прямого участка провода с кольцом?

Ответ: _____ мкТл

17. Два круговых провода одинакового радиуса и общим центром O расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Индукция магнитного поля в точке O равна $B = 5$ мТл. Индукция магнитного поля первого провода в этой же точке $B_1 = 3$ мТл. Определите индукцию магнитного поля второго провода в точке O .

Ответ: _____ мТл

18. Очень длинный провод, по которому течет ток силой $I = 20$ А, изогнут так, как показано на рисунке. Радиус изгиба закругленной части $R = 50$ см. Индукция магнитного поля в точке O равна ...

A. $B = 1,8$ мкТл

Б. $B = 2,28$ мкТл

В. $B = 8,8$ мкТл

Г. $B = 12,56$ мкТл

19. По плоскому контуру, изображенному на рисунке, течет ток силой $I = 10$ А. Радиус $R = 50$ см. Индукция магнитного поля в точке O равна ...

A. $B = 3,14$ мкТл

Б. $B = 6,28$ мкТл

В. $B = 9,42$ мкТл

Г. $B = 12,56$ мкТл

20. Очень длинный прямой соленоид из проволоки диаметром $d = 0,5$ мм намотан так, что витки плотно

прилегают друг к другу. По соленоиду течет ток силой $I = 4$ А. Определите величину индукции магнитного поля на оси соленоида вдали от его торцов.

§22. Теоремы магнитостатики

22.1. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

Рассмотрим картину силовых линий магнитного поля.

Выберем в пространстве, где существует магнитное поле, произвольную замкнутую поверхность S (рис. 22.1). Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, то количество пересечений линий индукции, возникающих при выходе линий \vec{B} из объема V , ограниченного поверхностью S , всегда равно числу пересечений, возникающих при входе силовых линий поля в этот объем. Следовательно, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности S магнитный поток

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \oint_S B_n dS = 0. \quad (22.1)$$

Это утверждение носит название **теоремы Гаусса для магнитного поля: поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю**.

Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса, получим

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \operatorname{div} \vec{B} dV = 0. \quad (22.2)$$

Соотношение (22.2) должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V . Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (22.3)$$

Равенство (22.3) выражает **теорему Гаусса в дифференциальной форме**. Исходя из смысла дивергенции, говорят, что *магнитные заряды в природе отсутствуют* (согласно предположению Дирака в природе должны существовать магнитные заряды, но поиски пока не дали никаких результатов).

22.2. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

В §21 было показано (см. выражение (21.18)), что величина индукции магнитного поля прямого тока на расстоянии r от него равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (22.4)$$

а линии индукции представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей.

Воспользуемся формулой (22.4) для вычисления циркуляции вектора \vec{B} по контуру L :

$$\Gamma = \oint_L (\vec{B}, d\vec{l}).$$

Выберем произвольный плоский контур L , охватывающий прямой проводник с током I (рис. 22.2). Пусть этот контур лежит в плоскости, перпендикулярной току. В каждой точке контура вектор \vec{B} направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Следовательно,

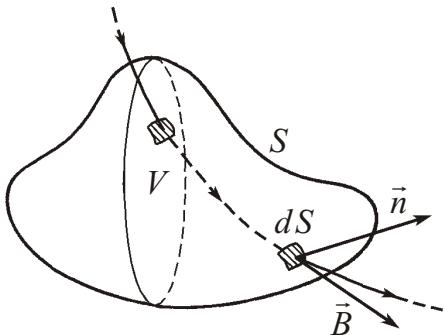


Рис. 22.1

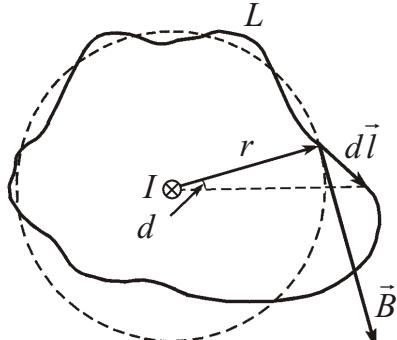


Рис. 22.2

$$\Gamma \circ (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_L B dl_B = \int_L B r d\theta,$$

где dl_B – проекция элемента контура на направление вектора \vec{B} ; r – расстояние от проводника с током до элемента $d\vec{l}$; $d\theta$ – угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок dl .

При обходе по контуру, охватывающему ток, радиальная прямая все время поворачивается в одном направлении, поэтому угол $d\theta$ изменяется в пределах от нуля до 2π . Таким образом, с учетом (22.4)

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{\int_0^r I}{2\pi r} r d\theta = \frac{\int_0^r I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^r I.$$
(22.5)

Если же контур не охватывает ток, то при обходе по контуру радиальная прямая сначала поворачивается в одном направлении, затем – в противоположном, причем угол $d\theta$ будет изменяться в тех же пределах. Вследствие этого интеграл в выражении (22.5) будет равен нулю. Таким образом, формула (22.5) справедлива для произвольного контура, где под током I следует подразумевать ток, охватываемый контуром; если контур тока не охватывает, то циркуляция вектора \vec{B} равна нулю.

Знак выражения (22.5) зависит от направления обхода контура (в этом же направлении отсчитывается угол $d\theta$). Если направление обхода образует с направлением тока правовинтовую систему, величина циркуляции положительна, в противном случае – отрицательна. Знак можно учесть, полагая ток I алгебраической величиной, причем положительным нужно считать ток, направление которого связано с направлением обхода контура правилом правого винта; ток противоположного направления будет отрицательным.

Случай неплоского контура L отличается от рассмотренного выше случая плоского контура только тем, что при перемещении вдоль контура радиальная прямая не только поворачивается вокруг провода, но и перемещается вдоль него. Все рассуждения, приведенные выше, будут справедливыми, если под $d\theta$ подразумевать угол, на который поворачивается проекция радиальной прямой на перпендикулярную к току плоскость. Суммарный угол поворота этой проекции равен 2π , если контур охватывает ток, и нулю в противном случае. Следовательно, мы снова приходим к формуле (22.5).

Формула (22.5) получена для случая прямого тока. Можно показать, что она будет справедливой и в случае произвольного тока.

Допустим, что некоторый контур L охватывает несколько проводов с токами. В силу принципа суперпозиции

$$\Gamma = \int_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_L (\sum_i \vec{B}_i, d\vec{l}) = \sum_i \int_L (\vec{B}_i, d\vec{l}) = \sum_i \int_L B_i dl_i = \sum_i I_i.$$

Таким образом, циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0 :

$$\int_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_L B_l dl = \sum_i \int_L B_i dl_i = \sum_i I_i.$$
(22.6)

Это утверждение называется **теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции или законом полного тока**.

Если токи текут во всем пространстве, где расположен контур, алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, можно представить в виде

$$\oint_L I_i (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_S j_n dS, \quad (22.7)$$

где интеграл берется по произвольной поверхности S , опирающейся на контур L (рис. 22.3); \vec{j} – плотность тока в той точке, где расположена площадка dS ; j_n – проекция вектора \vec{j} на положительную нормаль к площадке (то есть нормаль, образующую с направлением обхода по контуру правовинтовую систему).

С учетом (22.7) запишем выражение (22.6) в виде

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (22.8)$$

Преобразуем левую часть (22.8) по теореме Стокса:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{B}, d\vec{S}).$$

Следовательно,

$$\int_S (\text{rot } \vec{B}, d\vec{S}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}), \quad \text{или} \quad \int_S ((\text{rot } \vec{B} - \int_0 \vec{j}), d\vec{S}) = 0. \quad (22.9)$$

Соотношение (22.9) должно выполняться для любой произвольно выбранной поверхности S , опирающейся на контур L . Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\text{rot } \vec{B} = \int_0 \vec{j}. \quad (22.10)$$

Равенство (22.10) выражает **теорему о циркуляции в дифференциальной форме**. Исходя из смысла ротора, говорят, что *магнитное поле является вихревым*.

22.3. Векторный потенциал

Итак, для напряженности электрического поля неподвижных зарядов справедливы соотношения

$$\text{div } \vec{E} = 0; \quad \text{rot } \vec{E} = 0,$$

а для индукции магнитного поля

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad \text{rot } \vec{B} = \int_0 \vec{j}.$$

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно различный характер. Ротор электростатического поля (то есть поля неподвижных зарядов) равен нулю; электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано скалярным потенциалом ϕ . Ротор магнитного поля в тех точках, где есть ток, отличен от нуля. Соответственно циркуляция вектора \vec{B} пропорциональна току, охватываемому контуром. Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с \vec{B} соотношением, аналогичным выражению (15.20) [17, § 15]. Этот потенциал не был бы однозначным – при каждом обходе контура и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное $\int_0 I$.

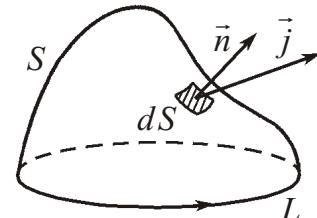


Рис. 22.3

Поскольку дивергенция вектора \vec{B} всюду равна нулю, то вектор \vec{B} можно представить в виде ротора некоторой векторной функции \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{A}, \vec{A}]. \quad (22.11)$$

Функция \vec{A} называется *векторным потенциалом* магнитного поля.

Взяв дивергенцию и ротор от вектора \vec{B} , получим:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0; \quad (22.12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{A}, [\vec{A}, \vec{A}]] = (\vec{A}, \vec{A}) - \vec{A}(\vec{A}, \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{A}_0 \vec{j}. \quad (22.13)$$

Потребовав, чтобы векторный потенциал подчинялся условию

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0,$$

выражение (22.13) запишем в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \vec{j}. \quad (22.14)$$

Уравнение (22.14) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных. Решив его при заданном распределении токов в пространстве, можно найти поле векторного потенциала в каждой точке пространства. Затем, используя связь (22.11), можно найти значение вектора \vec{B} .

22.4. Расчет магнитного поля с помощью теорем магнитостатики

1. Метод теоремы о циркуляции

Продемонстрируем возможности теоремы о циркуляции на нескольких примерах. Прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, отметим, что теорему о циркуляции (закон полного тока) можно применять только для токов, обладающих осевой симметрией.

Пример 1. Магнитное поле бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током.

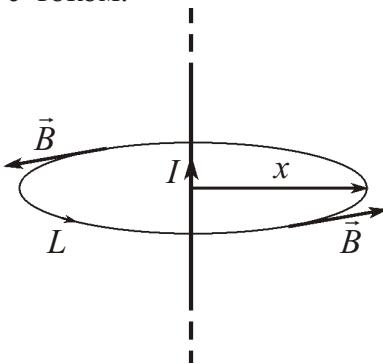


Рис. 22.4

Рассмотрим бесконечный прямолинейный тонкий проводник, по которому течет ток силой I , и найдем индукцию магнитного поля на расстоянии x от проводника (рис. 22.4).

Выберем воображаемый круговой контур L радиусом x , расположенный перпендикулярно проводнику с током. Центр контура поместим на оси проводника. В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему. При этом величина индукции поля на равных расстояниях от проводника будет одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi x.$$

С другой стороны, ток, охватываемый контуром, равен I . На основании теоремы о циркуляции

$$\oint_L I = 0.$$

Таким образом,

$$B 2\pi x = 0; \quad B = \frac{0}{2\pi x} I, \quad (22.15)$$

что совпадает с формулой (21.18), полученной методом суперпозиции.

Пример 2. Магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника с током.

Рассмотрим теперь бесконечный прямолинейный проводник радиусом R , по которому течет ток силой I . Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, найдем индукцию магнитного поля внутри и вне проводника.

Будем считать, что ток распределен по сечению проводника равномерно, то есть плотность тока $j = I/S$ одинакова на любом расстоянии от оси проводника.

Выберем воображаемый круговой контур L_1 с центром на оси проводника и радиусом $x \gg R$, расположенный перпендикулярно току (рис. 22.5). В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина индукции поля на равных расстояниях от проводника одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L_1

$$\Gamma = \oint_{L_1} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{L_1} B dl = B \circ dl = B 2\pi x.$$

Ток, охватываемый контуром, равен I . На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma = I.$$

Таким образом,

$$B 2\pi x = I; \quad B(x \gg R) = \frac{I}{2\pi x}, \quad (22.16)$$

что совпадает с формулой (22.15), полученной для тонкого проводника.

Теперь найдем циркуляцию вектора \vec{B} по контуру L_2 , который расположен внутри проводника. В силу тех же условий

$$\Gamma = \oint_{L_2} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{L_2} B dl = B \circ dl = B 2\pi x.$$

Ток, охватываемый контуром L_2 , уже не равен I . Найдем поток вектора \vec{j} через поверхность S_2 , опирающуюся на контур L_2 . Выбрав в качестве S_2 плоскую поверхность, получим

$$\oint_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = j dS = j S_2 = j \pi x^2.$$

Следовательно, суммарный ток, охватываемый контуром L_2 :

$$I = j \pi x^2.$$

На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma = I = j \pi x^2.$$

Таким образом, с учетом, что плотность тока $j = I/(2\pi x)$,

$$B 2\pi x = \frac{I}{2\pi x}; \quad B(x \ll R) = \frac{I x}{2\pi R^2}. \quad (22.17)$$

Формула (22.17) совпадает с (22.16) при $x \gg R$.

Пример 3. Магнитное поле бесконечного соленоида.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I , текущим по бесконечно длинному соленоиду, и определим магнитную индукцию внутри соленоида.

Выберем внутри соленоида воображаемый прямоугольный контур 1 2 2 1, стороны 1 2 и 1 2 которых параллельны оси соленоида (рис. 22.6). Так как в силу

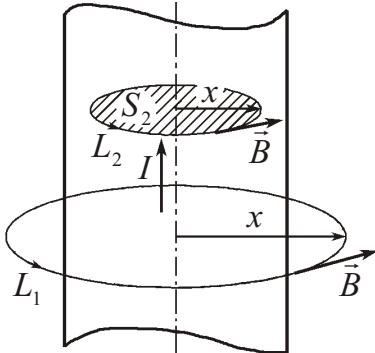


Рис. 22.5

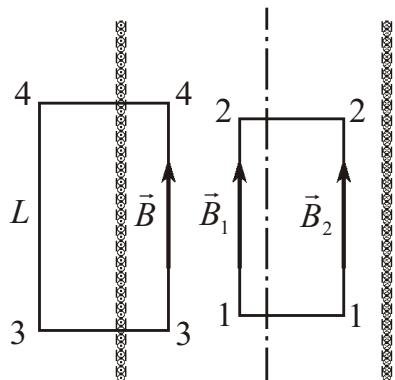


Рис. 22.6

симметрии линии индукции магнитного поля внутри соленоида будут направлены вдоль его оси, то циркуляция вектора \vec{B} по данному контуру равна $(B_1 - B_2)a$, где a – длины сторон 1 2 и 1 2 контура. Поскольку контур токов не охватывает, то по теореме о циркуляции $B_1 - B_2$. Таким образом, поле внутри соленоида является однородным.

Рассмотрим теперь воображаемый прямоугольный контур 3 4 4 3, стороны 3 4 и 3 4 которого также параллельны осям соленоида, но сторона 3 4 находится внутри соленоида, а сторона 3 4 вне соленоида.

Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля вне его, а у бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще. К этому выводу можно прийти, рассмотрев поток вектора магнитной индукции через произвольную плоскость, перпендикулярную к оси соленоида (в силу замкнутости линий индукции магнитные потоки через внутреннюю и внешнюю часть этой плоскости должны быть по величине одинаковыми; так как поток вектора магнитной индукции через внутреннюю часть плоскости ограничен, а через внешнюю может быть бесконечно большим, то магнитное поле вне соленоида отсутствует). Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по выбранному контуру равна

$$\Gamma = \oint (\vec{B}, d\vec{l}) = B_{\text{d}} l_{\text{3}} - B_{\text{d}} l_{\text{0}} + B_{\text{b}} b,$$

где b – длина стороны 3 4 контура. На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma = \int_0^b n I,$$

где n – число витков на единицу длины. Следовательно,

$$B = \int_0^b n I, \quad (22.18)$$

что совпадает с формулой (21.22), полученной методом суперпозиции.

2. Метод дифференциальных уравнений

Уравнения (22.11) и (22.14) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных.

Рассмотрим бесконечный прямолинейный проводник, заряженный с линейной плотностью заряда . Напряженность электрического поля [17, § 15, (15.28)] такого проводника на расстоянии r от него равна

$$E = \frac{q}{2\pi r},$$

а потенциал

$$(\vec{E}, dr) = \frac{1}{2\pi r} dr = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \text{const.} \quad (22.19)$$

Выражение (22.19) является решением уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где $\rho = q/S$; S – площадь поперечного сечения проводника.

Очевидно, что решение уравнения (22.14)

$$\vec{A} = \int_0^r \vec{j} = \frac{\vec{j}}{c^2}$$

(где $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$) для векторного потенциала бесконечно-го прямолинейного проводника с током плотностью \vec{j} будет иметь вид

$$\vec{A} = \frac{\vec{j} S}{2 \mu_0 c^2} \ln r \quad \text{const},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от проводника до точки, где вычисляется векторный потенциал (см. рис. (22.7)).

Следовательно, индукция магнитного поля и проекции вектора \vec{B} на оси системы координат (см. (22.11))

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = \frac{A_y}{z} \hat{i} - \frac{A_z}{y} \hat{i} + \frac{A_z}{x} \hat{j} - \frac{A_x}{z} \hat{j} + \frac{A_x}{y} \hat{k} - \frac{A_y}{x} \hat{k}; \\ B_x &= \frac{A_y}{z} - \frac{A_z}{y}; \quad B_y = \frac{A_z}{x} - \frac{A_x}{z}; \quad B_z = \frac{A_x}{y} - \frac{A_y}{x}. \end{aligned}$$

Поскольку плотность тока \vec{j} имеет лишь составляющую, направленную вдоль оси OZ , то

$$A_x = 0; \quad A_y = 0; \quad A_z = \frac{j S}{2 \mu_0 c^2} \ln r \quad \text{const} \quad \frac{j S}{2 \mu_0 c^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{const.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{A_z}{y} = \frac{j S}{2 \mu_0 c^2} \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad B_y = \frac{A_z}{x} = \frac{j S}{2 \mu_0 c^2} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad B_z = 0; \\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \frac{j S}{2 \mu_0 c^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{I}{2 \mu_0 c^2 r} = \frac{I}{2 \mu_0 r}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (22.15).

Краткие выводы

1. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля: поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0.$$

2. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля в дифференциальной форме: дивергенция вектора индукции магнитного поля равна нулю:

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

то есть *магнитные заряды в природе отсутствуют*.

3. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока): циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0 :

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

4. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в дифференциальной форме: ротор вектора индукции магнитного поля в некоторой точке равен плотности тока в той же точке, умноженной на μ_0 :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

то есть *магнитное поле является вихревым*.

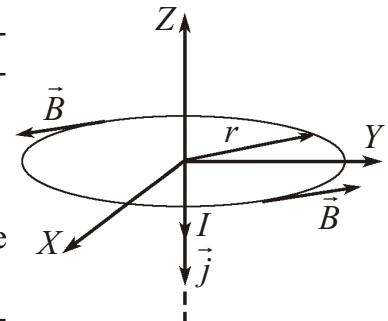


Рис. 22.7

5. Дифференциальное уравнение для векторного потенциала и связь вектора индукции магнитного поля с векторным потенциалом:

$$\vec{A} = \mathbf{0} \vec{j}; \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

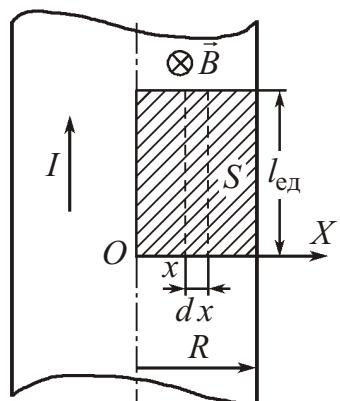
Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Чему равен поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность?
2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля.
3. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному контуру, охватывающему два одинаковых прямолинейных тока разного направления?
4. В каких случаях циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному контуру равна нулю? Означает ли это, что данный контур не охватывает токов?
5. Что означает, что магнитное поле является вихревым?
6. Что вы можете сказать об индукции магнитного поля внутри и вне бесконечного соленоида?

Задачи

1. Постоянный ток I течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Определите магнитный поток через одну из половин осевого сечения проводника в расчете на единицу его длины, полагая, что ток распределен по сечению проводника равномерно. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

Решение



По определению поток вектора магнитной индукции \vec{B} через произвольную поверхность S равен

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = B_n dS.$$

Для решения задачи воспользуемся формулой (22.17) для индукции магнитного поля внутри бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I x}{2 R^2}.$$

Рассмотрим поверхность S , являющуюся половиной осевого сечения проводника. Разобъем поверхность S на элементарные бесконечно узкие площадки $dS = l_{\text{ед}} dx$, где $l_{\text{ед}}$ единица длины проводника.

Поскольку магнитное поле внутри проводника направлено перпендикулярно рассматриваемой площадке, то магнитный поток через элементарную площадку dS равен

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I x}{2 R^2} l_{\text{ед}} dx,$$

а через поверхность S

$$\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 I x}{2 R^2} l_{\text{ед}} dx = \frac{\mu_0 I}{2 R^2} l_{\text{ед}} \int_0^R x dx = \frac{\mu_0 I}{2 R^2} l_{\text{ед}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^R = \frac{\mu_0 I}{4} l_{\text{ед}}.$$

Следовательно, магнитный поток через поверхность S в расчете на единицу длины проводника

$$\Phi_{\text{ед}} = \frac{\Phi}{l_{\text{ед}}} = \frac{I_0}{4}.$$

Ответ: $\Phi_{\text{ед}} = \frac{I_0}{4}$.

2. По сечению бесконечно длинного цилиндрического проводника равномерно распределен ток плотностью j . Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом r , проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол θ с осью проводника.

Решение

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых данным контуром, умноженной на I_0 :

$$\Gamma = \oint (\vec{B}, d\vec{l}) = I_0 \oint_i (\vec{j}, d\vec{S}),$$

где S — поверхность, опирающаяся на контур L .

Очевидно, что сумма токов, охватываемых контуром L (окружностью радиусом r), равна сумме токов, охватываемых контуром L , являющимся ортогональной проекцией контура L (см. рисунок).

Так как поверхность S , опирающаяся на контур L , и поверхность S , опирающаяся на контур L , могут быть выбраны произвольно, то в качестве таковых будем рассматривать плоские поверхности, ограниченные соответствующими контурами.

Поскольку ток равномерно распределен по сечению проводника и векторы плотности тока j в любой точке поверхности S перпендикулярны к ней, то

$$\Gamma = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_S j dS = \int_S j S \sin \theta = \int_S j S \sin \theta = \int_S j r^2 \sin \theta ,$$

где учтено, что площадь ортогональной проекции

$$S = S \sin \theta = r^2 \sin \theta .$$

Ответ: $\Gamma = \int_S j r^2 \sin \theta$.

3. По безграничной плоскости течет ток с линейной плотностью i , одинаковой во всех точках плоскости. Определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

Решение

Выберем прямоугольный контур 1 2 3 4, расположенный перпендикулярно плоскости с током, причем стороны 1 2 и 3 4 параллельны плоскости с током и расположены от нее на равных расстояниях (см. рисунок).

В силу симметрии векторы индукции магнитного поля над и под плоскостью будут параллельны плоскости и на равных расстояниях от нее одинаковы по величине.

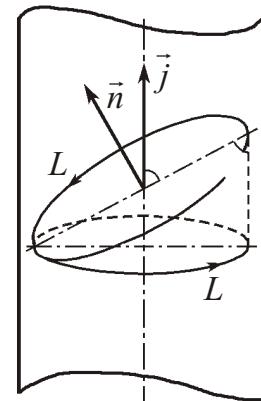


Рис. к задаче №2

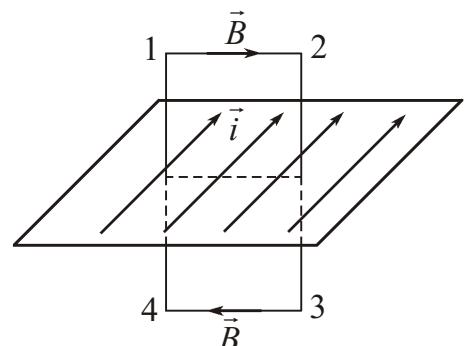


Рис. к задаче №3

Представим циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру 1 2 3 4

$$\Gamma \circ (\vec{B}, d\vec{l})$$

1 2 3 4

в виде

$$\Gamma \underset{1 2}{(\vec{B}, d\vec{l}_{1 2})} \underset{2 3}{(\vec{B}, d\vec{l}_{2 3})} \underset{3 4}{(\vec{B}, d\vec{l}_{3 4})} \underset{4 1}{(\vec{B}, d\vec{l}_{4 1})}.$$

Поскольку линии индукции направлены вдоль сторон 1 2 и 3 4 контура и перпендикулярны сторонам 2 3 и 4 1, то

$$\underset{1 2}{(\vec{B}, d\vec{l}_{1 2})} = B dl_{1 2} - B l_{1 2}; \quad \underset{2 3}{(\vec{B}, d\vec{l}_{2 3})} = 0; \quad \underset{3 4}{(\vec{B}, d\vec{l}_{3 4})} = B l_{3 4}; \quad \underset{4 1}{(\vec{B}, d\vec{l}_{4 1})} = 0;$$

$$\Gamma = B l_{1 2} - B l_{3 4},$$

где $l_{1 2}$, $l_{3 4}$, l длины сторон 1 2 и 3 4; \vec{B} и \vec{B} индукция магнитного поля над и под плоскостью соответственно, причем $B = B$. Следовательно:

$$\Gamma = 2 B l.$$

С другой стороны, по теореме о циркуляции

$$\Gamma = \oint_i I_i,$$

где сумма токов, охватываемых контуром,

$$\int_i I_i = i l.$$

Следовательно,

$$2 B l = \oint_i I_i; \quad B = \frac{1}{2} \oint_i i.$$

Ответ: $B = \frac{1}{2} \oint_i i$.

4. По безграничной пластине толщиной $2d$ параллельно ее поверхности течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = j(x)$, где j положительная постоянная; x расстояние от средней плоскости пластины. Определите индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x .

Решение

Выберем прямоугольный контур 1 2 3 4, расположенный внутри пластины перпендикулярно току, причем стороны 1 2 и 3 4 параллельны поверхностям пластины и расположены от средней плоскости на одинаковых расстояниях, равных x (см. рисунок).

Поскольку плотность тока в направлениях от средней плоскости пластины к ее поверхностям изменяется одинаково, а пластина безгранична, то векторы индукции магнитного поля внутри и вне пластины будут параллельны ее поверхностям и на равных расстояниях от средней плоскости одинаковы по величине.

Представим циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру 1 2 3 4

$$\Gamma \circ (\vec{B}, d\vec{l})$$

1 2 3 4

в виде

$$\Gamma = (\vec{B}, d\vec{l}_{12}) + (\vec{B}, d\vec{l}_{23}) + (\vec{B}, d\vec{l}_{34}) + (\vec{B}, d\vec{l}_{41}).$$

Поскольку линии индукции направлены вдоль сторон 1 2 и 3 4 контура и перпендикулярны сторонам 2 3 и 4 1, то

$$(\vec{B}, d\vec{l}_{12}) = B dl_{12} - B l_{12}; \quad (\vec{B}, d\vec{l}_{23}) = 0; \quad (\vec{B}, d\vec{l}_{34}) = B l_{34}; \quad (\vec{B}, d\vec{l}_{41}) = 0;$$

$$\Gamma = B l_{12} - B l_{34},$$

где $l_{12} = l_{34} = l$ длины сторон 1 2 и 3 4; \vec{B} и \vec{B}' индукция магнитного поля по разные стороны от средней плоскости пластины, причем $B = B'$. Следовательно,

$$\Gamma = 2B l.$$

С другой стороны, по теореме о циркуляции

$$\Gamma = \oint_i I_i.$$

Сумма токов, охватываемых контуром,

$$\oint_i I_i = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_S j dS = \int_0^x x l dx = x^2 l,$$

где S площадь, ограниченная контуром 1 2 3 4.

Следовательно,

$$2B l = \int_0^x x^2 l; \quad B(x-d) = \frac{1}{2} \int_0^x x^2.$$

Аналогичным образом, рассмотрев контур 1 2 3 4, стороны 1 2 и 3 4 которого находятся вне пластины, получим:

$$\Gamma = \oint_i I_i = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_S j dS = \int_0^L x L dx = d^2 L; \quad B(x-d) = \frac{1}{2} \int_0^L d^2,$$

где L длины сторон 1 2 и 3 4.

Ответ: $B(x-d) = \frac{1}{2} \int_0^x x^2; B(x-d) = \frac{1}{2} \int_0^L d^2$.

5. Постоянный ток I течет по прямому полубесконечному тонкому проводнику и растекается радиально-симметрично по безграничной проводящей плоскости, перпендикулярной проводнику. Определите составляющую вектора индукции магнитного поля, перпендикулярную проводнику, во всех точках пространства в зависимости от расстояния от оси проводника.

Решение

Выберем воображаемый круговой контур L_1 радиусом r , расположенный под плоскостью перпендикулярно проводнику с током. Центр контура расположим на оси проводника.

В силу осевой симметрии величина индукции поля на равных расстояниях от проводника будет одинаковой (при этом векторы \vec{B} на разных расстояниях от плоскости будут иметь разные направления). Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L_1

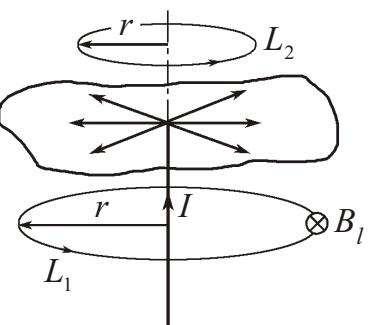


Рис. к задаче №5

$$\Gamma \underset{L_1}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_1}{\circ} B_l dl \underset{L_1}{B_l \circ dl} B_l 2/r,$$

где B_l – проекция вектора \vec{B} на плоскость, в которой расположен контур.

С другой стороны, ток, охватываемый контуром, равен I . На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma \underset{0}{\circ} I.$$

Таким образом, в точках под плоскостью

$$B_l 2/r = \underset{0}{\circ} I; \quad B_l = \frac{\underset{0}{\circ} I}{2/r}.$$

Аналогично для контура L_2 , расположенного над плоскостью.

Циркуляция вектора \vec{B} по контуру L_2

$$\Gamma \underset{L_2}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_2}{\circ} B_l dl \underset{L_2}{B_l \circ dl} B_l 2/r,$$

Данный контур не охватывает токов, поэтому

$$\Gamma = 0.$$

Таким образом, в точках над плоскостью

$$B_l = 0.$$

Ответ: в полупространстве, где расположен проводник, $B_l = \frac{\underset{0}{\circ} I}{2x}$;
в другом полупространстве $B_l = 0$.

6. Ток I течет по длинной полой тонкостенной трубе радиусом R и возвращается по сплошному тонкому проводнику, проложенному вдоль оси трубы. Определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

Решение

Будем считать, что ток распределен по трубе равномерно.

Выберем воображаемый круговой контур L_1 с центром на оси трубы и радиусом $r < R$, расположенный перпендикулярно току.

В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина индукции поля на равных расстояниях от оси одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L_1

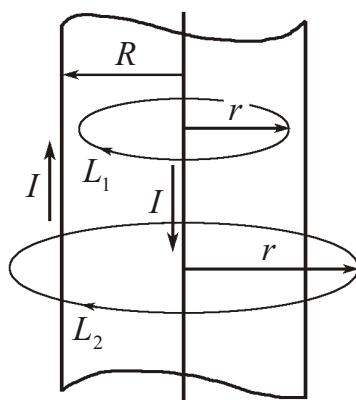


Рис. к задаче №6

$$\Gamma \underset{L_1}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_1}{\circ} B dl \underset{L_1}{B \circ dl} B 2/r.$$

Ток, охватываемый контуром L_1 , равен только току I , текущему по проводнику, проложенному вдоль оси трубы. На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma \underset{0}{\circ} I.$$

Таким образом,

$$B 2/r = \underset{0}{\circ} I; \quad B(r-R) = \frac{\underset{0}{\circ} I}{2/r}.$$

Теперь найдем циркуляцию вектора \vec{B} по контуру L_2 радиусом $r = R$, который расположен вне трубы. В силу тех же условий

$$\Gamma \underset{L_2}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_2}{\circ} B dl \underset{L_2}{B} \circ dl \underset{L_2}{B} 2 \underset{r}{r}.$$

Поскольку контур L_2 охватывает равные токи, текущие по проводнику и трубе в противоположных направлениях, то по теореме о циркуляции

$$\Gamma = 0.$$

Следовательно,

$$B 2 \underset{r}{r} 0; \quad B(r - R) = 0.$$

Ответ: $B(r - R) = \frac{I^0}{2r}$; $B(r - R) = 0$.

7. По прямому бесконечному цилиндру радиусом R течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = j_0(1 - r/R)$, где j_0 положительная постоянная; r расстояние от оси цилиндра. Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

Решение

Выберем воображаемый круговой контур L_1 с центром на оси цилиндра и радиусом $r = R$, расположенный перпендикулярно току. В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина индукции поля на равных расстояниях от проводника одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L_1

$$\Gamma \underset{L_1}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_1}{\circ} B dl \underset{L_1}{B} \circ dl \underset{L_1}{B} 2 \underset{r}{r}.$$

На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma = I_1.$$

Ток I_1 , охватываемый контуром L_1 , равен потоку вектора \vec{j} через поверхность S_1 , опирающуюся на контур L_1 :

$$I_1 \underset{S_1}{\circ} (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Выбрав в качестве S_1 плоскую поверхность, получим

$$I_1 \underset{S_1}{\circ} (\vec{j}, d\vec{S}) = \underset{S_1}{j} dS = \int_0^r j_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r dr = 2\pi j_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right] \Big|_0^r = 2\pi j_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right).$$

Таким образом,

$$B 2 \underset{r}{r} = \int_0^r j_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right); \quad B(r - R) = j_0 \frac{r(3R - 2r)}{6R}. \quad (1)$$

Теперь найдем циркуляцию вектора \vec{B} по контуру L_2 , который расположен вне цилиндра. В силу тех же условий

$$\Gamma \underset{L_2}{\circ} (\vec{B}, d\vec{l}) \underset{L_2}{B} 2 \underset{r}{r}.$$

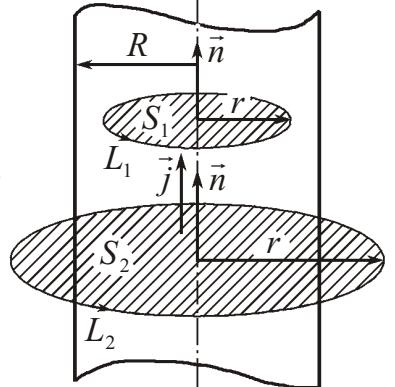


Рис. к задаче №7

Ток, охватываемый контуром L_2 ,

$$I_2 = \int_{S_2} (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_{S_2} j dS = \int_0^R j_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2 r dr = \int_0^R j_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{R} \frac{r^3}{3} \right) dr = j_0 \left[\frac{r^3}{6} - \frac{r^4}{12R} \right]_0^R = j_0 \frac{R^2}{3},$$

где S_2 — поверхность, опирающаяся на контур L_2 .

На основании теоремы о циркуляции

$$\Gamma = I_2.$$

Следовательно,

$$B(2\pi r) = j_0 \frac{R^2}{3}; \quad B(r=R) = j_0 \frac{R^2}{6r}. \quad (2)$$

Ответ: $B(r=R) = j_0 \frac{r(3R-2r)}{6R}$; $B(r=R) = j_0 \frac{R^2}{6r}$.

8. Внутри однородного длинного прямого проводника круглого сечения имеется цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстояние a . По проводнику течет ток плотностью \vec{j} . Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля в полости.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (22.17) для индукции магнитного поля внутри бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2 R^2},$$

где r — расстояние от оси проводника.

Представив ток в проводнике через его плотность

$$I = j R^2,$$

получим

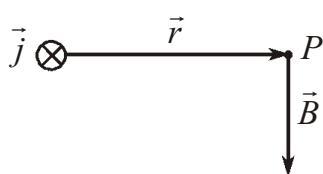


Рис. 1 к задаче №8

$$B = \frac{\mu_0}{2} j r. \quad (1)$$

Вектор магнитной индукции \vec{B} в произвольной точке P направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат вектор плотности тока \vec{j} и радиус-вектор \vec{r} точки P , причем векторы \vec{B} , \vec{j} и \vec{r} образуют правовинтовую систему (см. рис. 1). Поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \times [j, \vec{r}]. \quad (2)$$

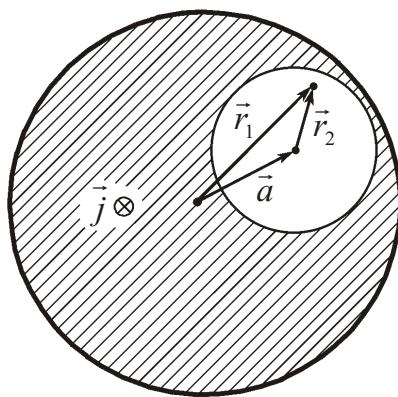
Рассмотрим произвольную точку внутри полости, положение которой относительно оси цилиндра зададим вектором \vec{r}_1 , а относительно оси полости — вектором \vec{r}_2 (см. рис. 2, вид в плоскости сечения проводника). Тогда положение оси полости относительно оси цилиндра

$$\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (3)$$

На основании принципа суперпозиции поле в рассматриваемой точке можно представить в виде

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

Рис. 2 к задаче №8



где \vec{B}_1, \vec{B}_2 поля, создаваемые соответственно сплошным цилиндром и цилиндром, по которому течет ток с такой же плотностью j и размером, равным размеру полости. На основании выражения (2)

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{r}_1]; \quad \vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{r}_2].$$

Следовательно, индукция магнитного поля в полости с учетом (3)

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{r}_1] - \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{r}_2] + \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{a}];$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j a.$$

Как видим, магнитное поле в полости будет однородным и линии индукции перпендикулярны вектору \vec{a} .

Ответ: $\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, \vec{a}]$; $B = \frac{1}{2} \mu_0 j a$.

9. По обмотке тороида течет ток I . Внутренний диаметр тороида d , внешний D . Постройте график зависимости индукции магнитного поля $B(r)$ от расстояния r до оси тороида.

Решение

Тороидом называется провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 1).

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I , текущим по тороиду радиусом

$$R = \frac{1}{2}(D - d).$$

Выберем контур L радиусом r , центр которого совпадает с центром тороида.

В силу симметрии вектор магнитной индукции \vec{B} в произвольной точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина индукции одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{B} по контуру L равна

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2 \pi r.$$

Если контур L проходит внутри тороида, то он охватывает все витки. Следовательно, суммарный ток, охватываемый контуром,

$$I = R n I,$$

где n – число витков на единицу длины тороида.

На основании теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = I.$$

Следовательно,

$$B 2 \pi r = R n I; \quad B = \frac{R n I}{2 \pi r} = \frac{(D - d) n I}{2 \pi r}.$$

Если контур проходит вне тороида, то он токов не охватывает. Поэтому вне тороида

$$B = 0.$$

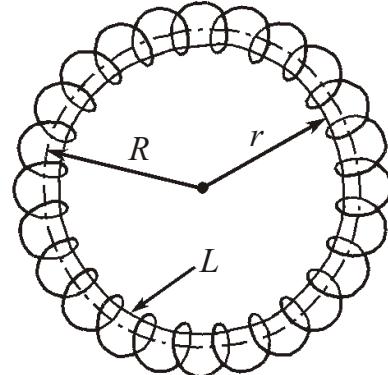


Рис. 1 к задаче №9

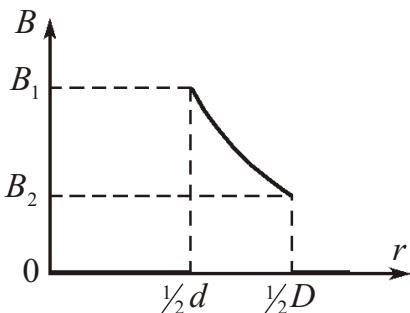


Рис. 2 к задаче №9

Ответ: внутри тороида $B = \frac{(D-d)nI}{2r}$; вне тороида $B = 0$; рис. 2.

10. Определите плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от расстояния r по закону: $B = br$, где b и r – положительные постоянные.

Решение

Циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному контуру L равна

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S I_i.$$

Алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром:

$$\int_i I_i \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_S j_n dS,$$

где интеграл берется по произвольной поверхности S , опирающейся на контур L (см. рис. 1); \vec{j} – плотность тока в той точке, где расположена площадка dS ; j_n – проекция вектора \vec{j} на положительную нормаль к площадке.

Следовательно,

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (1)$$

Преобразовав левую часть (1) по теореме Стокса

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{B}, d\vec{S}),$$

получим:

$$\int_S (\text{rot } \vec{B}, d\vec{S}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}); \quad \int_S ((\text{rot } \vec{B} - \int_0 \vec{j}), d\vec{S}) = 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) должно выполняться для любой произвольно выбранной поверхности S , опирающейся на контур L . Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\text{rot } \vec{B} = \int_0 \vec{j}.$$

Выберем воображаемый круговой контур L радиусом r с центром на оси потока электронов, расположенный перпендикулярно потоку (рис. 2). В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направ-

лен по касательной к нему, а величина индукции поля на равных расстояниях от оси потока будет одинаковой. Следовательно, в цилиндрической системе координат

$$B_r = 0; \quad B = b r; \quad B_z = 0.$$

Используя выражение для ротора в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{B_z}{z} - \frac{B}{z} \vec{e}_r + \frac{B_r}{z} - \frac{B_z}{r} \vec{e} + \frac{1}{r} \frac{(r B)}{r} - \frac{B_r}{r} \vec{e}_z,$$

получаем:

$$\vec{j} = \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{0} = \frac{1}{0} - \frac{(b r)}{z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{(b r)}{r} \vec{e}_z = \frac{1}{0} \frac{1}{r} \frac{(b r)}{r} \vec{e}_z = \frac{b(1)}{0} r \vec{e}_z;$$

$$j(r) = \frac{b(1)}{0} r.$$

Ответ: $j(r) = \frac{b(1)}{0} r$.

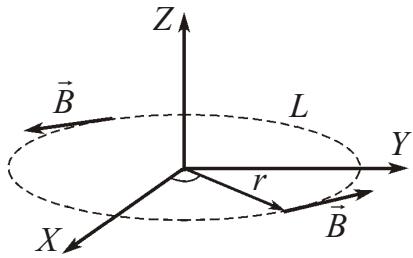


Рис. 2 к задаче №10

Задачи для самостоятельного решения

22.1. Постоянный ток I течет по длинному прямому соленоиду. Площадь поперечного сечения соленоида равна S , число витков на единицу длины n . Определите магнитный поток через торец соленоида.

22.2. Два бесконечно длинных прямых проводника с токами $I_1 = 1$ А и $I_2 = 2$ А расположены параллельно друг другу. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура L , представленного на рисунке.

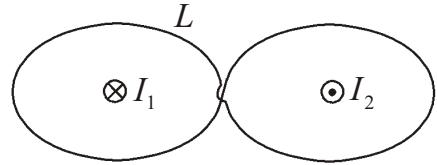


Рис. к задаче №22.2

22.3. По двум безграничным параллельным плоскостям в противоположных направлениях текут токи с линейными плотностями i , одинаковыми во всех точках каждой плоскости. Определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

22.4. По безграничной пластине толщиной $2d$ параллельно ее поверхности течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = x^2$, где положительная постоянная; x расстояние от средней плоскости пластины. Определите индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x .

22.5. Ток I течет по длинной полой тонкостенной трубе радиусом R . Определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

22.6. Внутренний радиус трубы равен R_1 , внешний R_2 . По оси трубы проложен тонкий проводник. По проводнику и трубе в одном направлении текут равные токи I . Определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства, полагая, что ток распределен по сечению трубы равномерно. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

22.7. По прямому бесконечному цилинду радиусом R течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = r$, где положительная постоянная; r расстояние от оси цилиндра. Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

22.8. Внутри однородного длинного прямого проводника круглого сечения имеется цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстоянии a . Радиус проводника R . По проводнику течет ток плотностью j . На каком расстоянии $r = R$ от оси проводника индукция магнитного поля та-кая же, как и в полости? Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

22.9. По обмотке тороида, содержащей N витков, течет ток I . Внутренний диаметр тороида d , внешний D . Определите минимальное и максимальное значения индукции магнитного поля внутри тороида.

22.10. Индукция магнитного поля внутри цилиндрического проводника с током зависит от расстояния r от его оси по закону: $B \propto r^2$, где положительная постоянная. Определите плотность тока в проводнике как функцию расстояния r от его оси.

Тесты

1. По бесконечно длинному тонкому проводнику течет ток силой I . Определите поток вектора магнитной индукции через поверхность, опирающуюся на окружность радиусом r с центром на проводнике и перпендикулярную проводнику.

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| А. $\Phi = 0$ | Б. $\Phi = I / r^2$ |
| В. $\Phi = I / r^2$ | Г. $\Phi = I / r^2 / \mu_0$ |

2. По бесконечно длинному тонкому проводнику течет ток силой I . Определите поток вектора магнитной индукции через поверхность, опирающуюся на квадрат со стороной a , расположенный в одной плоскости с проводником так, что ближайшая сторона квадрата, параллельная проводнику, находится от него на расстоянии a .

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| А. $\Phi = 0$ | Б. $\Phi = \mu_0 I a^2 / (2\pi)$ |
| В. $\Phi = \mu_0 I a \ln 2 / (2\pi)$ | Г. $\Phi = \mu_0 I a^2 \ln 2$ |

3. Постоянный ток I течет по бесконечно длинному прямому проводнику радиусом R . Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению проводника, определите поток вектора магнитной индукции через осевое сечение проводника в расчете на единицу его длины. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

- | | |
|--|--|
| А. $\Phi_{\text{ед}} = 0$ | Б. $\Phi_{\text{ед}} = \mu_0 I / R^2$ |
| В. $\Phi_{\text{ед}} = \mu_0 I / (8\pi)$ | Г. $\Phi_{\text{ед}} = \mu_0 I / (2\pi)$ |

4. Постоянный ток I течет по бесконечно длинному соленоиду радиусом R . Определите поток вектора магнитной индукции через поперечное сечение соленоида, если число витков на единицу длины соленоида равно n .

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| А. $\Phi = 0$ | Б. $\Phi = n I / R^2$ |
| В. $\Phi = \mu_0 n I / R^2$ | Г. $\Phi = \mu_0 n I / (R^2)$ |

5. Постоянный ток I течет по тонкому бесконечно длинному прямому проводнику. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом R с центром на оси проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол α с осью проводника.

- | | |
|--------------------------------|---|
| А. $\Gamma = \mu_0 I$ | Б. $\Gamma = \mu_0 I / R^2 \cos \alpha$ |
| В. $\Gamma = \mu_0 I / 2\pi R$ | Г. $\Gamma = \mu_0 I / R^2 \sin \alpha$ |

6. Два бесконечно длинных прямых проводника, по которым текут одинаковые токи силой I , расположены параллельно друг другу. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль квадратного контура со стороной a , представленного на рисунке.

A. $\Gamma = 0$

B. $\Gamma = 2 \cdot \mu_0 I$

Б. $\Gamma = \mu_0 I$

Г. $\Gamma = \mu_0 I a^2$

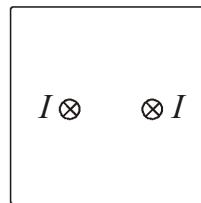


Рис. к тесту №6

7. Два бесконечно длинных прямых проводника с токами I_1 и I_2 расположены параллельно друг другу. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура радиусом R , представленного на рисунке.

A. $\Gamma = 0$

B. $\Gamma = \mu_0 (I_1 + I_2) 2 \pi R$

Б. $\Gamma = \mu_0 (I_1 + I_2)$

Г. $\Gamma = \mu_0 (I_1 + I_2) / R^2$

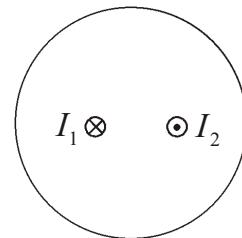


Рис. к тесту №7

8. Постоянный ток I течет по бесконечно длинному прямому проводнику радиусом R . Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению проводника, определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом $r = R$ с центром на оси проводника и перпендикулярной проводнику. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

A. $\Gamma = 0$

B. $\Gamma = \mu_0 I R^2 / r^2$

Б. $\Gamma = \mu_0 I r^2 / R^2$

Г. $\Gamma = I R^2 / (\mu_0 r^2)$

9. Постоянный ток $I = 1$ А течет по бесконечно длинному соленоиду радиусом $R = 10$ см. Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом $r = 5$ см с центром на оси соленоида и перпендикулярной к ней. Число витков на единицу длины соленоида равно $n = 10^4$.

Ответ: _____ Н/А

10. Постоянный ток I течет по бесконечно длинному соленоиду радиусом R . Определите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль квадратного контура, расположенного в плоскости осевого сечения соленоида. Длина стороны контура равна $2R$, одна из сторон контура совпадает с осью соленоида. Число витков на единицу длины соленоида равно n .

A. $\Gamma = 0$

B. $\Gamma = \mu_0 R n I$

Б. $\Gamma = \mu_0 2 R n I$

Г. $\Gamma = \mu_0 4 R n I$

11. Постоянный ток $I = 2$ А течет по бесконечно длинному прямому проводнику радиусом $R = 1$ см. Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению проводника, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $\frac{1}{2}R$ от оси проводника. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

Ответ: _____ мкТл

12. Постоянный ток $I = 4$ А течет по бесконечно длинному прямому проводнику радиусом $R = 1$ см. Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению проводника, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $2R$ от оси проводника. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

Ответ: _____ мкТл

13. Постоянный ток I течет по бесконечно длинному прямому проводнику радиусом $R = 10$ см. Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению проводника, определите, на каком расстоянии от оси проводника индукция магнитного поля внутри проводника равна магнитной индукции на расстоянии $2R$ от его оси. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

Ответ: _____ см

14. Постоянный ток I течет по бесконечно длинной прямой трубе, внутренний радиус которой R , внешний – $2R$. Полагая, что ток распределен равномерно по поперечному сечению трубы, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $\frac{3}{2}R$ от оси трубы. Магнитную проницаемость считать всюду равной единице.

A. $B = 0$ B. $B = \mu_0 5I/(36\pi R)$

B. $B = \mu_0 3I/(4\pi R)$ Г. $B = \mu_0 I/(2\pi R)$

15. По прямому бесконечному цилиндру радиусом R течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = kr^2$, где k – положительная постоянная; r – расстояние от оси цилиндра. Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $r = R$ от оси цилиндра.

A. $B = \frac{1}{2}\mu_0 kr$ Б. $B = \frac{1}{3}\mu_0 kr^2$

В. $B = \frac{1}{4}\mu_0 kr^3$ Г. $B = \frac{1}{5}\mu_0 kr^4$

16. По прямой бесконечной трубе течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = k/r$, где k – положительная постоянная; r – расстояние от оси трубы. Внутренний радиус трубы R , внешний – $2R$. Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $r = 2R$ от оси трубы.

A. $B = \mu_0 r/R$ Б. $B = \mu_0 R/r$

В. $B = \mu_0 R/(2r)$ Г. $B = \mu_0 r^2/R$

17. По прямому бесконечному цилиндру радиусом $R = 10$ см течет ток, плотность которого изменяется по закону: $j = r/k$, где $k = 3 \cdot 10^{-3}$ Гн А/м²; r – расстояние от оси цилиндра. Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите индукцию магнитного поля на расстоянии $r = 20$ см от оси цилиндра.

Ответ: _____ мкТл

18. Сравните индукции магнитного поля на оси бесконечного соленоида и внутри тороида в средней его части, если радиусы и число витков на единицу длины у них одинаковы.

Ответ: _____

19. По обмотке тороида течет ток I . Внутренний радиус тороида R , внешний – $2R$. Определите отношение максимального и минимального значений индукции магнитного поля внутри тороида.

Ответ: _____

20. Индукция магнитного поля внутри цилиндрического проводника с током зависит от расстояния r от его оси по закону: $B = kr$, где k – положительная постоянная. Определите плотность тока в проводнике как функцию расстояния r от его оси.

A. $j = r/\mu_0$ Б. $j = 2\pi r/\mu_0$

В. $j = 2\pi/\mu_0$ Г. $j = \mu_0$

§23. Магнитное поле в веществе

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в вакууме. Если проводник с током находится не в вакууме, а в некотором веществе, то, как показывает опыт, магнитное поле изменяется. Это указывает на тот факт, что различные вещества в магнитном поле сами становятся источниками магнитного поля (говорят, *намагничиваются*). Результирующее поле в веществе является суммой полей, создаваемых проводником с током и намагниченным веществом, и поэтому не равно полю в вакууме. Вещества, способные намагничиваться, называются *магнетиками*.

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (*молекулярные токи*). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы хаотически, поэтому суммарный магнитный момент вещества равен нулю. В магнитном поле молекулярные токи ведут себя подобно рамке с током, то есть стремятся устремиться так, чтобы их магнитные моменты были преимущественно ориентированы вдоль магнитного поля, вследствие чего магнетик намагничивается.

Гипотеза Ампера лишь качественно объясняет природу магнетизма; объяснить магнетизм вещества на основе классических представлений невозможно, исчерпывающее объяснение дает квантовая механика. Не вдаваясь в подробности, отметим, что согласно современным представлениям, электроны в атомах обладают орбитальными и собственными (спиновыми) магнитными моментами. Результирующий магнитный момент атома будет складываться из орбитальных и собственных моментов всех его электронов, а также из магнитного момента ядра. Магнитный момент молекулы равен сумме магнитных моментов входящих в ее состав атомов. Именно взаимодействием магнитных моментов атомов и молекул с внешним магнитным полем и обусловлено намагничивание веществ.

Рассмотрим цилиндрический проводник, изготовленный из однородного изотропного магнетика, находящийся во внешнем магнитном поле с индукцией \vec{B}_0 . Под действием внешнего поля магнитные моменты молекул преимущественно ориентируются в одном направлении (рис. 23.1). В этом случае молекулярные токи, текущие по соприкасающимся участкам, имеют противоположные направления и взаимно компенсируются; нескомпенсированными остаются лишь токи на участках, примыкающих к поверхности магнетика. Поэтому действие всех молекулярных токов будет такое же, как действие некоторого тока I , текущего по поверхности магнетика. Этот ток создаст магнитное поле \vec{B} , направленное параллельно внешнему. Результирующее поле внутри магнетика, равное

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}, \quad (23.1)$$

будет отличаться от внешнего \vec{B}_0 .

В случае неоднородного магнетика нескомпенсированными будут также молекулярные токи и в объеме магнетика. При этом магнитные поля, создаваемые поверхностными и объемными молекулярными токами будут иметь одинаковые направления.

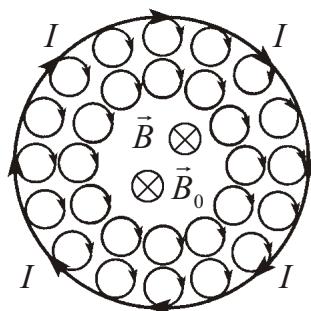


Рис. 23.1

Таким образом, под действием внешнего магнитного поля магнетик намагничивается, и результирующий магнитный момент молекулярных токов становится отличным от нуля.

Для характеристики намагничиваемости магнетика используют магнитный момент единицы объема

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V}, \quad (23.2)$$

который называют *намагченностью* магнетика.

Поле \vec{B} так же, как и поле \vec{B}_0 , не имеет источников. Поэтому дивергенция результирующего поля \vec{B} всюду равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{B}_0 = \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Ротор результирующего поля

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{B}_0 = \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Согласно (22.10)

$$\operatorname{rot} \vec{B}_0 = \vec{j}_0,$$

где \vec{j}_0 – плотность тока проводимости (обычного тока, связанного с направленным движением носителей). Очевидно, ротор вектора \vec{B} должен быть пропорционален плотности молекулярных токов $\vec{j}_{\text{мол}}$:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}_0 \vec{j}_{\text{мол}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}_0 (\vec{j} - \vec{j}_{\text{мол}}). \quad (23.3)$$

Чтобы найти выражение для $\vec{j}_{\text{мол}}$, воспользуемся понятием намагченности \vec{J} . С этой целью вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов $I_{\text{мол}}$, охватываемых некоторым контуром L , целиком лежащим в магнетике. Согласно (20.3) [17, § 20] эта сумма равна

$$I = I_{\text{мол}} = \oint_S (\vec{j}_{\text{мол}}, d\vec{S}), \quad (23.4)$$

где S – поверхность, опирающаяся на контур L . В эту сумму входят только те молекулярные токи, которые оказываются «нанизанными» на контур (см. рис. 23.2). Токи, не «нанизанные» на контур, либо не пересекают поверхность S , либо пересекают ее дважды – один раз в одном направлении, второй раз в другом. В результате их вклад в результирующую сумму токов, охватываемых контуром, будет равен нулю.

Выделим мысленно в магнетике элементарный объем в виде очень тонкого косого цилиндра с основаниями $S_{\text{мол}}$, равными площадям, охватываемым отдельными молекулярными токами, и образующими, параллельными элементу dl контура L . Из рис. 23.3 видно, что элемент контура dl , образующий с направлением намагченности \vec{J} угол

, нанизывает на себя те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь выбранного цилиндра. Если n – концентрация молекул, то суммарный ток, «нанизанный» на элемент контура dl , равен

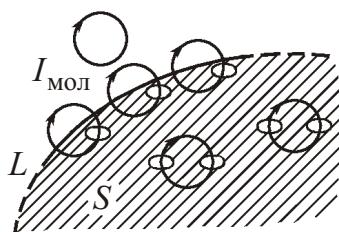


Рис. 23.2

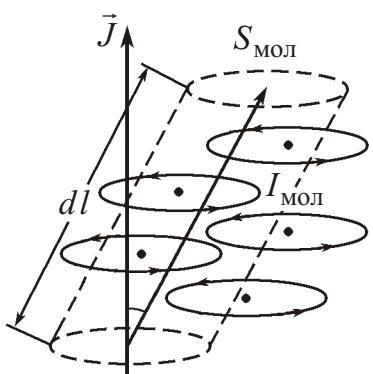


Рис. 23.3

$$dI = I_{\text{мол}} n dV,$$

где $dV = S_{\text{мол}} \cos \theta dl$ – объем цилиндра. Следовательно,

$$dI = I_{\text{мол}} n S_{\text{мол}} \cos \theta dl.$$

Так как произведение $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$ представляет собой магнитный момент отдельного молекулярного тока $p_{\text{моль}}$ (см. (21.10)), то

$$dI = p_{\text{моль}} n \cos \theta dl = p_m \cos \theta dl,$$

где $p_m = p_{\text{моль}} n$ – магнитный момент единицы объема, то есть модуль намагниченности \vec{J} (см. (23.2)). Произведение $p_m \cos \theta$ дает проекцию J_l вектора \vec{J} на направление элемента dl . Таким образом,

$$dI = J_l dl = (\vec{J}, d\vec{l}), \quad (23.5)$$

а суммарный молекулярный ток, охватываемый контуром L ,

$$\oint_L dI = \oint_L (\vec{J}, d\vec{l}). \quad (23.6)$$

Следовательно, с учетом (23.4)

$$\oint_S (\vec{j}_{\text{мол}}, d\vec{S}) = \oint_L (\vec{J}, d\vec{l}).$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, получим:

$$\oint_S (\vec{j}_{\text{мол}}, d\vec{S}) = -(\text{rot } \vec{J}, d\vec{S}); \quad \oint_S (\vec{j}_{\text{мол}} - \text{rot } \vec{J}, d\vec{S}) = 0.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольной поверхности S , что возможно только в случае, если в каждой точке магнетика выполняется равенство

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{J}. \quad (23.7)$$

Подставим выражение (23.7) в (23.3):

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{j}_0 + \text{rot } \vec{J}. \quad (23.8)$$

Запишем (23.8) в виде

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{j}_0 + \text{rot } \vec{J},$$

или

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad (23.9)$$

где вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (23.10)$$

называется *напряженностью магнитного поля*.

Проинтегрируем выражение (23.9) по произвольной поверхности S , опирающейся на контур L ,

$$\oint_S (\text{rot } \vec{H}, d\vec{S}) = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S})$$

и преобразуем левую часть по теореме Стокса:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (23.11)$$

Слева в (23.11) стоит циркуляция вектора \vec{H} по контуру L , справа – поток вектора \vec{j} через поверхность S , опирающуюся на контур L , то есть суммарный ток про-

водимости, охватываемый контуром. Таким образом, (23.11) выражает **теорему о циркуляции для вектора \vec{H}** : циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_L H_l dl = \sum_i I_i. \quad (23.12)$$

Равенство (23.9) выражает **теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме**.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. У большинства изотропных магнетиков намагниченность пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{H}, \quad (23.13)$$

где μ_0 — магнитная восприимчивость магнетика. Для таких магнетиков

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}_0; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{(1 - \chi_0)} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (23.14)$$

где χ_0 — магнитная проницаемость магнетика.

Напряженность магнитного поля с индукцией \vec{B}_0 , создаваемого токами проводимости в вакууме, равна (см. (23.10)):

$$\vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0.$$

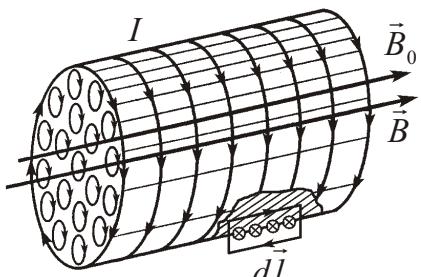


Рис. 23.4

Внесем в это поле бесконечно длинный цилиндрический стержень, изготовленный из однородного изотропного магнетика, и расположим его вдоль линий индукции внешнего поля. Под действием поля \vec{B}_0 молекулярные токи установятся так, что их магнитные моменты будут направлены вдоль оси стержня, а плоскости токов перпендикулярно к этой оси. При этом нескомпенсированными останутся лишь молекулярные токи на участках, примыкающих

к поверхности магнетика. Таким образом, суммарное действие молекулярных токов будет таким же, какое вызвал бы ток I , текущий по поверхности стержня перпендикулярно к его оси (рис. 23.4).

Очевидно, что стержень, обтекаемый током I , эквивалентен соленоиду. Как известно, магнитная индукция на оси бесконечного соленоида с током I равна (см. выражение (21.22) или (22.18))

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 I_{\text{ед}},$$

где n — число витков на единицу длины; $I_{\text{ед}} = n I$ — суммарный ток в единице длины соленоида.

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов dI , охватываемых прямоугольным контуром, две стороны dl которого параллельны образующим стержня, а две другие перпендикулярны им (см. рис. 23.4). Так как магнитные моменты молекулярных токов и намагниченность \vec{J} направлены вдоль поля \vec{B}_0 и вне магнетика $J = 0$, то согласно (23.5) $dI = J dl$. Таким образом, суммарный молекулярный ток в единице длины магнетика

$$I_{\text{ед}} = dI / dl = J.$$

Следовательно, индукция магнитного поля \vec{B} , создаваемого молекулярными токами,

$$B = \mu_0 J; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(где учтено, что векторы \vec{B} и \vec{J} сонаправлены), а результирующее поле в магнетике

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J},$$

или с учетом (23.13) и (23.14)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0 + \vec{B}/.$$

Отсюда получим:

$$\vec{B}(1 + \mu_0) = \vec{B}_0; \quad \vec{B} = \vec{B}_0, \quad (23.15)$$

то есть в рассмотренном случае магнитная проницаемость показывает, во сколько раз усиливается индукция поля в магнетике.

Следует отметить, что полученный результат справедлив лишь тогда, когда магнетик заполняет весь объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями индукции внешнего поля. В противном случае соотношение (23.15) не выполняется.

В заключение выясним, в каких еще случаях (кроме однородного магнетика) могут появиться нескомпенсированные молекулярные токи в объеме магнетика.

Для этого запишем выражение (23.6) с учетом (23.13) в случае однородного магнетика ($\mu = \text{const}$) в виде

$$\int_L \circ (\vec{J}, d\vec{l}) = \int_L \circ (\vec{H}, d\vec{l}). \quad (23.16)$$

По теореме о циркуляции вектора напряженности магнитного поля интеграл в правой части (23.16) равен алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых контуром L . Следовательно, с учетом выражений (23.4) и (23.11)

$$\int_S (\vec{j}_{\text{мол}}, d\vec{S}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Это соотношение справедливо для любого контура внутри магнетика, в частности и для бесконечно малого. Поэтому

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \vec{j}.$$

Отсюда следует, что нескомпенсированные молекулярные токи в объеме магнетика могут быть отличными от нуля и в случае однородного магнетика, но при условии, что внутри него есть токи проводимости.

Классификация магнетиков

Экспериментальные исследования показали, что все вещества в большей или меньшей степени обладают магнитными свойствами, которые, как было отмечено выше, обусловлены наличием у частиц, входящих в состав атомов, орбитальных и собственных магнитных моментов. В настоящее время установлено, что магнитные моменты ядер на несколько порядков меньше магнитных моментов электронов. Поэтому магнитные свойства веществ в основном определяются электронами, входящими в состав атомов.

Вещества крайне разнообразны по своим магнитным свойствам. У большинства веществ эти свойства выражены слабо. Слабомагнитные вещества делятся на две большие группы *парамагнетики* и *диамагнетики*. Они отличаются тем, что при внесении во внешнее магнитное поле парамагнитные образцы намагничиваются

так, что их магнитные моменты оказываются направленными по внешнему полю, а диамагнитные образцы намагничиваются против внешнего поля. При этом у парамагнетиков 1, а у диамагнетиков 0. Отличие магнитной проницаемости от единицы у обоих типов магнетиков чрезвычайно мало. Например, у алюминия, который относится к парамагнетикам, магнитная восприимчивость $2,1 \cdot 10^{-5}$, у хлористого железа $2,5 \cdot 10^{-3}$. К парамагнетикам относятся также платина, воздух и многие другие вещества. К диамагнетикам относятся, например, медь ($3 \cdot 10^{-6}$), вода ($9 \cdot 10^{-6}$), висмут ($1,7 \cdot 10^{-3}$). Образцы из пара- и диамагнетика, помещенные в неоднородное магнитное поле между полюсами электромагнита, ведут себя по-разному – парамагнетики втягиваются в область более сильного поля, диамагнетики – выталкиваются.

У атомов диамагнитных веществ в отсутствие внешнего поля собственные магнитные моменты электронов и их орбитальные моменты полностью скомпенсированы. Под действием внешнего магнитного поля изменяется характер движения электронов и нарушается компенсация магнитных моментов. Возникающее при этом собственное магнитное поле атома оказывается направленным противоположно направлению индукции внешнего поля.

В атомах парамагнитных веществ магнитные моменты электронов скомпенсированы не полностью. Из-за теплового движения магнитные моменты атомов ориентированы произвольно, так что суммарная магнитная индукция равна нулю. Внешнее магнитное поле оказывает ориентирующее действие – магнитные моменты атомов стремятся сориентироваться по направлению индукции внешнего поля. При усилении внешнего поля ориентационный эффект возрастает, так что индукция собственного магнитного поля парамагнитного образца растет прямо пропорционально индукции внешнего магнитного поля. Полная индукция магнитного поля в образце складывается из индукции внешнего магнитного поля и индукции собственного магнитного поля, возникшего в процессе намагничивания.

Вещества, способные сильно намагничиваться в магнитном поле, называются *ферромагнетиками*. К рассматриваемой группе относятся, например, железо, никель, кобальт. Из них наибольшей магнитной проницаемостью обладает железо. Поэтому вся эта группа получила название ферромагнетиков. Ферромагнетиками могут быть также различные сплавы и соединения. Широкое применение в технике получили керамические ферромагнитные материалы – ферриты.

Магнитная проницаемость ферромагнетиков по порядку величины лежит в пределах 10^2 – 10^5 . Например, у стали ~ 8000 , у сплава железа с никелем магнитная проницаемость достигает значений 250000.

Для каждого ферромагнетика существует определенная температура (так называемая температура или точка Кюри), выше которой ферромагнитные свойства исчезают, и вещество становится парамагнетиком. У железа, например, температура Кюри равна 770°C , у никеля 358°C , у кобальта 1130°C .

Ферромагнитные материалы делятся на две группы – на магнитомягкие и магнитожесткие материалы. Магнитомягкие ферромагнитные материалы почти полностью размагничиваются, когда внешнее магнитное поле становится равным нулю. К магнитомягким материалам относится чистое железо, электротехническая сталь и некоторые сплавы. Эти материалы применяются в приборах переменного тока, в которых происходит непрерывное перемагничивание, то есть изменение направления

магнитного поля (трансформаторы, электродвигатели и т. п.). Магнитожесткие материалы в значительной мере сохраняют свою намагниченность и после удаления их из магнитного поля. Примерами магнитожестких материалов могут служить углеродистая сталь и ряд специальных сплавов. Магнитожесткие материалы используются в основном для изготовления постоянных магнитов.

В отличие от пара- и диамагнетиков, намагниченность которых пропорциональна напряженности магнитного поля (см. выражение (23.13)), зависимость \vec{J} от \vec{H} для ферромагнетиков имеет сложный характер, а магнитная проницаемость не является постоянной величиной; она сильно зависит от индукции B_0 внешнего поля. Типичная зависимость от величины B_0 приведена на рис. 23.5.

Непостоянство магнитной проницаемости приводит к сложной нелинейной зависимости индукции магнитного поля в ферромагнетике от индукции внешнего магнитного поля. Характерной особенностью процесса намагничивания ферромагнетиков является так называемый *гистерезис*, то есть зависимость намагничивания от предыстории образца. Кривая намагничивания (зависимость величины индукции магнитного поля в магнетике от индукции внешнего магнитного поля) ферромагнитного образца представляет собой петлю сложной формы, которая называется *петлей гистерезиса* (рис. 23.6; стрелками указано направление процессов намагничивания и размагничивания ферромагнитного образца при изменении индукции внешнего магнитного поля).

Из рис. 23.6 видно, что при $|B_0| = B_{0s}$ наступает магнитное насыщение намагниченность образца достигает максимального значения.

Если теперь уменьшать магнитную индукцию B_0 внешнего поля и довести ее вновь до нулевого значения, то ферромагнетик сохранит остаточную намагниченность поле внутри образца будет равно B_r . Остаточная намагниченность образцов позволяет создавать постоянные магниты. Для того, чтобы полностью размагнитить образец, необходимо, изменив знак (направление) внешнего поля, довести магнитную индукцию B_0 до значения B_{0c} . Далее процесс перемагничивания может быть продолжен, как это указано стрелками на рис. 23.6. Величину напряженности магнитного поля H_c , соответствующую B_{0c} , принято называть *коэрцитивной силой*.

У магнитомягких материалов значения коэрцитивной силы невелико петля гистерезиса таких материалов достаточно узкая. Материалы с большим значением коэрцитивной силы, то есть имеющие широкую петлю гистерезиса, относятся к магнитожестким.

Природа ферромагнетизма может быть до конца понята только на основе квантовых представлений. Качественно ферромагнетизм объясняется возникновением определенных условий в веществе, при которых энергетически выгодной становится параллельная ориентация собственных магнитных моментов соседних электрон-

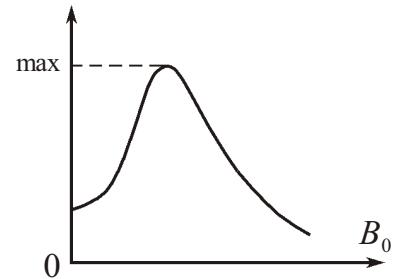


Рис. 23.5

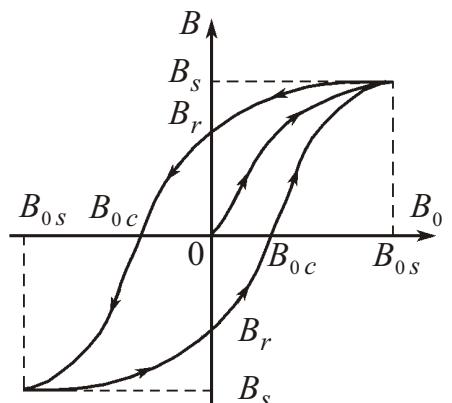


Рис. 23.6

нов. В результате этого внутри кристалла ферромагнетика возникают самопроизвольно намагниченные до насыщения области размером порядка 10^{-2} – 10^{-4} см. Эти области называются *доменами*. Каждый домен представляет собой небольшой постоянный магнит.

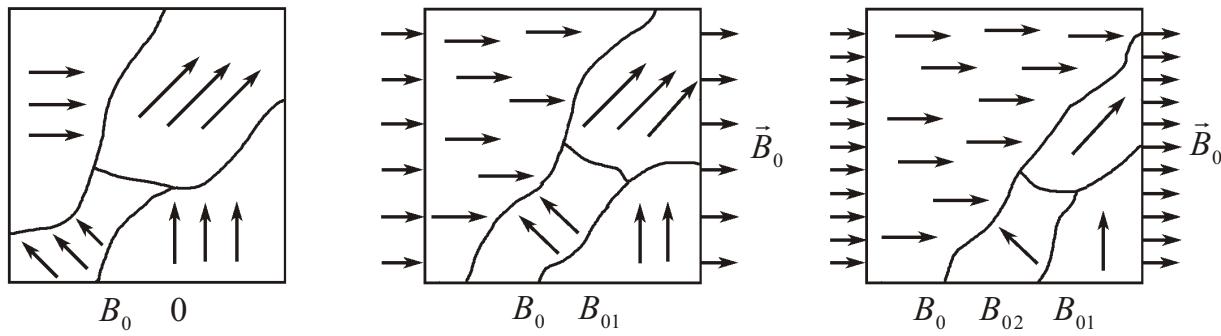


Рис. 23.7

В отсутствие внешнего магнитного поля направления векторов индукции магнитных полей в различных доменах ориентированы в большом кристалле хаотически. Такой кристалл в среднем оказывается ненамагниченным. При наложении внешнего магнитного поля происходит смещение границ доменов так, что объем доменов, ориентированных по внешнему полю, увеличивается. С увеличением индукции внешнего поля возрастает магнитная индукция намагниченного вещества. В очень сильном внешнем поле домены, в которых собственное магнитное поле совпадает по направлению с внешним полем, поглощают все остальные домены, и наступает магнитное насыщение. Рис. 23.7 может служить качественной иллюстрацией процесса намагничивания ферромагнитного образца.

Краткие выводы

1. Магнитный момент молекулярного тока

$$\vec{p}_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \vec{n}.$$

2. Намагченность магнетика равна суммарному магнитному моменту молекулярных токов в единице объема:

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V}.$$

3. Связь плотности молекулярных токов с намагченностью магнетика:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{J}.$$

4. Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{0} - \vec{J}.$$

5. Связь намагченности с напряженностью магнитного поля для изотропных магнетиков:

$$\vec{J} = \vec{H} - (-1) \vec{H}.$$

6. Связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля для изотропных магнетиков:

$$\vec{B} = _0 \vec{H}.$$

7. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S I_i (\vec{j}, d\vec{S}).$$

8. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме: ротор вектора напряженности магнитного поля в некоторой точке равен плотности тока в той же точке:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что такое намагничиваемость вещества?
2. Что такое намагниченность вещества?
3. Какова связь плотности молекулярных токов с намагниченностью магнетика?
4. Какова связь намагниченности с напряженностью магнитного поля для изотропных магнетиков?
5. Какова связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля для изотропных магнетиков?
6. Может ли поток вектора напряженности магнитного поля через замкнутую поверхность быть отличным от нуля?
7. В некоторой точке изотропного магнетика с проницаемостью μ напряженность магнитного поля имеет значение \vec{H} . Чему равна намагниченность магнетика в этой точке?
8. Сформулируйте теорему о циркуляции для вектора напряженности магнитного поля.
9. В каких случаях магнитная проницаемость показывает, во сколько раз усиливается индукция магнитного поля в веществе?
10. В каких случаях могут появиться нескомпенсированные молекулярные токи в объеме магнетика?
11. Какие из магнетиков (пара-, диа-, ферро-) отталкиваются постоянными магнитами?
12. Чем отличается намагничивание ферромагнетиков от намагничивания парамагнетиков?
13. Что такое коэрцитивная сила? гистерезис? петля гистерезиса?

Задачи

1. Шарик радиусом $R = 2$ см, изготовленный из некоторого изотропного парамагнетика, поместили в однородное магнитное поле, и он намагнился однородно. Индукция магнитного поля внутри шарика $B = 0,05$ Тл. Определите результирующий магнитный момент, приобретенный шариком. Магнитная восприимчивость данного магнетика $\chi = 2 \cdot 10^{-5}$.

Решение

Под действием внешнего магнитного поля магнетик намагнитится и приобретет магнитный момент, отличный от нуля. По определению намагниченность магнетика

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{\vec{P}_m}{V},$$

где \vec{P}_m — \vec{p}_m результирующий магнитный момент молекулярных токов в объеме V .

Намагниченность изотропного магнетика связана с напряженностью магнитного поля

$$\vec{J} = \vec{H},$$

а напряженность поля с магнитной индукцией

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Следовательно,

$$\vec{P}_m = \vec{J} V \underset{\propto}{\sim} R^3 \vec{H} \underset{\propto}{\sim} R^3 \frac{\vec{B}}{\mu_0} \underset{\propto}{\sim} R^3 \frac{\vec{B}}{(1 - \epsilon)_0};$$

$$P_m \underset{\propto}{\sim} R^3 \frac{B}{(1 - \epsilon)_0} = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ А м}^2,$$

где учтено, что объем шарика

$$V \underset{\propto}{\sim} R^3,$$

а магнитная проницаемость

$$1 - \epsilon \approx 1.$$

$$\text{Ответ: } P_m \underset{\propto}{\sim} R^3 \frac{B}{(1 - \epsilon)_0} = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ А м}^2.$$

2. Постоянный магнит имеет форму тонкого диска, намагниченного вдоль оси. Радиус диска $R = 1$ см. Оцените величину молекулярного тока, текущего по ободу диска, если индукция магнитного поля на оси диска в точке, отстоящей на $x = 10$ см от его центра, равна $B = 30$ мкГл.

Решение

Поскольку намагниченность \vec{J} диска направлена вдоль его оси, то индукция \vec{B} магнитного поля на оси диска совпадает с направлением вектора \vec{J} .

Молекулярные токи, текущие внутри диска по соприкасающимся участкам, будут взаимно компенсироваться. Поэтому магнитное поле диска будет обусловлено только молекулярным током I , текущим по его ободу.

Для определения величины индукции магнитного поля на оси диска в точке, отстоящей от его центра на расстояние x , воспользуемся формулой (21.19) магнитного поля тонкого кольца с током:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{2 B (R^2 + x^2)^{3/2}}{\mu_0 R^2} = \frac{2 B x^3}{\mu_0 R^2} = 0,5 \text{ кА},$$

где учтено, что $x \ll R$.

$$\text{Ответ: } I = \frac{2 B (R^2 + x^2)^{3/2}}{\mu_0 R^2} = \frac{2 B x^3}{\mu_0 R^2} = 0,5 \text{ кА.}$$

3. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ перпендикулярно линиям индукции. Определите:

- 1) индукцию магнитного поля в пластине;
- 2) напряженность магнитного поля в пластине.

Решение

Рассмотрим два однородных изотропных магнетика, имеющих плоскую границу соприкосновения.

Пусть в первой среде с проницаемостью μ_1 индукция магнитного поля равна \vec{B}_1 , а во второй среде с проницаемостью μ_2 индукция \vec{B}_2 . Поскольку среды изотропны, из соображений симметрии следует, что векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 лежат в одной плоскости. То же самое справедливо и для векторов напряженности магнитного поля \vec{H}_1 и \vec{H}_2 .

Поскольку линии индукции магнитного поля проходят через границу раздела не прерываясь, то потоки векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 через произвольную площадку S , расположенную на границе раздела магнетиков (см. рисунок), будут одинаковы:

$$B_{n1} S = B_{n2} S.$$

Следовательно,

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (1)$$

Рассмотрим воображаемый прямоугольный контур 1 2 3 4 1 на границе раздела магнетиков. Поскольку токи проводимости отсутствуют, то на основании теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = (\vec{H}, d\vec{l}_{12}) + (\vec{H}, d\vec{l}_{23}) + (\vec{H}, d\vec{l}_{34}) + (\vec{H}, d\vec{l}_{41}) = 0.$$

Ширину контура возьмем настолько малой, чтобы вкладом в циркуляцию сторон 2 3 и 4 1 контура, перпендикулярных к границе раздела, можно было пренебречь. Тогда

$$H_1 d\vec{l}_{12} + H_2 d\vec{l}_{34} - (H_1 - H_2) a = 0,$$

где a — длины сторон контура, параллельных границе раздела магнетиков; H_1, H_2 — касательные составляющие векторов напряженности \vec{H}_1 и \vec{H}_2 . Следовательно,

$$H_1 = H_2. \quad (2)$$

Поскольку в изотропных ди- и парамагнетиках напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны выражением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3)$$

то из (1) и (2) следует:

$$H_{n1} = H_{n2}; \quad B_1 / \mu_1 = B_2 / \mu_2. \quad (4)$$

Вернемся к нашей задаче.

Полагая магнитную проницаемость воздуха равной единице, на основании (1) — (4) получим:

$$B_{n0} = B_n; \quad H_0 = H; \quad H_{n0} = H_n; \quad B_0 = B / \mu_0.$$

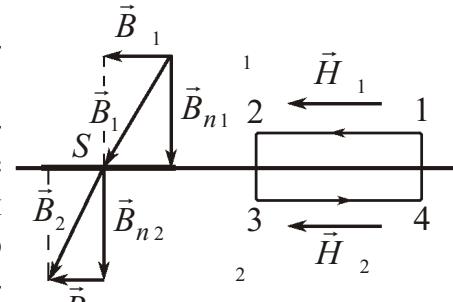


Рис. к задаче №3

где индекс «0» относится к воздуху. Следовательно,

$$B = \sqrt{B_n^2 + B^2} = \sqrt{B_{n0}^2 + B_0^2} / B_0; \quad H = \frac{B}{B_0} = \frac{B_0}{B_0},$$

где учтено, что пластина расположена перпендикулярно линиям индукции ($B_{n0} = B_0$; $B_0 = 0$).

Как видим, если магнетик не заполняет весь объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями индукции внешнего поля, то индукция магнитного поля усиливается менее чем в раз. В частности, в нашем случае она не изменилась.

Ответ: 1) $B = B_0$; 2) $H = \frac{B_0}{B_0}$.

4. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного парамагнетика равна B_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика . Определите:

- 1) индукцию магнитного поля в пластине;
- 2) напряженность магнитного поля в пластине.

Решение

Для решения задачи воспользуемся промежуточными результатами, полученными при решении задачи №3: нормальные и касательные составляющие магнитной индукции на границе раздела двух однородных изотропных магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 связаны соотношениями:

$$B_{n1}/B_{n2} = \mu_1/\mu_2; \quad B_1/B_2 = \mu_1/\mu_2.$$

Поскольку магнитная проницаемость вакуума равна единице, то

$$B_{n0}/B_n = \mu_1/\mu_2; \quad B_0/B = \mu_1/\mu_2,$$

где индекс «0» относится к вакууму.

Так как

$$B_{n0} = B_0 \cos \theta; \quad B_0 = B_0 \sin \theta,$$

то

$$B = \sqrt{B_n^2 + B^2} = \sqrt{B_{n0}^2 + B_0^2} / B_0 = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} / B_0 = 1 / B_0. \quad (1)$$

В изотропных парамагнетиках напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны выражением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) при $\theta = 0$ совпадают с индукцией и напряженностью магнитного поля в магнетике, если вектор \vec{B}_0 перпендикулярен к пластине (см. решение задачи №3).

Ответ: 1) $B = B_0 \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$; 2) $H = \frac{B_0}{\mu_0} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$.

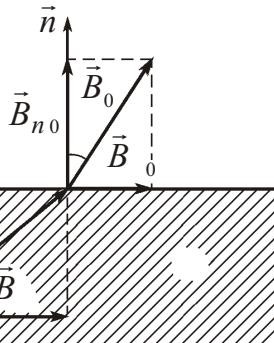


Рис. к задаче №4

5. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного парамагнетика равна B_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика . Определите поток вектора напряженности магнитного поля через воображаемую поверхность S сферы радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика (рис. 1).

Решение

В вакууме напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны выражением

$$\vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0; \quad H_0 = B_0 / \mu_0,$$

причем направления векторов \vec{H}_0 и \vec{B}_0 совпадают.

Разложим вектор \vec{H}_0 на нормальную и касательную составляющие

$$H_{n0} = H_0 \cos \theta; \quad H_{t0} = H_0 \sin \theta$$

и воспользуемся промежуточными результатами, полученными при решении задачи №3: нормальные и касательные составляющие напряженности магнитного поля на границе раздела двух однородных изотропных магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 связаны соотношениями:

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}; \quad H_{n1} = H_{n2}.$$

Поскольку магнитная проницаемость вакуума равна единице, то

$$H_{n0} = H_n; \quad H_{t0} = H_t,$$

где индекс «0» относится к вакууму. Следовательно, в магнетике

$$H_n = \frac{H_{n0}}{\mu_0} = \frac{H_0}{\mu_0} \cos \theta = \frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta; \quad H_t = H_{t0} = H_0 \sin \theta = \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta.$$

Рассмотрим отдельно потоки нормальной и касательной составляющих напряженности магнитного поля. Поток нормальной составляющей через сферическую поверхность будет равен потоку через поверхность S_1 круга радиусом R , лежащего на границе раздела сред (см. рис. 2), а поток касательной составляющей через поверхность круга S_2 радиусом R , перпендикулярном границе раздела (оба круга являются ортогональными проекциями сферы на соответствующие плоскости).

Поток составляющей \vec{H}_{n0} через верхнюю полусферу, расположенную в вакууме, будет положительным (вектор \vec{H}_{n0} направлен по внешней нормали к сфере), а поток вектора \vec{H}_n через нижнюю полусферу, расположенную в магнетике, будет отрицательным (вектор \vec{H}_n направлен противоположно внешней нормали). Следовательно, поток нормальной составляющей напряженности магнитного поля через поверхность всей сферы

$$\Phi_n = \int_{S_1} H_{n0} dS_1 - \int_{S_1} H_n dS_1 = (H_{n0} - H_n) S_1 = \frac{B_0 (\mu_1 - 1)}{\mu_0 R^2} \cos \theta.$$

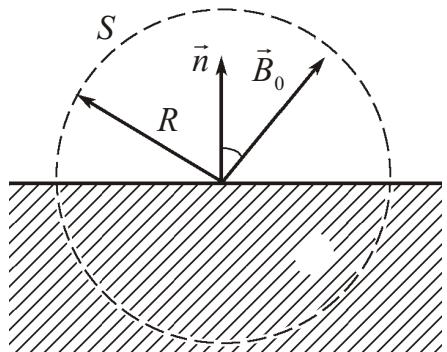


Рис. 1 к задаче №5

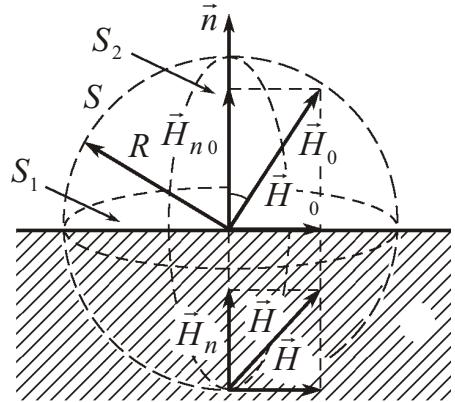


Рис. 2 к задаче №5

Очевидно, что поток касательной составляющей напряженности магнитного поля через поверхность сферы будет равен нулю, поскольку «вытекающий» из сферы и «втекающий» в нее потоки равны по величине. Следовательно, поток напряженности магнитного поля через поверхность сферы будет равен потоку только нормальной составляющей:

$$\Phi = \Phi_n = \frac{B_0(1 - \cos \theta)}{R^2}.$$

Ответ: $\Phi = \frac{B_0(1 - \cos \theta)}{R^2}$.

6. Прямой бесконечно длинный провод, по которому течет ток I , лежит на границе двух непроводящих однородных и изотропных парамагнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 . Определите величину магнитной индукции по всем пространстве в зависимости от расстояния r от оси провода.

Решение

Выберем воображаемый круговой контур L радиусом r , перпендикулярный проводу, с центром, расположенным на оси провода.

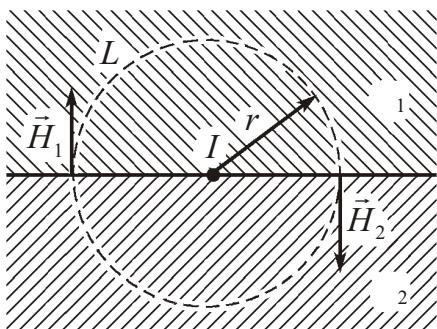


Рис. к задаче №6

Поскольку циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром, то

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I.$$

Линии магнитной индукции \vec{B} прямого тока являются окружностями с центром на оси провода, а напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны выражением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{r}$$

и их направления совпадают.

Если на расстоянии r от оси провода напряженность магнитного поля в первой среде равна H_1 , а во второй H_2 , то циркуляция вектора напряженности магнитного поля по выбранному контуру

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_L H dl = H_1 \cdot r - H_2 \cdot r.$$

На границе раздела сред векторы \vec{H}_1 и \vec{H}_2 направлены перпендикулярно к этой границе. Поэтому (см. решение задачи №3)

$$H_1 = H_2.$$

Следовательно,

$$H_1 = \frac{-1}{2} H_1 + r \cdot I; \quad H_1 = \frac{1}{r(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{I}{2}; \quad H_2 = \frac{1}{r(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{I}{2};$$

$$B_1 = \frac{1}{\mu_1} H_1 = \frac{0}{r(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{2} I; \quad B_2 = \frac{1}{\mu_2} H_2 = \frac{0}{r(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{2} I = B_1.$$

Ответ: $B = \frac{0}{r(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{2} I.$

7. В длинном цилиндрическом стержне течет постоянный ток силой I . Стержень изготовлен из изотропного парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Определите молекулярный ток на поверхности стержня.

Решение

Будем полагать, что ток распределен равномерно по сечению стержня с плотностью

$$j = \frac{I}{R^2},$$

где R радиус стержня.

Рассмотрим воображаемый круговой контур L с центром на оси стержня и радиусом $r = R$, расположенный перпендикулярно току.

В силу осевой симметрии вектор напряженности магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина напряженности поля на равных расстояниях от оси стержня будет одинаковой. Следовательно, циркуляция вектора \vec{H} по контуру L

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_L H dl = H \oint_L dl = H 2\pi r.$$

На основании теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\Gamma = I.$$

Ток I , охватываемый контуром L , равен потоку вектора \vec{j} через поверхность S , опирающуюся на контур L :

$$I = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Выбрав в качестве S плоскую поверхность, получим

$$I = \iint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_S j dS = j \cdot r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}.$$

Таким образом,

$$H 2\pi r = \frac{Ir^2}{R^2}; \quad H = \frac{Ir}{2\pi R^2}.$$

Плотность молекулярного тока связана с намагниченностью магнетика, а намагниченность с напряженностью магнитного поля соотношениями:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{J}; \quad \vec{J} = \vec{H}.$$

Следовательно,

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{H}.$$

Так как вектор \vec{H} в любой точке контура L будет направлен по касательной к нему, а величина напряженности поля на равных расстояниях r от оси стержня будет одинаковой, то в цилиндрической системе координат

$$H_r = 0; \quad H = \frac{Ir}{2\pi R^2}; \quad H_z = 0.$$

Используя выражение для ротора в цилиндрических координатах

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{H_z}{z} - \frac{H}{z} \vec{e}_r - \frac{H_r}{z} \vec{e}_r + \frac{H_z}{r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{(r H_z)}{r} \vec{e}_z - \frac{H_r}{r} \vec{e}_z,$$

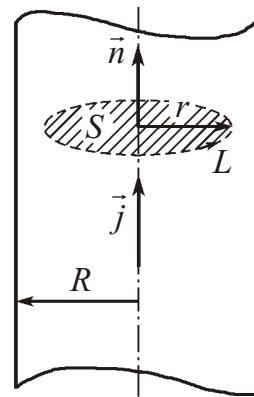


Рис. к задаче №7

получим

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{H} = \frac{H}{z} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{(r H)}{r} \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{r}{r} \frac{I r^2}{2 R^2} \vec{e}_z - \frac{I}{R^2} \vec{e}_z. \quad (1)$$

Проинтегрировав соотношение (1) по всему сечению стержня, найдем поверхностный молекулярный ток:

$$I_{\text{мол}} = \int_S (\vec{j}_{\text{мол}}, d\vec{S}) = \int_S j_{\text{мол}} dS = \int_0^R j_{\text{мол}} 2\pi r dr = \frac{I}{R^2} \int_0^R 2\pi r dr = I.$$

Ответ: $I_{\text{мол}} = I$.

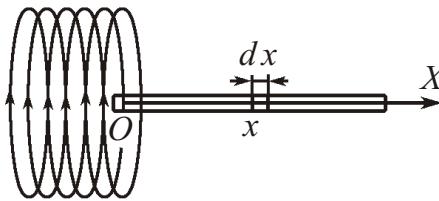
8. Длинный тонкий цилиндрический стержень, изготовленный из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ , расположен вдоль оси катушки с током. Площадь поперечного сечения стержня S . Один конец стержня находится в центре катушки, где индукция магнитного поля равна \vec{B} , а другой конец — в области, где магнитное поле практически отсутствует. Определите, с какой силой катушка действует на стержень.

Решение

Магнитное поле катушки с током на ее оси будет направлено вдоль этой оси.

Под действием внешнего магнитного поля катушки с током магнетик намагнитится и приобретет магнитный момент, отличный от нуля, что эквивалентно появлению кругового тока, текущего по поверхности магнетика. Таким образом, действие катушки с током на стержень можно рассматривать как действие магнитного поля, создаваемого катушкой, на витки с током, расположенные в перпендикулярном к ним неоднородном магнитном поле.

Рис. к задаче №8



действие магнитного поля, создаваемого катушкой, на витки с током, расположенные в перпендикулярном к ним неоднородном магнитном поле.

Работа силы Ампера на конечном перемещении контура с током I в магнитном поле с индукцией \vec{B} (см. выражение (21.13))

$$A = I \Phi,$$

где Φ — приращение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром. Очевидно, что элементарная работа на бесконечно малом перемещении dx

$$dA = F_x dx = I d\Phi.$$

Следовательно, проекция силы на направление перемещения контура площадью S в неоднородном магнитном поле

$$F_x = I \frac{d\Phi}{dx} = IS \frac{dB_n}{dx} = p_m \frac{dB_n}{dx}, \quad (1)$$

где использованы определения магнитного потока и магнитного момента контура с током:

$$\Phi = B_n S; \quad p_m = IS.$$

Выделим мысленно элемент стержня длиной dx и объемом $dV = S dx$, суммарный магнитный момент молекулярных токов в котором

$$p_m = J dV = JS dx, \quad (2)$$

где J — намагниченность магнетика.

Намагниченность вещества связана с напряженностью поля, а напряженность поля с магнитной индукцией:

$$\vec{J} = \vec{H}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (3)$$

Так как $B_n = B$, то выражение (1) с учетом (2) и (3) представим в виде

$$F_x = JS dx \frac{dB}{dx} = HS dB = \frac{B}{\mu_0} S dB = \frac{S}{2(1-\mu_0)} dB^2, \quad (4)$$

где учтено, что магнитная проницаемость

$$1 - \mu_0.$$

Интегрируя (4), получаем

$$F_x = \frac{S}{2(1-\mu_0)} \int_0^B dB^2 = \frac{SB^2}{2(1-\mu_0)},$$

где знак минус указывает, что сила направлена противоположно оси OX , то есть стержень втягивается в катушку.

Ответ: $F = \frac{SB^2}{2(1-\mu_0)}$.

9. На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом $R = 25$ см имеет-
ся обмотка с общим числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделана поперечная про-
резь шириной $b = 1$ мм. При токе через обмотку $I = 0,85$ А индукция магнитного по-
ля в зазоре $B_0 = 0,75$ Тл. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора,
определите магнитную проницаемость железа при этих условиях.

Решение

Железо относится к ферромагнетикам, у которых зависимость намагниченности \vec{J} от напряженности \vec{H} магнитного поля имеет более сложный характер, чем (23.13), и линейная зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

перестает быть справедливой.

Ввиду нелинейной зависимости \vec{B} от \vec{H} в ферромагнетиках нельзя определить магнитную проницаемость как постоянную величину, характеризующую магнитные свойства каждого ферромагнетика. Однако здесь по прежнему считается, что соотношение (1) справедливо, но при этом является функцией H .

Вернемся к нашей задаче.

В сердечнике и зазоре магнитная индукция направлена по касательной к оси тора, то есть по нормали к сечению (см. §22; решение задачи №9). Следовательно, нормальная составляющая индукции магнитного поля в зазоре

$$B_{n0} = B_0.$$

При переходе через границу зазора нормальная составляющая индукции магнитного поля не изменится (см. решение задачи №3):

$$B_n = B_{n0} = B_0.$$

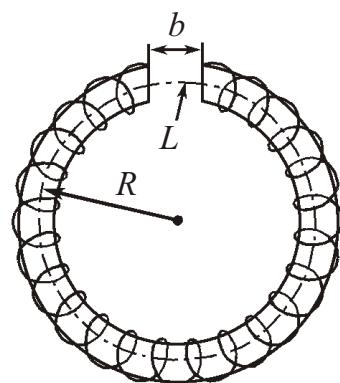


Рис. к задаче №9

Напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны выражением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{0}; \quad H = \frac{B}{0},$$

причем направления векторов \vec{H} и \vec{B} совпадают. Следовательно, в зазоре и сердечнике

$$H_{n0} = \frac{B_{n0}}{0}; \quad H_n = \frac{B_n}{0} = \frac{B_0}{0}.$$

Выберем контур L радиусом R , совпадающий с осью тора.

Так как вектор напряженности магнитного поля \vec{H} в произвольной точке контура будет направлен по касательной к нему, то циркуляция вектора \vec{H} по контуру L равна

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \oint_L H dl = H_n (2\pi R b) = H_{n0} b.$$

Контур L проходит внутри тороида и охватывает все его витки. Следовательно, суммарный ток, охватываемый контуром,

$$I = NI.$$

На основании теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = NI; \quad H_n (2\pi R b) = H_{n0} b = NI.$$

Следовательно,

$$\frac{B_0}{0} (2\pi R b) = \frac{B_0}{0} b = NI; \quad \frac{B_0 (2\pi R b)}{0 NI} = \frac{2\pi R B_0}{0 NI b B_0} = 3700.$$

Ответ: $\frac{B_0 (2\pi R b)}{0 NI b B_0} = \frac{2\pi R B_0}{0 NI b B_0} = 3700.$

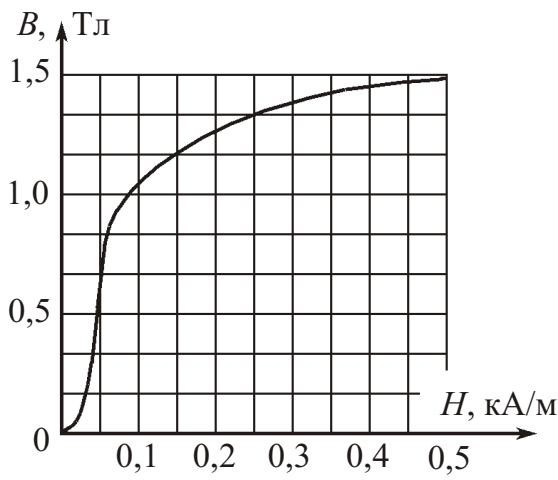


Рис. 1 к задаче №10

10. Тонкое железное кольцо имеет обмотку с общим числом витков $N = 800$, по которой течет ток $I = 3$ А. Средний диаметр кольца $d = 50$ см. В кольце сделана поперечная прорезь шириной $b = 2$ мм. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, определите магнитную проницаемость железа при этих условиях. При решении задачи используйте основную кривую намагничивания технически чистого железа, представленную на графике. Постройте с помощью этого графика кривую зависимости магнитной проницаемости от величины напряженности H магнитного поля.

Решение

Воспользуемся выражением для магнитной проницаемости железа, полученным при решении задачи №9:

$$\frac{B (2\pi R b)}{0 NI b B_0}, \quad (1)$$

где B – величина магнитной индукции в зазоре кольца, равная магнитной индукции в железе.

Соотношение (1) с учетом связи напряженности магнитного поля и магнитной индукции

$$\frac{B}{H} = \frac{\mu_0}{\mu_r} \quad (2)$$

примет вид

$$\frac{\mu_0 H (2R - b)}{NI} = \frac{\mu_0 H (d - b)}{b B}.$$

Отсюда получим зависимость величины магнитной индукции от напряженности поля

$$B = \frac{\mu_0 NI}{b} = \frac{\mu_0 H (d - b)}{b},$$

или с учетом числовых данных задачи

$$B = 1,5 \cdot 0,987 H, \quad (3)$$

где H измеряется в кА/м.

Кроме (3) зависимость $B(H)$ должна одновременно удовлетворять кривой намагничивания, представленной на рис. 1.

Для решения задачи построим на рис. 1 график зависимости (3). Точка пересечения графиков определит значения магнитной индукции и напряженности поля, соответствующие условиям данной задачи (см. рис. 2):

$$B = 1,3 \text{ Тл}; \quad H = 0,22 \text{ кА/м}.$$

С учетом (2) получим:

$$\frac{B}{H} = 5000.$$

Ответ: 5000.

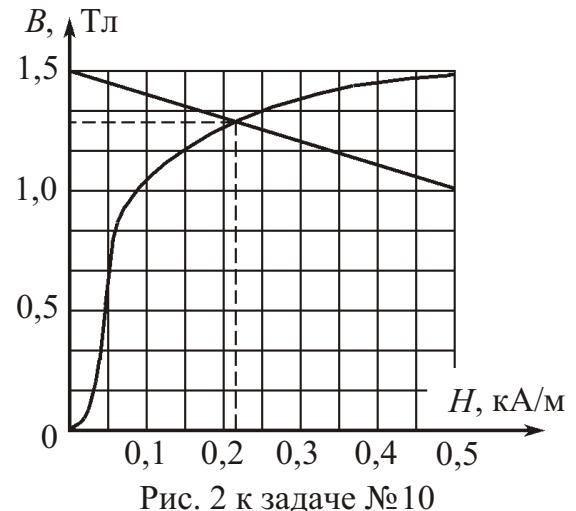


Рис. 2 к задаче №10

Задачи для самостоятельного решения

23.1. Напряженность магнитного поля в меди $H = 1 \text{ МА/м}$. Определите магнитную индукцию и намагченность меди, если магнитная восприимчивость меди $3 \cdot 10^{-6}$.

23.2. Из намагниченной железной пластинки вырезали плоский тонкий диск радиусом R и толщиной h . Плоскость диска перпендикулярна направлению вектора намагченности. Величина намагченности (магнитного момента единицы объема) железа J . Оцените величину индукции магнитного поля на оси диска на расстоянии $x = h$ от его центра.

23.3. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 поместили цилиндр из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ_r . Линии индукции магнитного поля направлены вдоль оси цилиндра. Определите:

- 1) индукцию магнитного поля в магнетике;
- 2) напряженность магнитного поля в магнетике.

23.4. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного парамагнетика равна B_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол θ с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика μ . Определите угол, который составляет вектор магнитной индукции в пластине с нормалью к ее поверхности.

23.5. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ перпендикулярно линиям индукции. Определите поток вектора напряженности магнитного поля через поверхность воображаемого прямого цилиндра с образующими, перпендикулярными к пластине, и основаниями площадью S , лежащими по разные стороны от границы раздела сред.

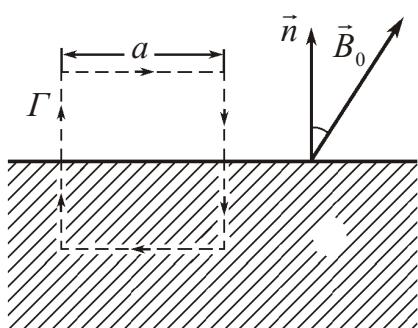


Рис. к задаче №23.6

23.6. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного парамагнетика равна B_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол θ с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика μ . Определите циркуляцию вектора магнитной индукции по воображаемому квадратному контуру L со стороной a , расположенному, как показано на рисунке.

23.7. В длинном цилиндрическом стержне течет постоянный ток силой I . Стержень изготовлен из изотропного парамагнетика с магнитной проницаемостью μ . Определите поверхностный молекулярный ток.

23.8. Небольшой шарик объемом V , изготовленный из парамагнетика с проницаемостью μ , переместили вдоль оси катушки с током из точки, где индукция магнитного поля равна B , в область, где магнитное поле практически отсутствует. Определите работу, которую при этом совершили.

23.9. Постоянный магнит имеет форму кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца $d = 20$ см. Ширина зазора $b = 2$ мм. Индукция магнитного поля в зазоре $B_0 = 40$ мТл. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, определите напряженность магнитного поля внутри магнита.

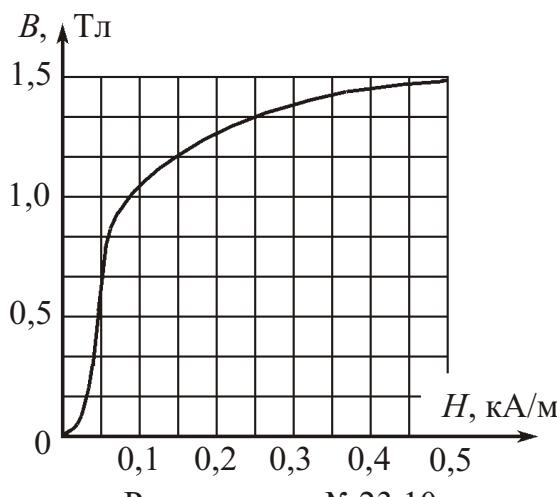


Рис. к задаче №23.10

23.10. На рисунке представлена основная кривая намагничивания технически чистого железа. Постройте с помощью этого графика кривую зависимости магнитной проницаемости от величины напряженности магнитного поля. Определите, при каком значении напряженности магнитного поля магнитная проницаемость максимальна и чему она равна.

Тесты

1. Напряженность магнитного поля определяется ...

- А. Токами проводимости и молекулярными токами
- Б. Только токами проводимости
- В. Только молекулярными токами
- Г. Магнитными зарядами

2. Система состоит из длинного прямого провода с током I и куска однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью (см. рисунок). Как изменяется величина напряженности магнитного поля в области, занятой магнетиком, и циркуляция вектора по контуру L , если магнетик удалить?

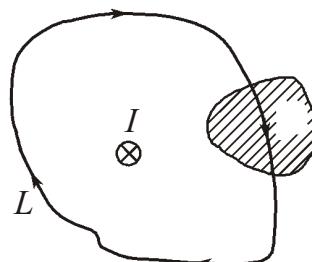


Рис. к тесту №2

- А. Величина напряженности не изменится; циркуляция вектора изменится
- Б. Величина напряженности изменится; циркуляция вектора не изменится
- В. Величина напряженности и циркуляция вектора не изменятся
- Г. Величина напряженности и циркуляция вектора изменятся

3. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью помещена в однородное магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 перпендикулярно линиям индукции. Определите величину намагниченности магнетика.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| А. $J = -1 H_0$ | Б. $J = -1 H_0 / \mu_0$ |
| В. $J = -1 H_0 / \mu_0$ | Г. $J = -1 H_0 / \mu_0$ |

4. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 перпендикулярно линиям индукции. Определите величину индукции магнитного поля в пластине.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| А. $B = B_0$ | Б. $B = B_0$ |
| В. $B = \mu_0 B_0$ | Г. $B = \mu_0 B_0$ |

5. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 перпендикулярно линиям индукции. Определите величину напряженности магнитного поля в пластине.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| А. $H = B_0$ | Б. $H = B_0 / \mu_0$ |
| В. $H = B_0 / \mu_0$ | Г. $H = B_0 / \mu_0$ |

6. В однородном магнитном поле находятся вплотную прижатые друг к другу большие пластины из разных парамагнетиков так, что линии индукции перпендикулярны к ним. Магнитная проницаемость одного магнетика μ_1 , второго $\mu_2 > \mu_1$. Напряженность магнитного поля в первой пластине $H_1 = 100$ А/м. Определите величину напряженности магнитного поля во второй пластине.

Ответ: _____ А/м

7. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол θ с нормалью к пластине. Составляющая индукции магнитного поля в пластине, перпендикулярная ее поверхности, равна ...

A. $B_n = B_0 \cos \theta$
 B. $B_n = B_0 \cos \theta$

Б. $B_n = B_0 \cos \theta$
 Г. $B_n = B_0 \cos \theta$

8. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол θ с нормалью к пластине. Составляющая напряженности магнитного поля в пластине, параллельная ее поверхности, равна ...

A. $H = B_0 \sin \theta$
 В. $H = (B_0 / \mu) \sin \theta$

Б. $H = (B_0 / \mu) \sin \theta$
 Г. $H = (B_0 / \mu) \sin \theta$

9. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол θ с нормалью к пластине. Определите угол, который составляет вектор напряженности магнитного поля в пластине с нормалью к ее поверхности.

A. $\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{B_0}$
 Б. $\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{B_0}$

Г. $\operatorname{tg} \theta = (\operatorname{tg} \theta) / \mu$

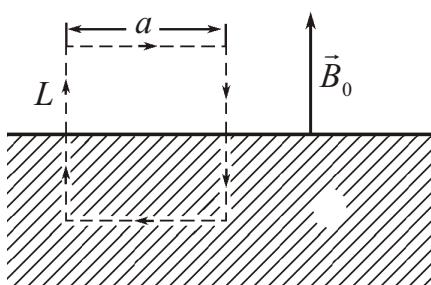


Рис. к тесту №10

10. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 перпендикулярно линиям индукции. Определите циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по квадратному контуру L со стороной a , расположенному так, как показано на рисунке.

А. $\Gamma = 0$
 Б. $\Gamma = 2aB_0/\mu$
 В. $\Gamma = 2aB_0/(1/\mu)$
 Г. $\Gamma = 2aB_0/\mu$

11. Большая плоская пластина из однородного изотропного парамагнетика с проницаемостью μ помещена в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 перпендикулярно линиям индукции. Определите поток вектора магнитной индукции через воображаемую поверхность S сферы радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика.

А. $\Phi = 0$
 Б. $\Phi = R^2 B_0$
 В. $\Phi = R^2 B_0$
 Г. $\Phi = 2\pi R^2 B_0$

12. В длинном цилиндрическом стержне радиусом R течет постоянный ток силой I . Стержень изготовлен из изотропного парамагнетика с проницаемостью μ . Определите индукцию магнитного поля на расстоянии $r = R$ до оси стержня.

А. $B = I/(2\pi r)$
 В. $B = \mu_0 I/(2\pi r)$

Б. $B = I/(2\pi r)$
 Г. $B = \mu_0 I/(2\pi r)$

13. В длинном цилиндрическом стержне радиусом R течет постоянный ток силой I . Стержень изготовлен из изотропного парамагнетика с проницаемостью μ . Определите напряженность магнитного поля на расстоянии $r = R$ до оси стержня.

А. $H = I/(2\pi r)$
 В. $H = \mu_0 I/(2\pi r)$

Б. $H = I/(2\pi r)$
 Г. $H = \mu_0 I/(2\pi r)$

14. Бесконечно длинный соленоид с током заполнили однородным изотропным парамагнетиком с проницаемостью . Как изменились индукция и напряженность магнитного поля внутри соленоида?

- А. Индукция не изменилась; напряженность увеличилась в раз
- Б. Индукция увеличилась в раз; напряженность не изменилась
- В. Индукция не изменилась; напряженность уменьшилась в раз
- Г. Индукция уменьшилась в раз; напряженность не изменилась

15. Помещенные в неоднородное магнитное поле, выталкиваются из области более сильного поля образцы, изготовленные из ...

- А. Диамагнетиков
- Б. Парамагнетиков
- В. Ферромагнетиков
- Г. Из любых магнетиков

16. Постоянные магниты можно создавать ...

- А. Только из диамагнетиков
- Б. Только из парамагнетиков
- В. Только из ферромагнетиков
- Г. Из любых магнетиков

17. Магнитная проницаемость ферромагнетиков ...

- А. Является постоянной величиной
- Б. Не зависит от индукции внешнего магнитного поля
- В. Линейно зависит от индукции внешнего магнитного поля
- Г. Нелинейно зависит от индукции внешнего магнитного поля

18. Прямоугольный ферромагнитный бруск объемом $V = 10 \text{ см}^3$ приобрел в магнитном поле магнитный момент $p_m = 0,8 \text{ А м}^2$. Напряженность магнитного поля внутри бруска $H = 800 \text{ А/м}$. Определите магнитную проницаемость магнетика в данных условиях.

Ответ: _____

19. Коэрцитивная сила в системе СИ имеет размерность ...

- А. Силы
- Б. Момента силы
- В. Индукции магнитного поля
- Г. Напряженности магнитного поля

20. На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длиной $l = 15 \text{ см}$, намотали $N = 300$ витков тонкого провода. При пропускании по проводу тока $I = 3 \text{ А}$ магнитное поле вне магнита исчезло. Определите коэрцитивную силу материала, из которого изготовлен магнит.

Ответ: _____ А/м

§24. Электромагнитная индукция

В §21 мы обсудили две стороны связи между магнитными и электрическими явлениями: а) электрический ток создает магнитное поле и б) со стороны магнитного поля на электрический ток или движущийся заряд действует сила. Закономерно задаться вопросом: если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле привести к возникновению тока? Ответ на него был независимо получен Дж. Генри и М. Фарадеем.

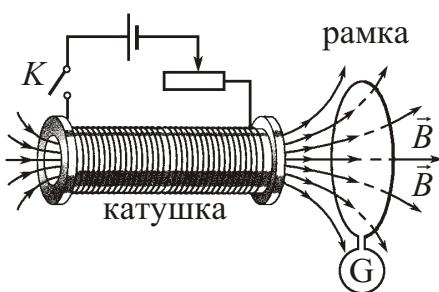


Рис. 24.1

На рис. 24.1 схематически представлена установка одного из опытов Фарадея. Фарадей обнаружил, что при замыкании и размыкании ключа K стрелка гальванометра сильно отклоняется то в одну, то в другую сторону. Однако при замкнутом ключе, когда через катушку протекал постоянный ток, стрелка оставалась неподвижной. В рамке также возникал ток, если при замкнутом ключе перемещать рамку или изменять силу тока в катушке. Исходя из этого

Фарадей сделал вывод, что постоянное во времени (стационарное) магнитное поле катушки не приводит к появлению тока в рамке; для его возникновения необходимо, чтобы магнитное поле, пронизывающее рамку, менялось со временем, то есть было нестационарным. Дальнейшие опыты (например, быстрое введение постоянного магнита в проволочный виток или удаление его из витка) подтвердили догадку Фарадея: в проводящем контуре возникает электрический ток только в случае, если меняется магнитное поле, которое его пронизывает.

Появление тока в контуре равносильно наличию в контуре источника ЭДС, которую называют *ЭДС электромагнитной индукции*, а возникающий в контуре ток – *индукционным током*.

Количественные измерения ЭДС индукции привели к выводу, что ее величина зависит от быстроты изменения индукции магнитного поля, площади, ограниченной контуром, и ориентации контура в магнитном поле.

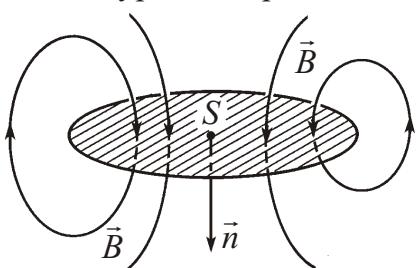


Рис. 24.2

Если магнитное поле изобразить с помощью линий магнитной индукции, то их густота будет пропорциональна величине индукции. Проводящий контур в таком поле будет охватывать некоторую часть силовых линий (рис. 24.2). Если величина индукции изменится, то число силовых линий, охватываемых контуром, также изменится (увеличится или уменьшится). Такой же результат будет при изменении площади контура или изменении его ориентации в магнитном поле (часть силовых линий станет параллельна плоскости контура или, наоборот, ранее параллельные плоскости контура силовые линии будут теперь охвачены контуром). Во всех этих случаях полное число линий, проходящих через площадь, ограниченную контуром, изменится, и в контуре возникнет индукционный ток.

Используя определение потока вектора магнитной индукции (магнитного потока), можно сделать вывод, что ЭДС индукции и индукционный ток возникают в контуре всякий раз, когда меняется магнитный поток, который пронизывает поверхность контура.

хность, опирающуюся на контур. Это явление, открытое Фарадеем, называется *электромагнитной индукцией*.

Напомним, в случае плоской поверхности S , находящейся в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис. 24.3) магнитный поток через поверхность S будет равен

$$\Phi = \vec{B} \cdot S \cos \theta = B_n S,$$

где θ — угол между вектором индукции \vec{B} и нормалью \vec{n} к поверхности S ; $B_n = B \cos \theta$ — проекция вектора \vec{B} на нормаль. Если магнитное поле неоднородно, а рассматриваемая поверхность S не плоская, то ее можно разбить на бесконечно малые плоские элементы dS так, чтобы индукция магнитного поля в каждой точке такого элемента была одинаковой. В зависимости от значения проекции B_n поток может быть положительным, отрицательным или равным нулю, а поток Φ магнитной индукции через всю поверхность S будет равен алгебраической сумме потоков

$$d\Phi = \vec{B} \cdot dS \cos \theta = B_n dS \quad (\vec{B}, d\vec{S}). \quad (24.1)$$

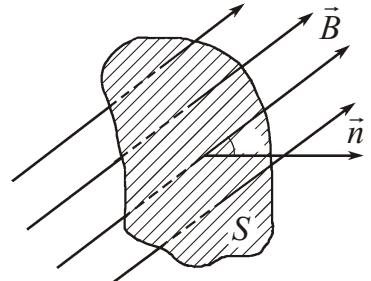


Рис. 24.3

24.1. Закон электромагнитной индукции

Чтобы найти связь между ЭДС индукции \mathcal{E}_i и изменением магнитного потока Φ , рассмотрим следующий пример.

Возьмем контур с подвижной перемычкой длиной l (рис. 24.4). Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура и направленное за чертеж. Приведем перемычку в движение со скоростью v . С такой же скоростью станут перемещаться и носители тока в перемычке — электроны. В результате на каждый электрон начнет действовать магнитная сила

$$\vec{F}_m = e [v, \vec{B}],$$

направленная вниз вдоль перемычки. Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля напряженностью

$$\vec{E}^* = [v, \vec{B}].$$

Это поле имеет неэлектростатическое происхождение. Интеграл

$$\int_1^2 (\vec{E}^*, d\vec{l}) - \int_1^2 ([v, \vec{B}], d\vec{l})$$

даст разность потенциалов, возникающую между концами перемычки. Поскольку подынтегральная функция отлична от нуля лишь на участке 1–2 контура, то значение интеграла не изменится, если его взять по всему контуру. При этом разность потенциалов U_{12} будет равна ЭДС, индуцируемой в контуре [17, §20, (20.15)]:

$$\mathcal{E}_i = U_{12} = (\vec{E}^*, d\vec{l}) - ([v, \vec{B}], d\vec{l}). \quad (24.2)$$

Чтобы по знаку \mathcal{E}_i можно было судить о направлении, в котором действует ЭДС, будем считать $\mathcal{E}_i = 0$ в том случае, когда ее направление образует с направлением нормали к контуру правовинтовую систему. Выберем нормаль так, как показа-

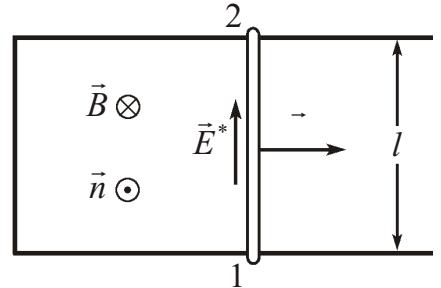


Рис. 24.4

но на рис. 24.4. Тогда при вычислении интеграла (24.2) нужно обходить контур против часовой стрелки и соответственно выбирать направление векторов $d\vec{l}$.

Преобразуем (24.2):

$$\mathcal{E}_i \quad ([\vec{l}, \vec{B}], \circ d\vec{l}) \quad ([\vec{l}, \vec{B}], \vec{l}) \quad (\vec{B}, [\vec{l}, \vec{l}]) \quad \frac{(\vec{B}, [\vec{l}, \vec{l}])}{dt} \quad \frac{(\vec{B}, dS \vec{n})}{dt} \quad \frac{(\vec{B}, d\vec{S})}{dt}$$

(здесь $dS = l \cdot dt$ — приращение площади контура за время dt), или с учетом (24.1)

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (24.3)$$

Соотношение (24.3) легко обобщается на любую поверхность, опирающуюся на контур и выражает **закон электромагнитной индукции**: ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в проводящем контуре, находящемся в магнитном поле, равна скорости изменения потока индукции магнитного поля через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

Величина ЭДС \mathcal{E}_i индукции не зависит от того, какие причины привели к возникновению нестационарного потока индукции магнитного поля. Из определения потока видно, что изменение величины магнитной индукции \vec{B} , площади поверхности, охватываемой контуром, или изменение ориентации контура в магнитном поле (то есть изменение угла θ) приведет к тому, что величина потока изменится и, если границей поверхности служит проводящий контур, то в нем потечет ток.

Индукционный ток, возникающий в контуре, создаст собственное магнитное поле, линии индукции которого также будут пронизывать поверхность, ограниченную контуром. В зависимости от направления индукционного тока суммарный поток индукции внешнего и собственного магнитных полей будет равен их сумме или разности. Направление индукционного тока определяется **правилом Ленца**: *индукционный ток направлен всегда так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Поэтому если магнитный поток внешнего поля увеличится, то в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы собственный магнитный поток ослабил внешний. И наоборот, уменьшение внешнего магнитного потока приведет к возникновению индукционного тока такого направления, чтобы собственный магнитный поток поддержал внешний. Именно по этой причине в правой части формулы (24.3) стоит знак «минус».

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит из N витков (например, контур представляет собой соленоид), то \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^N \frac{d\Phi_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \Phi_k.$$

Величину

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k$$

называют *потокосцеплением* или *полным магнитным потоком*. Если магнитный поток, пронизывающий каждый виток контура, одинаков, то

$$N \Phi.$$

ЭДС, индуцируемая в таком контуре,

$$\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt} N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (24.4)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля, причем это поле существует независимо от наличия проводящего контура. Последний лишь позволяет обнаружить это поле по возникающему в контуре индукционному току. Электрическое поле, порождаемое переменным магнитным, отличается от полей, рассматриваемых в электростатике: его силовые линии, как и у магнитного поля, представляют собой замкнутые кривые, то есть оно является *вихревым*.

Рассмотрим контур L , находящийся в магнитном поле \vec{B} (рис. 24.5). Поток вектора \vec{B} через произвольную поверхность S , опирающуюся на контур, равен

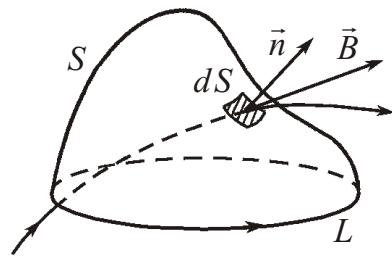


Рис. 24.5

ЭДС индукции, возникающая в контуре,

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Следовательно,

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}). \quad (24.5)$$

Преобразовав левую часть (24.5) по теореме Стокса

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{E}, d\vec{S}),$$

получим

$$\int_S (\text{rot } \vec{E}, d\vec{S}) = \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}),$$

или

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{d\vec{B}}{dt}, \quad d\vec{S} = 0.$$

Это соотношение должно выполняться для любой произвольно выбранной поверхности S , опирающейся на контур L . Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\vec{B}}{t}, \quad (24.6)$$

где записана частная производная от \vec{B} , так как индукция поля зависит в общем случае не только от времени, но и от координат.

Уравнение (24.6) доказывает тот факт, что электрическое поле, возникающее при изменении магнитного, является вихревым.

24.2. Самоиндукция

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. При этом совершенно не важно, чем вызывается это изменение потока. В частности, нестационарный поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре.

Рассмотрим контур (состоящий из одного или нескольких витков), по которому протекает ток. Наличие тока приведет к появлению магнитного потока собственного

магнитного поля, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром. При изменении силы тока величина индукции магнитного поля, созданного этим током, изменится и, как следствие, изменится магнитный поток. Вследствие этого в контуре возникнет ЭДС, которую называют *ЭДС самоиндукции*, а связанные с ней токи – *экстракторами самоиндукции*.

Из закона Био – Савара – Лапласа следует, что магнитная индукция пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Следовательно, ток в контуре и создаваемый им полный магнитный поток пропорциональны друг другу:

$$L I, \quad (24.7)$$

где коэффициент пропорциональности L называют *индуктивностью* контура. Отсюда следует, что магнитный поток и ток всегда имеют одинаковые знаки.

Величина индуктивности зависит от геометрии контура, а также магнитных свойств среды, окружающей контур. Найдем, например, индуктивность очень длинного соленоида площадью поперечного сечения S , заполненного магнетиком с магнитной проницаемостью μ . При протекании по соленоиду тока силой I внутри него возникнет однородное магнитное поле, индукция которого при отсутствии ферромагнетиков равна (см. формулы (21.22) и (23.15))

$$B = \mu_0 n I.$$

Поток через каждый из витков равен

$$\Phi = B S = \mu_0 n I S,$$

а полный магнитный поток

$$N \Phi = N \mu_0 n I S,$$

где N – число витков в соленоиде, равное $N = n l$ (l – длина соленоида). Следовательно,

$$\mu_0 n^2 I l S,$$

а индуктивность соленоида

$$L = \frac{1}{I} \mu_0 n^2 l S. \quad (24.8)$$

Рассмотрим контур индуктивностью $L = \text{const}$, по которому течет ток силой I , величина которого меняется с течением времени. Подставив значение потока магнитной индукции, пронизывающей поверхность, ограниченную контуром, из (24.7) в формулу (24.4), получим

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d(L I)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (24.9)$$

где \mathcal{E}_s – ЭДС самоиндукции, а знак «минус» в правой части обусловлен правилом Ленца.

Из (24.9) вытекает, что при уменьшении (увеличении) силы тока в контуре в нем возникнет ЭДС самоиндукции, направленная так, чтобы поддержать (ослабить) значение тока. Поэтому наличие самоиндукции проявляется в замедлении процессов исчезновения и установления тока в цепи, содержащей контур (катушку) индуктивностью L . При этом изменение тока происходит не слишком быстро, так что его можно считать квазистационарным и применять законы постоянного тока. Однако при записи уравнений, выражающих законы Ома или Кирхгофа, возможны некоторые трудности, связанные со знаком \mathcal{E}_s . Чтобы избежать этого при выборе знака ЭДС самоиндукции следует придерживаться следующих правил:

- а) ток положителен, если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода, и отрицателен в противном случае;
- б) ЭДС самоиндукции положительна, если она действует в направлении тока, и отрицательна в противном случае;
- в) если ток положителен и сила тока возрастает с течением времени (рис. 24.6; кривая 1), то производная $dI/dt > 0$; если же сила тока убывает с течением времени (рис. 24.6; кривая 2), то производная $dI/dt < 0$;
- г) если ток отрицателен, а сила тока возрастает с течением времени (рис. 24.6; кривая 3), то производная $dI/dt > 0$; если же сила тока убывает с течением времени (рис. 24.6; кривая 4), то производная $dI/dt < 0$.

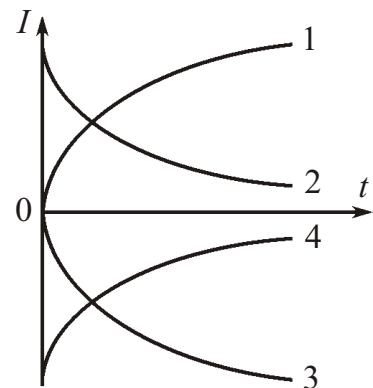


Рис. 24.6

24.3. Токи замыкания и размыкания цепи

Характерные проявления самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании тока в цепи. Рассмотрим более подробно установление и исчезновение тока в электрической цепи, представленной на рис. 24.7.

При замыкании ключа K в положение 1 в цепи будет течь ток, нарастанию которого будет противодействовать ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s . Поскольку в направлении обхода (по часовой стрелке) ток положителен и сила тока возрастает, то производная $dI/dt > 0$.

Пренебрегая внутренним сопротивлением источника и сопротивлением катушки, запишем второй закон Кирхгофа в виде

$$IR - \mathcal{E} - \mathcal{E}_s, \text{ или } IR - \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}. \quad (24.10)$$

Введя новую переменную $u = IR - \mathcal{E}$, преобразуем уравнение (24.10) к виду

$$u = \frac{L}{R} \frac{du}{dt}, \quad (24.11)$$

где учтено, что $dI = du/R$.

Разделив переменные в уравнении (24.11), получим

$$\frac{du}{u} = \frac{R}{L} dt. \quad (24.12)$$

Отсюда находим:

$$\ln u = \frac{R}{L} t + \ln C; \quad u = C e^{(R/L)t}, \quad (24.13)$$

где C некоторая постоянная.

Поскольку в начальный момент времени сила тока равна нулю, а переменная $u = \mathcal{E}$, то $C = \mathcal{E}$. Следовательно,

$$u = \mathcal{E} e^{-(R/L)t}; \quad I = \frac{\mathcal{E} - u}{R}; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left\{ 1 - e^{-(R/L)t} \right\}. \quad (24.14)$$

Как следует из (24.14), при замкнутом ключе K в положении 1 ток в катушке с течением времени будет стремиться к установленвшемуся значению

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (24.15)$$

Если теперь ключ замкнуть в положение 2, то ток в катушке должен исчезнуть. Однако вследствие самоиндукции исчезновение тока произойдет не мгновенно. Убывающий ток будет поддерживаться возникающей в катушке ЭДС самоиндукции. Поскольку в направлении обхода ток положителен и сила тока убывает, то производная $dI/dt < 0$. Следовательно, на основании второго закона Кирхгофа

$$IR - \mathcal{E}_s, \quad \text{или} \quad IR = L \frac{dI}{dt}. \quad (24.16)$$

Разделив переменные в уравнении (24.16), получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \quad (24.17)$$

Уравнение (24.17) аналогично уравнению (24.12). Следовательно, его решение имеет вид

$$I = C e^{-(R/L)t}, \quad (24.18)$$

где C – постоянная, значение которой найдем, учитывая, что при $t = 0$ сила тока в цепи равна установившемуся значению (24.15). Следовательно,

$$C = I_0; \quad I = I_0 e^{-(R/L)t}; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-(R/L)t}. \quad (24.19)$$

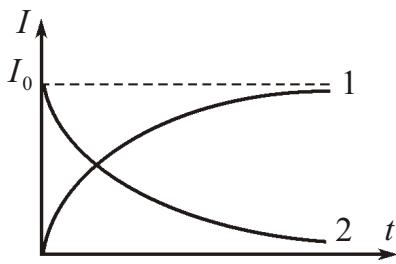


Рис. 24.8

Как следует из (24.14) и (24.19), установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи, представленной на рис. 24.7, происходит не мгновенно, а с течением времени ток изменяется по экспоненциальному закону (см. рис. 24.8, где кривая 1 соответствует изменению тока при замыкании цепи, кривая 2 – при размыкании). Причем это время тем значительнее, чем больше индуктивность цепи.

24.4. Энергия магнитного поля

Работа, совершаемая экстраполом за бесконечно малое время dt , будет равна [17, §20, (20.34)]

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = L I dI,$$

а за время, соответствующее полному исчезновению тока в цепи,

$$A = \int_I^0 L I dI = \frac{L I^2}{2}, \quad (24.20)$$

где I – значение силы тока в момент размыкания ключа из положения 1 и замыкание в положение 2 (см. рис. 24.7).

Работа (24.20) идет на приращение внутренней энергии сопротивления R . Совершение этой работы сопровождается исчезновением тока в цепи и магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем пространстве. Поскольку никаких других изменений не произошло, то можно сделать вывод, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (24.20). Поэтому контур (в нашем случае катушки) индуктивностью L , по которому течет ток силой I , обладает энергией

$$W = \frac{L I^2}{2}, \quad (24.21)$$

которая сосредоточена в возбуждаемом током магнитном поле. Ее называют *энергией магнитного поля*.

Используя выражение (24.8), энергию магнитного поля соленоида с током I можно записать в виде

$$W = \frac{\mu_0 n^2 l S I^2}{2},$$

или с учетом выражения (21.22) для индукции магнитного поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2} \mu_0 l S = \frac{B^2}{2} \mu_0 V,$$

где $V = S l$ – объем соленоида. Величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2} \mu_0 = \frac{\mu_0 H^2}{2}, \quad (24.22)$$

равная энергии поля, сосредоточенной в единице объема, называется *объемной плотностью энергии магнитного поля*. Следует отметить, что выражение (24.22) применимо только к средам, в которых не зависит от напряженности магнитного поля, то есть к диа- и парамагнетикам.

В общем случае неоднородного поля выражение для объемной плотности энергии магнитного поля совпадает с (24.22). Энергию, заключенную в некотором объеме V , можно найти, вычислив интеграл

$$W = \int_V w dV. \quad (24.23)$$

24.5. Электрические колебания

Рассмотрим еще один пример проявления ЭДС самоиндукции.

Зарядим конденсатор емкостью C , поместив на обкладки разноименные заряды (q_+ и q_-), и с помощью ключа K подключим его к катушке с индуктивностью L , как показано на рис. 24.9. В результате конденсатор будет разряжаться и в цепи потечет ток, появление которого приведет к возникновению в катушке ЭДС самоиндукции, препятствующей нарастанию силы тока. При этом энергия электрического поля конденсатора будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля катушки, обусловленная током. Полагая сопротивление катушки и соединительных проводов ничтожно малым, можно утверждать, что полная энергия (энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки) останется неизменной и равной начальной энергии конденсатора:

$$\frac{q^2}{2C} - \frac{L I^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

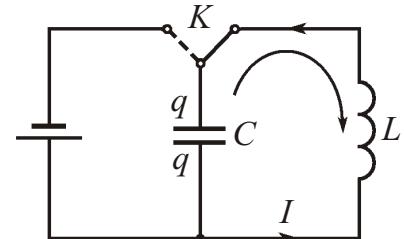


Рис. 24.9

Поэтому в момент времени, когда заряд конденсатора и энергия электрического поля обратятся в нуль, энергия магнитного поля и ток в цепи достигнут наибольшего значения. С этого момента ток, не меняя своего направления, начнет уменьшаться. Однако он прекратится не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Когда заряды на обкладках конденсатора достигнут первоначального значения ($\mp q_0$) (заряды на обкладках поменяются местами), сила тока в цепи станет равной

нулю. После этого процессы потекут в обратном направлении. В ходе каждого из процессов будет меняться заряд на обкладках конденсатора и сила тока, текущего через катушку. При этом будут происходить взаимные превращения энергий электрического и магнитного полей. Поэтому цепь, представленную на рис. 24.9, называют *колебательным контуром (контуром Томсона)*.

Пренебрегая внутренним сопротивлением катушки индуктивности, найдем закон, описывающий изменение со временем заряда конденсатора в таком контуре.

Как было отмечено выше, заряды на обкладках конденсатора будут меняться не только по величине, но и принимать как положительные, так и отрицательные значения, а ток, изменяясь по величине, будет течь то в одну, то в другую сторону. Однако в любой момент времени напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС самоиндукции. Выберем направление обхода (например, против часовой стрелки) и запишем второй закон Кирхгофа в виде

$$U_C = \mathcal{E}_s, \quad \text{или} \quad \frac{q}{C} = L \frac{dI}{dt}, \quad (24.24)$$

где $U_C = q/C$ — напряжение на конденсаторе. При записи правой части уравнения (24.24) учтено, что для изображенной на рис. 24.9 стадии процесса разрядки конденсатора $dI/dt > 0$ (поскольку ток отрицателен и сила тока возрастает).

Так как $dI/dt = d^2q/dt^2 = \ddot{q}$, то уравнение (24.24) примет вид

$$\ddot{q} + \frac{2}{\omega_0^2} q = 0, \quad (24.25)$$

где

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (24.26)$$

Решение уравнения (24.25) имеет вид [15, §6, (6.16)]

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0), \quad (24.27)$$

где q_{\max} — максимальный заряд конденсатора.

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется со временем по гармоническому закону с частотой ω_0 , определяемой выражением (24.26), которую называют *собственной частотой контура*. Период таких колебаний (*формула Томсона*)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (24.28)$$

Напряжение на конденсаторе и ток в катушке в таком контуре также будут изменяться по гармоническим законам:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t - \phi_0) = U_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0); \quad (24.29)$$

$$I = \dot{q} = q_{\max} \omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi_0) = I_{\max} \sin(\omega_0 t - \phi_0), \quad (24.30)$$

где $U_{\max} = q_{\max}/C$, $I_{\max} = q_{\max} \omega_0$ — максимальное напряжение на конденсаторе и максимальная сила тока в катушке соответственно.

Максимальный заряд конденсатора q_{\max} и начальную фазу колебаний ϕ_0 можно найти из начальных условий (то есть из величины заряда q_0 конденсатора и тока I_0 в катушке в начальный момент). Записав (24.27) и (24.30) в момент времени $t = 0$

$$q_0 = q_{\max} \cos \phi_0; \quad I_0 = q_{\max} \omega_0 \sin \phi_0,$$

получим:

$$q_{\max} = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2}}; \quad \arctg \phi_0 = \frac{I_0}{q_0 \omega_0}. \quad (24.31)$$

Из формул (24.27), (24.29) и (24.30) следует, что в моменты времени, когда сила тока достигает максимального значения, заряд конденсатора и напряжение на его обкладках обращаются в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

По аналогии с механическими колебаниями уравнение (24.25) называется *дифференциальным уравнением свободных незатухающих электрических колебаний*.

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением R . Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на его нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. При наличии сопротивления R второй закон Кирхгофа примет вид

$$IR - U_C = \mathcal{E}_s; \quad IR - \frac{q}{C} = L \frac{dI}{dt},$$

или

$$\ddot{q} + 2\zeta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (24.32)$$

где $I = dq/dt$, \dot{q} – сила тока в цепи (здесь знак минус обусловлен тем, что в процессе разрядки заряд конденсатора с течением времени убывает, то есть $dq < 0$);

$R/2L$ – коэффициент затухания.

Уравнение (24.32) является *дифференциальным уравнением свободных затухающих электрических колебаний*, решение которого совпадает с решением уравнения [15, § 6, (6.43)]. При малых затуханиях ($\zeta \ll 1$) его решение имеет вид

$$q = q_{\max} e^{-\zeta t} \cos(\omega_0 t), \quad (24.33)$$

где частота колебаний

$$\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (24.34)$$

Период колебаний в таком контуре

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}}, \quad (24.35)$$

а логарифмический декремент затухания и добротность контура равны соответственно

$$T = \frac{R T}{2L} = \frac{R}{L}; \quad Q = \frac{L}{R}. \quad (24.36)$$

Как следует из (24.35), при $\zeta = 1$ вместо колебаний будет происходить апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют *критическим*:

$$R_{kp} = 2\sqrt{L/C}. \quad (24.37)$$

Чтобы в контуре, обладающим активным сопротивлением, колебания не прекратились, необходимо компенсировать потери энергии. Такая компенсация может производиться внешними (по отношению к колебательной системе) источниками энергии, например, источником переменного напряжения (рис. 24.10), изменяющегося со временем по гармоническому закону

$$U = U_0 \cos(\omega t) \quad (24.38)$$

с некоторой частотой ω . В результате в системе возникнут вынужденные колебания.

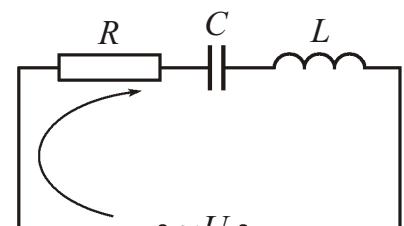


Рис. 24.10

Полагая, что в направлении обхода (по часовой стрелке) ток положителен и возрастает (при этом ЭДС самоиндукции препятствует нарастанию силы тока), а также увеличивается заряд конденсатора, запишем *уравнение вынужденных электрических колебаний* в контуре, представленном на рис. 24.10, в виде

$$IR - U_C = \mathcal{E}_s = U; \quad IR - \frac{q}{C} = L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos(\omega t); \\ \ddot{q} + \frac{2}{L} \dot{q} + \frac{1}{C} q = U_0^2 \cos(\omega t), \quad (24.39)$$

где введено обозначение $U_0^2 = U_0^2/L$.

Решение уравнения (24.39) имеет вид [15, §6, (6.68)]

$$q = \frac{U_0}{\sqrt{(\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C})^2 + 4\omega^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{\frac{R^2}{L}}{\frac{1}{C}}), \quad (24.40)$$

или с учетом использованных обозначений

$$q = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{L} - \frac{1}{C})^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{R}{\frac{1}{C}}). \quad (24.41)$$

Как следует из [15, §6, (6.71)], при

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{L} - \frac{1}{C}}, \quad (24.42)$$

амплитуда колебаний заряда достигает максимальных значений, то есть в системе наступает резонанс.

Контур, в котором происходят электрические колебания, излучает электромагнитные волны. Однако в контуре, представленном на рис. 24.9, в основном происходит лишь обмен энергией между емкостью и индуктивностью, а потери энергии на создание электромагнитных волн в окружающем пространстве очень малы. Поэтому такой колебательный контур называют *закрытым*. Для увеличения мощности излучения, создаваемого контуром, один конец катушки «заземляют», а к другому концу присоединяют вертикальный провод (антенну). Такой колебательный контур называют *открытым*.

Колебательный контур является неотъемлемой частью любого устройства, передающего или принимающего радиосигналы, а на явлении резонанса основана вся техника радиоприема. Например, настраивая радиоприемник на определенную частоту, мы изменяем параметры его контура до тех пор, пока не услышим устойчивый сигнал. В этот момент собственная частота нашего контура совпадает с частотой принимаемого сигнала, и мы говорим, что радиоприемник настроен на частоту передающей станции.

Краткие выводы

1. Электромагнитной индукцией называется возникновение тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, охватываемую этим контуром.

2. Закон электромагнитной индукции: ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в проводящем контуре, находящемся в магнитном поле, равна скорости изменения потока индукции магнитного поля через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

3. Правило Ленца: индукционный ток направлен всегда так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

4. Потокосцепление или **полный магнитный поток** через контур, содержащий N витков,

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k.$$

5. Индуктивность контура

$$L = \frac{N}{I}.$$

6. Самоиндукцией называется возникновение ЭДС индукции в контуре при изменении тока в нем. ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

7. Экстратоки замыкания и размыкания цепи:

$$I = I_0 \{1 - e^{-(R/L)t}\}; \quad I = I_0 e^{-(R/L)t}.$$

8. Энергия магнитного поля контура с током

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

9. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{B^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

10. Энергия магнитного поля, заключенная в объеме V ,

$$W = w dV.$$

11. Дифференциальное уравнение свободных незатухающих электрических колебаний и его решение:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0; \quad q = q_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0);$$

q_{\max} – максимальный заряд конденсатора;

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура;

$\Phi = \omega_0 t - \phi_0$ – фаза колебаний;

$\phi_0 = \Phi(t=0)$ – начальная фаза колебаний.

12. Период свободных незатухающих электрических колебаний (*формула Томсона*)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

13. Связь максимального заряда конденсатора и начальной фазы колебаний с начальными условиями (зарядом конденсатора q_0 и током I_0 в катушке в начальный момент времени):

$$q_{\max} = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2}}; \quad \arctg \frac{\omega_0 t_0}{q_0} = \frac{I_0}{q_0 \omega_0}.$$

14. Напряжение на конденсаторе и ток в катушке:

$$U = U_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0); \quad I = I_{\max} \sin(\omega_0 t - \phi_0).$$

15. Максимальное напряжение на конденсаторе и максимальный ток в катушке:

$$U_{\max} = q_{\max}/C; \quad I_{\max} = q_{\max}/\omega_0.$$

16. Дифференциальное уравнение свободных затухающих электрических колебаний и его решение:

$$\ddot{q} + \frac{R}{2L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0; \quad q = q_{\max} e^{-\frac{R}{4L}t} \cos(\omega_0 t);$$

$\frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура.

17. Циклическая или круговая частота и период затухающих колебаний:

$$\sqrt{\frac{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}{\omega_0^2}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

18. Критическое сопротивление контура

$$R_{kp} = 2\sqrt{L/C}.$$

19. Логарифмический декремент затухания и добротность контура:

$$T = \frac{R}{L}; \quad Q = \frac{L}{R}.$$

20. Дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний и его решение:

$$\ddot{q} + \frac{R}{2L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = u_0 \cos(\omega t); \quad q = q_{\max} \cos(\omega t - \phi);$$

частота источника переменного напряжения;

$u_0 = U_0/L$; U_0 – амплитуда переменного напряжения.

21. Максимальный заряд конденсатора и начальная фаза вынужденных колебаний:

$$q_{\max} = \frac{u_0}{\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{4L^2})^2 + 4(\frac{R^2}{4L^2})^2}}; \quad \arctg \frac{\frac{R^2}{4L^2}}{\frac{\omega_0^2}{4L^2}}.$$

22. Резонансная частота источника переменного напряжения

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4L^2}}.$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Какие причины приводят к появлению электромагнитной индукции? самоиндукции?

2. Что приводит к появлению в пространстве вихревого электрического поля?

3. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.

4. Сформулируйте правило Ленца.

5. Известно, что магнитная сила работы над зарядом не совершает. Между тем при движении проводника с током (движущиеся заряды!) силы Ампера совершают работу. Почему?

6. Приведите примеры проявления экстратоков замыкания и размыкания цепи в повседневной жизни.

7. Получите выражение для энергии магнитного поля контура с током через магнитный поток, пронизывающий витки контура.

8. Запишите дифференциальные уравнения и их решения для свободных незатухающих, свободных затухающих и вынужденных электрических колебаний.

9. Чему равна фаза свободных незатухающих электрических колебаний в момент времени, когда энергия электрического поля конденсатора равна энергии магнитного поля катушки?

10. Какие величины характеризуют затухание электрических колебаний?

Задачи

1. Длинный прямой проводник с током I и проводящая квадратная рамка расположены в одной плоскости, как показано на рис. 1. Рамку повернули на 180° относительно оси OO' , совпадающей с одной из сторон рамки и отстоящей от прямого проводника с током на расстояние b . Пренебрегая самоиндукцией, определите заряд, прошедший в рамке. Длина стороны рамки a , общее сопротивление всех сторон R .

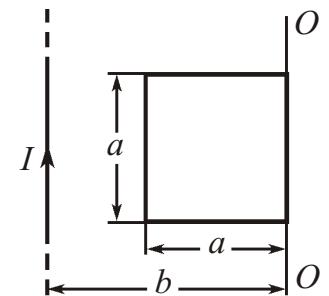


Рис. 1 к задаче №1

Решение

Рассмотрим более общую задачу: определим, какой заряд протечет в контуре сопротивлением R , если по каким-либо причинам изменится магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром.

При наличии нестационарного магнитного потока в контуре возникнет ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Появление ЭДС приведет к возникновению в контуре тока

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{1}{R} \frac{|d\Phi|}{dt}.$$

С другой стороны, сила тока по определению равна

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Следовательно,

$$dq = \frac{1}{R} |d\Phi|; \quad q = \frac{|\Phi|}{R},$$

то есть изменение потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, на величину $|\Phi|$ приведет к тому, что в контуре протечет заряд q , причем его величина не зависит от причин изменения потока.

Вернемся к нашей задаче.

Линии индукции магнитного поля прямого проводника с током перпендикулярны плоскости рисунка. Выберем направление нормали к плоскости рамки, совпадающее с направлением магнитного поля. Тогда в начальном положении направления нормали и индукции магнитного поля совпадают, а в конечном их направления противоположны (см. рис. 2).

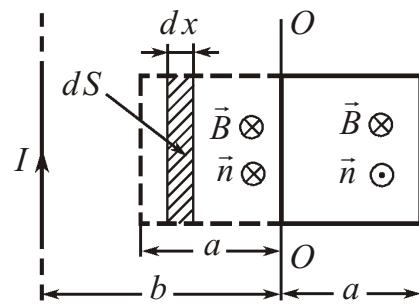


Рис. 2 к задаче №1

Магнитные потоки через поверхность, ограниченную рамкой, в начальном и конечном положениях рамки:

$$\Phi_1 = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B dS = \int_b^b \int_a^a \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln x \Big|_b^a = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b}{a};$$

$$\Phi_2 = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B dS = \int_b^b \int_a^a \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln x \Big|_b^a = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b}{b} = 0,$$

где $dS = a dx$ и использована формула (21.18) для индукции магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Следовательно,

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\mu_0 I a}{2} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0 I a}{2} \ln \frac{b}{a}; \quad q = \frac{\mu_0 I a}{2 R} \ln \frac{b}{a}.$$

Ответ: $q = \frac{\mu_0 I a}{2 R} \ln \frac{b}{a}$.

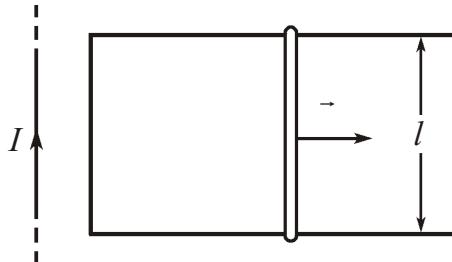


Рис. 1 к задаче №2

2. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости, как показано на рис. 1. Перемычку перемещают вправо с постоянной скоростью \vec{v} . Определите величину индукционного тока в контуре как функцию расстояния x между перемычкой и прямым проводником. Длина перемычки l , ее сопротивление R . Сопротивлением П-образного проводника и самоиндукцией пренебречь.

Решение

Ток I прямого проводника создаст в окружающем пространстве магнитное поле с индукцией \vec{B} , в котором будет находиться контур, образованный П-образным проводником и подвижной перемычкой.

При движении перемычки будет меняться площадь контура и возникнет изменяющийся со временем магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром. Наличие нестационарного магнитного потока приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}$$

и индукционного тока

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}.$$

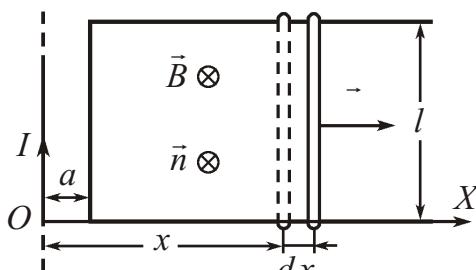


Рис. 2 к задаче №2

Линии индукции магнитного поля прямого проводника будут перпендикулярны плоскости контура. Выберем направление нормали к плоскости контура, совпадающее с направлением магнитного поля (см. рис. 2).

В момент времени, когда расстояние между перемычкой и прямым проводником равно x , магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, равен

$$\Phi_S = (\vec{B}, d\vec{S}) = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln x \Big|_a^x = \frac{\mu_0 I l}{2} (\ln x - \ln a),$$

где использована формула (21.18) для индукции магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x};$$

$dS = l dx$ изменение площади контура за бесконечно малое время dt ; a расстояние от прямого проводника до основания П-образного проводника.

Следовательно, величина ЭДС индукции

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} ,$$

а индукционный ток

$$I_i = \frac{\mu_0 I l}{2\pi x R} .$$

Ответ: $I_i = \frac{\mu_0 I l}{2\pi x R}$.

3. Прямой проводящий стержень лежит на двух горизонтальных параллельных проводящих шинах перпендикулярно шинам (рис. 1; вид сверху). На одном конце шины замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B . Расстояние между шинами l , масса стержня m . В момент времени $t = 0$ стержню сообщают скорость v_0 . Пренебрегая трением, сопротивлением шин и стержня, а также самоиндукцией, определите расстояние, пройденное стержнем до остановки.

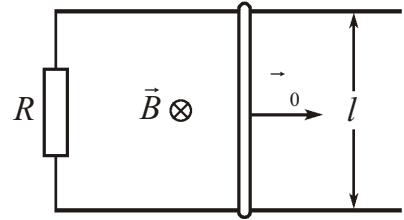


Рис. 1 к задаче №3

Решение

Замкнутые сопротивлением шины и стержень образуют контур, находящийся в магнитном поле. При движении стержня будет меняться площадь контура и возникнет изменяющийся со временем магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = B_n \int_S dS = B_n S = B S,$$

где учтено, что $B_n = B$. Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v$$

(где $dS = l dx$ изменение площади, ограниченной контуром, за бесконечно малое время dt ; dx/dt скорость стержня), индукционного тока и силы Ампера, действующей на стержень:

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{B l}{R}; \quad F_A = I B l = \frac{B^2 l^2}{R}. \quad (1)$$

Поскольку площадь контура и магнитный поток, пронизывающий контур, увеличиваются, то по правилу Ленца индукционный ток создаст магнитное поле \vec{B} , направленное противоположно внешнему. Поэтому ток в стержне будет течь, как показано на рис. 2, а сила Ампера будет направлена противоположно движению стержня.

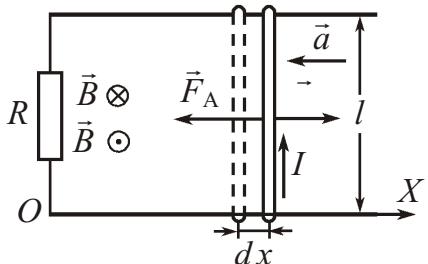


Рис. 2 к задаче №3

Запишем уравнение движения стержня в проекции на ось OX системы координат в виде

$$m \ddot{a} = F_A. \quad (2)$$

Так как при движении скорость стержня уменьшается, то за бесконечно малое время dt приращение модуля его скорости составит $d \ll 0$. Представив ускорение стержня как

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt},$$

запишем уравнение движения (2) с учетом (1) в виде

$$m \frac{d}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R}. \quad (3)$$

Разделив переменные в (3)

$$\frac{d}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{m R} dt \quad (4)$$

и проинтегрировав (4), найдем зависимость скорости стержня от времени:

$$\int_0^t \frac{B^2 l^2}{m R} dt; \quad \ln \left| \frac{v}{v_0} \right| = -\frac{B^2 l^2}{m R} t; \quad v_0 \exp \left(-\frac{B^2 l^2}{m R} t \right). \quad (5)$$

Очевидно, что скорость стержня станет равной нулю при $t \rightarrow \infty$.

Записав последнее выражение (5) с учетом, что скорость равна производной по времени от координаты

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp \left(-\frac{B^2 l^2}{m R} t \right),$$

найдем расстояние, пройденное стержнем до остановки:

$$\int_0^S \frac{dx}{dt} dt = v_0 \int_0^S \exp \left(-\frac{B^2 l^2}{m R} t \right) dt; \quad S = \frac{m R}{B^2 l^2} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{B^2 l^2}{m R} t \right) dt \Big|_0^{\infty} = \frac{m R}{B^2 l^2}.$$

Ответ: $S = \frac{m R}{B^2 l^2}$

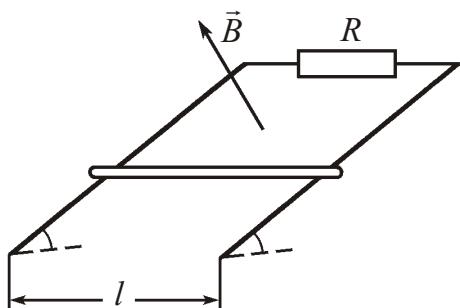


Рис. 1 к задаче №4

4. По двум параллельным проводящим шинам, установленным под углом α к горизонту, соскальзывает перемычка. В верхней части шины замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка (см. рис. 1). Расстояние между шинами l , масса перемычки m . Коэффициент трения между перемычкой и

шинами μ . Определите максимальную (установившуюся) скорость перемычки. Сопротивлением шин и перемычки, а также самоиндукцией пренебречь.

Решение

Замкнутые сопротивлением шины и перемычка образуют контур, находящийся в магнитном поле. При движении перемычки будет меняться площадь контура и

возникнет изменяющийся со временем магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS = B_n \int_S dS = BS,$$

где учтено, что $B_n = B$.

Наличие нестационарного магнитного потока приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B l \frac{dx}{dt}$$

(где $dS = l dx$ – изменение площади, ограниченной контуром, за бесконечно малое время dt ; dx/dt – скорость перемычки), что в свою очередь вызовет появление индукционного тока и силы Ампера, действующей на перемычку:

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}; \quad F_A = IBl = \frac{B^2 l^2}{R}, \quad (1)$$

где учтено, что магнитное поле направлено перпендикулярно току в перемычке.

При движении перемычки площадь контура и магнитный поток, пронизывающий контур, увеличиваются. По правилу Ленца в контуре возникнет индукционный ток такого направления, чтобы его собственный магнитный поток ослаблял внешний. В рассматриваемой задаче магнитное поле \vec{B} индукционного тока будет направлено вниз перпендикулярно плоскости контура, ток в перемычке – от точки b к точке c (см. рис. 2), а сила Ампера – противоположно движению стержня (см. рис. 3).

Запишем уравнение движения перемычки в проекциях на оси системы координат:

$$OX: ma = mg \sin \theta - F_{tp} - F_A;$$

$$OY: 0 = N - mg \cos \theta,$$

где F_{tp} – сила трения, Следовательно,

$$N = mg \cos \theta; \quad F_{tp} = mg \cos \theta; \quad ma = mg \sin \theta - mg \cos \theta - F_A,$$

или с учетом выражения (1)

$$ma = mg (\sin \theta - \cos \theta) \frac{B^2 l^2}{R}. \quad (2)$$

Скорость перемычки будет максимальной в момент времени, когда ее ускорение станет равным нулю:

$$0 = mg (\sin \theta - \cos \theta) \frac{B^2 l^2}{R}_{\max}.$$

Отсюда получим

$$\max \frac{mg (\sin \theta - \cos \theta) R}{B^2 l^2}.$$

Ответ: $\max \frac{mg (\sin \theta - \cos \theta) R}{B^2 l^2}$.

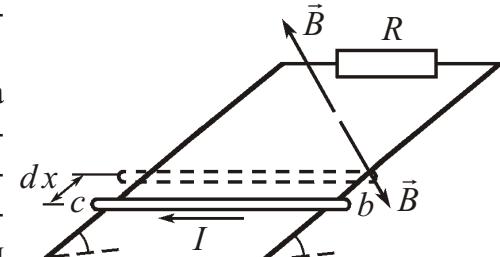


Рис. 2 к задаче №4

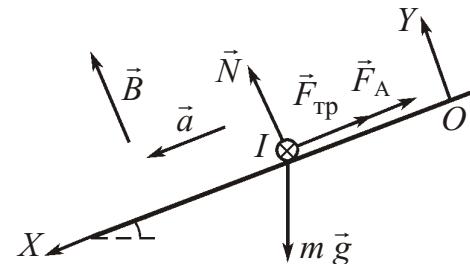


Рис. 3 к задаче №4

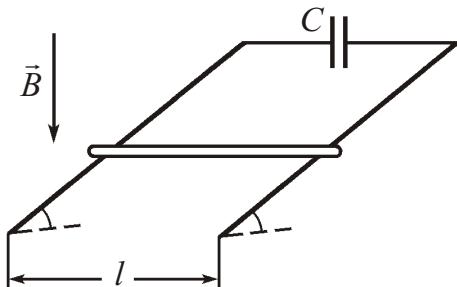


Рис. 1 к задаче №5

5. По двум параллельным гладким проводящим шинам, установленным под углом к горизонту, соскальзывает перемычка. В верхней части шины замкнуты конденсатором емкостью C . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , направленном вертикально вниз (см. рис. 1). Расстояние между шинами l , масса перемычки m . Определите ускорение перемычки. Сопротивлением шин и перемычки, а также самоиндукцией пренебречь.

Решение

Поскольку условие данной задачи совпадает с условием задачи №4, за исключением направления магнитного поля, отсутствием трения и того, что вместо сопротивления шины замкнуты конденсатором, то решения этих задач на начальном этапе практически совпадают.

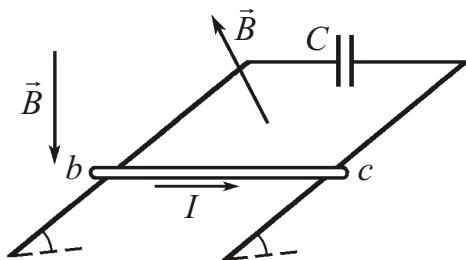


Рис. 2 к задаче №5

При движении перемычки будет меняться площадь контура и возникнет изменяющийся со временем магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi = B_n S = B S \cos \theta,$$

где учтено, что $B_n = B \cos \theta$. Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} \cos \theta = B l \frac{dx}{dt} \cos \theta = B l a \cos \theta$$

и вызовет появление индукционного тока I и силы Ампера \vec{F}_A . При этом ток в перемычке будет течь от точки b к точке c и будет заряжать конденсатор (рис. 2).

Силу тока в контуре можно определить через заряд на обкладках конденсатора. Учитывая, что напряжение между обкладками

$$U = \mathcal{E}_i,$$

а заряд конденсатора

$$q = C U,$$

получаем

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \mathcal{E}_i) = C B l \cos \theta \frac{da}{dt} = C B l a \cos \theta,$$

где $a = d^2 x / dt^2$ — ускорение перемычки.

Следовательно, сила Ампера, действующая на перемычку, в любой момент времени равна

$$F_A = I B l = C B^2 l^2 a \cos \theta$$

и направлена так, как показано на рис. 3.

Запишем уравнение движения перемычки в проекции на ось OX системы координат:

$$m a = m g \sin \theta - F_A \cos \theta.$$

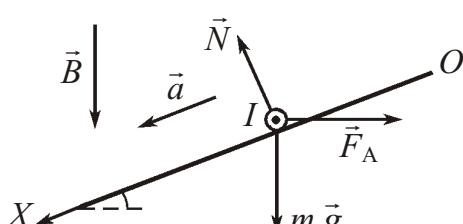


Рис. 3 к задаче №5

Отсюда с учетом выражения для силы Ампера получим:

$$ma = m g \sin(CB^2 l^2 a \cos \theta) ; \quad a = \frac{m g \sin \theta}{m CB^2 l^2 \cos^2 \theta}.$$

Ответ: $a = \frac{m g \sin \theta}{m CB^2 l^2 \cos^2 \theta}$.

6. Источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнули на катушку с индуктивностью L и сопротивлением R (см. рисунок). Через сколько времени ток через катушку достигнет 50% установившегося значения?

Решение

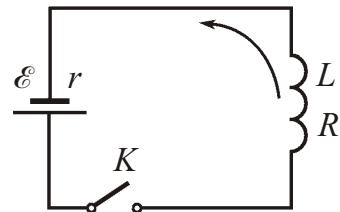


Рис. к задаче №6

После подключения источника ЭДС до тех пор, пока сила тока не достигнет установившегося значения

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

в цепи, кроме ЭДС \mathcal{E} , будет действовать ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , которая будет препятствовать нарастанию тока.

Выбрав направление обхода против часовой стрелки, запишем второй закон Кирхгофа для контура в виде

$$I(R + r) - \mathcal{E} - \mathcal{E}_s,$$

где I ток в катушке в произвольный момент времени после замыкания ключа.

Поскольку в направлении обхода ток положителен и сила тока возрастает, то производная $dI/dt > 0$. Следовательно,

$$\mathcal{E}_s = L \frac{dI}{dt}.$$

Решение дифференциального уравнения

$$I(R + r) - \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}$$

имеет вид (см. формулу (24.14))

$$I = I_0 \{1 - e^{-(R+r)t/L}\}.$$

В момент времени t , когда ток достигнет 50% установившегося значения,

$$I_0 / 2 = I_0 \{1 - e^{-(R+r)t/L}\}.$$

Отсюда получим:

$$e^{-(R+r)t/L} = 1 / 2 ; \quad \frac{R+r}{L} t = \ln(2) ; \quad \frac{L}{R+r} \ln(2) = \frac{L}{R+r} \ln \frac{1}{1/2}.$$

Ответ: $\frac{L}{R+r} \ln \frac{1}{1/2}$.

7. Источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнут на две катушки индуктивности, соединенные между собой параллельно (см. рис. 1). Индуктивности катушек L_1 и L_2 . Определите установившиеся токи в катушках после замыкания ключа. Активным сопротивлением катушек пренебречь.

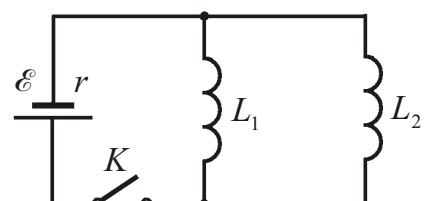


Рис. 1 к задаче №7

Решение

После замыкания ключа появятся токи через катушки и в них возникнут ЭДС самоиндукции (см. решение задачи №6):

$$\mathcal{E}_{1s} = L_1 \frac{dI_1}{dt}; \quad \mathcal{E}_{2s} = L_2 \frac{dI_2}{dt},$$

которые будут препятствовать нарастанию токов.

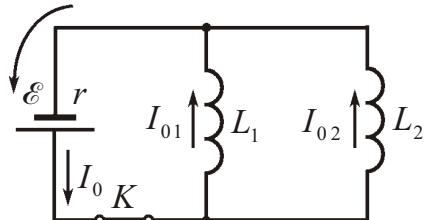


Рис. 2 к задаче №7

Выбрав направление обхода против часовой стрелки, запишем второй закон Кирхгофа для контуров $\mathcal{E} - L_1$ и $\mathcal{E} - L_2$ (см. рис. 2) в виде

$$Ir - \mathcal{E} - \mathcal{E}_{1s}; \quad Ir - \mathcal{E} - \mathcal{E}_{2s},$$

где I ток через источник. Следовательно,

$$\mathcal{E}_{1s} = \mathcal{E}_{2s}; \quad L_1 dI_1 = L_2 dI_2,$$

а в момент установления токов

$$L_1 I_{01} = L_2 I_{02}.$$

На основании первого закона Кирхгофа после установления токов

$$I_0 = I_{01} = I_{02},$$

где

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

установившийся ток в цепи. Следовательно,

$$I_{02} = \frac{L_1 I_{01}}{L_2}; \quad I_0 = I_{01} \frac{L_2 - L_1}{L_2}; \quad I_{01} = I_0 \frac{L_2}{L_1 - L_2} = \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{L_2}{L_1 - L_2}; \quad I_{02} = \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{L_1}{L_1 - L_2}.$$

Ответ: $I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{L_2}{L_1 - L_2}$; $I_{02} = \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{L_1}{L_1 - L_2}$.

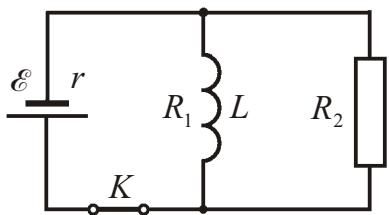


Рис. 1 к задаче №8

8. Источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнут на катушку с индуктивностью L и сопротивлением R_1 . К катушке параллельно подключено сопротивление R_2 (см. рис. 1). Какой величины заряд пройдет через сопротивление R_2 после размыкания ключа K ?

Решение

При замкнутом ключе через источник будет течь ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r},$$

где R – общее сопротивление внешнего участка цепи:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При этом падение напряжения на внешнем участке цепи будет равно

$$U = I_0 R = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r},$$

и через катушку будет течь ток

$$I_{01} = \frac{U}{R_1} - \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r}. \quad (1)$$

После размыкания ключа ток через катушку будет уменьшаться, который будет поддерживаться возникающей в катушке ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s .

Выбрав направление обхода контура, содержащего катушку индуктивности и сопротивление R_2 (рис. 2), по часовой стрелке, запишем второй закон Кирхгофа в виде

$$I(R_1 + R_2) - \mathcal{E}_s,$$

где I ток в катушке в произвольный момент времени после размыкания ключа.

Поскольку в направлении обхода ток положителен, а сила тока убывает, то производная $dI/dt < 0$. Следовательно,

$$\mathcal{E}_s = L \frac{dI}{dt}.$$

Решение дифференциального уравнения

$$I(R_1 + R_2) - L \frac{dI}{dt}$$

имеет вид (см. формулу (24.19))

$$I = I_{01} \exp \left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t \right).$$

Поскольку по определению

$$I = \frac{dq}{dt},$$

то за бесконечно малое время dt в цепи протечет заряд

$$dq = I dt = I_{01} \exp \left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t \right) dt,$$

а к моменту практически полного исчезновения тока через сопротивление R_2 пройдет заряд

$$q = I_{01} \left[\exp \left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t \right) dt \right] = I_{01} \frac{L}{R_1 + R_2} \exp \left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t \right) \Big|_0 = I_{01} \frac{L}{R_1 + R_2},$$

или с учетом (1)

$$q = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r} \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Ответ: $q = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r} \frac{L}{R_1 + R_2}$.

9. Коаксиальный кабель состоит из внутреннего сплошного проводника радиусом a и наружной проводящей тонкостенной трубы радиусом b . Ток I течет по внутреннему проводнику и возвращается по трубке. Считая распределение тока по сечению внутреннего проводника равномерным, а магнитную проницаемость всюду равной единице, определите:

- 1) энергию магнитного поля, заключенную в единице длины кабеля;
- 2) индуктивность единицы длины кабеля.

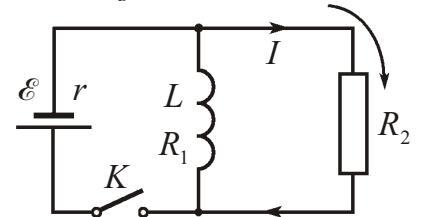


Рис. 2 к задаче №8

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулами (22.16) и (22.17) для индукции магнитного поля внутри и вне бесконечного прямолинейного проводника с током:

$$B_1 = B(r - a) = \frac{I r}{2} \frac{I r}{a^2}; \quad B_2 = B(r - a) = \frac{I}{2} \frac{I}{r}.$$

Поскольку по внутреннему проводнику и наружной трубке текут токи в противоположных направлениях, то вне кабеля магнитное поле отсутствует (см. решение задачи №22.6).

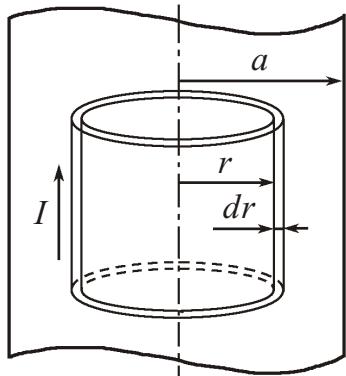


Рис. к задаче №9

Следовательно,

$$dW_{\text{ед}1} = \frac{B_1^2}{2} 2\pi r dr = \frac{I^2}{4} \frac{I^2}{a^4} r^3 dr.$$

Энергия магнитного поля, запасенная внутри единицы длины проводника,

$$W_{\text{ед}1} = dW_{\text{ед}1} \Big|_0^a = \frac{1}{4} \frac{I^2}{a^4} r^3 dr = \frac{1}{4} \frac{I^2}{a^4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{I^2}{16}.$$

Аналогично в объеме между поверхностями проводника и трубы:

$$w_2 = \frac{B_2^2}{2} \frac{I^2}{8} \frac{I^2}{r^2}; \quad dW_{\text{ед}2} = w_2 dV_{\text{ед}} = \frac{1}{8} \frac{I^2}{r^2} 2\pi r dr = \frac{I^2}{4} \frac{dr}{r};$$

$$W_{\text{ед}2} = dW_{\text{ед}2} \Big|_a^b = \frac{1}{4} \frac{I^2}{r} \Big|_a^b = \frac{1}{4} I^2 \ln r \Big|_a^b = \frac{1}{4} I^2 \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, заключенная в единице длины кабеля,

$$W_{\text{ед}} = W_{\text{ед}1} + W_{\text{ед}2} = \frac{I^2}{16} + \frac{I^2}{4} \ln \frac{b}{a} = \frac{I^2}{4} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{b}{a} \right).$$

Индуктивность единицы длины кабеля можно найти через энергию магнитного поля, создаваемого кабелем во всем пространстве. Поскольку вне кабеля магнитное поле равно нулю, то энергия магнитного поля во всем пространстве равна энергии, заключенной внутри трубы. Следовательно,

$$W_{\text{ед}} = \frac{L_{\text{ед}} I^2}{2}; \quad L_{\text{ед}} = \frac{2 W_{\text{ед}}}{I^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \ln \frac{b}{a}.$$

$$\text{Ответ: 1)} W_{\text{ед}} = \frac{I^2}{4} \frac{1}{4} \ln \frac{b}{a}; 2) L_{\text{ед}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \ln \frac{b}{a}.$$

10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением. Катушка находится в постоянном магнитном поле так, что внешний магнитный поток, пронизывающий витки катушки, равен Φ . В момент времени $t = 0$ внешнее поле выключили. Определите зависимости от времени заряда конденсатора и тока в катушке.

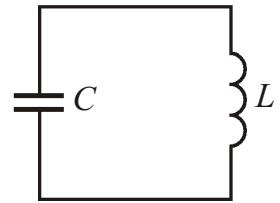


Рис. к задаче №10

Решение

После выключения магнитного поля внешний магнитный поток через катушку исчезнет, что приведет к возникновению в катушке ЭДС индукции и тока в контуре, который будет заряжать конденсатор. При этом появится магнитный поток, обусловленный собственным магнитным полем катушки, и ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Отсюда получим:

$$d\Phi = L dI; \quad \Phi = L I_0,$$

где I_0 — ток в катушке непосредственно после отключения внешнего поля.

Выбрав направление обхода по току (в направлении действия ЭДС самоиндукции), запишем второй закон Кирхгофа после выключения внешнего поля в виде

$$U - \mathcal{E}_s, \quad \text{или} \quad \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt},$$

где учтено, что ток положителен и сила тока убывает с течением времени, то есть производная $dI/dt < 0$, а $U = q/C$ — напряжение на конденсаторе. Следовательно,

$$\ddot{q} + \frac{2}{0} q = 0, \quad (1)$$

где $\ddot{q} = dI/dt$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Уравнение (1) является уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний, решение которого хорошо известно:

$$q = A \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad (2)$$

где A и ϕ_0 — некоторые постоянные интегрирования.

Продифференцировав (2) по времени, найдем зависимость тока в контуре от времени:

$$I = \dot{q} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (3)$$

Поскольку в момент времени $t = 0$ заряд конденсатора равен нулю, а ток в катушке

$$I_0 = \Phi/L,$$

то из уравнений (2) и (3) получим:

$$0 = A \cos \phi_0; \quad \frac{\Phi}{L} = A \omega_0 \sin \phi_0; \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}; \quad A = \frac{\Phi}{\omega_0 L}.$$

Следовательно, заряд конденсатора и ток в катушке с течением времени будут изменяться по законам:

$$q = \frac{\Phi}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t); \quad I = \frac{\Phi}{L} \cos(\omega_0 t).$$

Ответ: $q = \frac{\Phi}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t)$; $I = \frac{\Phi}{L} \cos(\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

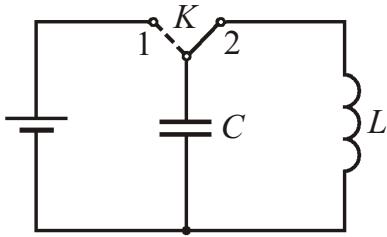


Рис. к задаче №11

11. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением. При ключе в положении 1 конденсатор зарядили до напряжения U_{\max} и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Определите ЭДС самоиндукции в моменты времени, когда энергия магнитного поля в катушке равна энергии электрического поля в конденсаторе.

Решение

После замыкания ключа в положение 2 в контуре возникнут свободные незатухающие колебания с собственной частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1)$$

в процессе которых заряд конденсатора, напряжение на его обкладках и ток в катушке с течением времени будут изменяться по законам:

$$\begin{aligned} q &= q_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0); \\ U &= \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t - \phi_0) = U_{\max} \cos(\omega_0 t - \phi_0); \\ I &= \frac{dq}{dt} = q_{\max} \omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi_0) = I_{\max} \sin(\omega_0 t - \phi_0), \end{aligned}$$

где

$$q_{\max} = CU_{\max}; \quad I_{\max} = q_{\max} \omega_0 = CU_{\max} \omega_0$$

максимальный заряд конденсатора и максимальный ток в катушке соответственно.

При этом будут происходить взаимные превращения энергий электрического и магнитного полей:

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t - \phi_0); \quad W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L I_{\max}^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - \phi_0).$$

В моменты времени t , когда энергия магнитного поля в катушке будет равна энергии электрического поля в конденсаторе,

$$\frac{L I_{\max}^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - \phi_0) = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t - \phi_0).$$

Отсюда с учетом (1) найдем фазу колебаний в моменты времени :

$$\operatorname{tg}^2(\omega_0 t - \phi_0) = \frac{q_{\max}^2}{CL I_{\max}^2} = \frac{q_{\max}^2}{CL q_{\max}^2 \omega_0^2} = 1; \quad (\omega_0 t - \phi_0) = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, ЭДС самоиндукции, изменяясь с течением времени по закону

$$\mathcal{E}_s = L \frac{dI}{dt} = LI_{\max} \omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0) = LC U_{\max} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \phi_0),$$

в моменты времени t будет равна

$$\mathcal{E}_s = LC U_{\max} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \phi_0) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\mathcal{E}_s = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$

12. Колебательный контур состоит из двух одинаковых конденсаторов емкостью C каждый и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением. Первый конденсатор зарядили до напряжения U_{\max} и замкнули ключ K (см. рис. 1). Определите зависимости от времени напряжений на конденсаторах.

Решение

В момент времени $t = 0$ (момент замыкания ключа) на конденсаторах будут находиться заряды

$$q_{01} = q_{\max}, \quad q_{02} = 0.$$

После замыкания ключа первый конденсатор будет разряжаться и в цепи потечет ток, появление которого приведет к возникновению в катушке ЭДС самоиндукции и заряда на втором конденсаторе. В силу закона сохранения заряда в момент времени t , когда заряд первого конденсатора станет равен q_1 , заряд второго будет равен $q_2 = q_{\max} - q_1$ (см. рис. 2).

Выбрав направление обхода против часовой стрелки, запишем второй закон Кирхгофа для контура в виде

$$U_1 - U_2 - \mathcal{E}_s = 0,$$

где $U_1 = q_1/C$; $U_2 = q_2/C$ — напряжения на конденсаторах; $\mathcal{E}_s = L dI/dt$ — ЭДС самоиндукции (здесь учтено, что в направлении обхода ток отрицателен и сила тока возрастает, то есть производная $dI/dt > 0$). Следовательно,

$$\frac{q_1}{C} - \frac{q_{\max}}{C} + \frac{q_1}{C} = L \frac{dI}{dt}; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{2}{LC} q_1 - \frac{q_{\max}}{LC}; \quad \ddot{q}_1 = \frac{2}{0} q_1 - \frac{q_{\max}}{LC}, \quad (1)$$

где $\ddot{q}_1 = d^2q_1/dt^2$; $0 = \sqrt{2/LC}$.

Полученное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение есть сумма общего решения однородного уравнения

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{0} q_1 = 0, \quad (2)$$

и некоторого частного решения неоднородного уравнения (1).

Решение уравнения (2) хорошо известно и имеет вид

$$q_{\text{однор}} = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

(где A и ω_0 — некоторые постоянные интегрирования), а частное решение

$$q_{\text{част}} = \frac{q_{\max}}{\frac{2}{0} LC} = \frac{q_{\max}}{2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1):

$$q_1 = q_{\text{однор}} + q_{\text{част}} = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{1}{2} q_{\max}. \quad (3)$$

При разрядке первого конденсатора ток через катушку будет изменяться по закону

$$I = \dot{q}_1 = A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad (4)$$

где учтено, что $dq_1/dt = 0$.

Записав уравнения (3) и (4) в начальный момент времени ($q = q_{\max}$; $I = 0$)

$$q_{\max} = A \cos(\phi_0) = \frac{1}{2} q_{\max}; \quad 0 = A \omega_0 \sin(\phi_0),$$

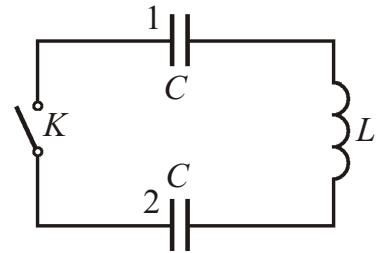


Рис. 1 к задаче №12

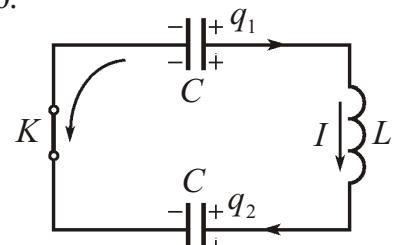


Рис. 2 к задаче №12

получим:

$$q_0 = 0; \quad A = \frac{1}{2} q_{\max}.$$

Следовательно, заряды на конденсаторах с течением времени будут изменяться по законам

$$q_1 = \frac{1}{2} q_{\max} [\cos(\omega_0 t) - 1]; \quad q_2 = q_{\max} - q_1 = \frac{1}{2} q_{\max} [1 - \cos(\omega_0 t)],$$

а напряжения

$$U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{U_{\max}}{2} [\cos(\omega_0 t) - 1]; \quad U_2 = \frac{q_2}{C} = \frac{U_{\max}}{2} [1 - \cos(\omega_0 t)].$$

Ответ: $U_1 = \frac{1}{2} U_{\max} [1 - \cos(\omega_0 t)]; U_2 = \frac{1}{2} U_{\max} [1 - \cos(\omega_0 t)]$, где $\omega_0 = \sqrt{2/LC}$.

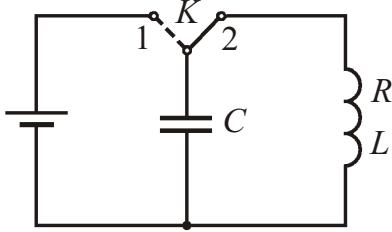


Рис. к задаче № 13

13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и активным сопротивлением R . При ключе в положении 1 конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Определите:

- 1) время, за которое амплитуда колебаний заряда конденсатора уменьшается в e раз;
- 2) логарифмический декремент затухания;
- 3) добротность контура.

Решение

Поскольку катушка обладает активным сопротивлением, то после замыкания ключа в положение 2 в контуре будут происходить затухающие колебания, и заряд на обкладках конденсатора будет изменяться по закону

$$q = q_{\max} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \cos(\omega_0 t),$$

где q_{\max} — максимальный заряд конденсатора; $\sqrt{\frac{2}{R^2 + (\omega_0)^2}}$ — частота колебаний; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота; $R/2L$ — коэффициент затухания.

Время τ , за которое амплитуда колебаний заряда конденсатора уменьшается в e раз (время жизни колебаний; [15, § 6]):

$$\frac{q_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}}}{q_{\max} e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau}}} = e; \quad \tau = 1; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2L}{R}.$$

Затухающие колебания в таком контуре будут происходить с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{R^2 + (\omega_0)^2}}} = \frac{4\pi L C}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания

$$T = \frac{2\pi R C}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}},$$

а добротность контура

$$Q = \frac{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}{2RC}.$$

Ответ: 1) $\frac{2L}{R}; 2) \frac{2\pi R C}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}; 3) Q = \frac{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}{2RC}.$

14. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и активным сопротивлением R . При ключе в положении 1 конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Через сколько колебаний амплитуда колебаний тока уменьшится в e раз?

Решение

Поскольку катушка обладает активным сопротивлением, то после замыкания ключа в положение 2 в контуре будут происходить затухающие колебания. При этом заряд на обкладках конденсатора и ток в катушке будут изменяться по законам

$$q = q_{\max} e^{-t/\tau_0} \cos(\omega_0 t - \phi_0); \quad (1)$$

$$I = \dot{q} = -q_{\max} e^{-t/\tau_0} \left[\cos(\omega_0 t - \phi_0) + \frac{\omega_0}{\tau_0} \sin(\omega_0 t - \phi_0) \right], \quad (2)$$

где q_{\max} — максимальный заряд конденсатора; $\sqrt{\frac{2}{\tau_0^2 + \omega_0^2}}$ — частота колебаний; $\tau_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота; $R/2L$ — коэффициент затухания.

Умножим и разделим выражение (2) на τ_0 и введем угол ϕ по формулам:

$$\sin \phi = \frac{\omega_0}{\tau_0}; \quad \cos \phi = \frac{1}{\tau_0}.$$

В итоге получим:

$$I = q_{\max} \tau_0 e^{-t/\tau_0} [\cos \phi \cos(\omega_0 t - \phi) + \sin \phi \sin(\omega_0 t - \phi)];$$

$$I = q_{\max} \tau_0 e^{-t/\tau_0} \cos(\omega_0 t - \phi).$$

Следовательно, амплитуда колебаний тока в катушке с течением времени изменяется по закону

$$I_{\max} = q_{\max} \tau_0 e^{-t/\tau_0}.$$

Время t , за которое амплитуда колебаний тока уменьшится в e раз:

$$\frac{q_{\max} \tau_0 e^{-t/\tau_0}}{q_{\max} \tau_0 e^{-(t-\tau_0)/\tau_0}} = e; \quad t = \tau_0 \ln e = \tau_0; \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{2L}{R}.$$

За это время в контуре произойдет

$$N = \frac{T}{\tau_0} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4LC}{R^2C^2} - 1}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}$$

колебаний, где

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4LC}{R^2C^2} - 1}} = \frac{4\pi}{\sqrt{4LC - R^2C^2}}$$

период колебаний.

$$\text{Ответ: } N = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}.$$

15. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и активным сопротивлением R . При ключе в положении 1 конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Определите отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

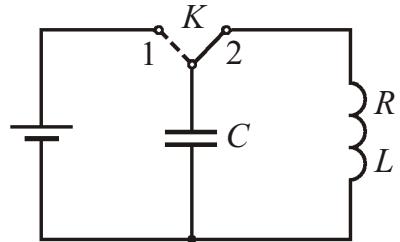


Рис. к задаче №14

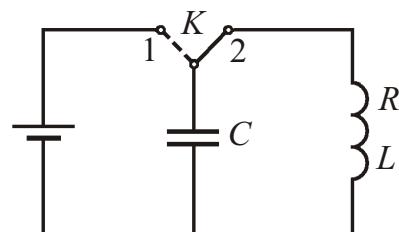


Рис. к задаче №15

Решение

Поскольку катушка обладает активным сопротивлением, то после замыкания ключа в положение 2 в контуре будут происходить затухающие колебания.

Запишем дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{q} + 2\zeta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

(где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура; $R/2L$ – коэффициент затухания) в виде

$$\frac{dI}{dt} + 2\zeta I + \frac{\omega_0^2}{2} q = 0.$$

В момент времени, когда ток достигает максимального значения, $dI/dt = 0$. Следовательно,

$$2\zeta I_{\max} + \frac{\omega_0^2}{2} q_{\max} = 0; \quad \frac{R}{L} I_{\max} - \frac{1}{LC} q_{\max} = 0; \quad I_{\max} = \frac{q_{\max}}{RC},$$

где q_{\max} – заряд конденсатора в момент максимума тока.

В этот момент времени отношение энергии магнитного поля в катушке

$$W_M = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{Lq_{\max}^2}{2R^2C^2}$$

к энергии электрического поля в конденсаторе

$$W_{\text{эл}} = \frac{q_{\max}^2}{2C}$$

равно

$$\frac{W_M}{W_{\text{эл}}} = \frac{L}{R^2C}.$$

Ответ: $\frac{W_M}{W_{\text{эл}}} = \frac{L}{R^2C}$.

Задачи для самостоятельного решения

24.1. Квадратная рамка из гибкой проволоки расположена в однородном магнитном поле с индукцией B , силовые линии которого направлены перпендикулярно к плоскости рамки. Какой заряд протечет в рамке, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию? Длина проволоки l , ее сопротивление R .

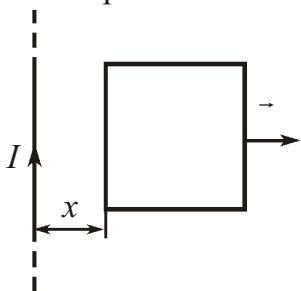


Рис. к задаче №24.2

24.2. Длинный прямой проводник с током I и проводящая квадратная рамка расположены в одной плоскости, как показано на рисунке. Рамку перемещают вправо с постоянной скоростью v . Определите ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x между рамкой и прямым проводником. Длина стороны рамки a .

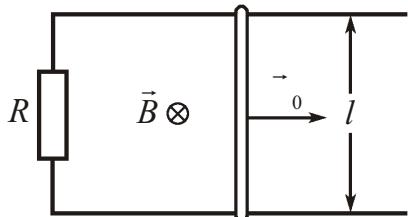


Рис. к задаче №24.3

24.3. Прямой проводящий стержень лежит на двух горизонтальных параллельных проводящих шинах перпендикулярно шинам (см. рисунок; вид сверху). На одном конце шины замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B . Расстояние

между шинами l , масса стержня m . В момент времени $t = 0$ стержню сообщают скорость \vec{v}_0 . Пренебрегая трением, сопротивлением шин и стержня, а также самоиндукцией, определите количество теплоты, выделившейся на сопротивлении R за время движения стержня до остановки.

24.4. По двум гладким параллельным проводящим шинам, установленным под углом α к горизонту, скользывает перемычка с постоянной установившейся скоростью \vec{v} . В верхней части шины замкнуты сопротивлением R . Вся система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка (см. рисунок). Расстояние между шинами l , масса перемычки m . Определите индукцию магнитного поля. Сопротивлением шин и перемычки, а также самоиндукцией пренебречь.

24.5. По двум параллельным проводящим шинам, установленным под углом α к горизонту, скользывает перемычка. В верхней части шины замкнуты конденсатором C . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка (см. рисунок). Расстояние между шинами l , масса перемычки m . Коэффициент трения между перемычкой и шинами μ . Определите ускорение перемычки. Сопротивлением шин и перемычки, а также самоиндукцией пренебречь.

24.6. Источник с ЭДС \mathcal{E} замкнут на катушку с индуктивностью L через два одинаковых сопротивления R (см. рисунок). Определите зависимость тока в катушке от времени после размыкания ключа. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

24.7. Источник с ЭДС \mathcal{E} замкнут на катушку с индуктивностью L через два одинаковых сопротивления R (см. рисунок). Определите зависимость тока в катушке от времени после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

24.8. Источник с ЭДС \mathcal{E} замкнут на катушку с индуктивностью L и сопротивлением R_1 . К катушке параллельно подключено сопротивление R_2 (см. рисунок). Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R_2 после размыкания ключа K ? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

24.9. По бесконечно длинной проводящей тонкостенной трубке радиусом R течет ток I . Определите энергию магнитного поля, заключенную в коаксиальном с трубкой цилиндре длиной l и радиусом $r < R$.

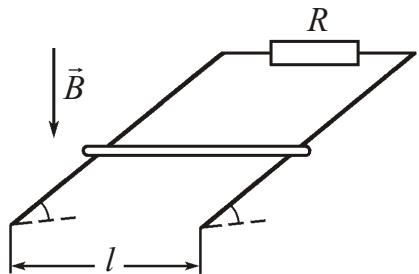


Рис. к задаче №24.4

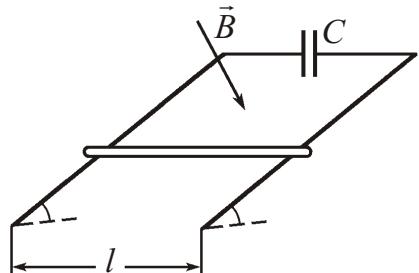


Рис. к задаче №24.5

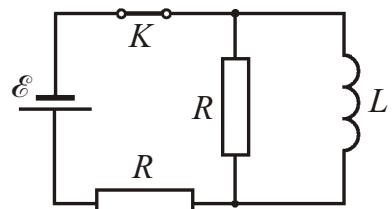


Рис. к задаче №24.6

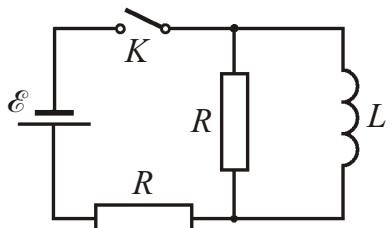


Рис. к задаче №24.7

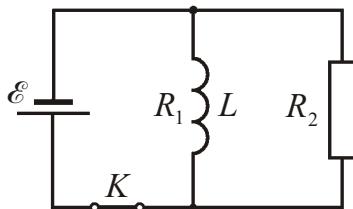


Рис. к задаче №24.8

24.10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением. В момент времени $t = 0$ напряжение на конденсаторе U_{\max} , а тока в катушке нет. Определите зависимость тока в катушке от времени.

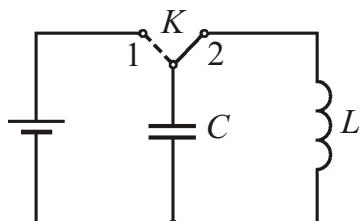


Рис. к задаче №24.11

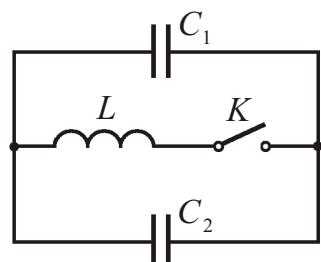


Рис. к задаче №24.12

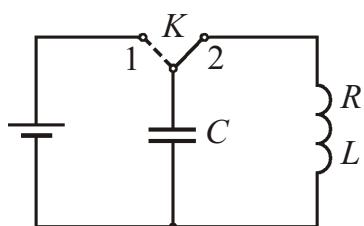


Рис. к задаче №24.14

Конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Через сколько времени амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора уменьшится в n раз?

24.15. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и активным сопротивлением R . При ключе в положении 1 конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рис. к задаче 24.14). Через сколько колебаний энергия, запасенная в контуре, уменьшится в n раз?

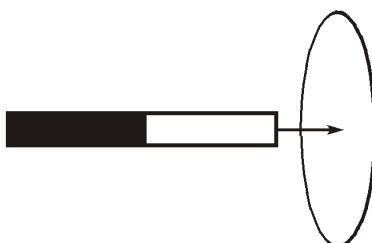


Рис. к тесту №1

Тесты

1. Постоянный магнит вдвигают в алюминиевое кольцо южным полюсом. Притягивается кольцо к магниту или отталкивается от него? Какое направление имеет индукционный ток в кольце при наблюдении со стороны магнита?

- А. Притягивается; по часовой стрелке
- Б. Притягивается; против часовой стрелки
- В. Отталкивается; по часовой стрелке
- Г. Отталкивается; против часовой стрелки

2. На рисунке представлен плоский проводящий контур, находящийся в однородном магнитном поле, направленном за плоскость рисунка. Индукцию поля уменьшают. Определите направление индукционного тока в контуре.

- A. По часовой стрелке; в перемычке тока нет
- Б. По часовой стрелке; в перемычке влево
- В. Против часовой стрелки; в перемычке тока нет
- Г. Против часовой стрелки; в перемычке вправо

3. Лежащее на горизонтальном столе металлическое кольцо повернули относительно его диаметра на угол 90° . Какой заряд протек при этом через кольцо? Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна B_B , радиус кольца r , его сопротивление R .

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| А. $q = B_B r / R$ | Б. $q = B_B r^2 / R$ |
| В. $q = 2B_B r / R$ | Г. $q = 2B_B r^2 / R$ |

4. Проволоку длиной L согнули в кольцо, затем замкнули по диаметру прямым проводником, как показано на рисунке. Сопротивление проволоки R . Перпендикулярно плоскости кольца создано магнитное поле, индукция которого изменяется со временем по закону: $B = At$, где A положительная постоянная. Определите тепловую мощность, выделяющуюся в проволоке.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| А. $N = A^2 L^2 / (4\pi^2 R)$ | Б. $N = A^2 L^2 / (16\pi^2 R)$ |
| В. $N = A^2 L^4 / (4\pi^2 R)$ | Г. $N = A^2 L^4 / (16\pi^2 R)$ |

5. П-образный проводник с подвижной перемычкой расположен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл (см. рисунок). Плоскость проводника перпендикулярна линиям индукции. Перемычку перемещают вправо с постоянной скоростью $v = 1$ см/с. Длина перемычки $l = 10$ см, ее сопротивление $R = 10$ Ом. Какое количество теплоты выделится в перемычке за первые $t = 2$ с после начала ее движения? Сопротивлением проводника пренебречь.

Ответ: _____ пДж

6. Две металлические рейки расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии $l = 1$ м друг от друга. Рейки замкнуты сопротивлением $R = 10$ Ом. На рейках, перпендикулярно им, лежит проводящий стержень (см. рисунок). Система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. К стержню приложили постоянную горизонтальную силу $F = 10^{-4}$ Н. Определите максимальную скорость стержня. Сопротивлением реек, стержня и трением пренебречь.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| А. $v_{\max} = 0,01$ м/с | Б. $v_{\max} = 0,1$ м/с |
| В. $v_{\max} = 1$ м/с | Г. $v_{\max} = 10$ м/с |

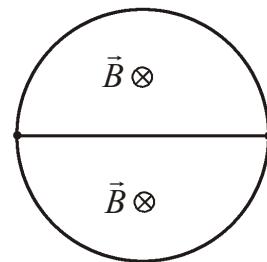


Рис. к тестам №№2, 4

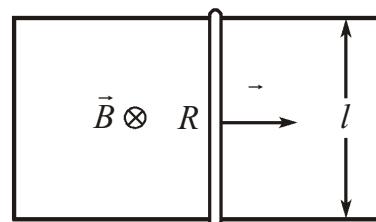


Рис. к тесту №5

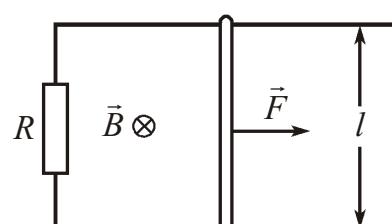


Рис. к тесту №6

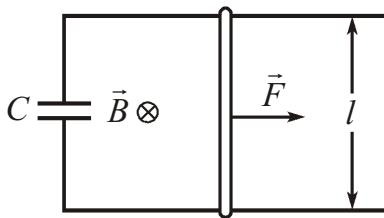


Рис. к тесту №7

горизонтальную силу $F = 0,1$ Н. Определите ускорение стержня. Сопротивлением реек, стержня и трением пренебречь.

- А. $a = 0,01$ м/с 2
Б. $a = 0,1$ м/с 2
В. $a = 1$ м/с 2
Г. $a = 10$ м/с 2

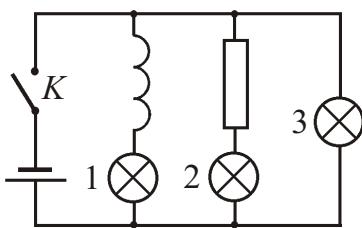


Рис. к тесту №8

9. При какой силе тока энергия магнитного поля, запасенная в катушке индуктивности, равна $W = 0,5$ Дж, а магнитный поток, пронизывающий витки катушки, $\Phi = 0,2$ Вб?

Ответ: _____ А

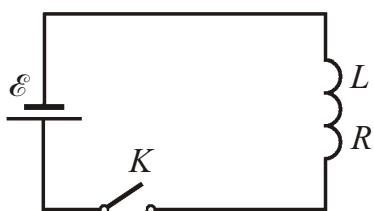


Рис. к тесту №10

11. Конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 200$ В, разряжается через катушку индуктивностью $L = 80$ мГн. Определите максимальную силу тока в катушке.

Ответ: _____ А

12. Конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ и катушка с индуктивностью $L = 2$ мГн и активным сопротивлением $R = 5$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику ЭДС. При установившемся токе энергия магнитного поля в катушке равна $W = 9$ мДж. Определите энергию электрического поля конденсатора в этот момент времени.

Ответ: _____ мкДж

13. В идеальном колебательном контуре в начальный момент времени напряжение на конденсаторе максимально. Через какую часть периода колебаний напряжение на конденсаторе станет равным нулю?

7. Две металлические рейки расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии $l = 1$ м друг от друга. Рейки замкнуты конденсатором емкостью $C = 10^{-4}$ Ф. На рейках, перпендикулярно им, лежит проводящий стержень. Масса стержня $m = 10$ г. Система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. К стержню приложили постоянную

- Б. $a = 0,1$ м/с 2
Г. $a = 10$ м/с 2

8. Какая из ламп, схема включения которых представлена на рисунке, загорится позже всех остальных, если ключ K замкнуть?

- А. 1
Б. 2
В. 3
Г. Все лампы загорятся одновременно

10. Катушку индуктивности с активным сопротивлением R подключили к источнику ЭДС. Через время t после замыкания ключа сила тока в катушке достигает 50% установившегося значения. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, определите индуктивность катушки.

- А. $L = R t / \ln 2$
Б. $L = R t \ln 0,5$
В. $L = R t / 2$
Г. $L = 2R t$

A. $n = \frac{1}{8}$

B. $n = \frac{1}{2}$

Б. $n = \frac{1}{4}$

Г. $n = 1$

14. Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2 \text{ мКФ}$ и катушки с индуктивностью $L = 0,2 \text{ мГн}$. Определите максимальное напряжение на конденсаторе, если максимальный ток в контуре $I_{\max} = 0,1 \text{ А}$.

А. $U_{\max} = 0,01 \text{ В}$

В. $U_{\max} = 1 \text{ В}$

Б. $U_{\max} = 0,1 \text{ В}$

Г. $U_{\max} = 10 \text{ В}$

15. В идеальном колебательном контуре максимальное значение ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{s\max} = 2 \text{ В}$, а максимальный магнитный поток, пронизывающий все витки катушки индуктивности, $\Phi_{\max} = 0,01 \text{ Вб}$. Собственная частота колебаний в контуре равна ...

Ответ: _____ рад/с

16. При замкнутом ключе K_1 и разомкнутом K_2 период колебаний в контуре, представленном на рисунке, равен $T_1 = 7 \text{ мкс}$. При замкнутом ключе K_2 и разомкнутом K_1 период колебаний $T_2 = 24 \text{ мкс}$. Каков будет период колебаний в контуре, если замкнуть оба ключа?

А. $T = 16 \text{ мкс}$

В. $T = 31 \text{ мкс}$

Б. $T = 25 \text{ мкс}$

Г. $T = 3,4 \text{ мкс}$

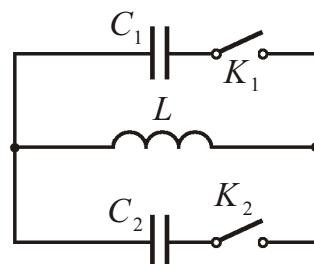


Рис. к тесту №16

17. Конденсатор емкостью C зарядили и подключили к катушке с индуктивностью L . После этого в контуре возникли незатухающие колебания. Через какой промежуток времени заряд конденсатора уменьшится в 2 раза?

А. $t = \frac{1}{2} \sqrt{LC}$

В. $t = \frac{1}{3} \sqrt{LC}$

Б. $t = \frac{1}{4} \sqrt{LC}$

Г. $t = \frac{1}{6} \sqrt{LC}$

18. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мКФ}$ зарядили до напряжения $U = 400 \text{ В}$ и подключили к катушке индуктивности. После этого в контуре возникли затухающие колебания. Какое количество теплоты выделится в контуре за время, в течение которого амплитуда колебаний напряжения уменьшится в 2 раза?

А. $Q = 0,2 \text{ Дж}$

В. $Q = 0,6 \text{ Дж}$

Б. $Q = 0,4 \text{ Дж}$

Г. $Q = 0,8 \text{ Дж}$

19. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности с активным сопротивлением. В контуре происходят затухающие колебания. Добротность контура Q , коэффициент затухания . Определите частоту колебаний.

А. Q

В. $/Q$

Б. $2/Q$

Г. $Q/$

20. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности с активным сопротивлением. Коэффициент затухания контура $= 100$. При ключе в положении 1 конденсатор зарядили и затем замкнули ключ в положение 2. Определите время, за которое амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора уменьшится в e раз.

Ответ: _____ мс

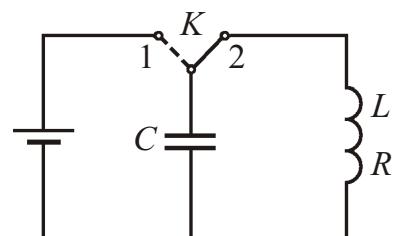


Рис. к тесту №20

§25. Уравнения Максвелла

25.1. Ток смещения

В случае стационарного магнитного поля ротор вектора магнитной индукции (см. (22.10))

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -_0 \vec{j}, \quad (25.1)$$

где вектор плотности тока \vec{j} связан с плотностью заряда соотношением [17, §20, (20.9)]

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{1}{t}. \quad (25.2)$$

Как следует из выражений (25.1) и (25.2), магнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда и плотность тока \vec{j} не зависят от времени. В этом случае

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения U (этот ток нестационарен, так как в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным U , ток прекращается).

Выберем круговой контур L , охватывающий проводник, по которому течет ток к конденсатору, и проинтегрируем соотношение (25.1) по пересекающей проводник поверхности S_1 , ограниченной контуром L (см. рис. 25.1):

$$\oint_{S_1} (\operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{S}) = -_0 (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса

$$\oint_{S_1} (\operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{S}) = \oint_L (\vec{B}, d\vec{l}),$$

найдем циркуляцию вектора \vec{B} по контуру L :

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = -_0 (\vec{j}, d\vec{S}) = -_0 I, \quad (25.3)$$

где I – сила тока, заряжающего конденсатор.

Проделав такие же вычисления для поверхности S_2 , ограниченной тем же контуром L , но не пересекающей проводник, получим

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = -_0 (\vec{j}, d\vec{S}) = 0. \quad (25.4)$$

Выражения (25.3) и (25.4) противоречат друг другу. Это означает, что в случае нестационарных токов уравнение (25.1) перестает быть справедливым. К этому выводу можно прийти и по другому.

Возьмем дивергенцию от обеих частей (25.1):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = -_0 \operatorname{div} \vec{j}.$$

Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю, то $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Но это противоречит уравнению непрерывности (25.2) в случае нестационарных токов.

Чтобы согласовать уравнения (25.1) и (25.2), Максвелл предположил, что в правой части (25.1) должно быть еще одно слагаемое, имеющее размерность плотности тока, умноженной на ϵ_0 . Согласно идеи Максвелла, поскольку для электрического поля справедливо соотношение (24.6)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t},$$

то в выражении (25.1) должно быть аналогичное слагаемое, то есть

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \vec{j} + a \frac{\vec{E}}{t}, \quad (25.5)$$

где a – некоторый коэффициент.

Возьмем дивергенцию от обеих частей (25.5):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{j} + a \operatorname{div} \frac{\vec{E}}{t}. \quad (25.6)$$

Поскольку дивергенция ротора равна нулю, а $\operatorname{div} \vec{j}$ определяется уравнением непрерывности (25.2), то

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} + a \operatorname{div} \frac{\vec{E}}{t}; \quad \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} + a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Поскольку $\operatorname{div} \vec{E} = /_0$ [17, §16, (16.5)], то

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} + a \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}; \quad a = \epsilon_0 = 0.$$

Следовательно, выражение (25.5) примет вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t}. \quad (25.7)$$

Слагаемое

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t} \quad (25.8)$$

имеет размерность плотности тока и называется *плотностью тока смещения*. Этот термин чисто условный, поскольку ток смещения по сути – это изменяющееся со временем электрическое поле. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним – способностью создавать магнитные поля.

Введение тока смещения, определяемого выражением (25.8), «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции вытекает, что изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Из уравнения (25.7) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Проинтегрировав уравнение (25.7) по произвольной поверхности S , опирающейся на контур L ,

$$(\operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{S}) = \int_S \vec{j} \cdot \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t} d\vec{S},$$

и преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S \vec{j} \cdot \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t} d\vec{S}. \quad (25.9)$$

Уравнение (25.9) представляет собой уточнение закона полного тока (22.6) с учетом тока смещения.

25.2. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось в последствии. Одним из основных результатов теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют **уравнения Максвелла**. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (24.6) и (22.3):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (25.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (25.11)$$

Первое из этих уравнений связывает значение напряженности электрического поля с изменением во времени индукции магнитного поля и является выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, то есть магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (25.7) и (16.5) [17, §16], записанные с учетом электромагнитных свойств вещества (электрической и магнитной проницаемостей ϵ и μ):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (25.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (25.13)$$

Первое из этих уравнений устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе уравнение показывает, что источниками электрического поля служат сторонние заряды.

Уравнения (25.10)–(25.13) представляют собой **уравнения Максвелла в дифференциальной форме**.

Уравнения (24.5), (22.1), (25.9) и (16.3) [17, §16]

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\int_S (\vec{B}, d\vec{S}); \quad \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0; \quad (25.14)$$

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S \vec{j} - \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, d\vec{S}; \quad \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \quad (25.15)$$

представляют собой **уравнения Максвелла в интегральной форме**.

Совокупность уравнений (25.10)–(25.13) (или (25.14)–(25.15)) образует основу электродинамики покоящихся сред.

25.3. Электромагнитные волны

В однородной электрически нейтральной ($\epsilon = 0$) и непроводящей ($\vec{j} = 0$) среде с постоянными проницаемостями ϵ_0 и μ_0 уравнения Максвелла (25.10) – (25.13) с учетом (23.14) примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (25.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad (25.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (25.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (25.19)$$

Возьмем ротор от обеих частей (25.16):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Поскольку операция «ротор» означает дифференцирование по координатам, то, поменяв в правой части операции дифференцирования по времени и дифференцирования по координатам, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

или с учетом (25.18):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{a}]] = \vec{a} (\vec{a}, \vec{a}) - \vec{a} (\vec{a}, \vec{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \vec{a}$, то

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Отсюда с учетом (25.19):

$$\vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0; \quad -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (25.20)$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (25.18) и проделав аналогичные преобразования, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = 0; \quad -\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (25.21)$$

Уравнения (25.20) и (25.21) представляют собой типичные волновые уравнения [15, §7, (7.18)]. Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины $1/(\epsilon_0 \mu_0)$ дает фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (25.20) и (25.21) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (25.22)$$

При $\epsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$ скорость электромагнитной волны

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (25.23)$$

равна скорости света в вакууме.

Впервые экспериментальное подтверждение существования электромагнитных волн удалось получить Г. Герцу уже после смерти Максвелла. Не вдаваясь в подробности опытов, отметим лишь их основные результаты. Опыты Герца 1) доказали наличие электромагнитных волн; 2) позволили оценить скорость их распространения; 3) показали, что эти волны поперечные; 4) отражаются от проводников; 5) преломляются в диэлектриках.

25.4. Свойства электромагнитных волн

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением уравнений (25.20) и (25.21) будут функции вида

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[t - (\vec{k}, \vec{r})]_1}; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i[t - (\vec{k}, \vec{r})]_2}, \quad (25.24)$$

где \vec{E}_0, \vec{H}_0 – амплитуды колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} соответственно; ω – частота волны; $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ – волновой вектор (здесь орты декартовой системы координат обозначены $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$); $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ – радиус-вектор точки на волновой поверхности; $[1], [2]$ – начальные фазы колебаний.

Производная по времени от функции вида $\vec{a} = \vec{a}_0 e^{i[t - (\vec{k}, \vec{r})]}$

$$\frac{\vec{a}}{t} = i \vec{a}_0 e^{i[t - (\vec{k}, \vec{r})]} = i \vec{a}$$

эквивалентна умножению вектора \vec{a} на $(i \vec{k})$, а производная по координате x

$$\frac{\vec{a}}{x} = i k_x \vec{a}_0 e^{i[t - (\vec{k}, \vec{r})]} = i k_x \vec{a}$$

эквивалентна умножению вектора \vec{a} на $(i k_x \vec{k})$. Аналогично:

$$\frac{\vec{a}}{y} = i k_y \vec{a}; \quad \frac{\vec{a}}{z} = i k_z \vec{a}.$$

Представим ротор вектора \vec{E}

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{E_z}{y} \vec{e}_x - \frac{E_y}{z} \vec{e}_x - \frac{E_x}{z} \vec{e}_y - \frac{E_z}{x} \vec{e}_y + \frac{E_y}{x} \vec{e}_x - \frac{E_x}{y} \vec{e}_z$$

в виде

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i \{(k_y E_z - k_z E_y) \vec{e}_x - (k_z E_x - k_x E_z) \vec{e}_y + (k_x E_y - k_y E_x) \vec{e}_z\}. \quad (25.25)$$

Перемножим векторно $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ и $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$:

$$[\vec{k}, \vec{E}] = (k_y E_z - k_z E_y) \vec{e}_x - (k_z E_x - k_x E_z) \vec{e}_y + (k_x E_y - k_y E_x) \vec{e}_z. \quad (25.26)$$

Из (25.25) и (25.26) следует, что

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i [\vec{k}, \vec{E}]. \quad (25.27)$$

Аналогично

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i [\vec{k}, \vec{H}]. \quad (25.28)$$

Правые части уравнений (25.16) и (25.18) могут быть представлены в виде

$$_0 \frac{\vec{H}}{t} = i _0 \vec{H}; \quad _0 \frac{\vec{E}}{t} = i _0 \vec{E}. \quad (25.29)$$

С учетом (25.27)–(25.29) уравнения (25.16) и (25.18) примут вид

$$[\vec{k}, \vec{E}] = _0 \vec{H}; \quad [\vec{k}, \vec{H}] = _0 \vec{E}. \quad (25.30)$$

Как следует из (25.30), вектор \vec{k} перпендикулярен векторам \vec{E} и \vec{H} , а вектор \vec{E} перпендикулярен вектору \vec{H} . Следовательно, все три вектора \vec{k} , \vec{E} и \vec{H} взаимно пер-

пендикулярны (то есть векторы \vec{E} и \vec{H} совершают колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях, причем оба вектора перпендикулярны волновому вектору \vec{k}) и образуют правовинтовую систему. Следовательно, *электромагнитные волны поперечные*. На рис. 25.2 показана «моментальная фотография» такой волны (далее будет доказано, что начальные фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} одинаковы).

Рассмотрим некоторые свойства электромагнитной волны.

1. Дисперсионное уравнение

Записав выражения (25.30) с учетом (25.24) в виде

$$[\vec{k}, \vec{E}_0 e^{i(-\omega t)}] = \vec{E}_0 H_0 e^{i(-\omega t - kx)}; \quad [\vec{k}, \vec{H}_0 e^{i(-\omega t)}] = \vec{H}_0 E_0 e^{i(-\omega t - kx)},$$

с учетом направления векторов \vec{k} , \vec{E} и \vec{H} получим:

$$k E_0 e^{i(-\omega t - kx)} = H_0 e^{i(-\omega t - kx)}; \quad (25.31)$$

$$k H_0 e^{i(-\omega t - kx)} = E_0 e^{i(-\omega t - kx)}. \quad (25.32)$$

Перемножим левые и правые части выражений (25.31)–(25.32):

$$k^2 = \frac{E_0^2}{H_0^2} = \frac{1}{0}, \quad (25.33)$$

или с учетом (25.22)

$$k = \sqrt{\frac{E_0^2}{H_0^2}} = \pm.$$
(25.34)

Выражение (25.34) является *дисперсионным уравнением* волны [15, §7, (7.20)].

2. Начальные фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{H}

Из уравнений (25.31)–(25.33) получим:

$$H_0 = \frac{k}{0} E_0 e^{i(-\omega t - kx)} = \frac{\sqrt{\frac{E_0^2}{H_0^2}}}{0} E_0 e^{i(-\omega t - kx)} = \sqrt{\frac{E_0^2}{H_0^2}} E_0 e^{i(-\omega t - kx)}. \quad (25.35)$$

Запишем выражение (25.35) с учетом формулы Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

в виде

$$H_0 = \sqrt{\frac{E_0^2}{H_0^2}} E_0 [\cos(\omega t + kx) + i \sin(\omega t + kx)]. \quad (25.36)$$

Поскольку амплитуда колебаний H_0 вектора \vec{H} должна быть действительной, то

$$\sin(\omega t + kx) = 0; \quad \cos(\omega t + kx) = 0; \quad (25.37)$$

Таким образом, *начальные фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} одинаковы* (в дальнейшем будем считать их равными нулю).

3. Связь между амплитудами колебаний векторов \vec{E} и \vec{H}

С учетом (25.37) выражение (25.36) примет вид

$$H_0 = \sqrt{\frac{E_0^2}{H_0^2}}, \quad (25.38)$$

или

$$E_0^2 = H_0^2. \quad (25.39)$$

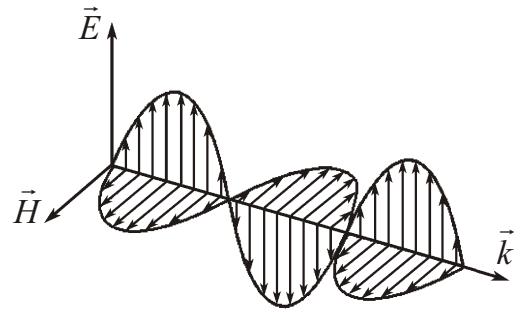


Рис. 25.2

В каждой точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (25.39) справедливо и для мгновенных значений векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$_0 E^2 = _0 H^2. \quad (25.40)$$

4. Энергия электромагнитной волны

Плотность энергии электромагнитной волны w слагается из плотности энергии электрического поля [17, §19, (19.9)] и плотности энергии магнитного поля (24.22):

$$w = w_E + w_H = \frac{_0 E^2}{2} + \frac{_0 H^2}{2}, \quad (25.41)$$

или с учетом (25.40)

$$w = \sqrt{_0 E^2 + _0 H^2}. \quad (25.42)$$

Запишем соотношение (25.42) в виде

$$w = \sqrt{_0 E \cdot _0 H},$$

или с учетом (25.22):

$$w = \frac{E H}{c}; \quad w = E H.$$

Произведение

$$S = w \quad (25.43)$$

называется *плотностью потока энергии*.

Поскольку векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора $[\vec{E}, \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен $E H$. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить в виде

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (25.44)$$

Вектор \vec{S} называется *вектором Пойнтинга*.

Поток электромагнитной энергии через произвольную поверхность равен

$$\Phi = ([\vec{E}, \vec{H}], d\vec{\sigma}). \quad (25.45)$$

5. Интенсивность электромагнитной волны

Интенсивностью волны называется модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой волной:

$$I = |\vec{S}| = |[\vec{E}, \vec{H}]|. \quad (25.46)$$

Следовательно,

$$I = \left| \vec{S} \right| = \frac{1}{T} \int_0^T |[\vec{E}, \vec{H}]| dt = \frac{1}{T} \int_0^T E H dt,$$

или с учетом (25.24) и вещественности напряженностей полей

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 e^{i[\omega t - (\vec{k}, \vec{r})]} H_0 e^{i[\omega t - (\vec{k}, \vec{r})]} dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 [\omega t - (\vec{k}, \vec{r})] dt.$$

Учитывая, что за период колебаний

$$\int_0^T \cos^2 [\omega t - (\vec{k}, \vec{r})] dt = \frac{1}{2} T,$$

получаем

$$I = \frac{E_0 H_0}{2} = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{H_0^2}{2} \sqrt{\frac{0}{0}}. \quad (25.47)$$

Очевидно, что интенсивность волны равна энергии, переносимой волной через единицу площади в единицу времени.

6. Импульс электромагнитной волны

Пусть электромагнитная волна падает по нормали на плоскую поверхность слabo проводящего тела с проницаемостями и (рис. 25.3).

Электрическое поле волны возбудит в теле ток плотностью [17, §20, (20.22)]

$$\vec{j} \quad \vec{E}.$$

Магнитное поле волны будет действовать на этот ток с силой (см. (21.9))

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}] = j dS [d\vec{l}, \vec{B}] = dS dl [\vec{j}, \vec{B}] = \int_0 dS dl [\vec{j}, \vec{H}], \quad (25.48)$$

направление которой совпадает с направлением распространения волны, то есть сила $d\vec{F}$ будет направлена перпендикулярно поверхности тела. Эта сила оказывает давление на среду и за время dt площади поверхности слоя dS сообщает импульс

$$d\vec{p} = d\vec{F} dt = \int_0 [\vec{j}, \vec{H}] dS dl dt.$$

Поскольку векторы \vec{j} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, то

$$dp = \int_0 j H dS dl dt. \quad (25.49)$$

За время dt объемом $dV = dS dl$ тела поглощается энергия

$$dW = Q_{уд} dS dl dt = (\vec{j}, \vec{E}) dS dl dt = j E dS dl dt, \quad (25.50)$$

где $Q_{уд} = (\vec{j}, \vec{E})$ – удельная мощность тока [17, §20, (20.49)].

Из (25.49) – (25.50) получим

$$\frac{dp}{dW} = \int_0 \frac{H}{E},$$

или с учетом (25.40) и (25.22):

$$\frac{dp}{dW} = \int_0 \sqrt{\frac{0}{0}} = \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{1}{0}.$$

В силу закона сохранения импульса отсюда следует, что электромагнитная волна обладает импульсом

$$dp = \frac{dW}{W}; \quad p = \frac{W}{W}, \quad (25.51)$$

где W – энергия, поглощаемая телом, которая в случае идеально поглащающей поверхности равна энергии волны.

Плотность импульса (импульс единицы объема) и объемная плотность энергии электромагнитной волны связаны аналогичным соотношением

$$p_{ед} = \frac{w}{W},$$

которое с учетом (25.43) и (25.44) можно представить в виде

$$p_{ед} = \frac{S}{2}; \quad \vec{p}_{ед} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{2}. \quad (25.52)$$

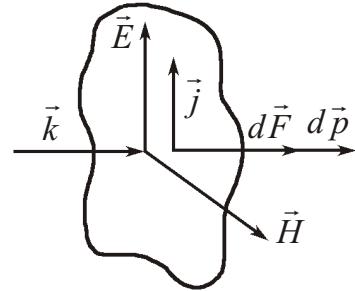


Рис. 25.3

Краткие выводы

1. Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\vec{E}}{t}.$$

2. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_0 \vec{j} = \partial_0 \frac{\vec{E}}{t}; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$

3. Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) &= -\frac{1}{t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}); & \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) &= 0; \\ \oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) &= \int_S \vec{j} = \int_0 \frac{\vec{E}}{t}, d\vec{S}; & \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) &= \frac{1}{c} \int_V dV. \end{aligned}$$

4. Уравнения электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}}}$$

скорость электромагнитной волны; $c = 1/\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}} = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

5. Свойства электромагнитной волны:

- а) электромагнитные волны поперечные; векторы \vec{E} и \vec{H} совершают колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях, причем оба вектора перпендикулярны волновому вектору \vec{k} и образуют правовинтовую систему;
- б) начальные фазы колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} одинаковы;
- в) связь между амплитудами колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$E_0^2 = H_0^2; \quad E^2 = H^2;$$

г) дисперсионное уравнение

$$k = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = ;$$

д) плотность потока энергии электромагнитной волны (*вектор Пойнтинга*) и поток энергии электромагнитной волны через произвольную поверхность :

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]; \quad \Phi = ([\vec{E}, \vec{H}], d\vec{n});$$

е) интенсивность электромагнитной волны:

$$I = \frac{E_0 H_0}{2} \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{H_0^2}{2} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}};$$

ж) величина импульса и плотность импульса электромагнитной волны:

$$p = \frac{W}{c}; \quad \vec{p}_{\text{ед}} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c}.$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что такое ток смещения?
2. Что общего у тока смещения и тока проводимости?
3. Как связаны напряженность электрического поля и индукция нестационарного магнитного поля?
4. Как связаны индукция магнитного поля и напряженность нестационарного электрического поля?
5. Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме и объясните смысл каждого из них.
6. Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме и произнесите их вслух.
7. Выведите уравнение электромагнитной волны.
8. Что означает поперечность электромагнитных волн?
9. Как связаны начальные фазы и амплитуды колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} в электромагнитной волне?
10. Что такое вектор Пойнтинга?
11. Как связаны интенсивность электромагнитной волны и вектор Пойнтинга?
12. Как связаны энергия и импульс электромагнитной волны?

Задачи

1. Обкладки плоского воздушного конденсатора находятся на расстоянии d друг от друга. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U_0 . В момент времени $t = 0$ одну из обкладок конденсатора начинают отодвигать от другой по нормали к ним с постоянной скоростью v . Определите величину плотности тока смещения в конденсаторе в зависимости от времени. Считать, что в течение всего времени линейные размеры обкладок конденсатора намного больше расстояния между ними. Как изменится ответ, если конденсатор будет заряжен до напряжения U_0 и отключен от источника?

Решение

Расстояние между обкладками конденсатора с течением времени будет изменяться по закону

$$d(t) = d - vt.$$

В случае, когда конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, емкость конденсатора, заряд на его обкладках и напряженность электрического поля между ними также будут меняться:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d - vt}; \quad q = CU_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - vt} U_0; \quad E = \frac{U_0}{d - vt}.$$

Следовательно, между обкладками конденсатора будет существовать ток смещения, плотность которого

$$|j_{\text{см}}| = \left| \frac{E}{t} \right| = \frac{\epsilon_0 U_0}{(d - vt)^2}.$$

Напряженность электрического поля между обкладками конденсатора может быть выражена через его заряд:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

В случае, если конденсатор будет заряжен и отключен от источника, заряд конденсатора и напряженность электрического поля между его обкладками изменяться не будут. Поэтому плотность тока смещения в этом случае

$$j_{\text{см}} = 0 \frac{E}{t} = 0.$$

Ответ: $|j_{\text{см}}| = \frac{U_0}{(d - t)^2}$; $j_{\text{см}} = 0$.

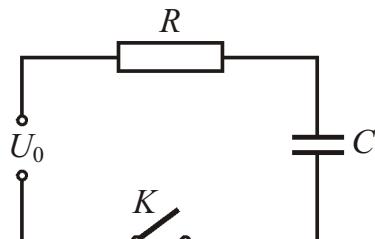


Рис. 1 к задаче №2

2. Плоский воздушный конденсатор емкостью C и расстоянием между обкладками d подключен через сопротивление R к источнику постоянного напряжения U_0 (рис. 1). В момент времени $t = 0$ ключ K замкнули. Определите плотность тока смещения в конденсаторе в момент времени, когда напряжение между его обкладками станет равным $\frac{1}{2}U_0$.

Решение

После замыкания ключа в цепи потечет ток и на обкладках конденсатора появятся заряды (q).

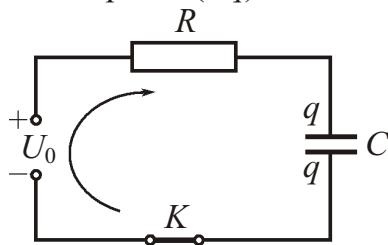


Рис. 2 к задаче №2

Запишем второй закон Кирхгофа для рассматриваемой цепи в виде

$$U_R + U_C = U_0, \quad (1)$$

где I ток в цепи в произвольный момент времени после замыкания ключа; $U_R = IR$ падение напряжения на сопротивлении; $U_C = q/C$ напряжение на конденсаторе (рис. 2).

Поскольку с течением времени величина заряда конденсатора увеличивается ($dq \neq 0$), то

$$I = \frac{dq}{dt},$$

и уравнение (1) можно записать в виде

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0,$$

или

$$\frac{dq}{CU_0 - q} = \frac{1}{RC} dt. \quad (2)$$

Проинтегрировав (2), получим:

$$\frac{dq}{CU_0 - q} = \frac{1}{RC} dt \text{ const}; \quad \ln(CU_0 - q) - \frac{1}{RC} t \text{ const}.$$

Так как в момент времени $t = 0$ заряд конденсатора равен нулю, то

$$\ln(CU_0) \text{ const}; \quad \ln(CU_0 - q) - \frac{1}{RC} t = \ln(CU_0).$$

Отсюда получим:

$$\ln \frac{CU_0 - q}{CU_0} = -\frac{1}{RC} t; \quad \frac{CU_0 - q}{CU_0} = e^{-t/(RC)}; \quad q = CU_0 [1 - e^{-t/(RC)}].$$

Следовательно, после замыкания ключа напряжение на конденсаторе будет увеличиваться по закону

$$U = \frac{q}{C} = U_0 [1 - e^{-t/(RC)}], \quad (3)$$

а напряженность электрического поля между его обкладками:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d} [1 - e^{-t/(RC)}].$$

Таким образом, за время зарядки конденсатора между его обкладками будет существовать ток смещения, плотность которого

$$j_{\text{см}} = \frac{E}{t} = \frac{U_0}{dRC} e^{-t/(RC)}. \quad (4)$$

Записав выражения (3) и (4) в момент времени $t = 0$, когда напряжение на конденсаторе будет равным $\frac{1}{2}U_0$,

$$\frac{1}{2}U_0 = U_0 [1 - e^{-t/(RC)}]; \quad j_{\text{см}} = \frac{\frac{1}{2}U_0}{dRC} e^{-t/(RC)},$$

получим:

$$e^{-t/(RC)} = \frac{1}{2}; \quad j_{\text{см}} = \frac{\frac{1}{2}U_0}{2dRC}.$$

Ответ: $j_{\text{см}} = \frac{\frac{1}{2}U_0}{2dRC}$.

3. Колебательный контур состоит из плоского воздушного конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением. При ключе в положении 1 конденсатор зарядили до напряжения U_{max} и затем замкнули ключ в положение 2 (см. рисунок). Определите максимальную величину тока смещения в конденсаторе.

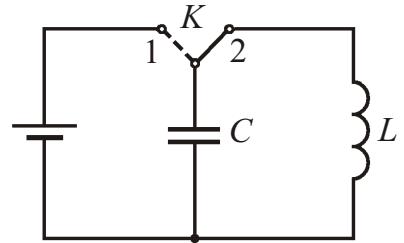


Рис. к задаче №3

Решение

После замыкания ключа в положение 2 в контуре возникнут свободные незатухающие колебания с собственной частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

в процессе которых напряжение на конденсаторе с течением времени будет меняться по закону (см. выражение (24.29)):

$$U = U_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \phi_0).$$

С учетом того, что в момент времени $t = 0$ напряжение на конденсаторе равно U_{max} , отсюда получим:

$$U_{\text{max}} = U_{\text{max}} \cos \phi_0; \quad \cos \phi_0 = 1; \quad \phi_0 = 0.$$

Следовательно, напряжение на конденсаторе и напряженность электрического поля между его обкладками с течением времени будут изменяться по законам:

$$U = U_{\text{max}} \cos(\omega_0 t); \quad E = \frac{U}{d} = \frac{U_{\text{max}}}{d} \cos(\omega_0 t),$$

где d – расстояние между обкладками.

Как видим, электрическое поле между обкладками будет нестационарным. Следовательно, внутри конденсатора будет существовать ток смещения, плотность которого будет изменяться с течением времени по закону

$$j_{\text{см}} = j_0 \frac{E}{t} = j_0 \frac{U_{\max}}{d} \sin(\omega_0 t).$$

Очевидно, максимальная плотность тока смещения

$$j_{\text{см max}} = j_0 \frac{U_{\max}}{d},$$

а максимальный ток смещения

$$I_{\text{см max}} = j_{\text{см max}} S = j_0 \frac{U_{\max} S}{d} = C U_{\max} = U_{\max} \sqrt{C/L},$$

где S — площади обкладок конденсатора; $C = \epsilon_0 S/d$.

Ответ: $I_{\text{см max}} = U_{\max} \sqrt{C/L}$.

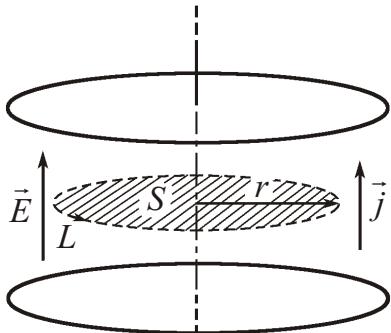
4. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено однородной слабо проводящей немагнитной средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Обкладки конденсатора представляют собой круговые диски. Пренебрегая краевыми эффектами, определите максимальную величину индукции магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если напряженность электрического поля между обкладками изменяется со временем по закону: $E = E_{\max} \cos(\omega_0 t)$, где E_{\max} , ω_0 — положительные постоянные.

Решение

Выберем произвольный круговой контур L радиусом r , расположенный внутри конденсатора между его обкладками так, что плоскость контура параллельна обкладкам, а его центр находится на их оси (см. рисунок).

Поскольку среда слабо проводящая и электрическое поле между обкладками нестационарное, то в пространстве между обкладками будут существовать токи проводимости и токи смещения, направленные вдоль оси конденсатора, которые будут создавать магнитное поле.

Рис. к задаче №4



В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина магнитной индукции на равных расстояниях от оси будет одинаковой.

Выбрав плоскую поверхность S , опирающуюся на контур L , запишем уравнение Максвелла для циркуляции вектора \vec{B}

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \frac{\vec{E}}{t} \cdot d\vec{S},$$

с учетом вышеприведенного в виде

$$\oint_L B dl = \int_S j \frac{E}{t} dS; \quad B 2\pi r = j \frac{E}{t} \pi r^2.$$

На основании закона Ома [17, §20, (20.22)] плотность тока проводимости

$$j = E.$$

Следовательно, с учетом условия задачи ($\omega = 1; E = E_{\max} \cos(\omega t)$):

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 r E = \frac{1}{2} \mu_0 r E_{\max} [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)].$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках. Для этого умножим и разделим его на $\sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2}$ и введем угол ϕ по формулам:

$$\sin \phi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2}}; \quad \cos \phi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2}}.$$

В итоге получим:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 r E_{\max} \sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2} [\cos \phi \cos(\omega t) - \sin \phi \sin(\omega t)]; \\ B = \frac{1}{2} \mu_0 r E_{\max} \sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2} \cos(\omega t + \phi); \quad B_{\max} = \frac{1}{2} \mu_0 r E_{\max} \sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2}.$$

Ответ: $B_{\max} = \frac{1}{2} \mu_0 r E_{\max} \sqrt{\omega^2 + (\omega_0)^2}.$

5. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . В момент времени $t = 0$ внутренней сфере сообщили некоторый заряд. Определите ток смещения через произвольную замкнутую поверхность, расположенную целиком в среде и охватывающую внутреннюю сферу, если заряд этой сферы в данный момент равен q .

Решение

Выберем произвольную поверхность S , охватывающую внутреннюю сферу и расположенную целиком в среде. Поскольку среда слабо проводящая, то заряд будет перетекать через поверхность S с внутренней сферы на внешнюю и напряженность электрического поля в пространстве между сферами будет изменяться, то есть электрическое поле между сферами будет нестационарным. Следовательно, в среде будут существовать токи проводимости и токи смещения.

Электрические токи, текущие между сферами, должны возбуждать магнитное поле. Выясним, куда направлен вектор магнитной индукции в произвольной точке P (см. рисунок).

Очевидно, что вектор \vec{B} не может иметь радиальной составляющей. Если бы это было не так, то поток вектора \vec{B} через поверхность S был бы отличен от нуля, что противоречит уравнению

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0,$$

выражающему теорему Гаусса для магнитного поля.

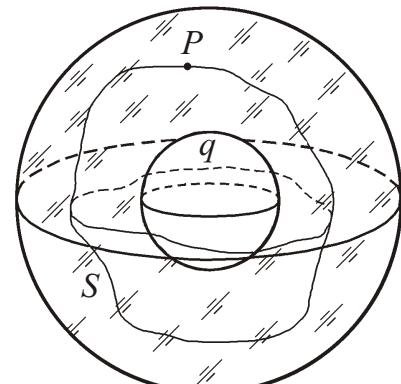


Рис. к задаче №5

Допустим, что вектор \vec{B} перпендикулярен радиальному направлению в произвольной точке P на поверхности S . Но это также невозможно, так как система обладает центральной симметрией и нет выделенных направлений. Следовательно, единственное, что возможно – это отсутствие магнитного поля в пространстве между сферами.

Поскольку в среде, заполняющей пространство между сферами, магнитное поле отсутствует, то из уравнения Максвелла для циркуляции вектора \vec{B}

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{S_0} \vec{j} \cdot \vec{E} dt, d\vec{S}$$

(где контур L лежит в пространстве между сферами; S_0 – произвольная поверхность, опирающаяся на контур L) следует:

$$\int_L \vec{j} \cdot \vec{E} dt = 0; \quad \int_{S_0} \vec{j} \cdot \vec{E} dt.$$

Поскольку плотность тока смещения

$$\vec{j}_{cm} = \int_{S_0} \vec{E} dt,$$

то

$$\int_L \vec{j} = \int_{S_0} \vec{j}_{cm},$$

то есть токи проводимости и токи смещения равны по величине и направлены в противоположные стороны. Поэтому вместо тока смещения найдем ток проводимости [17, §20, (20.3)]:

$$I = I_{cm} = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Принимая во внимание закон Ома [17, §20, (20.22)]

$$\vec{j} = \vec{E}/\rho$$

(где ρ – удельная проводимость среды), на основании теоремы Гаусса для напряженности электрического поля получаем

$$I_{cm} = \int_S (\vec{E}/\rho, d\vec{S}) = \frac{1}{\rho} \int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\rho} q.$$

Ответ: $I_{cm} = \frac{1}{\rho} q$.

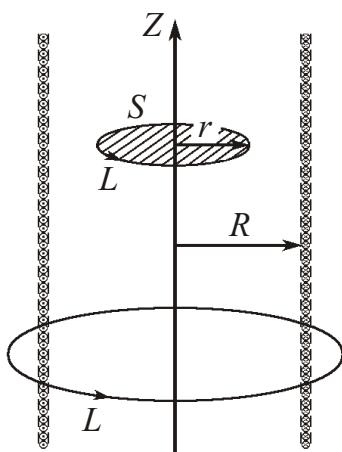


Рис. 1 к задаче №6

6. Ток, текущий по длинному соленоиду, радиус попечерного сечения которого равен R , изменяют так, что индукция магнитного поля внутри соленоида возрастает со временем по закону: $B = t^2$, где t – положительная постоянная. Определите величину плотности тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Постройте график зависимости $j_{cm}(r)$.

Решение

Выберем произвольный круговой контур L радиусом r , расположенный внутри соленоида так, что плоскость контура перпендикулярна оси соленоида, а его центр находится на этой оси (см. рис. 1).

Так как магнитное поле внутри соленоида однородно и направлено вдоль его оси, то вектор магнитной индукции будет перпендикулярен плоскости контура. Следовательно, проекции вектора \vec{B} в цилиндрической системе координат $B_r = 0$, $B_\theta = 0$, $B_z = B$.

Нестационарное магнитное поле \vec{B} будет порождать вихревое электрическое поле \vec{E} , причем

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что вектор \vec{E} не может иметь составляющей E_z . Кроме того, вектор \vec{E} не может иметь также составляющей E_r . Если бы это было не так, то поток вектора \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность S был бы отличен от нуля, что противоречит уравнению

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{t} \int_V dV = 0,$$

выражающему теорему Гаусса для электрического поля в случае отсутствия сторонних зарядов внутри поверхности S . Следовательно, $E_r = 0$, $E_\theta = E$, $E_z = 0$.

Выбрав плоскую поверхность S , опирающуюся на контур L , запишем уравнение Максвелла для циркуляции вектора \vec{E}

$$\oint_L (\vec{E}, dl) = -\frac{1}{t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

в виде

$$\oint_L E dl = -\frac{1}{t} \int_S B_z dS.$$

Учитывая, что система обладает осевой симметрией, отсюда получаем:

$$E 2 \pi r = -\frac{B}{t} \pi r^2.$$

Следовательно, напряженность электрического поля внутри соленоида на расстоянии r от его оси изменяется со временем по закону

$$E = \frac{r}{2} \frac{B}{t} = \frac{r}{2} 2 \pi t = \pi r t$$

(где $B = B_0 t^2$), а модуль плотности тока смещения

$$j_{cm}(r) = \frac{E}{t} = \frac{R^2 t}{r} = R^2 \frac{t}{r}.$$

Рассмотрев контур L , охватывающий соленоид снаружи, аналогичным образом получим:

$$\oint_L E dl = -\frac{1}{t} \int_S B_z dS; \quad E 2 \pi r = -\frac{B}{t} \pi R^2;$$

$$E = \frac{R^2 t}{r}; \quad j_{cm}(r) = \frac{R^2 t}{r},$$

где учтено, что магнитное поле вне соленоида отсутствует.

График зависимости $j_{cm}(r)$ представлен на рис. 2.

Ответ: $j_{cm}(r) = 0$ при $r < R$; $j_{cm}(r) = \frac{R^2 t}{r}$; рис. 2.

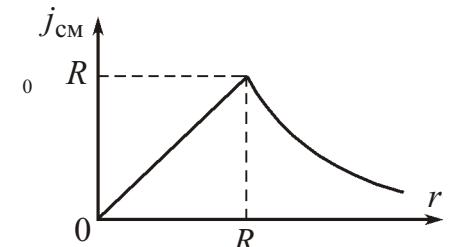


Рис. 2 к задаче №6

7. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого представляют собой круглые диски радиусом R , подключен к источнику переменного напряжения $U = U_{\max} \cos(\omega t)$, где U_{\max} — амплитудное значение напряжения и его частота. Определите отношение максимальных значений энергий магнитного и электрического поля внутри конденсатора.

Решение

Пренебрегая краевыми эффектами, будем считать электрическое поле между обкладками конденсатора однородным:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_{\max}}{d} \cos(\omega t), \quad (1)$$

где d — расстояние между обкладками.

Энергия электрического поля внутри конденсатора [17, §19, (19.10)]

$$W_E = \frac{w_E}{V} dV,$$

где $V = R^2 d$ — объем конденсатора;

$$w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 U_{\max}^2}{2 d^2} \cos^2(\omega t)$$

объемная плотность энергии электрического поля [17, §19, (19.9)].

Следовательно, в случае однородного поля

$$W_E = w_E V = \frac{\epsilon_0 U_{\max}^2}{2 d^2} \cos^2(\omega t) R^2 d.$$

Поскольку нестационарное электрическое поле (1) порождает вихревое магнитное, то в пространстве между обкладками конденсатора будет существовать магнитное поле.

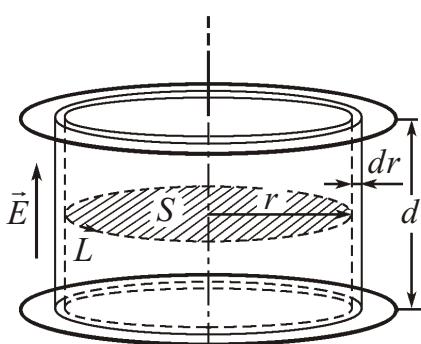


Рис. к задаче №7

Выберем произвольный круговой контур L радиусом r , расположенный между обкладками конденсатора так, что плоскость контура параллельна обкладкам, а его центр находится на их оси. В силу осевой симметрии вектор индукции магнитного поля в любой точке контура будет направлен по касательной к нему, а величина магнитной индукции на равных расстояниях от оси будет одинаковой.

Поскольку между обкладками конденсатора токов проводимости нет, то, выбрав плоскую поверхность S , опирающуюся на контур L , из уравнения Максвелла для циркуляции вектора \vec{B}

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\vec{E}}{c} \cdot d\vec{S}$$

с учетом (1) получим:

$$B 2 \pi r = \int_0^R \frac{E}{c} r^2 dr; \quad B = \frac{\epsilon_0 \omega_0 r}{2} \frac{E}{c} = \frac{\epsilon_0 \omega_0 r}{2} \frac{U_{\max}}{d} \sin(\omega t). \quad (2)$$

Энергия магнитного поля, локализованного между обкладками конденсатора (см. выражение (24.23)),

$$W_B = \frac{w_B}{V} dV, \quad (3)$$

где

$$w_B = \frac{B^2}{2}$$

объемная плотность энергии (см. выражение (24.22)).

Поскольку магнитное поле в конденсаторе неоднородно и зависит только от расстояния r до оси, то, мысленно разбив объем внутри конденсатора на бесконечно тонкие коаксиальные цилиндрические трубы, запишем (3) с учетом (2) в виде

$$W_B = \int_0^R \frac{B^2}{2} 2\pi r dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^R \frac{\mu_0 U_{\max}^2}{d} \sin^2(\theta) r^3 dr,$$

где $dV = 2\pi r dr d\theta$ — объем трубы, r — ее радиус, dr — толщина стенок.

Следовательно, энергия магнитного поля внутри конденсатора

$$W_B = \frac{1}{16} \int_0^R \frac{\mu_0 U_{\max}^2}{d} R^4 \sin^2(\theta) d\theta.$$

Так как максимальные значения синуса и косинуса равны единице, то отношение максимальных значений энергий магнитного и электрического поля внутри конденсатора

$$W_{B\max}/W_{E\max} = \frac{1}{8} \int_0^R R^2 d\theta.$$

Ответ: $W_{B\max}/W_{E\max} = \frac{1}{8} \int_0^R R^2 d\theta$.

8. Нерелятивистские протоны, имеющие одинаковую скорость v , образуют пучок круглого сечения с током I . Определите модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси.

Решение

Вообще говоря электрические поля движущегося и неподвижного заряда могут сильно отличаться, особенно, если скорость заряда близка к скорости света: электрическое поле «сплющивается» в направлении движения заряда (см. рис. 1). Законы преобразования полей при переходе от одной системы отсчета к другой устанавливаются в специальной теории относительности, причем сложным образом.

В нашем случае нерелятивистских частиц будем полагать, что скорости протонов достаточно малы, и искажением электрического поля будем пренебречь.

Будем полагать, что ток в пучке распределен равномерно по его сечению и векторы напряженности электрического поля имеют только радиальные составляющие, а магнитное поле такое же, как у прямолинейного тока. Тогда направление вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

вне пучка будет совпадать с направлением тока в пучке (см. рис. 2). Так как векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, то модуль вектора Пойнтинга

$$S = E H.$$

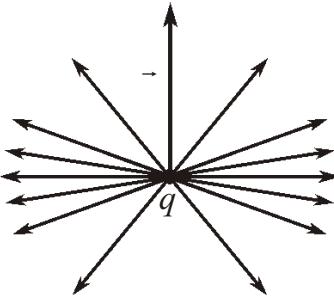


Рис. 1 к задаче №8

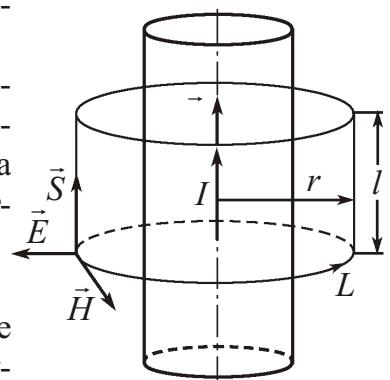


Рис. 2 к задаче №8

Выберем произвольный круговой контур L радиусом r , охватывающий пучок. Плоскость контура перпендикулярна пучку, а его центр находится на оси пучка. Рассмотрим коаксиальную с пучком цилиндрическую поверхность радиусом r и длиной l . В силу осевой симметрии на равных расстояниях r от оси пучка напряженность электрического поля одинакова по величине и поток напряженности электрического поля через всю поверхность цилиндра будет равен потоку через его боковую поверхность $S_{\text{бок}}$:

$$\oint \Phi dS = E S_{\text{бок}} = E 2 \pi r l.$$

Представив заряд единицы длины пучка в виде $q_p n S$ (где q_p , n заряд протона и концентрация частиц в пучке), по теореме Гаусса для напряженности электрического поля получим:

$$\Phi = \frac{q}{2 \pi r_0} ; \quad E = \frac{q}{2 \pi r_0 r l} = \frac{q_p n S}{2 \pi r_0 r},$$

где $q = l$ заряд, заключенный внутри выбранной поверхности.

Принимая во внимание выражение для плотности тока $j = q_p n = I/S$ [17, §20, (20.5)], получаем

$$E = \frac{I}{2 \pi r_0 r}.$$

Магнитное поле в любой точке контура будет направлено по касательной к нему, а величина напряженности магнитного поля на равных расстояниях от оси будет одинаковой. Так как напряженность электрического поля не зависит от времени, то контур L будет охватывать только токи проводимости. На основании теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля получим:

$$\oint \Gamma d\vec{l} = \oint H dl = H 2 \pi r = I; \quad H = \frac{I}{2 \pi r}.$$

Следовательно, модуль вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси

$$S = \frac{I}{2 \pi r_0 r} \frac{I}{2 \pi r} = \frac{I^2}{4 \pi^2 r_0 r^2}.$$

Ответ: $S = \frac{I^2}{4 \pi^2 r_0 r^2}$; вектор \vec{S} направлен параллельно оси пучка.

9. Плоская электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_{\max} \cos [(\vec{k}, \vec{r})]$ распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью σ . Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды равны ϵ и μ соответственно. Определите:

- 1) амплитуду колебаний вектора напряженности магнитного поля;
- 2) вектор напряженности магнитного поля как функцию времени;
- 3) среднюю за период колебаний плотность потока энергии;
- 4) отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

Решение

Амплитуды колебаний векторов напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне связаны соотношением (см. выражение (25.40))

$$_0 E_{\max}^2 = _0 H_{\max}^2.$$

Следовательно,

$$H_{\max} = \sqrt{\frac{0}{0}} E_{\max}. \quad (1)$$

В электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} совершают колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях, причем, оба вектора перпендикулярны волновому вектору \vec{k} и образуют правовинтовую систему. При этом (см. выражение (25.30))

$$_0 \vec{H} = [\vec{k}, \vec{E}].$$

Поскольку в каждой точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются в одинаковой фазе, то

$$\vec{H} = H_{\max} \cos [t - (\vec{k}, \vec{r})].$$

Следовательно, вектор напряженности магнитного поля изменяется со временем по закону

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}]}{0} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}_{\max}]}{0} \cos [t - (\vec{k}, \vec{r})].$$

Средняя за период колебаний плотность потока энергии электромагнитной волны (то есть интенсивность волны)

$$| \vec{S} | = | [\vec{E}, \vec{H}] | = I,$$

где $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ вектор Пойнтинга. С учетом того, что векторы \vec{E} и \vec{H} совершают колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях,

$$| \vec{S} | = \frac{1}{T} \int_0^T | [\vec{E}, \vec{H}] | dt = \frac{1}{T} \int_0^T E H dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\max} H_{\max} \cos^2 [t - (\vec{k}, \vec{r})] dt.$$

Так как среднее значение квадрата косинуса за период колебаний равно $\frac{1}{2} T$, то с учетом (1)

$$| \vec{S} | = \frac{E_{\max} H_{\max}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0}{0}} E_{\max}^2.$$

Поскольку электромагнитная волна распространяется в слабо проводящей среде, то в среде будут существовать токи проводимости и токи смещения:

$$\vec{j} = \vec{E} = \vec{E}_{\max} \cos [t - (\vec{k}, \vec{r})]; \quad \vec{j}_{\text{см}} = 0 \frac{\vec{E}}{t} = 0 \vec{E}_{\max} \sin [t - (\vec{k}, \vec{r})].$$

Так как максимальные значения синуса и косинуса равны единице, то отношение максимальных значений плотностей токов проводимости и смещения

$$\frac{j_{\max}}{j_{\text{см max}}} = \frac{1}{0}.$$

Ответ: 1) $H_{\max} = \sqrt{\frac{0}{0}} E_{\max}$; 2) $\vec{H} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}_{\max}]}{0} \cos [t - (\vec{k}, \vec{r})]$;

$$3) | \vec{S} | = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0}{0}} E_{\max}^2; 4) \frac{j_{\max}}{j_{\text{см max}}} = \frac{1}{0}.$$

10. Определите давление, оказываемое в вакууме лучом лазера на абсолютно поглощающую поверхность, расположенную перпендикулярно излучению лазера. Амплитуда колебаний вектора напряженности электрического поля в излучении лазера равна E_{\max} .

Решение

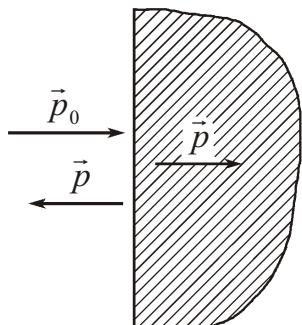


Рис. к задаче №10

Излучение лазера представляет собой плоские электромагнитные волны одинаковой частоты. Рассмотрим такую волну, падающую по нормали на плоскую поверхность проводящего тела и частично отражающуюся в противоположном направлении.

Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{p}_0 + \vec{p} = \vec{p}; \quad p_0 + p = p,$$

где \vec{p}_0 , \vec{p} — импульсы падающей и отраженной волны; \vec{p} — импульс, переданный телу (см. рисунок).

Импульс волны и ее энергия W связаны соотношением (см. формулу (25.51))

$$p = \frac{W}{c},$$

где c — скорость электромагнитной волны. Следовательно, импульс, переданный телу за время t ,

$$p = p_0 + p = \frac{W_0}{c} - \frac{W}{c} = p_0 - p = \frac{\Phi_0}{c} t - \frac{\Phi}{c} t,$$

где $\Phi_0 = W_0/c$, $\Phi = W/c$ — потоки электромагнитной энергии падающей и отраженной волны соответственно; Φ_0/Φ — коэффициент отражения.

Поток электромагнитной энергии, падающей на поверхность S тела, равен (см. формулу (25.45))

$$\Phi_0 = \left| \int_S [\vec{E}, \vec{H}] dS \right| = \left| \vec{E}, \vec{H} \right| S,$$

где $\left| \vec{E}, \vec{H} \right|$ — среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной, равное интенсивности волны, то есть

$$I = \left| \vec{E}, \vec{H} \right|.$$

Следовательно, величина импульса, переданного телу,

$$p = (1 - \rho) \frac{\Phi_0}{c} t = (1 - \rho) \frac{IS}{c} t.$$

Поскольку импульс, сообщаемый телу в единицу времени, равен силе, действующей на тело, а оказываемое давление равно силе, отнесенной к единице площади тела, то давление электромагнитной волны на поверхность тела

$$P = \frac{p}{S/t} = (1 - \rho) \frac{I}{c}.$$

Вернемся к данной задаче.

В случае абсолютно поглощающей поверхности коэффициент отражения $\rho = 0$. Так как интенсивность электромагнитной волны (см. решение задачи №9)

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\max}^2,$$

то давление электромагнитной волны на поглощающую поверхность

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{\mu_0}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\max}^2,$$

где учтено значение диэлектрической проницаемости вакуума (1) и выражение для скорости электромагнитной волны

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}}.$$

Ответ: $P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\max}^2$.

Задачи для самостоятельного решения

25.1. Обкладки плоского воздушного конденсатора находятся на расстоянии d друг от друга. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U_0 . В момент времени $t = 0$ одну из обкладок конденсатора начинают отодвигать от другой по нормали к ним с постоянным ускорением a . Определите величину плотности тока смещения в конденсаторе в зависимости от времени. Считать, что в течение всего времени линейные размеры обкладок конденсатора намного больше расстояния между ними.

25.2. Плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S заряжен до напряжения U_0 . Конденсатор разряжают через сопротивление R . Определите величину плотности тока смещения в конденсаторе в момент времени, когда напряжение на конденсаторе станет равным $\frac{1}{2} U_0$.

25.3. В идеальном колебательном контуре происходят электрические колебания с собственной частотой ω_0 . Энергия колебаний W . Определите максимальный ток смещения в конденсаторе, если его емкость равна C .

25.4. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено однородной слабопроводящей немагнитной средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Обкладки конденсатора представляют собой круглые диски. Расстояние между обкладками d . Пренебрегая краевыми эффектами, определите максимальную величину напряженности магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение $U = U_{\max} \cos(\omega t)$, где U_{\max} , ω положительные постоянные.

25.5. В неограниченной однородной проводящей среде с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ находится металлический шар, которому сообщен положительный заряд. Определите величину плотности тока смещения как функцию расстояния r от центра шара, если заряд шара в этот момент равен q .

25.6. По обмотке длинного соленоида, радиус поперечного сечения которого равен R , течет переменный ток $I = I_{\max} \cos(\omega t)$, где I_{\max} , ω амплитудное значение тока и его частота. Число витков на единицу длины соленоида равно n . Определите величину плотности тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида.

25.7. По обмотке длинного соленоида течет переменный ток $I = I_{\max} \cos(\omega t)$, где I_{\max} , ω амплитудное значение тока и его частота. Сопротивление обмотки равно R . Определите отношение максимальных значений энергий электрического и магнитного поля внутри соленоида.

25.8. По прямому проводнику круглого сечения течет ток I . Полагая магнитную проницаемость всюду равной единице, определите поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка этого проводника, если его сопротивление равно R .

25.9. Плоская электромагнитная волна с амплитудой E_{\max} и частотой ω распространяется в вакууме. Определите:

- 1) интенсивность волны;
- 2) среднюю за период колебаний объемную плотность энергии волны;
- 3) амплитуду плотности тока смещения.

25.10. Определите давление, оказываемое в вакууме лучом лазера на абсолютно отражающую поверхность, расположенную перпендикулярно излучению лазера. Амплитуда колебаний вектора напряженности магнитного поля в излучении лазера равна H_{\max} .

Тесты

1. Индукция магнитного поля внутри цилиндра радиусом $R = 10$ см линейно возрастает со временем по закону: $B = kt$, где $k = 10^{-3}$ Тл/с. Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Определите величину напряженности вихревого электрического поля на расстоянии $r = 20$ см от оси цилиндра.

- A. $E = 125 \cdot 10^{-6}$ В/м B. $E = 25 \cdot 10^{-6}$ В/м
C. $E = 5 \cdot 10^{-5}$ В/м D. $E = 125 \cdot 10^{-5}$ В/м

2. Скорость изменения магнитной индукции в бетатроне $dB/dt = 60$ Тл/с. Определите величину напряженности вихревого электрического поля на орбите электрона радиусом $r = 50$ см.

Ответ: _____ В/м

3. Ток, текущий по длинному соленоиду, изменяют так, что индукция магнитного поля внутри соленоида изменяется со скоростью dB/dt . Определите величину напряженности вихревого электрического поля внутри соленоида на расстоянии r от его оси.

- A. $E = \frac{1}{2} \frac{r}{l} dB/dt$ B. $E = r \frac{dB}{dt}$
C. $E = 2 \frac{r}{l} dB/dt$ D. $E = \frac{1}{r} \frac{dB}{dt}$

4. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено однородной слабопроводящей немагнитной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Конденсатор заряжен до максимального напряжения U_{\max} и отключен от источника. Определите величину напряженности магнитного поля в конденсаторе. Расстояние между обкладками d .

- A. $H = 0$ B. $H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{U_{\max}}{d}$
C. $H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} U_{\max} d$ D. $H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{U_{\max}}{d}$

5. Напряжение на обкладках плоского воздушного конденсатора емкостью C изменяется с течением времени по закону: $U = U_{\max} \sin(\omega t)$, где U_{\max} — амплитуда напряжения и его частота. Определите максимальный ток смещения в конденсаторе.

- A. $I_{\text{cm}} = C U_{\max} / \omega$ B. $I_{\text{cm}} = C U_{\max}$
C. $I_{\text{cm}} = U_{\max} / C$ D. $I_{\text{cm}} = C / U_{\max}$

6. Плоский воздушный конденсатор заряжен до напряжения $U_{\max} = 100$ В и отключен от источника. В момент времени $t = 0$ обкладки конденсатора стали отодвигать друг от друга со скоростью $0,1$ мм/с. Определите плотность тока смещения в момент времени $t = 10$ с. Первоначальное расстояние между обкладками $d = 3$ мм.

Ответ: _____ А/м²

7. Плоский воздушный конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U_{\max} = 100$ В. В момент времени $t = 0$ обкладки конденсатора стали сдвигать друг к другу со скоростью $0,1$ мм/с. Определите плотность тока смещения в момент времени $t = 10$ с. Первоначальное расстояние между обкладками $d = 3$ мм.

- А. $j_{\text{см}} = 0$ Б. $j_{\text{см}} = 2,2 \cdot 10^{-8}$ А/м²
В. $j_{\text{см}} = 2,2 \cdot 10^{-5}$ А/м² Г. $j_{\text{см}} = 2,2 \cdot 10^{-2}$ А/м²

8. Конденсатор емкостью C , на обкладках которого находится заряд q_{\max} , замкнули на катушку индуктивности L с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Максимальный ток смещения в конденсаторе равен ...

- А. $I_{\text{см max}} = q_{\max} \sqrt{LC}$ Б. $I_{\text{см max}} = q_{\max} LC$
В. $I_{\text{см max}} = q_{\max} / \sqrt{LC}$ Г. $I_{\text{см max}} = q_{\max} / LC$

9. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабопроводящей немагнитной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . Внутренней сфере сообщили положительный заряд. Определите связь между векторами плотности тока смещения и плотности тока проводимости в один и тот же момент времени.

- А. $\vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}$ Б. $\vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}$
В. $\vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}$ Г. $\vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} /$

10. В контуре Томсона отношение максимального тока в катушке индуктивности к максимальному заряду конденсатора равно 5 с^{-1} . Длина волны, излучаемая данным контуром в вакууме равна ...

- А. 120 МГц Б. 934 МГц
В. 240 МГц Г. 377 МГц

11. На сколько изменится длина электромагнитной волны с частотой 5 МГц при переходе волны из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью 9 ?

Ответ: _____ м

12. Плоская электромагнитная волна с частотой 10 МГц распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью 9 . Определите модуль волнового вектора.

- А. $k = 0,12$ рад/м Б. $k = 0,21$ рад/м
В. $k = 0,36$ рад/м Г. $k = 0,63$ рад/м

13. Плоская электромагнитная волна с частотой 10 МГц распространяется в слабопроводящей среде с удельной проводимостью 10 мСм/м и диэлектрической проницаемостью 9 . Определите отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

Ответ: _____

14. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Определите вектор напряженности магнитного поля волны как функцию времени в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 0$.

- А. $\vec{H} = \vec{E}_{\max} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}_{\max}] \sin(\omega t)$
- Б. $\vec{H} = (\omega / c) \vec{E}_{\max} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}_{\max}] \cos(\omega t)$, где c – скорость света в вакууме
- В. $\vec{H} = (c / \omega) \vec{E}_{\max} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}_{\max}] \cos(\omega t)$, где c – скорость света в вакууме
- Г. $\vec{H} = (c / \omega) \vec{E}_{\max} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}_{\max}] \sin(\omega t)$, где c – скорость света в вакууме

15. Плоская электромагнитная волна с частотой ω распространяется в вакууме. Среднее значение потока энергии за период колебаний равно S . Определите амплитуду плотности тока смещения.

- А. $j_{\text{см max}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 S}}{c}$, где c – скорость света в вакууме
- Б. $j_{\text{см max}} = c \sqrt{2 \epsilon_0 S}$, где c – скорость света в вакууме
- В. $j_{\text{см max}} = \sqrt{2 \epsilon_0 S}$, где c – скорость света в вакууме
- Г. $j_{\text{см max}} = c \sqrt{2 \epsilon_0 S}$, где c – скорость света в вакууме

16. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда колебаний электрической составляющей волны $E_{\max} = 50$ мВ/м, частота $\omega = 100$ кГц. Амплитуда колебаний тока смещения равна ...

- А. $j_{\text{см max}} = 1,39 \cdot 10^{-7}$ А/м²
- Б. $j_{\text{см max}} = 2,78 \cdot 10^{-7}$ А/м²
- В. $j_{\text{см max}} = 7,28 \cdot 10^{-7}$ А/м²
- Г. $j_{\text{см max}} = 8,27 \cdot 10^{-7}$ А/м²

17. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда колебаний электрической составляющей волны E_{\max} . Определите модуль вектора Пойнтинга за период колебаний.

- А. $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{\max}^2$, где c – скорость света в вакууме
- Б. $S = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\max}^2$
- В. $S = c E_{\max}^2 / (2 \epsilon_0)$, где c – скорость света в вакууме
- Г. $S = c E_{\max}^2 / (2 \epsilon_0)$

18. В излучении современных лазерных установок достигаются напряженности электрических полей $E_{\max} = 10^9$ В/м. Интенсивность такого излучения равна ...

- А. $I = 1,65 \cdot 10^{14}$ Вт/м²
- Б. $I = 1,3 \cdot 10^{15}$ Вт/м²
- В. $I = 2,6 \cdot 10^{15}$ Вт/м²
- Г. $I = 3,1 \cdot 10^{15}$ Вт/м²

19. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда колебаний магнитной составляющей волны $H_{\max} = 5 \cdot 10^{-2}$ А/м. Определите давление, оказываемое волной при нормальном падении на идеально поглощающую плоскую поверхность.

- А. $p = 3,14 \cdot 10^{-9}$ Па
- Б. $p = 1,57 \cdot 10^{-9}$ Па
- В. $p = 5,71 \cdot 10^{-9}$ Па
- Г. $p = 7,75 \cdot 10^{-9}$ Па

20. Модуль вектора Пойнтинга за период колебаний в излучении лазера равен $S = 10^4$ Вт/м². Определите давление, оказываемое волной при нормальном падении на плоскую поверхность с коэффициентом отражения $\alpha = 0,5$.

Ответ: _____ мкПа

§26. Переменный ток

Все реальные генераторы тока имеют ЭДС, изменяющуюся со временем по закону, очень близкому к синусоидальному, и создаваемые ими токи практически являются синусоидальными. С другой стороны, теория синусоидальных токов наиболее проста. По этим причинам мы будем рассматривать только такие токи, сила которых меняется по закону

$$I = I_m \sin(\omega t), \quad (26.1)$$

где I_m амплитудное значение тока, ω его частота.

Рассмотрим цепь, состоящую из генератора и сопротивления R (рис. 26.1), которое в случае переменных токов называют *активным* сопротивлением.

Напряжение на участке $a - R - b$ цепи

$$U = IR = I_m R \sin(\omega t) = U_{mR} \sin(\omega t), \quad (26.2)$$

где $U_{mR} = I_m R$ максимальное значение напряжения на участке.

Таким образом, напряжение на концах участка изменяется по закону синуса, так же, как и ток в цепи. Причем разность фаз между колебаниями тока и напряжения равна нулю; напряжение и ток одновременно достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь цепь, состоящую из генератора и конденсатора емкостью C .

Заряд конденсатора и силу тока будем считать положительными, если они соответствуют рис. 26.2.

Напряжение на участке $a - C - b$ цепи

$$U = \frac{q}{C},$$

где

$$q = I dt$$

заряд конденсатора.

Если сила тока в цепи изменяется по закону (26.1), то заряд и напряжение на конденсаторе в любой момент времени равны соответственно

$$q = I_m \sin(\omega t) dt = \frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t);$$

$$U = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_{mC} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (26.3)$$

Как видим, напряжение на конденсаторе изменяется также по закону синуса, но колебания напряжения отстают по фазе от колебаний тока в цепи на $\frac{\pi}{2}$ (когда ток, возрастаю, проходит через нуль, напряжение достигает минимума и начинает увеличиваться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль и т. д.).

Амплитудное значение напряжения на конденсаторе $U_{mC} = I_m / \omega C$ обычно записывают в виде

$$U_{mC} = I_m X_C,$$

где

$$X_C = 1 / \omega C \quad (26.4)$$

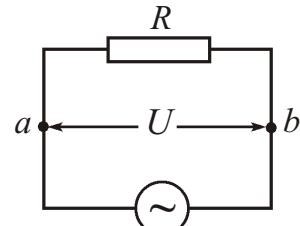


Рис. 26.1

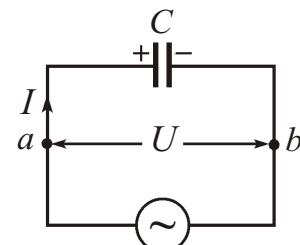


Рис. 26.2

называют *реактивным сопротивлением емкости*. Величина X_C тем меньше, чем больше частота тока, и в цепи постоянного тока $X_C = 0$.

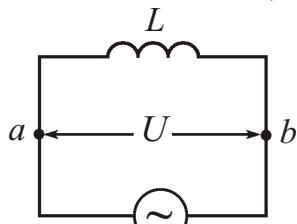


Рис. 26.3

Поскольку активное сопротивление цепи равно нулю, то напряжение на участке $a - L - b$ цепи

$$U = \mathcal{E}_s + L \frac{dI}{dt}.$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону (26.1), то

$$U = I_m R + L \cos(\omega t) + I_m L \sin(\omega t) + U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (26.5)$$

Как видим, напряжение на индуктивности изменяется также по закону синуса, но колебания напряжения опережают по фазе колебания тока в цепи на $\frac{\pi}{2}$ (когда ток, возрастая, проходит через нуль, напряжение уже достигает максимума и начинает уменьшаться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль и т. д.).

Амплитудное значение напряжения на индуктивности $U_{mL} = I_m X_L$ обычно записывают в виде

$$U_{mL} = I_m X_L,$$

где

$$X_L = L \omega \quad (26.6)$$

называют *реактивным сопротивлением индуктивности*. Величина X_L растет линейно с частотой тока и в цепи постоянного тока $X_L = 0$.

Заметим, хотя реактивные сопротивления X_C и X_L измеряют в тех же единицах, что и активное, между ними существует принципиальное различие. Оно заключается в том, что только активное сопротивление определяет необратимые процессы в цепи, такие, например, как преобразование электромагнитной энергии в теплоту.

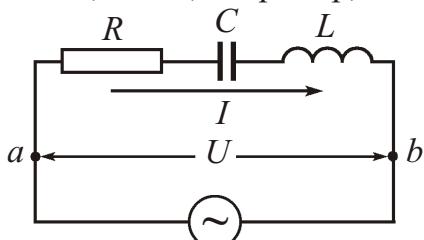


Рис. 26.4

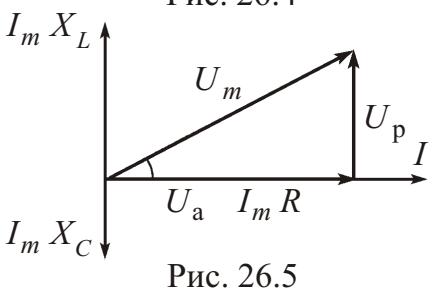


Рис. 26.5

Рассмотрим цепь переменного тока, в которой последовательно с генератором соединены активное сопротивление R , конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением (рис. 26.4). При таком соединении напряжение между точками $a - b$ участка $a - R - C - L - b$ цепи будет равно сумме падений напряжений на элементах участка. Для сложения напряжений на элементах цепи воспользуемся методом векторных диаграмм [15, §6].

Выше мы видели, что ток в цепи, напряжения на активном сопротивлении, конденсаторе и катушке меняются по законам синуса с одинаковой частотой. На диаграмме напряжений (рис. 26.5) вектор,

соответствующий колебаниям напряжения на активном сопротивлении, будет иметь длину $U_{mR} = I_m R$ и будет направлен вдоль оси токов, поскольку разность фаз между током и напряжением равна нулю. Вектор длиной $U_{mC} = I_m X_C$, изображающий колебания напряжения на конденсаторе, будет направлен относительно оси токов с отставанием на $\frac{\pi}{2}$. Аналогично вектор длиной $U_{mL} = I_m X_L$, изображающий колебания напряжения на катушке, будет направлен относительно оси токов с опережением на $\frac{\pi}{2}$. Складывая векторы, соответствующие двум последним напряжениям, получим значение так называемой *реактивной* составляющей напряжения:

$$U_p = I_m (X_L + X_C) = I_m (L + 1/C). \quad (26.7)$$

С учетом (26.7) амплитуда напряжения на участке $a - R - C - L - b$ цепи

$$U_m = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I_m \sqrt{R^2 + (L + 1/C)^2}, \quad (26.8)$$

где $U_a = I_m R$ – *активная* составляющая напряжения.

Формула (26.8) имеет сходство с законом Ома в том смысле, что амплитуда напряжения U_m пропорциональна амплитуде тока I_m . Поэтому выражение (26.8) часто называют **законом Ома для участка цепи переменного тока**. Следует помнить, что эта формула справедлива лишь для амплитуд, но не для мгновенных значений тока и напряжения.

Величину

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (L + 1/C)^2} \quad (26.9)$$

называют *полным сопротивлением* цепи для переменного тока или *импедансом* цепи, а величину

$$X = \frac{U_p}{I_m} = L + 1/C \quad (26.10)$$

реактивным сопротивлением или *реактансом* цепи.

Из векторной диаграммы и проведенных вычислений понятно, что напряжение между точками $a - b$ участка $a - R - C - L - b$ цепи меняется по закону

$$U = U_m \sin(\omega t), \quad (26.11)$$

где сдвиг фаз между током и напряжением (см. рис. 26.5) равен

$$\arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{L + 1/C}{R}. \quad (26.12)$$

Мгновенное значение мощности тока равно произведению мгновенных значений тока и напряжения:

$$N = I U = I_m U_m \sin(\omega t) \sin(\omega t). \quad (26.13)$$

Практический интерес имеет среднее за период колебаний значение мощности. Представим (26.13) в виде

$$N = I_m U_m \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \cos(\omega t) \sin(\omega t)].$$

Следовательно, средняя мощность переменного тока за период колебаний:

$$N = \frac{I_m U_m}{T} \int_0^T [\sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \cos(\omega t) \sin(\omega t)]] dt;$$

$$N = \frac{I_m U_m}{T} \cos \int_0^T \sin^2(\omega t) dt - \sin \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt.$$

Учитывая, что за период колебаний

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}T; \quad \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0,$$

получаем

$$N = \frac{I_m U_m}{2} \cos \phi, \quad (26.14)$$

где величина $\cos \phi$ называется *коэффициентом мощности*.

Поскольку $U_m \cos \phi = I_m R$ (см. векторную диаграмму, представленную на рис. 26.5), то выражение (26.14) можно представить в виде

$$N = \frac{I_m^2 R}{2}. \quad (26.15)$$

Такую же мощность в этой цепи развивает постоянный ток силой

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad (26.16)$$

который называют *действующим* (или *эффективным*) значением силы тока (действующее значение синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, при котором за время, равное периоду синусоидального тока, во внешней цепи выделится такое же количество теплоты).

Аналогично величина

$$U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (26.17)$$

называется *действующим* (или *эффективным*) значением напряжения.

Выражение для средней мощности (26.14) через действующие значения силы тока и напряжения примет вид

$$N = I_d U_d \cos \phi. \quad (26.18)$$

Таким образом, выделяемая в цепи мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но еще и от сдвига фаз между током и напряжением. При $\cos \phi = 1$ средняя мощность $N = 0$, каковы бы ни были значения тока и напряжения. В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от генератора во внешнюю цепь, в точности равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода, и вся энергия бесполезно «колеблется» между генератором и внешней цепью.

Зависимость мощности от $\cos \phi$ необходимо учитывать при проектировании линий электропередачи на переменном токе. Если нагрузки имеют большое реактивное сопротивление X , то $\cos \phi$ может быть заметно меньше единицы. В этих случаях для передачи потребителю нужной мощности (при данном напряжении генератора) необходимо увеличивать ток, а это приводит к возрастанию потерь энергии в подводящих проводах. Поэтому стремятся распределять нагрузки, индуктивности и емкости так, чтобы $\cos \phi$ был по возможности близок к единице. Для этого достаточно сделать реактивное сопротивление X как можно меньше, то есть обеспечить равенство емкостного и индуктивного сопротивлений.

Выражение (26.14) можно получить и по-иному.

Найдем работу тока, совершающую в цепи, представленной на рис. 26.4, при наличии в ней переменного синусоидального тока.

Поскольку сила тока в цепи и напряжение на ее концах непрерывно меняются, то сначала найдем работу тока dA за бесконечно малый интервал времени dt , в течение которого ток и напряжение можно считать постоянными:

$$dA = I U dt.$$

Разложим напряжение U на активную и реактивную составляющие следующим образом (см. рис. 26.5):

$$U_a = U_m \cos \sin(-t); \quad U_p = U_m \cos \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где учтено, что реактивная составляющая напряжения U_p смещена относительно тока на $(\frac{\pi}{2})$ (если $L = 1/C$, то U_p смещена на $(\frac{\pi}{2})$), в противном случае – на $(-\frac{\pi}{2})$). Тогда работа тока за период, обусловленная активной и реактивной составляющими напряжения:

$$A_a = \int_0^T U_a I dt = I_m U_m \cos \int_0^T \sin^2(-t) dt = \frac{1}{2} T I_m U_m \cos; \quad (26.19)$$

$$A_p = \int_0^T U_p I dt = I_m U_m \sin \int_0^T \sin(-t) \cos(-t) dt = 0. \quad (26.20)$$

Следовательно, средняя мощность переменного тока за период равна

$$N = \frac{A}{T} = \frac{A_a}{T} = \frac{I_m U_m}{2} \cos,$$

что совпадает с (26.14).

Поскольку полная работа синусоидального тока в рассматриваемой цепи за период определяется только активной составляющей напряжения (см. выражения (26.19) (26.20)), то мощность, выделяемую в цепи, обычно называют *тепловой мощностью*.

В заключение отметим, что понятие активного сопротивления шире, чем понятие электрического сопротивления проводников, образующих цепь. Последнее обуславливает переход энергии тока только в теплоту, но возможны и другие превращения этой энергии, например, в механическую работу (электромоторы). Активное сопротивление тогда уже не сводится к электрическому сопротивлению, а обычно значительно превышает его.

Краткие выводы

1. *Реактивное сопротивление емкости для переменного тока*

$$X_C = \frac{1}{C}.$$

2. *Реактивное сопротивление индуктивности для переменного тока*

$$X_L = L.$$

3. *Реактивное сопротивление цепи для переменного тока или реактанс цепи*

$$X = L - \frac{1}{C}.$$

4. *Полное сопротивление цепи для переменного тока или импеданс цепи*

$$Z = \sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}.$$

5. Сдвиг фаз между током и напряжением для цепи переменного тока

$$\arctg \frac{L}{R} \frac{1/C}{R}.$$

6. Мгновенное значение мощности для цепи переменного тока

$$N = I_m U_m \sin(\phi) \sin(\omega t).$$

7. Среднее за период колебаний значение мощности для цепи переменного тока

$$N = \frac{I_m U_m}{2} \cos \phi = I_d U_d \cos \phi,$$

где $\cos \phi$ — коэффициент мощности;

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

действующие (или эффективные) значения тока и напряжения.

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Поясните понятие «сдвиг фаз» между током и напряжением.
2. Как связаны фазы напряжения на конденсаторе и тока в цепи переменного тока?
3. Как связаны фазы напряжения на индуктивности и тока в цепи переменного тока?
4. Нарисуйте и объясните векторную диаграмму напряжений для цепи переменного тока, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, конденсатора и катушки индуктивности.
5. От чего зависит сдвиг фаз между током и напряжением для цепи переменного тока, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, конденсатора и катушки индуктивности?
6. Что такое действующие значения тока и напряжения?

Задачи

1. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C и активного сопротивления R , подключена к источнику переменного напряжения $U = U_m \cos(\omega t)$, где U_m — амплитудное значение напряжения, ω — его частота. Определите:

- 1) амплитуду тока в цепи;
- 2) разность фаз между током и подаваемым напряжением.

Решение

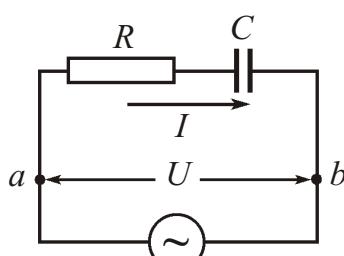
Запишем закон Ома для амплитуд тока и напряжения для цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора и активного сопротивления (рис. 1), в виде

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_C^2}},$$

где реактивное сопротивление конденсатора переменному току

$$X_C = 1/C.$$

Рис. 1 к задаче №1



Следовательно, амплитуда колебаний тока в цепи

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (1/C)^2}}.$$

Чтобы определить разность фаз между током и подаваемым напряжением, построим векторную диаграмму напряжений.

При последовательном соединении конденсатора и активного сопротивления через них будет течь одинаковый ток. Как известно, разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении равна нулю, а напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому вектор, соответствующий колебаниям напряжения на сопротивлении, будет иметь длину

$$U_{mR} = I_m R$$

и будет направлен вдоль оси тока, а вектор длиной

$$U_{mC} = I_m X_C,$$

изображающий колебания напряжения на конденсаторе, будет направлен относительно оси тока с отставанием на $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2, разность фаз между током и подаваемым напряжением

$$\operatorname{arctg} \frac{U_{mC}}{U_{mR}} = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{1}{CR}.$$

Ответ: 1) $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (1/C)^2}}$; 2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{CR}$.

2. Цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления R , подключена к источнику переменного напряжения $U = U_m \cos(\omega t)$, где U_m — амплитудное значение напряжения, ω — его частота. Определите:

- 1) амплитуду тока в цепи;
- 2) разность фаз между током и подаваемым напряжением.

Решение

Запишем закон Ома для амплитуд тока и напряжения для цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивности и активного сопротивления (рис. 1), в виде

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}},$$

где реактивное сопротивление катушки переменному току

$$X_L = \omega L.$$

Следовательно, амплитуда колебаний тока в цепи

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

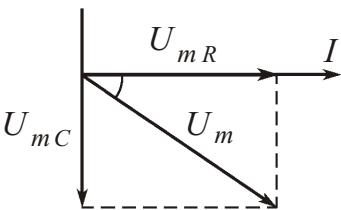


Рис. 2 к задаче №1

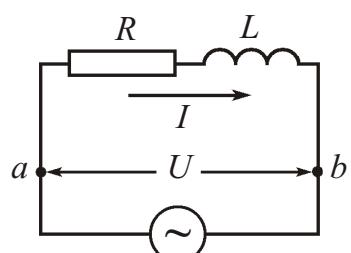
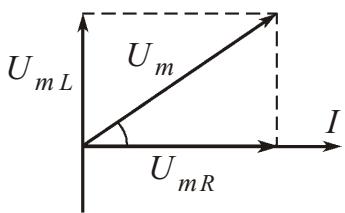


Рис. 1 к задаче №2



Чтобы определить разность фаз между током и подаваемым напряжением, построим векторную диаграмму напряжений.

При последовательном соединении катушки индуктивности и активного сопротивления через них будет течь одинаковый ток. Разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении равна нулю, а напряжение на катушке индуктивности опережает ток на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому вектор, соответствующий колебаниям напряжения на сопротивлении, будет иметь длину

$$U_{mR} = I_m R$$

и будет направлен вдоль оси тока, а вектор длиной

$$U_{mL} = I_m X_L$$

изображающий колебания напряжения на катушке индуктивности, будет направлен относительно оси тока с опережением на $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2, разность фаз между током и подаваемым напряжением

$$\arctg \frac{U_{mL}}{U_{mR}} = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{L}{R} .$$

Ответ: 1) $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2}}$; 2) $\arctg \frac{L}{R}$.

3. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления R , подключена к источнику переменного напряжения $U = U_m \cos(\omega t)$, где U_m — амплитудное значение напряжения, ω — его частота. Определите:

- 1) амплитуду тока в цепи;
- 2) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности;
- 3) разность фаз между током и подаваемым напряжением.

Решение

Запишем закон Ома для амплитуд тока и напряжения для цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности и активного сопротивления (рис. 1), в виде

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

где реактивные сопротивление конденсатора и катушки индуктивности переменному току

$$X_C = 1/C; \quad X_L = L.$$

Следовательно, амплитуда колебаний тока в цепи

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}.$$

Чтобы определить разность фаз между током и подаваемым напряжением, построим векторную диаграмму напряжений.

При последовательном соединении конденсатора, катушки индуктивности и активного сопротивления через них будет течь одинаковый ток. Разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении равна нулю, напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$, а напряжение на катушке индуктивности опережает ток на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому вектор, соответствующий колебаниям напряжения на сопротивлении, будет иметь длину

$$U_{mR} = I_m R$$

и направлен вдоль оси тока, вектор длиной (амплитуда напряжения на конденсаторе)

$$U_{mC} = I_m X_C = \frac{U_m}{C \sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}},$$

изображающий колебания напряжения на конденсаторе, будет направлен относительно оси тока с отставанием на $\frac{\pi}{2}$, а вектор длиной (амплитуда напряжения на катушке)

$$U_{mL} = I_m X_L = \frac{L U_m}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}},$$

изображающий колебания напряжения на катушке индуктивности, будет направлен относительно оси тока с опережением на $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2, разность фаз между током и подаваемым напряжением

$$\operatorname{arctg} \frac{U_{mL} - U_{mC}}{U_{mR}} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{L - 1/C}{R}.$$

Ответ: 1) $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}$; 2) $U_{mC} = \frac{U_m}{C \sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}$;
 $U_{mL} = \frac{L U_m}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{L - 1/C}{R}$.

4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления, подключена к источнику переменного напряжения, причем индуктивность катушки подобрана так, что ток в цепи максимален. Определите добротность цепи, если известно, что при увеличении индуктивности в n раз ток в цепи уменьшается в k раз.

Решение

Для решения задачи воспользуемся промежуточным результатом, полученными при решении задачи №3: амплитуда I_m переменного тока в цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления R , равна

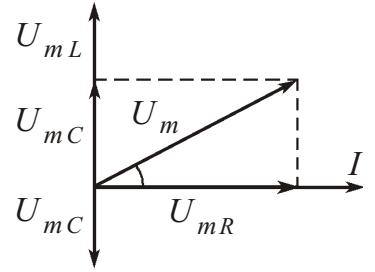


Рис. 2 к задаче №3

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}, \quad (1)$$

где U_m амплитудное значение напряжения, ω его частота.

Очевидно, чтобы ток в цепи был максимальен, знаменатель в выражении (1) должен быть как можно меньше. Поскольку индуктивность катушки подобрана так, что ток в цепи максимальен, то

$$L = \frac{1}{C}; \quad L = \frac{1}{\omega^2 C}. \quad (2)$$

В этом случае в цепи наблюдается так называемый резонанс токов, при котором максимум амплитуды тока

$$I_{m \text{рез}} = \frac{U_m}{R}. \quad (3)$$

При увеличении индуктивности в n раз ток в цепи

$$I_m = \frac{I_{m \text{рез}}}{k} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (nL - 1/C)^2}}. \quad (4)$$

Из уравнений (2) – (4) получим:

$$kR = \sqrt{R^2 + (nL - 1/C)^2}; \quad k^2 R^2 = R^2 + \frac{(n-1)^2}{(C)^2}; \quad R = \frac{n-1}{C \sqrt{k^2 - 1}}.$$

Поскольку цепь представляет собой ни что иное как колебательный контур, в котором происходят вынужденные колебания, то добротность цепи (см. выражение (24.36))

$$Q = \frac{L}{R} = L C^{-2} \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{n-1},$$

или с учетом (2)

$$Q = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{n-1}.$$

Ответ: $Q = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{n-1}$.

5. Определите действующее значение тока, если среднее его значение равно I_0 , а сам ток зависит от времени по закону, показанному на рисунке.

Решение

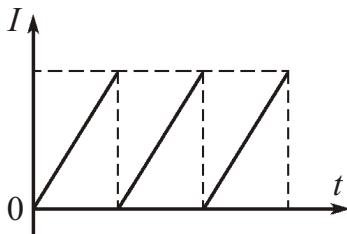


Рис. к задаче №5

По определению, действующее значение нестационарного тока численно равно значению такого постоянного тока, при котором за время, равное периоду нестационарного тока, во внешней цепи выделится такое же количество теплоты.

Поскольку сила тока изменяется по линейному закону

$$I = \frac{I_m}{T} t$$

(где $I_m = 2I_0$ – максимальный ток), то за период T на некотором активном сопротивлении R , через которое течет ток, выделится количество теплоты

$$Q = \frac{T}{0} I^2 R dt = \frac{T}{0} \frac{I_m^2}{T^2} t^2 R dt = \frac{I_m^2 R}{T^2} \frac{T}{0} t^2 dt = \frac{I_m^2 R T^3}{3 T^2} = \frac{I_m^2 R T}{3} = \frac{I_m^2 R}{3}.$$

При постоянном токе силой I_d , равном действующему значению данного нестационарного тока, на том же сопротивлении за такое же время выделится количество теплоты

$$Q = I_d^2 R \cdot t.$$

Следовательно,

$$I_d^2 R = \frac{1}{3} I_m^2 R ; \quad I_d = \frac{I_m}{\sqrt{3}} = \frac{2 I_0}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $I_d = 2 I_0 / \sqrt{3}$.

6. К источнику переменного напряжения с действующим напряжением U_d подключили катушку, индуктивное сопротивление которой равно X_L и импеданс Z . Определите разность фаз между током и напряжением, а также среднюю тепловую мощность, выделяемую в катушке.

Решение

Катушку индуктивности, обладающую активным сопротивлением R , можно рассматривать как катушку индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и сопротивление R , соединенные последовательно (см. рисунок). Тогда полное сопротивление такой катушки переменному току (импеданс цепи)

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad (1)$$

а разность фаз между током и напряжением (см. решение задачи №2)

$$\arctg \frac{X_L}{R},$$

или с учетом (1)

$$\arctg \frac{X_L}{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}. \quad (2)$$

Средняя тепловая мощность, выделяемая в катушке,

$$N = \frac{I_m U_m}{2} \cos \phi,$$

или с учетом закона Ома для амплитуд тока и напряжения $I_m = U_m/Z$

$$N = \frac{U_m^2}{2 Z} \cos \phi.$$

Выразив коэффициент мощности $\cos \phi$ из (2)

$$\operatorname{tg}^2 \phi = \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{X_L^2}{Z^2 - X_L^2}; \quad \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{X_L^2}{Z^2 - X_L^2}; \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z},$$

с учетом выражения для действующего напряжения

$$U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

окончательно получим:

$$N = U_d^2 \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2}.$$

Ответ: $\arctg \frac{X_L}{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}; \quad N = U_d^2 \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2}.$

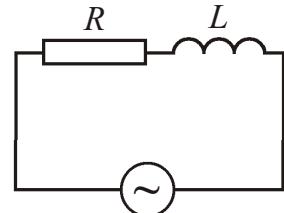


Рис. к задаче №6

7. Цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления, подключена к источнику переменного напряжения $U = U_m \cos(\omega t)$, где U_m амплитудное значение напряжения, ω его частота. При каком значении активного сопротивления в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность? Чему она равна?

Решение

Для решения задачи воспользуемся результатом, полученными при решении задачи №6: тепловая мощность, выделяемая в цепи

$$N = U_d^2 \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2},$$

где действующее напряжение

$$U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

реактивное сопротивление катушки переменному току и импеданс цепи

$$X_L = L; \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L)^2}.$$

Следовательно,

$$N = \frac{U_m^2}{2} \frac{R}{R^2 + (L)^2}. \quad (1)$$

Зависимость тепловой мощности, выделяемой в цепи, от величины активного сопротивления R , представлена на рисунке.

Как видим, при некотором значении $R = R_m$ в цепи выделяется максимальная мощность N_{\max} . Чтобы определить значение R_m , исследуем выражение (1) на экстремум:

$$\frac{dN}{dR} = \frac{U_m^2}{2} \frac{R^2 - (L)^2}{[R^2 + (L)^2]^2}; \quad R_m^2 - (L)^2 = 2R_m^2 - 0; \quad R_m = L.$$

Следовательно,

$$N_{\max} = \frac{U_m^2}{2} \frac{R_m}{R_m^2 + (L)^2} = \frac{U_m^2}{4} \frac{L}{L}.$$

Ответ: $R_m = L$; $N_{\max} = \frac{U_m^2}{4} L$.

8. Цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности с некоторым активным сопротивлением и активного сопротивления R , подключена к источнику переменного напряжения с действующим напряжением U_d . Определите тепловую мощность, выделяемую в катушке, если действующие напряжения на сопротивлении и катушке равны соответственно U_{d1} и U_{d2} .

Решение

Будем рассматривать катушку индуктивности, обладающую активным сопротивлением, как катушку индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и сопротивление r , соединенные последовательно. Тогда цепь примет вид, представленный на рис. 1.

При последовательном соединении катушки индуктивности и активных сопротивлений через них будет течь одинаковый ток.

Построим сначала векторную диаграмму напряжений на катушке.

Разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении r равна нулю, а напряжение на катушке индуктивности опережает ток на $\frac{1}{2}$. Поэтому вектор длиной $U_{mr} = I_m r$, соответствующий колебаниям напряжения на сопротивлении, будет направлен вдоль оси тока, а вектор длиной $U_{mL} = I_m X_L$ (где X_L реактивное сопротивление катушки переменному току), изображающий колебания напряжения на катушке индуктивности, будет направлен относительно оси тока с опережением на $\frac{1}{2}$ (рис. 2). Складывая рассматриваемые векторы, получаем амплитуду колебаний напряжения на катушке индуктивности с активным сопротивлением:

$$U_{m2} = \sqrt{U_{mr}^2 + U_{mL}^2}.$$

Как видно из рис. 2, между током и напряжением на катушке, обладающей активным сопротивлением, будет разность фаз .

Теперь построим векторную диаграмму напряжений для всей цепи.

Так как разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении R равна нулю, то вектор, соответствующий колебаниям напряжения на сопротивлении R , будет иметь длину $U_{m1} = I_m R$ и будет направлен по оси токов, а вектор длиной U_{m2} , соответствующий колебаниям напряжения на катушке, будет направлен к оси токов под углом (см. рис. 3). Следовательно, амплитуда колебаний напряжения

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 - 2 U_{m1} U_{m2} \cos(\phi)},$$

или через действующие напряжения

$$U_d = \sqrt{U_{d1}^2 + U_{d2}^2 - 2 U_{d1} U_{d2} \cos(\phi)}. \quad (1)$$

Тепловая мощность, выделяемая в катушке, выраженная через действующие значения тока и напряжения,

$$N = \frac{1}{2} I_m U_{m2} \cos(\phi) = I_d U_{d2} \cos(\phi), \quad (2)$$

где $I_d = U_{d1}/R$.

Из (1) – (2) окончательно получим:

$$U_d^2 = U_{d1}^2 + U_{d2}^2 - 2 U_{d1} U_{d2} \cos(\phi); \quad U_{d2} \cos(\phi) = \frac{U_d^2 - U_{d1}^2 - U_{d2}^2}{2 U_{d1}};$$

$$N = \frac{U_{d1} U_d^2}{R} - \frac{U_{d1}^2 + U_{d2}^2}{2 U_{d1}} = \frac{U_d^2 - U_{d1}^2 - U_{d2}^2}{2 R}.$$

Ответ: $N = \frac{U_d^2 - U_{d1}^2 - U_{d2}^2}{2 R}$.

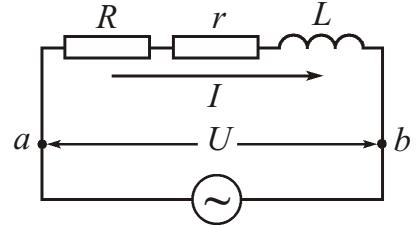


Рис. 1 к задаче №8

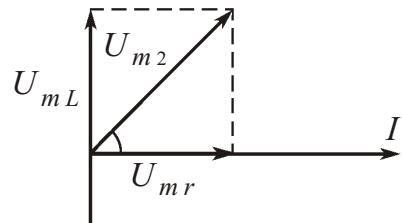


Рис. 2 к задаче №8

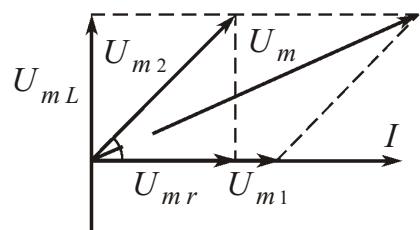


Рис. 3 к задаче №8

9. Определите полное сопротивление переменному току частотой участка цепи, состоящего из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и активного сопротивления R . Чему равна разность фаз между током и подаваемым напряжением?

Решение

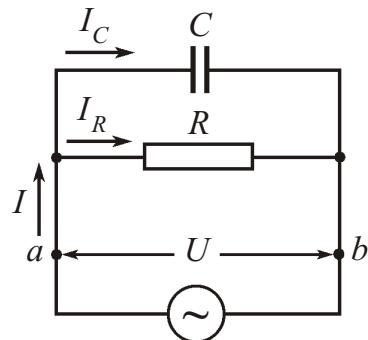


Рис. 1 к задаче №9

Запишем закон Ома для амплитуд тока и напряжения для элементов цепи, состоящей из параллельно соединенных конденсатора и активного сопротивления (рис. 1), в виде

$$I_{mC} = \frac{U_m}{X_C}; \quad I_{mR} = \frac{U_m}{R},$$

где реактивное сопротивление конденсатора переменному току

$$X_C = \frac{1}{C}.$$

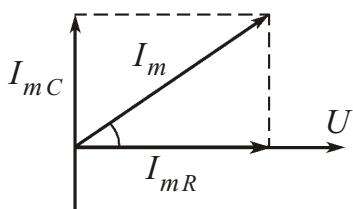


Рис. 2 к задаче №9

Разность фаз между током и напряжением на активном сопротивлении равна нулю, а ток через конденсатор опережает напряжение на $\frac{1}{2}$. Поэтому вектор, соответствующий колебаниям тока на сопротивлении, будет иметь длину I_{mR} и будет направлен вдоль оси напряжений, а вектор длиной I_{mC} , изображающий колебания тока через конденсатор, будет направлен относительно оси напряжений с опережением на $\frac{1}{2}$ (см. рис. 2).

Сложив рассматриваемые векторы, найдем амплитуду колебаний тока во внешней цепи:

$$I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + I_{mC}^2} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{C^2}} = \frac{U_m}{R} \sqrt{1 + \frac{1}{C^2 R^2}}.$$

Следовательно, полное сопротивление цепи переменному току

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{1}{C^2 R^2}}}.$$

Как видно из рис. 2, разность фаз между током и подаваемым напряжением

$$\operatorname{arctg} \frac{I_{mC}}{I_{mR}} = \operatorname{arctg} \frac{R}{X_C} = \operatorname{arctg} (\frac{1}{C} R).$$

Ответ: $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{1}{C^2 R^2}}}; \quad \operatorname{arctg} (\frac{1}{C} R).$

10. Цепь, состоящая из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L с активным сопротивлением r , подключена к источнику переменного напряжения с частотой ω . Определите разность фаз между током и подаваемым напряжением.

Решение

Будем рассматривать катушку индуктивности, обладающую активным сопротивлением, как катушку индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и сопротивление r , соединенные последовательно. Тогда цепь примет вид, представленный на рис. 1. В отличие от рассмотренных задач, здесь соединение элементов внешней цепи смешанное: сопротивление r и катушка индуктивности соединены между собой последовательно, а конденсатор присоединен к ним параллельно.

При последовательном соединении катушки индуктивности и активного сопротивления через них будет течь одинаковый ток. Построим сначала векторную диаграмму напряжений на катушке (рис. 2).

Для решения этой части задачи воспользуемся промежуточным результатом решения задачи №8: амплитуда колебаний напряжения на концах участка $L - r$:

$$U_{mLr} = \sqrt{U_{mr}^2 + U_{mL}^2}$$

а разность фаз между током и напряжением на участке

$$\arctg \frac{U_{mL}}{U_{mr}},$$

где U_{mr} — $I_{mLr}r$ и U_{mL} — $I_{mLr}X_L$ соответственно амплитуды колебаний напряжения на сопротивлении r и катушке; I_{mLr} — амплитуда колебаний тока на рассматриваемом участке; $X_L = L$ — реактивное сопротивление катушки переменному току. Следовательно,

$$U_{mLr} = I_{mLr} \sqrt{r^2 + (L)^2}; \quad \tg \phi_{Lr} = \frac{L}{r},$$

или

$$\cos \phi_{Lr} = \frac{U_{mr}}{U_{mLr}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (L)^2}}. \quad (1)$$

Теперь построим векторную диаграмму токов для соединенных параллельно конденсатора и катушки индуктивности с активным сопротивлением.

Поскольку ток через конденсатор опережает напряжение на $\frac{\pi}{2}$, а направление колебаний вектора, изображающего колебания напряжения на катушке с активным сопротивлением, совпадает с направлением подаваемого напряжения, то векторная диаграмма токов будет иметь вид, представленный на рис. 3 (где амплитуда тока через конденсатор $I_{mC} = U_m/X_C = U_m/C$), причем $U_{mLr} = U_m$.

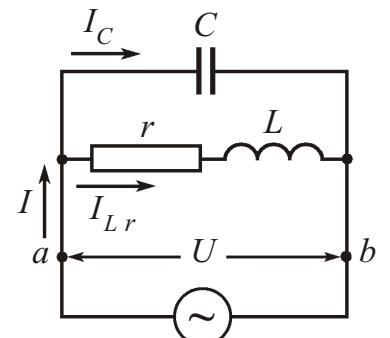


Рис. 1 к задаче №10

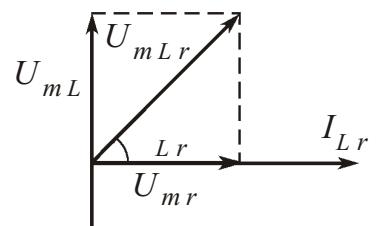


Рис. 2 к задаче №10

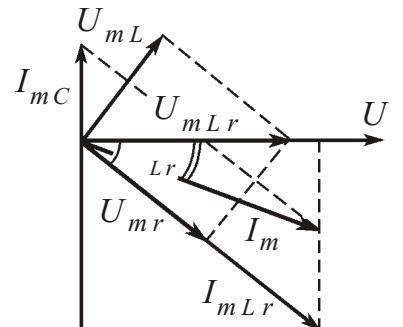


Рис. 3 к задаче №10

Как видно из рис. 3

$$\operatorname{tg} \frac{I_{mLr} \sin_{Lr}}{I_{mLr} \cos_{Lr}} = \operatorname{tg}_{Lr} \frac{I_{mC}}{I_{mLr} \cos_{Lr}}.$$

Отсюда с учетом (1) получим

$$\operatorname{tg} \frac{\frac{L}{r} \frac{U_m}{I_{mLr} r} C \sqrt{r^2 - L^2}}{\frac{L}{r}} = \frac{L}{r} \frac{C(r^2 - L^2)}{r} = \frac{L}{r} \frac{C(r^2 - L^2)}{r}.$$

Следовательно, разность фаз между током и подаваемым напряжением

$$\operatorname{arctg} \frac{L}{r} \frac{C(r^2 - L^2)}{r}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{L}{r} \frac{C(r^2 - L^2)}{r}$.

Задачи для самостоятельного решения

26.1. Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных конденсатора и активного сопротивления R , подключен к источнику переменного напряжения с амплитудой U_m . При этом амплитуда тока в цепи I_m . Определите разность фаз между током и подаваемым напряжением.

26.2. Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления, подключен к источнику переменного напряжения с амплитудой U_m и частотой . При этом амплитуда тока в цепи I_m . Определите разность фаз между током и подаваемым напряжением.

26.3. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L с активным сопротивлением R , подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой U_m и частотой . Считая, что ток в цепи опережает по фазе внешнее напряжение, определите амплитуду напряжения на катушке.

26.4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления, подключена к источнику переменного напряжения, частоту которого можно менять, не изменяя амплитуды. При частотах ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$ амплитуды тока в цепи оказались одинаковыми и в n раз меньше резонансной амплитуды. Определите резонансную частоту тока и добротность цепи при этой частоте.

26.5. Определите действующее значение тока, если среднее его значение равно I_0 , а сам ток зависит от времени по закону: $I \sim |\sin(\omega t)|$.

26.6. Катушку индуктивностью L с активным сопротивлением R подключили сначала к источнику постоянного напряжения U_0 , а затем к генератору синусоидального напряжения с действующим напряжением $U_d = U_0$. При какой частоте генератора тепловая мощность, выделяемая в катушке, будет в n раз меньше, чем в первом случае?

26.7. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора и катушки индуктивности с активным сопротивлением, подключена к источнику перемен-

ногого напряжения. Изменив емкость конденсатора, добились увеличения выделяемой тепловой мощности в катушке в n раз. На сколько процентов изменился при этом коэффициент мощности?

26.8. Определите полное сопротивление переменному току частотой участка цепи, состоящего из параллельно соединенных катушки индуктивностью L с пренебрежимо малым активным сопротивлением и активного сопротивления R . Чему равна разность фаз между током и подаваемым напряжением?

26.9. Катушка индуктивностью L с активным сопротивлением R и конденсатор емкостью C подключены параллельно к источнику переменного напряжения. Определите частоту, при которой наступает резонанс токов.

26.10. Катушка индуктивности с некоторым активным сопротивлением и активное сопротивление R подключены параллельно к источнику переменного напряжения. Определите тепловую мощность, выделяемую в катушке, если ток в неразветвленной части цепи равен I , а через катушку и активное сопротивление текут соответственно токи I_1 и I_2 .

Тесты

1. Конденсатор емкостью $C = 250 \text{ мкФ}$ подключен к источнику переменного напряжения частотой 50 Гц . Реактивное сопротивление конденсатора равно ...

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| A. $X_C = 12,7 \text{ Ом}$ | B. $X_C = 21,7 \text{ Ом}$ |
| C. $X_C = 27,1 \text{ Ом}$ | D. $X_C = 72,1 \text{ Ом}$ |

2. Катушка индуктивностью $L = 35 \text{ мГн}$ с пренебрежимо малым активным сопротивлением подключена к источнику переменного напряжения частотой 50 Гц . Реактивное сопротивление катушки равно ...

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| A. $X_L = 11 \text{ Ом}$ | B. $X_L = 22 \text{ Ом}$ |
| C. $X_L = 33 \text{ Ом}$ | D. $X_L = 44 \text{ Ом}$ |

3. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$ и активное сопротивление $R = 1 \text{ кОм}$ соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с действующим напряжением $U_d = 100 \text{ В}$ и частотой 100 рад/с . Определите амплитуду тока в цепи.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| A. $I_m = 1 \text{ А}$ | B. $I_m = 0,1 \text{ А}$ |
| C. $I_m = 10 \text{ А}$ | D. $I_m = 100 \text{ А}$ |

4. По участку ABD цепи, представленному на рисунке, течет переменный ток. На участке AB амплитудное значение напряжения равно $U_{AB} = 80 \text{ В}$, а на участке $BD - U_{BD} = 60 \text{ В}$. Определите амплитудное значение напряжения на участке AD .

Ответ: _____ В



Рис. к тесту №4

5. Катушка индуктивностью $L = 10 \text{ мГн}$ с активным сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$ подключена к источнику переменного напряжения с частотой 50 Гц . Амплитудное значение напряжения $U_m = 100 \text{ В}$. Определите действующее значения тока в цепи.

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| A. $I_d = 0,1 \text{ А}$ | B. $I_d = 12 \text{ А}$ |
| C. $I_d = 21 \text{ А}$ | D. $I_d = 0,21 \text{ А}$ |

6. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$ и катушка индуктивностью $L = 10 \text{ мГн}$ с пренебрежимо малым активным сопротивлением соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с действующим напряжением $U_d = 100 \text{ В}$ и частотой 100 рад/с . Определите действующее значения тока в цепи.

- A. $I_d = 1 \text{ А}$
B. $I_d = 10 \text{ А}$

- Б. $I_d = 0,1 \text{ А}$
Г. $I_d = 100 \text{ А}$



Рис. к тесту №7

Ответ: _____ В

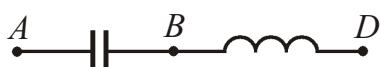


Рис. к тесту №8

Ответ: _____ рад/с

9. Конденсатор емкостью $C = 100 \text{ мкФ}$ и катушка индуктивностью $L = 20 \text{ мГн}$ с активным сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$ соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с действующим напряжением $U_d = 100 \text{ В}$ и частотой 50 Гц . Определите амплитудное значения тока в цепи.

- A. $I_m = 1,3 \text{ А}$
B. $I_m = 4,3 \text{ А}$

- Б. $I_m = 3,1 \text{ А}$
Г. $I_m = 6,3 \text{ А}$

10. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$ и катушка индуктивностью $L = 1 \text{ мГн}$ с пренебрежимо малым активным сопротивлением соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой 100 рад/с . Определите разность фаз между током и подаваемым напряжением.

- A. 0
B. $\frac{\pi}{2}$
Г.

11. Конденсатор емкостью $C = 50 \text{ мкФ}$, катушка индуктивностью $L = 10 \text{ мГн}$ с пренебрежимо малым активным сопротивлением и сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$ соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой 10^3 рад/с . Определите разность фаз между током и подаваемым напряжением.

- A. 0
B. $\frac{\pi}{4}$

- Б. $\frac{\pi}{2}$
Г. $\frac{3\pi}{4}$



Рис. к тестам №№12, 13

Ответ: _____ Ом

12. По участку AB цепи, представленному на рисунке, течет переменный ток. Сопротивления элементов цепи переменному току соответственно равны $R = 3 \text{ Ом}$, $X_L = 6 \text{ Ом}$ и $X_C = 2 \text{ Ом}$. Определите полное сопротивление участка цепи.

13. В неразветвленной части цепи переменного тока, представленной на рисунке, амплитудные напряжения на участках цепи соответственно равны $U_R = 40$ В, $U_L = 80$ В и $U_C = 50$ В. Определите напряжение между точками *A* и *B*.

Ответ: _____ В

14. По участку цепи, представленному на рисунке, течет переменный ток. Сопротивления элементов цепи переменному току соответственно равны $R = 3$ Ом, $X_L = 6$ Ом и $X_C = 2$ Ом. Определите коэффициент мощности.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| А. $\cos \theta = 0,2$ | Б. $\cos \theta = 0,4$ |
| В. $\cos \theta = 0,6$ | Г. $\cos \theta = 0,8$ |

15. В неразветвленной части цепи переменного тока, представленной на рисунке, действующие напряжения на участках цепи равны соответственно $U_R = 40$ В, $U_L = 80$ В и $U_C = 50$ В. Определите коэффициент мощности.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| А. $\cos \theta = 0,2$ | Б. $\cos \theta = 0,4$ |
| В. $\cos \theta = 0,6$ | Г. $\cos \theta = 0,8$ |

16. Конденсатор емкостью $C = 120$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 52$ мГн с активным сопротивлением $R = 15$ Ом соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения с действующим напряжением $U_d = 220$ В и частотой 50 Гц. Определите среднюю за период мощность тока.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| А. $N = 225$ Вт | Б. $N = 2,25$ кВт |
| В. $N = 22,5$ кВт | Г. $N = 225$ кВт |

17. Активное сопротивление и конденсатор соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения. Через сопротивление и конденсатор текут токи, амплитудные значения которых равны соответственно $I_R = 4$ А и $I_C = 3$ В. Определите амплитудное значение тока в неразветвленной части цепи.

Ответ: _____ А

18. Активное сопротивление $R = 10$ кОм и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой 100 рад/с. Определите разность фаз между током в неразветвленной части цепи и подаваемым напряжением.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| А. 0 | Б. $\frac{\pi}{4}$ |
| В. $\frac{\pi}{2}$ | Г. |

19. Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн с пренебрежимо малым активным сопротивлением и конденсатор емкостью $C = 15$ мкФ соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой 10 рад/с. Определите разность фаз между током в неразветвленной части цепи и подаваемым напряжением.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| А. 0 | Б. $\frac{\pi}{4}$ |
| В. $\frac{\pi}{2}$ | Г. |

20. Катушка индуктивностью $L = 20$ мГн с пренебрежимо малым активным сопротивлением и конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой 500 рад/с. Определите полное сопротивление участка цепи.

Ответ: _____ Ом



Рис. к тестам №№14, 15

Ответы к задачам

21.1. $L = \sqrt{\frac{2m}{qB} - r^2} = 26,5 \text{ см.}$

21.2. $n = \frac{|e|Bl}{2m \cos} = 14000.$

21.3. $F = \frac{3ULB}{2R}.$

21.4. $I_{\min} = \frac{mg}{2aB}.$

21.5. $A_{\text{мех}} = \frac{0}{2} II_0 a \ln \frac{2b}{2b-a} = 0,1 \text{ мкДж.}$

21.6. $B = \frac{0}{8} I \left(\frac{3}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$

21.7. $B = \frac{0}{4} I \sqrt{\frac{4}{R^2} - 1}.$

21.8. $B = \frac{0}{4} \frac{hI}{R^2}.$

21.9. $B = 0 nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 - L^2}}.$

21.10. $B = \frac{1}{2} \mu_0 R.$

22.1. $\Phi = \frac{1}{2} \mu_0 nIS.$

22.2. $\Gamma = 0(I_1 - I_2) = 3,77 \text{ мкТл м.}$

22.3. Между плоскостями $B = 0$; вне плоскостей $B = 0$.

22.4. $B(x-d) = \frac{1}{3} \mu_0 x^3; B(x+d) = \frac{1}{3} \mu_0 d^3.$

22.5. $B(r-R) = 0; B(r+R) = \frac{0}{2} \frac{I}{r}.$

22.6. $B(r-R_1) = \frac{0}{2} \frac{I}{r}; B(R_1-r-R_2) = \frac{0}{2} \frac{I}{r} \left(\frac{r^2}{R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) = 1; B(r-R_2) = \frac{0}{r} I.$

22.7. $B(r-R) = 0 \frac{r^2}{3}; B(r+R) = 0 \frac{R^3}{3r}.$

22.8. $r = \frac{R^2 - a^2}{a}.$

22.9. $B_{\min} = 0 \frac{NI}{D}; B_{\max} = 0 \frac{NI}{d}.$

22.10. $j(r) = r.$

23.1. $B = (1 - \mu_0) H = 1,26 \text{ Тл}; J = H = 3 \text{ А/м.}$

23.2. $B = \frac{0}{2} \frac{JR^2h}{(R^2 - x^2)^{3/2}}.$

23.3. 1) $B = B_0;$ 2) $H = B_0/\mu_0.$

23.4. $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$

23.5. $\Phi = \frac{B_0 S (\sin \alpha - 1)}{\mu_0}.$

23.6. $\Gamma = B_0 a (\sin \alpha - 1) \sin \beta.$

23.7. $I_{\text{мол}} = (\sin \alpha - 1) I.$

23.8. $A = \frac{(\sin \alpha - 1) VB^2}{2 \mu_0}.$

23.9. $H = \frac{B_0 b}{\mu_0 (d - b)} = \frac{B_0 b}{\mu_0 d} = 101 \text{ А/м.}$

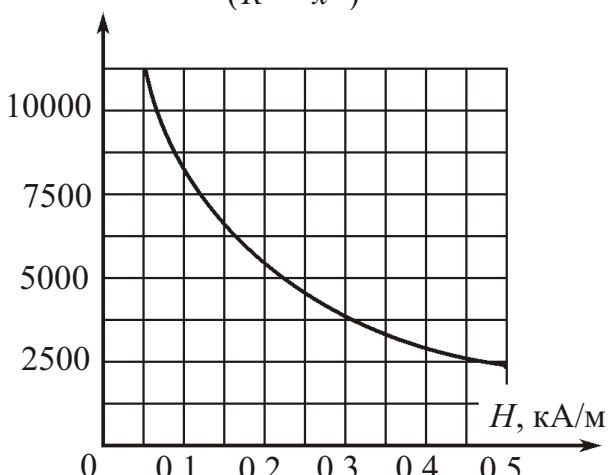


Рис. к ответу задачи №23.10

23.10. См. рисунок; $H = 0,05$ кА/м; $I_{\max} = 8000$.

$$24.1. q = \frac{B l^2}{16 R}.$$

$$24.3. Q = \frac{m_0^2}{2}.$$

$$24.5. a = \frac{m g (\sin \theta - \cos \phi)}{m C B^2 l^2}.$$

$$24.7. I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - \exp(-\frac{R}{2L} t)).$$

$$24.9. W = \frac{I_0^2 l}{4} \ln \frac{r}{R}.$$

$$24.10. I = C U_{\max} \sin(\omega_0 t), \text{ где } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

$$24.11. I = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} U_{\max}.$$

$$24.13. t = \frac{2Q}{\mathcal{E}} \ln n.$$

$$24.15. N = \frac{4 \pi R C}{\ln n \sqrt{4LC - R^2 C^2}}.$$

$$25.1. |j_{\text{cm}}| = \frac{\omega_0 a U_0 t}{(d - \frac{1}{2} a t^2)^2}.$$

$$25.3. I_{\text{cm max}} = \sqrt{2C W} \Big|_{t=0}.$$

$$25.5. j_{\text{cm}} = \frac{q}{4 \pi r^2}.$$

$$25.6. j_{\text{cm}}(r=R) = \frac{1}{2} B r; j_{\text{cm}}(r=R) = \frac{1}{2} B R^2/r, \text{ где } B = \omega_0 n^{-2} I_{\max} \sin(\omega_0 t).$$

$$25.7. \frac{W_{E \max}}{W_{B \max}} = \frac{1}{8} \omega_0^2 R^2.$$

$$25.9. 1) I = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_0 / \omega_0} E_{\max}^2; 2) w = \frac{1}{2} \omega_0 E_{\max}^2; 3) j_{\text{cm max}} = 2 \omega_0 E_{\max}.$$

$$25.10. P = \omega_0 H_{\max}^2.$$

$$26.1. \arctg \sqrt{(U_m/R I_m)^2 - 1}.$$

$$26.3. U_{mL} = \frac{U_m L}{\sqrt{R^2 + (L - 1/C)^2}}.$$

$$26.5. I_{\Delta} = \frac{I_0}{\sqrt{8}}.$$

26.7. Увеличился на $(\sqrt{n} - 1)\%$.

$$26.9. \text{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

$$24.2. \mathcal{E}_i = \frac{I_0 a^2}{2 \pi (x - a)}.$$

$$24.4. B = \sqrt{\frac{m g R \operatorname{tg} \theta}{l^2}}.$$

$$24.6. I = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right).$$

$$24.8. Q = \frac{L \mathcal{E}^2 R_2}{2 R_1^2 (R_1 - R_2)}.$$

$$24.12. I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{C_1 - C_2}{L}}.$$

$$24.14. t = \frac{2L}{R} \ln n.$$

$$25.2. j_{\text{cm}} = \frac{U_0}{2 S R}.$$

$$25.4. H_{\max} = \frac{r U_{\max}}{2 d} \sqrt{\omega^2 + (\omega_0 - \omega)^2}.$$

$$25.8. \Phi = I^2 R.$$

$$26.2. \arctg \frac{1}{\sqrt{(U_m/I_m - L)^2 - 1}}.$$

$$26.4. \text{рез} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2}; Q = \frac{\sqrt{1 - 2} (n^2 - 1)}{2 - 1}}.$$

$$26.6. \frac{R \sqrt{n - 1}}{L}.$$

$$26.8. Z = \frac{R - L}{\sqrt{R^2 - L^2}}; \quad \arctg \frac{R}{L}.$$

$$26.10. N = \frac{1}{2} (I^2 - I_1^2 - I_2^2) R.$$

Ответы к тестам

№ задания	§21	§22	§23	§24	§25	§26
1	A	A	A	B	B	A
2	30	B	B	A	15	A
3	B	A	B	B	A	B
4	B	B	A	Г	A	100
5	B	A	Г	20	B	B
6	B	B	50	B	0	B
7	800	B	A	Г	B	50
8	B	B	B	A	B	2000
9	1	0	B	5	B	B
10	A	B	A	A	Г	B
11	12	20	A	1	40	B
12	B	40	B	225	Г	5
13	A	5	A	B	2	50
14	200	B	B	B	B	B
15	B	B	A	200	B	Г
16	9	B	B	B	B	B
17	4	5	Г	B	A	5
18	Г	1	101	B	B	B
19	B	2	Г	B	B	B
20	B	B	6000	10	50	20

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.: Наука, 1991.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М.: Наука, 1988.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т.3. Электричество. М.: Наука, 1983.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 2002.
5. Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Хайкин С. Э., Эльцин И. А., Яковлев И. А. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. Т.3/ Под ред. И. А. Яковлева. М.: Физматлит, 2005.
6. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1988.
7. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. СПб.: СпецЛит, 2002.
8. Лаушкина Л. А., Солохина Г. Э., Хохлачева Г. М. Практический курс физики. Электричество/ Под ред. Г. Г. Спирина. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 2008.
9. Анисимов В. М., Лаушкина Л. А., Третьякова О. Н. Физика в задачах/ Под ред. О. Н. Третьяковой. 4-е изд. М.: Вузовская книга, 2012.
10. Бабецкий В. И., Третьякова О. Н. Прикладная физика. Механика. Электромагнетизм. М.: Высшая школа, 2005.
11. Демков В. П., Третьякова О. Н. Физика. Теория. Методика. Задачи. М.: Высшая школа, 2001.
12. Демков В. П., Третьякова О. Н. Физика. Молекулярная физика. Тепловые явления. Электричество и магнетизм. 5-е изд., перераб. М.: Изд-во МАИ, 2006.
13. Турчина Н. В., Рудакова Л. И., Суров О. И. и др. 3800 задач по физике. М.: Дрофа, 2000.
14. Демков В. П., Суров О. И. Физика. Механика. Кинематика. Динамика. Законы сохранения. М.: Изд-во МАИ, 2017.
15. Демков В. П., Суров О. И. Физика. Механика. Вращательное движение. Механические колебания и волны. Специальная теория относительности. М.: Изд-во МАИ, 2018.
16. Демков В. П., Суров О. И., Ципенко А. В. Физика. Молекулярная физика. Тепловые явления. М.: Изд-во МАИ, 2019.
17. Демков В. П., Суров О. И., Ципенко А. В. Физика. Электродинамика. Электросстатика. Постоянный ток. М.: Изд-во МАИ, 2020.

Оглавление

§21. Магнитное поле в вакууме	3
21.1. Магнитная сила. Сила Лоренца	4
21.2. Сила Ампера	6
21.3. Магнитное поле движущегося заряда	9
21.4. Закон Био – Савара – Лапласа	10
21.5. Расчет магнитного поля с помощью принципа суперпозиции	11
Краткие выводы	13
Вопросы для самоконтроля и повторения	14
Задачи	15
Задачи для самостоятельного решения	25
Тесты	26
§22. Теоремы магнитостатики	29
22.1. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции	29
22.2. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции	29
22.3. Векторный потенциал	31
22.4. Расчет магнитного поля с помощью теорем магнитостатики	32
Краткие выводы	35
Вопросы для самоконтроля и повторения	36
Задачи	36
Задачи для самостоятельного решения	45
Тесты	46
§23. Магнитное поле в веществе	49
Классификация магнетиков	53
Краткие выводы	56
Вопросы для самоконтроля и повторения	57
Задачи	57
Задачи для самостоятельного решения	67
Тесты	69
§24. Электромагнитная индукция	72
24.1. Закон электромагнитной индукции	73
24.2. Самоиндукция	75
24.3. Токи замыкания и размыкания цепи	77
24.4. Энергия магнитного поля	78
24.5. Электрические колебания	79
Краткие выводы	82
Вопросы для самоконтроля и повторения	84
Задачи	85
Задачи для самостоятельного решения	100
Тесты	102

§25. Уравнения Maxwellа	106
25.1. Ток смещения	106
25.2. Уравнения Maxwellа	108
25.3. Электромагнитные волны	109
25.4. Свойства электромагнитных волн	110
Краткие выводы	114
Вопросы для самоконтроля и повторения	115
Задачи	115
Задачи для самостоятельного решения	127
Тесты	128
§26. Переменный ток	131
Краткие выводы	135
Вопросы для самоконтроля и повторения	136
Задачи	136
Задачи для самостоятельного решения	146
Тесты	147
Ответы к задачам	150
Ответы к тестам	152
Библиографический список	153

Тем. план 2020, поз. 14

Демков Владимир Павлович
Суров Олег Иванович
Ципенко Антон Владимирович

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
Магнетизм. Переменный ток

Редактор *Л. А. Митина*
Компьютерная верстка *В. П. Демкова*

Подписано в печать 4.03.2020.
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 9,75. Тираж 500 экз.
Зак. 1083/766.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993