③ Теорема Гаусса для $\vec E$ в вакууме

$$\Phi_{\vec E} = \oint_S \underbrace{\vec E\cdot\overbrace{\vec n\, dS}^{d\vec S}}_{d\Phi_{\vec E}} = \frac{Q_{V_S}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_S}\rho_э(\vec r)\,dV \qquad (12)$$

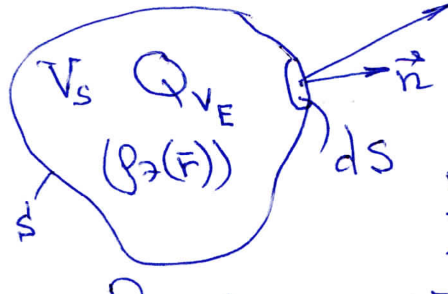

Рис. 1.

Поток $\vec E$ через произвольную замкнутую поверхность S в направлении системы внешних нормалей $\vec n$ равен суммарному заряду Q_{V_S}, сосредоточенному в объеме V_S, окруженном поверхностью, деленному на ε_0.

Замечание: поверхность S м.б. гипотетической, заряд непосредственно на ней не учитывается. Теорема не является самостоятельным физ. законом, а следует из з-на Кулона (3) и принципа суперпозиции. Заряды в V_S могут быть и дискретными, тогда Q_{V_S} – их сумма.

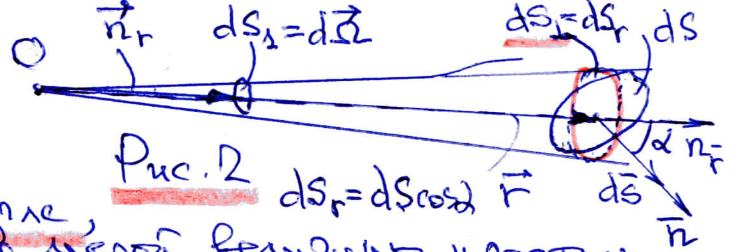

Рис. 2

Для доказательства (12) нам понадобится понятие телесного угла, который в узком смысле является мерой величины пространственных конусов (подобно тому, как обычный угол в плоскости на плоскости). В этом смысле телесный угол – площадь, которую вырезает конус (например, диапазон направлений) на сфере единичного радиуса с центром в вершине конуса. Поэтому max величина телесного угла $\Omega_{max} = 4\pi$ (площадь сферы $r = 1$). Такой телесный угол ассоциируется со множеством всех возможных направлений в пространстве из (·) O: векторы $\vec n_r$ ($n_r = 1$) всех направлений (см. рис. 2) покрывают своими концами сферу $r = 1$ площадью 4π.

Но плоский угол может быть определен и как алгебраический (т.е. имеющий знак). Поэтому сразу дадим алгебраическое определение и телесного угла, который может быть как положительным, так и отрицательным.

Пусть имеется конус с вершиной O, ограничивающий произвольно ориентированный в пространстве элемент поверхности dS (рис. 2). Его ориентация задается нормалью $\vec n$, а положение – некоторым вектором $\vec r$, лежащим внутри конуса. Поскольку dS – мал, он плоский. Вектор $\vec n_r = \vec r/r$ в точке $\vec r$ – локальная нормаль к сфере радиуса r. При этом (как нетрудно сообразить) участок dS_r этой сферы внутри конуса имеет площадь

$$dS_r = r^2 dS_1 = dS\cos\alpha = dS\,\vec n\cdot\vec n_r = d\vec S\cdot\vec n_r \qquad (13)$$

dS_1 – элемент площади сферы $r = 1$ в пределах конуса, т.е. имеет геометрическую трактовку телесного угла. Например, введя сферические координаты с центром в (·) O $dS_1 = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ (θ, φ – полярный угол и азимут).

Определим алгебраический телесный угол из (13):

$$d\vec\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{dS\,\vec n\cdot\vec n_r}{r^2} = \frac{\vec n_r\cdot d\vec S}{r^2} \qquad (14)$$

Понятно, что знак $d\vec\Omega$ определяется $\cos\alpha$, а $|d\vec\Omega| = dS_1$. Поменяв на рис. 2 нормаль $\vec n$ на противоположную, мы получим отрицательный телесный угол.

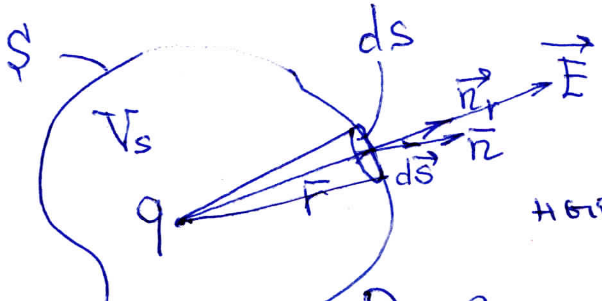

Рис.3а

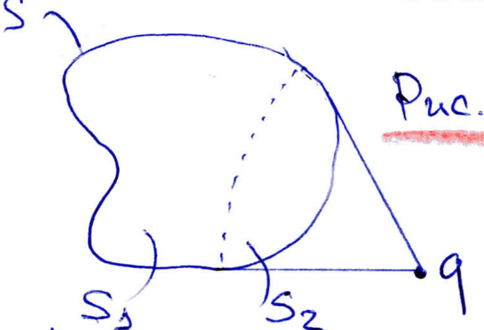

Рис.3б

Докажем сначала теорему Гаусса для точечного заряда q. Будем для определенности считать q > 0. Тогда для поля $\vec E_q(\vec r)$ элементарный поток

$$d\Phi_{\vec E_q} = \vec E_q(\vec r)\cdot d\vec S \overset{(3)}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}\cdot\vec n\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\,\vec n\cdot\vec n_r}{r^2} \underset{(14)}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\vec\Omega \quad (15)$$

В ситуации на рис.3а $d\vec\Omega > 0$ и интегрируя по S мы интегрируем по полному диапазону направлений из (·) q, т.е. по 4π. Поэтому для Рис.3а

$$\Phi_{E,S} = \int_{(4\pi)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\vec\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (15a)$$

Для случая на рис.3б $\vec n\cdot\vec n_r > 0$ на участке S_1 пов-ти S, и < 0 на участке S_2 пов-ти S. Поскольку оба участка находятся в пределах одного конуса с вершиной в q (пунктиром показана линия точек касания S и конуса)

$$\int_{S_1} d\vec\Omega = -\int_{S_2} d\vec\Omega \Rightarrow \oint_S d\vec\Omega = \int_{S_1} d\vec\Omega + \int_{S_2} d\vec\Omega = 0 \Rightarrow \Phi_{E,S} = 0 \quad (15b)$$

Как видим, для поля точечного заряда теорема (12) справедлива. А т.к. поток – линейный функционал напряженности, напряженность, как и заряд аддитивны (принцип суперпозиции), (12) справедлива и для системы точечных зарядов. Понятно, что она будет верна и для распределенной модели заряда, в качестве точечных в которой рассматриваются заряды малых элементов объема $\rho_э(\vec r)dV$.

Замечания:

1. Поток (12) определяется только суммарным зарядом в V_S. Если заряды внутри V_S перемещаются, но ни один из них не пересекает S, то Φ_E не будет меняться, несмотря на то, что $\vec E$ в точках S меняться, конечно, будет. Это удивительное свойство присуще всем центральным полям (т.к. в частности для них справедлива теорема (12)), и, например, для классического гравит. поля тоже.
2. В общем случае, как уравнение относительно $\vec E$ теорема (12) абсолютно бесполезна, т.к. представляет собой скалярное уравнение с бесконечным числом неизвестных $E_n(\vec r)$, $\vec r \in S$. Однако если находятся такие замкнутые поверхности S, для которых выполняется условие

$$E_n(\vec r) = const \quad \forall \vec r \in S \quad (16)$$

то интегральное уравнение (12) превращается в алгебраическое

$$E_n S = q_{V_S}/\varepsilon_0 \quad (17)$$

и элементарно решается. На этом основано практическое применение интегральной теоремы (12) (см. примеры далее).

3. Оказывается, что замк. пов-ти (16) ∃ всегда. Но это не гарантирует успешное применение (12) для расчета $\vec{E}$: форма поверхности, распределение заряда Q_{VS} могут быть настолько сложными, что ни S, ни Q_{VS} подобрать не удастся. Поэтому с помощью (12) удается рассчитать $\vec{E}$ в ситуациях, максимально простых геометрически: симметричных (высоко) полях, однородных распределениях заряда и пр.

4. С помощью (12) можно определить, строго говоря, только E_n. Касательную компоненту поля E_τ в точках S приходится определять из каких-то дополнительных соображений. Все это требует детального анализа свойств поля, его структуры, хода силовых и пр.
Но если все эти проблемы преодолены, расчет поля сводится к (17). В этом плане т. Гаусса дает эффективную альтернативу методу суперпозиции.

Теорема Ирншоу (1842г.) – следствие (12)

Любая равновесная система точечных зарядов не может быть устойчивой.

Действительно, выберем какой-либо заряд q равновесной системы и отделим его от остальных какой-либо замкнутой S (рис.4).

рис.4.

Тогда, если предположить, что равновесное положение q устойчиво, то векторы напряженности на S должны быть ориентированы, как на рис.4 (случ. $q>0$). Они должны возвращать q в первоначал. положение при ∀ отклонении от него! Но поле $\vec{E}$ создается всеми остальными зарядами системы, кроме q. Согласно (12) поток $\Phi_{\vec{E},S}$ для таких полей $=0$. Это противоречит рис.4, для которого $\Phi_{\vec{E},S}<0$ (берутся внешние $\vec{n}$). Противоречие и доказывает теорему.

Примеры применения (12) для расчета $\vec{E}$

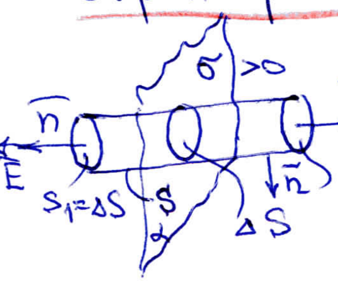

рис.5.1.

П.1. Бесконечная равномерно заряженная плоскость ($\sigma = const$, >0, например), рис.5.1.

$E_n=0$ на $S_{бп}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} = 2E_n\Delta S$

$E_\tau = 0$ (иначе не будет $\sigma = const$)

$$\therefore E_n = E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (18)$$

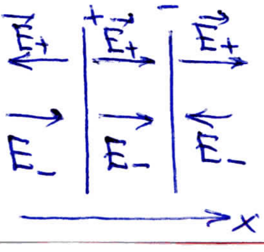

рис.5.2.

П.2. Пара таких же плоскостей (рис.5.2). Если $\sigma_- = -\sigma_+$, то поле сосредоточ. между плоск.: $E_\Sigma = 2E_+ = \sigma/\varepsilon_0$ (19)

П.3. Однородный бесконечный прямой круговой цилиндр (полый), бесконечная прямая нить.

(20) $E_r = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, поле осесимметрично, $\tau = const$, r – расстояние до оси (нити). Внутри цилиндра поля нет ($E_r = 0$ при $r < R_ц$).

П.4. Однородно заряженный шар R, $\rho = const$. Поле центрально

(21) $$E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\rho r, & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}, \quad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

П.5. Однородная сфера R, q. Поле центрально, в объеме ограниченном сферой $= 0$. Снаружи сферы, как и вне шара, см. (21).

В заключение, что теорема (12) имеет исключительно ограниченную область применения очевидно, т.к. это уравнение может быть записано в локальной (дифференциальной) форме, обладающей гораздо большими возможностями. Для её вывода вспомним математическую теорему Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \mathrm{div}\,\vec{a}\, dV, \qquad (22)$$

в которой $\mathrm{div}\,\vec{a} = \lim_{V_S \to 0} \dfrac{1}{V_S} \oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ (23) – дивергенция, истинный скаляр, форма которого определяется выбранной системой координат. В (23) приведена декартовая форма.

Преобразуя л.ч. (12) с помощью (22), получим

$$\int_{V_S} \mathrm{div}\,\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_S} \rho_з(\vec{r})\, dV \Longrightarrow_{\forall V_S} \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_з}{\varepsilon_0} \qquad (24)$$

(24) и есть искомая локальная форма. Условие $\forall V_S$ при её выводе является ключевым (т.к. из равенства сумм $2+2+2 = 1+2+3$ не следует какая-либо связь слагаемых; но если число слагаемых при этом произвольно (аналог условия $\forall V_S$), то из равенства сумм $\Rightarrow$ равенство слагаемых).

В отличие от (12), в (24) только одна неизвестная $\vec{E}(\vec{r})$, хотя и векторная. Но это скалярное ур-е замыкается, если учесть еще одно важное св-во э/с поля – его потенциальность.