

*Федеральное агентство по образованию*

**АССОЦИАЦИЯ КАФЕДР ФИЗИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ  
РОССИИ**



*Г.М. Хохлачева, Л.А. Лаушкина, Г.Э. Солохина*

**Практический курс физики  
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО**

**Под редакцией проф. Г.Г. Спирина**

*Допущено Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебного  
пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по направлениям подготовки  
и специальностям в области техники и технологии*

**Москва**

ББК 16.4.5

Б43

Рецензенты:

Кафедра физики МГТУ ГА, зав. кафедрой: доктор технических наук, профессор Камзолов С.К.

Доктор ф.-м. наук, профессор МГУ Знаменская И.А.

Б43

**Хохлачева Г.М., Лаушкина Л.А., Солохина Г.Э.**

**Практический курс физики. Электричество/** Под ред проф. Г.Г.Спирина. - М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008. - 182 с.

ISBN 5-903111-01-7

Данное пособие разработано в соответствии с программой курса физики для ВТУЗов по разделу “Электричество” и состоит из восьми глав. Каждая глава включает в себя краткое теоретическое введение, разбор типовых задач по рассматриваемому вопросу и подборку задач для самостоятельного решения.

Задачи могут быть использованы для проведения практических занятий со студентами, при составлении контрольных работ и домашних заданий. В конце пособия приводятся ответы к задачам для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов дневного и вечернего отделений.

**ББК 16.4.5**

ISBN 5-903111-01-7

© Г.М.Хохлачева, Л.А.Лаушкина,  
Г.Э.Солохина 2008 г.

## ***СОДЕРЖАНИЕ***

СОДЕРЖАНИЕ -----	3
ПРЕДИСЛОВИЕ -----	5
1. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ-----	6
Основные понятия и законы -----	6
Примеры решения задач -----	10
Задачи для самостоятельного решения-----	20
2. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ -----	30
Основные понятия и законы -----	30
Примеры решения задач -----	32
Задачи для самостоятельного решения-----	40
3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ. ДИЭЛЕКТРИКИ. ПРОВОДНИКИ. КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ -----	49
Основные понятия и законы -----	49
Примеры решения задач -----	53
Задачи для самостоятельного решения-----	63
4. ЗАКОН БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ-----	72
Основные понятия и законы -----	72
Примеры решения задач -----	74
Задачи для самостоятельного решения-----	82
5. СИЛЫ ЛОРЕНЦА И АМПЕРА. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ -----	89
Основные понятия и законы -----	89
Примеры решения задач -----	92
Задачи для самостоятельного решения-----	99
6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ -----	105
Основные понятия и законы -----	105
Примеры решения задач -----	107
Задачи для самостоятельного решения-----	113
7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ -----	119
Основные понятия и законы -----	119
Примеры решения задач -----	124
Задачи для самостоятельного решения-----	131
8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ -----	136
Основные понятия и законы -----	136
Примеры решения задач -----	140
Задачи для самостоятельного решения-----	147

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ -----	153
1. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля --	153
2. Потенциал электростатического поля. Работа по перемещению заряда. Движение зарядов в электростатическом поле-----	157
3. Электрический диполь. Диэлектрики. Проводники. Конденсаторы. Энергия электростатического поля -----	161
4. Закон Био – Савара - Лапласа. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции-----	165
5. Силы Лоренца и Ампера.-----	168
Контур с током в магнитном поле -----	168
6. Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля -----	170
7. Электромагнитные колебания -----	172
8. Уравнения Максвелла. Ток смещения.	
Электромагнитные волны -----	175
ПРИЛОЖЕНИЕ -----	178
Некоторые фундаментальные физические постоянные -----	178
ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ № 1 (1 часть) -----	179
ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ № 2 (1 часть) -----	181
ЛИТЕРАТУРА -----	182

## ***ПРЕДИСЛОВИЕ***

Настоящее учебное пособие посвящено разделу “Электричество” по программе курса общей физики для ВТУЗов. Целью пособия служит приобретение студентами практического навыка в решении физических задач по данному разделу.

Пособие состоит из восьми глав. Каждая глава начинается с краткого теоретического введения, в котором приведены основные физические понятия и законы. Далее излагается подробное решение типовых задач с соответствующими методическими указаниями.

В конце каждой главы подобраны задачи для самостоятельного решения, ответы к которым приводятся в заключительной части пособия. По этим задачам составлены варианты индивидуальных домашних заданий для студентов всех факультетов.

Авторы выражают благодарность преподавателям кафедры физики МАИ, участвовавшим в более ранних изданиях пособия «Практический курс физики. Электричество», а также отмечают огромный вклад Юрьевич К.Б. в подготовку к изданию предыдущей редакции этого пособия. Ценный опыт и методические наработки были учтены при подготовке данного издания.

Авторы будут признательны за критические замечания и рекомендации, которые послужат улучшению качества этой работы. Пожелания направлять по адресу: 125871, Москва, Волоколамское шоссе, д.4, МАИ, кафедра физики, по электронному адресу: [Spirinas@mail.ru](mailto:Spirinas@mail.ru), или по телефонам: (095) 158-42-71, 158-46-43.

## 1. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### Основные понятия и законы

Опыт показывает, что два точечных электрических заряда, расположенных в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой, определяемой законом Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

где электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{N \cdot m^2}$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N}{C^2}$ .

Конец радиуса-вектора  $\vec{r}$  расположен на заряде, на который действует сила  $\vec{F}$  (рис.1.1.), а величины зарядов  $q_1$  и  $q_2$  входят в формулу (1.1) со своими знаками.

В скалярной форме закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.2)$$

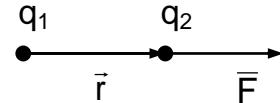


Рис.1.1

Закон Кулона в виде (1.1) или (1.2) справедлив только для точечных электрических зарядов.

Электрическое взаимодействие зарядов осуществляется посредством электрического поля. Электрическим полем называется материальная среда, в которой осуществляется действие электрических сил (1.1), (1.2) на электрические заряды, помещенные в эту среду. Таким образом, источником электрического поля может являться любой электрический заряд.

Важнейшими характеристиками электрического поля являются напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$ .

*Напряженность*  $\vec{E}$  - это силовая характеристика электрического поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (1.3)$$

Напряженность электростатического поля, созданного точечным электрическим зарядом  $q$ , в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.4)$$

или скалярной форме

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.5)$$

*Принцип суперпозиции:* напряженность поля системы точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.6)$$

где  $n$  – число зарядов в системе. В случае  $n = 2$  модуль вектора напряженности находится по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos\alpha}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ .

Используя формулы (1.5) и (1.6) можно найти напряженность поля от заряженного тела произвольной формы. Для этого необходимо разбить тело на точечные заряды, напряженность которых находится по формуле (1.5). Далее по принципу суперпозиции (1.6) определить результирующую напряженность от всех точечных зарядов, на которые разбито тело.

*Силовой линией* электростатического поля (или линией вектора напряженности  $\vec{E}$ ) называется линия, касательная в каждой точке к которой, совпадает по направлению с вектором напряженности  $\vec{E}$  в этой точке (рис.1.2).

Силовая линия электрического поля начинается на положительном заряде и заканчивается на отрицательном заряде. Силовые линии “уходят” на бесконечность от положительного заряда, или “приходят” из бесконечности к отрицательному заряду (рис.1.3).

Вблизи зарядов, где напряженность электростатического поля больше, силовые линии расположены гуще, поэтому число силовых линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную направлению  $\vec{E}$ , должно быть пропорционально величине напряженности поля в данном месте.

Электростатическое поле называется *однородным*, если во всех его точках значения вектора напряженности  $\vec{E}$  одинаковы, т.е. совпадают по модулю и направлению. Электростатическое поле *неоднородно*, если в каждой точке значение напряженности поля имеет разное значение.

Вычисление величины напряженности электростатического поля для тел правильной геометрической формы сильно упрощается, если пользоваться теоремой Остроградского - Гаусса.

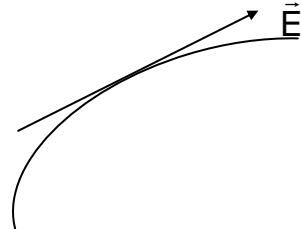


Рис.1.2

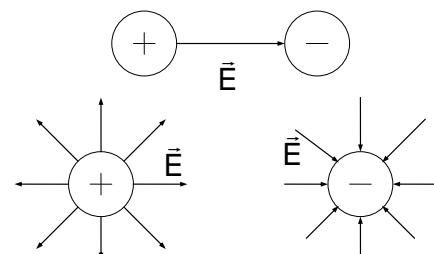


Рис 1.3

Введем понятие потока вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  сквозь какую-либо поверхность  $S$ . Поток численно равен количеству силовых линий, пронизывающих эту поверхность.

Если поверхность  $S$  плоская и расположена в однородном электростатическом поле так, что вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  составляет угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{E}$ , то *потоком вектора напряженности электростатического поля через поверхность  $S$*  называется величина, равная

$$\Phi_E = E S \cos \alpha = E_n \cos \alpha. \quad (1.8)$$

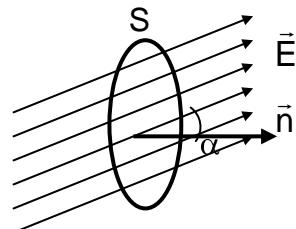


Рис. 1.4

где  $E_n = E \cos \alpha$  - проекция вектора  $\vec{E}$  на направление нормали.

Если поле неоднородно и поверхность  $S$ , через которую ищут поток, не плоская, то поверхность  $S$  разбивают на бесконечно малые плоские элементы  $dS$ , так что поле, пронизывающее этим элементы – однородное. Элементарный поток через такую площадку равен  $d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS$ . Полный поток через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_E = \int_S d\Phi = \int_S E \cos \alpha dS = \int_S E_n dS. \quad (1.9)$$

Для расчета полей, созданных неточечными зарядами, расположенными на телах, правильной геометрической формы, применяется *теорема Остроградского - Гаусса*: в вакууме поток вектора напряженности  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (1.10)$$

При распределении электрических зарядов на линии вводится понятие *линейной плотности электрических зарядов*  $\tau$  (или  $\gamma$ , или  $\lambda$ ). По определению

$$\tau = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{dq}{dL}. \quad (1.11)$$

При распределении электрических зарядов на поверхности вводят понятие *поверхностной плотности электрических зарядов*  $\sigma$ . По определению

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}. \quad (1.12)$$

При распределении электрических зарядов по некоторому объему используют понятие *объемной плотности электрических зарядов*  $\rho$ . По определению

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.13)$$

Применение теоремы Гаусса в случае, если в системе зарядов имеется плоская, цилиндрическая или сферическая симметрия дает следующие результаты для вакуума ( $\epsilon = 1$ ).

Напряженность поля *одной бесконечной плоскости*, равномерно заряженной с поверхностной плотностью электрического заряда  $\sigma$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Напряженность поля *двух параллельных бесконечных плоскостей*, равномерно заряженных с поверхностными плотностями электрического заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$  находят, используя принцип суперпозиции полей

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.15)$$

Напряженность поля *прямой бесконечной нити*, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда  $\tau$  в точке, отстоящей от нити на расстоянии  $r$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.16)$$

Напряженность поля *вне шара (или сферы)*, равномерно заряженного зарядом  $q$  в точке, расположенной на расстоянии  $r$  от его центра,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.17)$$

Напряженность поля *внутри шара, радиусом  $R$ , равномерно заряженного зарядом  $q$* , в точке, расположенной на расстоянии  $r < R$  от его центра

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r. \quad (1.18)$$

Итак, основной задачей в электростатике является расчет поля. Если напряженность электростатического поля  $\vec{E}$  известна, то из (1.3) можно определить силу  $\vec{F}$ , действующую на заряд  $q_0$ , находящийся в этом поле.

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}. \quad (1.19)$$

Зная силу  $\vec{F}$ , действующую на заряд  $q_0$ , можно рассмотреть динамическую задачу на движение этого заряда в электростатическом поле.

Для изотропных диэлектриков вводят вектор электрического смещения  $D$ , который связан с вектором напряженности электрического поля соотношением

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.20)$$

где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды, которая показывает во сколько раз поле в среде меньше поля в вакууме.

Еще раз подчеркнем, что для расчета напряженности поля на заряженных телах правильной геометрической формы используется теорема Гаусса (1.10).

Для расчета напряженности поля на заряженных телах произвольной формы используется принцип суперпозиции (1.6) совместно с определением напряженности точечного заряда (1.5).

### Примеры решения задач

**Задача 1.1.** Рассчитать напряженность поля точечного диполя в точке А, расположенной на оси диполя на расстоянии  $r$  от его центра, и в точке В, находящейся на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя О, также на расстоянии  $r$  от каждого заряда диполя (рис.1.5).

#### Решение

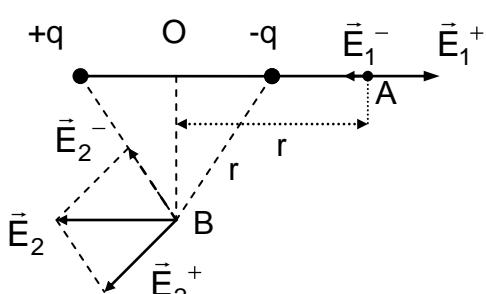


Рис.1.5

Так как диполь точечный, то  $r \gg L$ . Рассмотрим точку А. По формуле (1.5) определяем модуль вектора напряженности  $E_1^+$ , создаваемого положительным зарядом в точке А

$$E_1^+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r - L/2)^2},$$

и модуль вектора напряженности  $E_1^-$ , создаваемого отрицательным зарядом в той же точке А

$$E_1^- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r + L/2)^2}.$$

Используя принцип суперпозиции (1.6) и учитывая, что  $r \gg L$ , находим модуль результирующего вектора  $\vec{E}_1$  в точке А

$$E_1 = E_1^+ - E_1^- = \frac{2qL}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Или в векторном виде

$$\vec{E}_1 = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

где  $\vec{p} = q\vec{L}$  - электрический момент диполя.

Напряженность поля в точке В создается как положительным, так и отрицательным зарядами, величины напряженности поля которых равны

$$E_2^+ = E_2^- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Из геометрических соображений (подобия треугольников) находим, что  $\frac{E_2^+}{E_2^-} = \frac{L}{r}$ . Следовательно, модуль результирующего вектора напряженности в точке В равен

$$E_2 = \frac{qL}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

или в векторном виде

$$\vec{E}_2 = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

**Задача 1.2.** Два точечных положительных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся на расстоянии  $r$  друг от друга. Определить напряженность поля этих зарядов в точке А, находящейся на расстоянии  $r_1$  от первого заряда и  $r_2$  от второго.

### Решение

По формуле (1.5) находим напряженности точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в точке А:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}, \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Модуль вектора результирующей напряженности определим по теореме косинусов из треугольника ABC

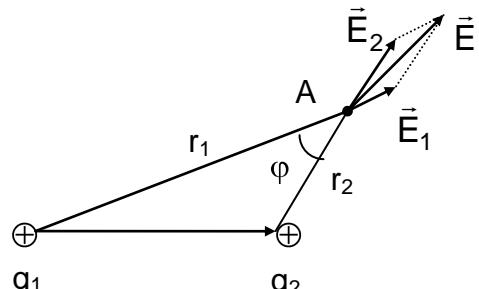


Рис.1.6

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos(180^\circ - \phi),$$

где угол  $\phi$  находится по той же теореме косинусов из треугольника ABC:  $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\phi$ .

**Задача 1.3.** Рассчитать напряженность поля двух бесконечных плоскостей, равномерно заряженных с поверхностной плотностью заряда  $+σ_1$  и  $+σ_2$ , пересекающихся под углом  $α$ , в произвольной точке А (рис.1.7).

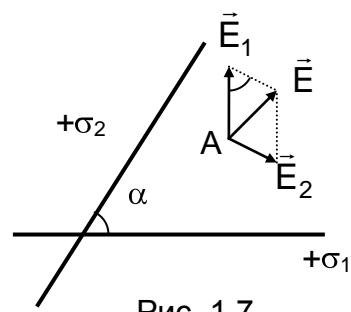


Рис. 1.7

### Решение

Находим напряженности плоскостей в точке А по формуле (1.14)

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}.$$

Результирующую напряженность в точке А находим по правилу сложения двух векторов (диагональ АЕ параллелограмма, построенного на двух векторах  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ ). Так как вектор  $\vec{E}_1$  перпендикулярен плоскости  $\sigma_1$ , а вектор  $\vec{E}_2$  перпендикулярен плоскости  $\sigma_2$ , то угол при вершине Е<sub>1</sub> в треугольнике АЕ<sub>1</sub>Е равен  $\alpha$ . Тогда по теореме косинусов находим

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos\alpha.$$

**Задача 1.4.** Две прямые бесконечные параллельные нити, равномерно заряженные с линейной плотностью  $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$  Кл/м и  $\tau_2 = -5 \cdot 10^{-9}$  Кл/м, расположены на расстоянии  $r = 0,5$  м друг от друга. Найти напряженность электрического поля нитей в точке А, отстоящей от каждой нити на расстоянии  $r = 0,5$  м (рис.1.8).

### Решение

Величина напряженность поля от каждой нити определяется по формуле (1.16)

$$E_1 = E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Направления векторов  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  и результирующего вектора  $\vec{E}$  показаны на рис.1.8. Так как треугольник АЕ<sub>2</sub>Е - равносторонний, то

$$E = E_1 = E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 r} = 180 \text{ В/м.}$$

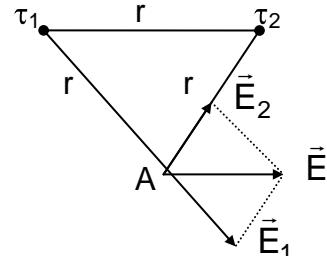


Рис. 1.8

**Задача 1.5.** Два бесконечных тонких цилиндра с радиусами  $R_1 = 40$  см и  $R_2 = 80$  см расположены coaxialno. Цилиндры равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1 = 3 \text{ нКл/м}^2$  и  $\sigma_2 = -1 \text{ нКл/м}^2$  соответственно. Определить напряженности электрического поля цилиндров в трех точках А, В и С, расположенных на расстояниях  $r_1 = 20$  см,  $r_2 = 60$  см,  $r_3 = 1$  м, от общей оси цилиндров (см. рис.1.9).

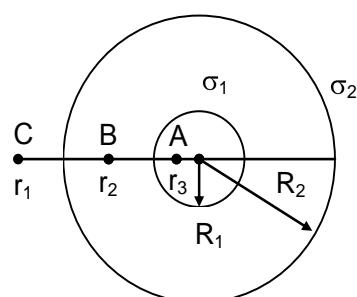


Рис. 1.9

### Решение

Для расчета напряженности поля цилиндров применим теорему Гаусса. Рассмотрим точку А. Сначала необходимо построить замкнутую поверхность, проходящую через эту точку. В силу симметрии задачи такой поверхностью является цилиндр произвольной высоты  $L$ , радиус которого равен  $r_1 = 20$  см, а ось совпадает с общей осью цилиндров (рис. 1.10). Определим поток  $\Phi_{E_1}$  через эту поверхность по формуле (1.8)

$$\Phi_{E_1} = E_1 S_1 \cos\alpha,$$

где  $\alpha$ -угол между вектором  $\vec{E}_1$  и нормалью к поверхности  $\vec{n}$ ,  $S_1$  – площадь боковой поверхности цилиндра.

Вектор  $\vec{E}_1$  в любой точке построенной замкнутой поверхности (цилиндр радиусом  $r_1$ ) перпендикулярен лишь боковой поверхности этого цилиндра. Угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{E}_1$  и  $\vec{n}$  равен нулю,  $\cos\alpha = 1$ . Тогда поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен  $\Phi_{E_1} = E_1 \cdot 2\pi r_1 L$ . Поток вектора  $\vec{E}_1$  через основания цилиндра равен нулю т.к. угол между нормалью к основанию цилиндра и вектором напряженности равен  $\alpha = 90^\circ$ .

Далее необходимо определить алгебраическую сумму зарядов, находящихся внутри построенной замкнутой поверхности. Но внутри цилиндра радиусом основания  $r_1$  зарядов нет

$$\sum q_i = 0.$$

Тогда по теореме Гаусса (1.10) получаем

$$E_1 \cdot 2\pi r_1 \cdot L = 0,$$

таким образом  $E_1 = 0$ .

Рассмотрим точку В. Снова строим замкнутую поверхность, проходящую через эту точку. В силу симметрии задачи это цилиндр радиусом  $r_2 = 60$  см и произвольной высотой  $L$ , ось которого совпадает с общей осью цилиндров. Находим поток  $\Phi_{E_2}$  через эту поверхность

$$\Phi_{E_2} = E_2 S_2 \cos\alpha = E_2 \cdot 2\pi r_2 \cdot L.$$

Внутри построенной замкнутой поверхности (цилиндр радиусом  $r_2$  и высотой  $L$ ) электрический заряд  $q_2$  располагается на поверхности цилиндра радиусом  $R_1$  и высотой  $L$ . Используя (1.12), находим

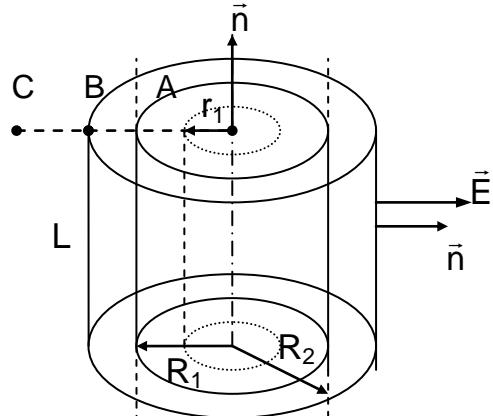


Рис. 1.10

$$\sum q_i = q_2 = 2\pi R_1 L \cdot \sigma_1.$$

Используя теорему Гаусса (1.10), получаем

$$E_2 \cdot 2\pi r_2 L = \frac{2\pi R_1 L \cdot \sigma_1}{\epsilon_0},$$

следовательно, напряженность  $E_2$  равна

$$E_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r_2} \approx 226 \text{ В/м.}$$

Для точки С также строим замкнутую поверхность (цилиндр радиусом  $r_3 = 1$  м и высотой  $L$ , ось которого совпадает с общей осью цилиндров) и определяем поток

$$\Phi_{E_3} = E_3 \cdot 2\pi r_3 \cdot L.$$

Заряды внутри этой поверхности располагаются на поверхности цилиндра радиусом  $R_1$  и высотой  $L$  и на поверхности второго цилиндра радиусом  $R_2$  и высотой  $L$ . Общий заряд (их алгебраическая сумма)

$$\sum q_i = 2\pi R_1 L \cdot \sigma_1 + 2\pi R_2 L \cdot \sigma_2,$$

здесь  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  входят со своими знаками.

Далее по теореме Гаусса находим

$$E_3 \cdot 2\pi r_3 L = \frac{2\pi L \cdot (\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\epsilon_0},$$

отсюда напряженность в точке С равна

$$E_3 = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r_3} \approx 45 \text{ В/м.}$$

**Задача 1.6.** Полый шар из диэлектрика ( $\epsilon = 1$ ) с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность электрического поля полого шара в четырех точках А, В, С и D, расположенных соответственно на расстояниях:  $r_1 < R_1$ ;  $R_1 < r_2 < R_2$ ;  $r_3 = R_2$ ;  $r_4 > R_2$  (рис. 1.11).

### Решение

Для расчета напряженностей используем теорему Гаусса. В силу симметрии задачи во всех случаях замкнутые поверхности - это сферы соответствующих радиусов с общим центром в точке О (рис. 1.11.). Очевидно, что напряженность в точке А равна нулю, т.к. заряда внутри сферы радиусом  $r_1 < R_1$  нет  $E_1 = 0$ .

Рассмотрим точку В. Построим замкнутую поверхность, проходящую через эту точку

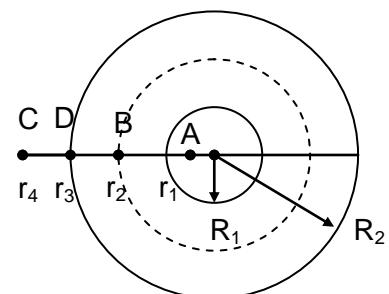


Рис. 1.11

(сфера радиусом  $r_2$  причем  $R_1 < r_2 < R_2$ ). Поток  $\Phi_{E_2}$  через эту поверхность

$$\Phi_{E_2} = E_2 S_2 = E_2 \cdot 4\pi r_2^2.$$

Далее находим заряд  $q_2$  внутри этой поверхности. Он сосредоточен в шаровом слое толщиной  $(r_2 - R_1)$ . Учитывая (1.13), определяем

$$q_2 = \rho(V_{r_2} - V_{R_1}),$$

где  $V_{r_2} = \frac{4}{3}\pi r_2^3$  - объем шара радиусом  $r_2$ ;  $V_{R_1} = \frac{4}{3}\pi R_1^3$  - объем шара радиусом  $R_1$ ;  $(V_{r_2} - V_{R_1})$  - объем шарового слоя толщиной  $(r_2 - R_1)$ .

Таким образом, заряд  $q_2$  равен

$$\sum q_i = q_2 = \frac{4\pi\rho(r_2^3 - R_1^3)}{3}.$$

Подставляем значение потока  $\Phi_{E_2}$  и заряда  $q_2$  в теорему Гаусса (1.10), получаем

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{4\pi\rho(r_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0},$$

отсюда значение напряженности  $E_2$  равно

$$E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2} \right).$$

Для точки С, после проведения тех же операций, что и для точки В, находим

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 R_2^2}.$$

Точно так же для точки D можно определить напряженность  $E_4$

$$E_4 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r_4^2}.$$

**Задача 1.7.** Сплошной шар из диэлектрика ( $\epsilon = 1$ ) радиусом  $R$  неравномерно заряжен так, что в любой его точке, отстоящей от центра шара О на расстоянии  $r$ , объемная плотность заряда  $\rho = \alpha/r$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Определить напряженность поля шара в двух точках А и В, находящихся соответственно на расстоянии  $r_1 < R$  и  $r_2 > R$  (рис.1.12) от центра шара О.

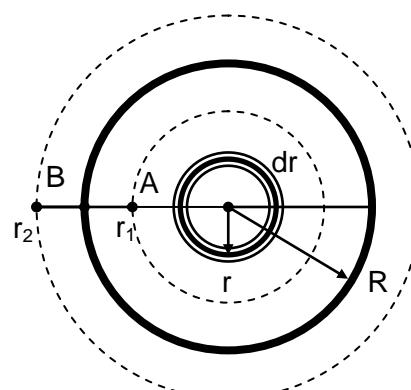


Рис. 1.12

### Решение

В задаче имеется сферическая симметрия, поэтому для решения задачи удобно применять теорему Гаусса. Рассмотрим точку А. Построим замкнутую поверхность, проходящую через точку А (сфера радиусом  $r_1$  с центром в точке О). Поток  $\Phi_{E_1}$  через эту поверхность

$$\Phi_{E_1} = E_1 S_1 = E_1 \cdot 4\pi r_1^2,$$

где  $E_1$  напряженность в точке А. Осталось определить заряд  $q_1$ , расположенный внутри этой поверхности. В данной задаче нельзя определять заряд как

$$q_1 = \rho V_1,$$

где  $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$  - объем шара радиусом  $r_1$ , т.к. это справедливо, только

если  $\rho = \text{const.}$

В нашем случае объемная плотность зависит от  $r$ . Поэтому для расчета  $q_1$  применим следующий метод. Разделим шар радиусом  $r_1$  на столь тонкие шаровые слои, чтобы объемная плотность заряда  $\rho$  внутри такого слоя была приблизительно постоянна. Рассмотрим один такой шаровой слой толщиной  $dr$  и произвольным радиусом  $r < r_1$ . Тогда по формуле (1.13) заряд  $dq_1$  внутри этого слоя

$$dq_1 = \rho dV,$$

где  $\rho = \alpha/r$ , а  $dV = 4\pi r^2 dr$  - объем слоя.

Таким образом, заряд внутри шарового слоя равен

$$dq_1 = \frac{\alpha}{r} \cdot 4\pi r^2 r^2 dr = 4\pi \alpha r dr.$$

Суммируя заряды всех шаровых слоев, получаем искомый заряд

$$q_1 = \int_0^{r_1} 4\pi \alpha r dr = \frac{4\pi \alpha r^2}{2} \Big|_0^{r_1} = 2\pi \alpha r_1^2.$$

Используя теорему Гаусса (1.10), определяем напряженность  $E_1$  в точке А

$$E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = 2\pi \alpha r_1^2 \rightarrow E_1 = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} = \text{const.}$$

Проведем те же операции для точки В. Рассмотрим замкнутую поверхность - сферу радиусом  $r_2$  с центром в точке О. Поток  $\Phi_{E_2}$  через эту поверхность равен

$$\Phi_{E_2} = E_2 S_2 = E_2 \cdot 4\pi r_2^2.$$

Заряд внутри этой поверхности находится аналогично предыдущему случаю, только интегрирование ведется в пределах от 0 до  $R$

$$q_2 = \int_0^R 4\pi\alpha r dr = 2\pi\alpha R^2.$$

По теореме Гаусса, определяем напряженность  $E_2$  в точке В

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = 2\pi\alpha R^2 \rightarrow E_2 = \frac{2\pi\alpha R^2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

**Задача 1.8.** Тонкий стержень длиной  $L = 1$  м равномерно заряжен зарядом  $q = 1$  нКл. Определить напряженность поля этого заряда в точке А, расположенной на оси стержня на расстоянии  $d = L = 1$  м от его конца (рис.1.13).

### Решение

Заряд на стержне неточечный. Использовать теорему Гаусса весьма сложно (нет полной симметрии). Для решения задачи используем формулу напряженности точечного заряда (1.5) и принцип суперпозиции (1.6).

Разделим стержень на сто малые участки, чтобы каждый из них можно было принять за материальную точку. Поэтому заряд, расположенный на таком участке, можно считать точечным, и для его поля справедлива формула (1.5). Рассмотрим один такой участок длиной  $dx$ , отстоящий от точки А на расстоянии  $x$ . Заряд этого участка точечный и равен

$$dq = \frac{qdx}{L}.$$

Заряд  $dq$  создает электрическое поле, напряженность  $dE$  которого в точке А может быть определена по формуле

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 Lx^2}.$$

Вектора  $d\vec{E}_i$  от всех элементарных участков направлены в одну сторону. Поэтому геометрическое их суммирование по принципу суперпозиции (1.6) заменяется алгебраическим.

Интегрируя полученное выражение по  $x$ , получаем искомую напряженность поля в точке А.

$$E = \int_d^{d+L} \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 Lx^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_d^{d+L} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(d+L)} = 4,5 \text{ В/м.}$$

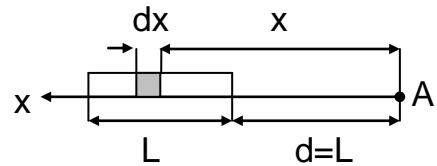


Рис. 1.13

**Задача 1.9.** Полукружность радиусом  $R = 2$  м равномерно заряжена зарядом  $q = 1$  нКл. Определить напряженность электрического поля, созданного этим зарядом в геометрическом центре полуокружности (точка А) (рис.1.14).

### Решение

Заряд  $q$ , находящийся на полуокружности неточечный, ибо он расположен на теле, размеры которого  $\pi R$  сравнимы с расстоянием  $R$ , рассматриваемом в данной задаче. Поэтому формулу (1.5) использовать нельзя. Теорема Гаусса бесперспективна.

Разделим полуокружность на столь малые дуги длиной  $dL$ , чтобы заряд

$$dq = \frac{q}{\pi R} dL \quad \text{каждой такой элементарной дуги был точечным.}$$

Рассмотрим один такой точечный заряд.

Он создает электрическое поле, вектор напряженности  $d\vec{E}$  которого в точке А составляет угол  $\alpha$  с осью ОХ. Очевидно, что любому элементарному заряду в верхней полуплоскости найдется симметрично расположенный заряд в нижней полуплоскости. Геометрическая сумма векторов  $d\vec{E}_1$  и  $d\vec{E}_2$  - вектор, направленный вдоль оси ОХ.

Следовательно, при суммировании необходимо учитывать только проекции элементарных векторов напряженности на ось ОХ:

$$dE_x = dE_1 \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{q \cos \alpha \cdot dL}{4\pi^2 \epsilon_0 R^3}.$$

Далее необходимо выбрать переменную интегрирования. Положение точечного заряда на полуокружности определяется углом  $\alpha$ , поэтому угол  $\alpha$  и выберем в качестве переменной интегрирования.

Выразим длину дуги окружности  $dL$  через угол  $\alpha$ .

$$dL = R d\alpha.$$

Тогда проекция вектора напряженности на ось ОХ будет выражена через переменную  $d\alpha$

$$dE_x = \frac{q \cos \alpha \cdot d\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Интегрируя это выражение по углу  $\alpha$ , получаем исковую напряженность поля в точке А:

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cos \alpha d\alpha = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} \approx 1,4 \text{ В/м}.$$

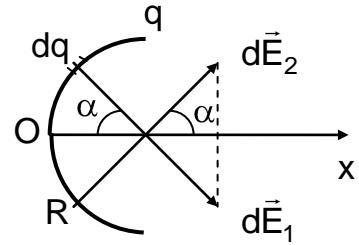


Рис. 1.14

**Задача 1.10.** Определить напряженность поля отрезка, равномерно заряженного с линейной плотностью  $\tau$ , в точке О, удаленной от отрезка на расстояние  $r_0$ . Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  заданы (рис.1.15).

### Решение

Разделим отрезок на столь малые элементы, чтобы заряд, находящийся на каждом таком элементе, был точечным. Рассмотрим один такой элемент AB длиной  $dL$  с зарядом  $dq$  (рис.1.16).

В точке О элементарная напряженность поля этого заряда (рис.1.16) равна

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\tau dL}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Выразим  $dE$  как функцию переменной угла  $\alpha$ . Из треугольника ADO находим

$$r = r_0 / \cos \alpha.$$

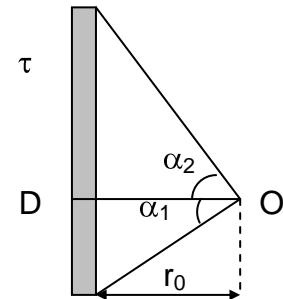


Рис. 1.15

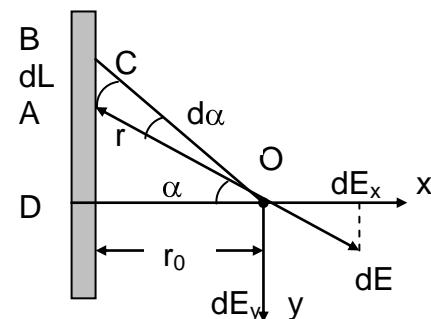


Рис. 1.16

Проведем дугу AC радиусом  $r$  с центром в точке О. Образовавшийся элементарный криволинейный треугольник ABC является прямоугольным, причем угол BAC равен  $\alpha$ . Так как

$$|AC| = r d\alpha = r_0 d\alpha / \cos \alpha,$$

то из треугольника ABC определяем гипотенузу  $AB = dL$

$$dL = |AC| / \cos \alpha = r_0 d\alpha / \cos^2 \alpha.$$

Подставляя значения  $r$  из и  $dL$  в выражение для напряженности  $dE$ , получаем

$$dE = \frac{\tau r_0 d\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0 \cdot \cos^2 \alpha \cdot r_0^2} = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Далее находим проекции вектора  $d\vec{E}$  на оси ОХ и ОY (рис.1.16)

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{\tau \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad dE_y = dE \sin \alpha = \frac{\tau \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0},$$

Отсюда после интегрирования определяем компоненты искомого вектора  $\vec{E}$

$$E_x = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\tau \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2),$$

$$E_Y = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\gamma \tau \sin \alpha d\alpha}{4\pi \epsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi \epsilon_0 r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

В частном случае ( $-\alpha_1 = -\pi/2$ ,  $\alpha_2 = +\pi/2$ ) можно получить формулу (1.16) для напряженности поля, создаваемого прямой бесконечной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$ .

Получив выражения для напряженностей полей отрезка и нити, можно решить десятки задач на расчет поля, созданного различными комбинациями равномерно заряженных отрезков, бесконечных и полубесконечных нитей (поле "треугольника", "квадрата", "угла" и т.д.).

### Задачи для самостоятельного решения

**1.11.** Два шарика с массами  $m = 0,1$  г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной  $L = 20$  см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол  $\alpha = 60^\circ$ . Найти заряд каждого шарика.

**1.12.** Два положительных точечных заряда  $q$  и  $4q$  закреплены на расстоянии  $L = 60$  см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Какой знак должен иметь этот заряд, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещение возможно только вдоль прямой, проходящей через заряды.

**1.13.** Расстояние между двумя точечными зарядами  $q_1 = 1$  мкКл и  $q_2 = -1$  мкКл равно  $d = 10$  см. Определить силу  $\vec{F}$ , действующую на точечный заряд  $q = 0,1$  мкКл, удаленный на  $r_1 = 6$  см от первого и  $r_2 = 8$  см от второго заряда.

**1.14.** В вершинах шестиугольника со стороной  $a = 10$  см расположены точечные заряды  $q$ ,  $2q$ ,  $3q$ ,  $4q$ ,  $5q$ ,  $6q$  ( $q = 0,1$  мкКл). Найти силу, действующую на заряд  $q$ , лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

**1.15.** Два одинаковых металлических заряженных шара находятся на расстоянии  $r = 30$  см. Сила притяжения шаров  $F_1 = 90$  мкН. После того, как шары были приведены в соприкосновение и удалены друг от друга на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой  $F_2 = 160$  мкН. Определить заряды  $q_1$  и  $q_2$ , которые были на шарах до соприкосновения.

**1.16.** В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $q = 0,3$  нКл каждый. Какой отрицательный заряд  $q_1$  нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда.

**1.17.** Сила взаимного гравитационного притяжения двух водяных одинаково заряженных капель уравновешивается силой электростатического отталкивания. Определить заряд капель, если их радиусы равны  $R = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м.

**1.18.** Два шарика в вакууме взаимодействуют с такой же силой на расстоянии  $r_1 = 11$  см, как в скрипиде на расстоянии  $r_2 = 7,4$  см. Определить диэлектрическую проницаемость скрипидара.

**1.19.** Три одинаковых заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $q_1$  нужно поместить в центре этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

**1.20.** Шарик массой  $m = 50$  мг подвешен на непроводящей нити и имеет заряд  $q = 10^{-8}$  Кл. На расстоянии  $L = 32$  см от него снизу подносится другой шарик. Каким должен быть заряд этого шарика, чтобы натяжение нити увеличилось в  $n = 2$  раз?

**1.21.** У основания гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$  закреплен заряженный шарик. Второй шарик, одноименно заряженный с первым, находится в равновесии на плоскости. Во сколько раз изменится расстояние между шариками, если угол наклона плоскости увеличить в два раза?

**1.22.** Три одинаковых шарика, расположенные на одной горизонтальной прямой, соединены двумя одинаковыми непроводящими пружинами жесткостью  $k$  каждая. Расстояние между крайними шариками равно  $L_0$ . Всем шарикам были сообщены одинаковые по величине и знаку заряды. При этом расстояние между крайними шариками стало равно  $L$ . Определить величину заряда каждого шарика.

**1.23.** Чтобы измерить ускорение свободного падения в данном месте поступили следующим образом. В одной и той же точке на нитях с одинаковой длиной  $L = 1$  м подвесили два одинаковых шарика массой  $m = 4,5 \cdot 10^{-4}$  кг. Шарикам сообщили одинаковые заряды  $q = 10^{-6}$  Кл. При этом угол между нитями стал прямым. Определить по этим данным ускорение свободного падения в данном месте.

**1.24.** Металлическое кольцо радиусом  $R$  несет на себе электрический заряд  $q$ . При этом натяжение проволоки, из которой сделано кольцо, равно  $T$ . Какой заряд  $Q$  нужно поместить в центр кольца, чтобы оно разорвалось? Проволока выдерживает максимальное натяжение  $T_0$ .

**1.25.** В центр металлического кольца радиусом  $R$  и зарядом  $Q$  поместили точечный заряд  $q$ . На сколько при этом изменилась сила натяжения кольца?

**1.26.** Два небольших одинаково заряженных шарика, каждый массы  $m$ , подвешены к одной точке на шелковых нитях длиной  $L$ . Расстояние между шариками  $x \ll L$ . Найти скорость утечки зарядов  $dq/dt$  с каждого шарика, если скорость их сближения меняется по закону  $v = \alpha / \sqrt{x}$ , где  $\alpha$  - постоянная.

**1.27.** Два точечных заряда  $q_1 = 2q$  и  $q_2 = -q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность поля в которой равна нулю.

**1.28.** Найти напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между зарядами  $q_1 = 8$  нКл и  $q_2 = -6$  нКл, расстояние между которыми равно  $L = 10$  см.

**1.29.** Электрическое поле создано двумя точечными зарядами  $q_1 = 30$  нКл и  $q_2 = -10$  нКл. Расстояние между зарядами  $d = 20$  см. Определить напряженность электрического поля  $E$  в точке, находящейся на расстоянии  $r_1 = 15$  см от первого и  $r_2 = 10$  см от второго заряда.

**1.30.** Два одинаковых по величине разноименных заряда величиной  $q = 18$  нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 2$  м. Определить напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

**1.31.** Заряды  $q_1 = q$  и  $q_2 = -q$  находятся на расстоянии  $L$  друг от друга (рис.1.17). Определить напряженность поля в точке, удаленной на расстоянии  $r$  от первого заряда и лежащей на линии перпендикулярной прямой  $L$ , соединяющей эти заряды.

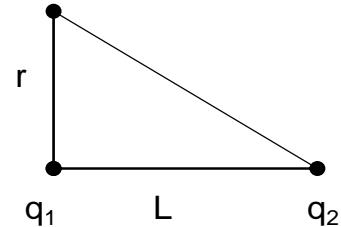


Рис. 1.17

**1.32.** Точечные заряды  $q_1 = 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = 5 \cdot 10^{-9}$  Кл имеют координаты соответственно  $(0,0)$  и  $(2,0)$  и находятся в вакууме. Найти напряженность результирующего поля  $E$  в точке  $(5, 3\sqrt{3})$ .

**1.33.** Электрическое поле создано двумя одинаковыми по величине и знаку точечными зарядами, находящимися друг от друга в воздухе на некотором расстоянии  $L$  (рис.1.18). При этом напряженность электрического поля в точке  $A$  равна  $E_A = 25$  В/м. Найти напряженность поля в точках пространства, находящихся на одинаковом расстоянии  $L$  от обоих зарядов.

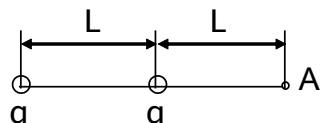


Рис. 1.18

**1.34.** Определить напряженность поля в центре шестиугольника со стороной  $a$ , в вершинах которого расположены: а) шесть равных

одноименных зарядов; б) три положительных и три отрицательных заряда.

**1.35.** Положительный заряд  $q = 50 \text{ мКл}$  находится на плоскости  $XOY$  в точке с радиус-вектором  $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ , где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  - орты осей  $OX$  и  $OY$ . Найти напряженность электрического поля и ее модуль в точке с радиус – вектором  $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$  ( $r_0$  и  $r$  выражены в метрах).

**1.36.** Плоская квадратная пластина со стороной  $a = 10 \text{ см}$  находится на некотором расстоянии от бесконечной, равномерно заряженной плоскости, поверхностная плотность зарядов которой  $\sigma = 1 \text{ мКл/м}^2$ . Плоскость пластины составляет угол  $\beta = 30^\circ$  с линиями поля. Найти поток  $\Phi_D$  вектора индукции через эту пластину.

**1.37.** В центре сферы радиусом  $R = 20 \text{ см}$  находится точечный заряд  $q = 10 \text{ нКл}$ . Определить поток  $\Phi_E$  вектора напряженности через часть сферической поверхности площадью  $S = 20 \text{ см}^2$ .

**1.38.** Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 1 \text{ мКл/м}^2$ . На некотором расстоянии от плоскости параллельно ей расположен круг радиусом  $r = 10 \text{ см}$ . Вычислить поток  $\Phi_E$  вектора напряженности через этот круг.

**1.39.** Электрическое поле создано точечным зарядом  $q = 0,1 \text{ мКл}$ . Определить поток  $\Phi_D$  вектора индукции через круглую площадку радиусом  $R = 30 \text{ см}$ . Заряд равноудален от краев площадки и находится на расстоянии  $a = 40 \text{ см}$  от ее центра.

**1.40.** Электрическое поле создано бесконечной прямой, равномерно заряженной нитью, с линейной плотностью заряда  $\tau = 0,3 \text{ мКл/м}$ . Определить поток  $\Phi_D$  вектора индукции через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной линии и одинаково удалены от нее на расстоянии  $r = 20 \text{ см}$ . Стороны площадки имеют размеры:  $a = 20 \text{ см}$ ,  $b = 40 \text{ см}$ .

**1.41.** Напряженность электрического поля зависит только от координат  $x$  и  $y$  по закону  $\vec{E} = \frac{a(x\vec{i} + y\vec{j})}{x^2 + y^2}$ , где  $a = \text{const}$ ,  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  - единичные орты осей  $OX$  и  $OY$ . Найти поток  $\Phi_E$  вектора напряженности  $\vec{E}$  через сферу радиусом  $R$  с центром в начале координат.

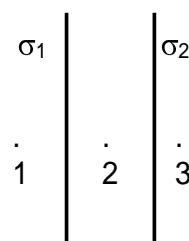
**1.42.** Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, на которых равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma_1 = 2 \text{ нКл/м}^2$  и  $\sigma_2 = -5 \text{ нКл/м}^2$ . Определить напряженность поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график зависимости  $E = f(r)$  вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

**1.43.** Две бесконечные пластины расположены под прямым углом друг к другу и равномерно заряжены зарядами с поверхностной плотностью  $\sigma_1 = 1 \text{ нКл}/\text{м}^2$  и  $\sigma_2 = 2 \text{ нКл}/\text{м}^2$ . Определить напряженность поля, создаваемого плоскостями и начертить картину силовых линий.

**1.44.** Две бесконечные плоскости равномерно и одинаково заряжены зарядами с поверхностной плотностью  $\sigma_1 = 100 \text{ нКл}/\text{м}^2$ . Плоскости пересекаются под углом  $\alpha = 60^\circ$ . Найти напряженность поля, создаваемого плоскостями и начертить картину силовых линий.

**1.45.** Какое поле создавали бы две взаимно перпендикулярные плоскости, если бы на них были нанесены равномерно электрические заряды одного знака с плотностью заряда на одной  $\sigma$ , а на другой  $2\sigma$ ?

**1.46.** Две бесконечные металлические пластины помещены в вакууме параллельно друг другу (рис.1.19). Поверхностная плотность заряда на первой пластине  $\sigma_1$ , на второй  $\sigma_2$ , причем  $\sigma_1 = 3\sigma_2$ . Найти напряженность электростатического поля  $E$  в точках 1, 2, 3.



**1.47.** Бесконечная равномерно заряженная плоскость имеет поверхностную плотность электрического заряда  $\sigma = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}/\text{м}^2$ . Над ней находится алюминиевый шарик, заряженный зарядом  $q = 3,68 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ . Какой радиус должен иметь шарик, чтобы он не падал?

Рис. 1.19

**1.48.** Четыре бесконечные пластины расположены параллельно друг другу на расстоянии  $r = 0,5 \text{ см}$  друг от друга. Пластины несут равномерно распределенные по площади заряды:  $\sigma_1 = -3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^2$ ,  $\sigma_2 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^2$ ,  $\sigma_3 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^2$ ,  $\sigma_4 = -7 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^2$ . Определить индукцию  $D(r)$ , напряженность  $E(r)$  вдоль линии перпендикулярной пластинам. Построить графики  $D(r)$  и  $E(r)$ .

**1.49.** Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых равны  $a = 10 \text{ см}$  и  $b = 15 \text{ см}$ , расположены на малом расстоянии (по сравнению с линейными размерами пластин) друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд  $Q_1 = 50 \text{ нКл}$ , на другой – заряд  $Q_2 = 150 \text{ нКл}$ . Определить напряженность  $E$  электрического поля между пластинами.

**1.50.** Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1 = 10 \text{ нКл}/\text{м}^2$  и  $\sigma_2 = -30 \text{ нКл}/\text{м}^2$ . Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь  $S = 1 \text{ м}^2$ .

**1.51.** Две круглые параллельные пластины радиусом  $R = 10 \text{ см}$  находятся на малом расстоянии (по сравнению с радиусом) друг от друга. Пластинам сообщили одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды  $|Q_1| = |Q_2| = Q$ . Определить этот

заряд, если пластины притягиваются с силой  $F = 2$  мН. Считать, что заряды распределяются по пластинам равномерно.

**1.52.** Длинный прямой провод, расположенный в вакууме, имеет заряд равномерно распределенный по длине. Линейная плотность заряда равна  $\tau = 10^{-9}$  Кл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля на расстоянии  $r = 1,5$  м от провода в средней его части.

**1.53.** Бесконечная очень тонкая прямая нить заряжена однородно с линейной плотностью  $\tau$ . Используя теорему Гаусса найти модуль напряженности поля  $E$ , как функцию расстояния  $r$  от нити.

**1.54.** Бесконечно длинная тонкостенная металлическая труба радиусом  $R = 2$  см равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 1$  нКл/м<sup>2</sup>. Определить напряженность поля в точках, отстоящих от оси трубы на расстояниях: 1)  $r_1 = 1$  см; 2)  $r_2 = 3$  см. Построить график зависимости  $E(r)$ .

**1.55.** Два бесконечно длинных параллельных провода, расположенных в вакууме, заряжены равномерно с линейной плотностью заряда  $\tau = 5 \cdot 10^{-8}$  Кл/м. Расстояние между проводами  $R = 0,5$  м. Определить силу, действующую на единицу длины провода.

**1.56.** В вакууме образовалось скопление зарядов в форме тонкого длинного цилиндра радиусом  $R_0$  с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность поля в точках, лежащих внутри и вне цилиндра.

**1.57.** Расстояние между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно  $d = 16$  см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью  $|\tau| = 150$  мкКл/м. Какова напряженность  $E$  поля в точке, удаленной на расстояние  $r = 10$  см как от первой, так и от второй проволоки?

**1.58.** Две длинные коаксиальные трубы радиусами  $R_1 = 2$  см и  $R_2 = 4$  см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями зарядов  $\tau_1 = 1$  нКл/м и  $\tau_2 = -0,5$  нКл/м. Пространство между трубками заполнено эбонитом ( $\epsilon = 3$ ). Определить напряженность  $E$  поля в точках, находящихся на расстояниях  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 3$  см,  $r_3 = 5$  см от оси трубок.

**1.59.** Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 10$  мкКл/м. Какова сила  $F$ , действующая на точечный заряд  $q = 10$  нКл, находящийся на расстоянии  $a = 0,2$  м от стержня вблизи его середины?

**1.60.** Точечный заряд  $q = 20$  нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом  $R = 1$  см, заряженным с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 2$  нКл/см<sup>2</sup>, на расстоянии  $r = 0,2$  м от оси цилиндра. Найти силу, действующую на заряд.

**1.61.** Шарик радиусом  $R = 2$  см, сделанный из диэлектрика ( $\epsilon = 1$ ), заряжен электричеством с объемной плотностью  $\rho = 0,3 \cdot 10^{-3}$  Кл/м<sup>3</sup>. Какова напряженность поля на расстоянии  $r = 3$  см от центра шара?

**1.62.** На металлической сфере радиусом  $R = 10$  см находится заряд  $q = 1$  нКл. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся:

- 1) на расстоянии  $r_1 = 8$  см от центра сферы;
- 2) на поверхности сферы ( $r = R$ );
- 3) на расстоянии  $r_2 = 15$  см от центра сферы.

**1.63.** Металлический шар радиусом  $R_1 = 2$  см окружен концентрической металлической оболочкой  $R_2 = 4$  см. На шаре находится заряд  $q_1 = +3,3 \cdot 10^{-9}$  Кл, на оболочке  $q_2 = -6,6 \cdot 10^{-9}$  Кл. Определить напряженность поля на расстояниях: а)  $R_3 = 3$  см; б)  $R_4 = 5$  см от центра.

**1.64.** Шар радиусом  $R$  имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния  $r$  до его центра как  $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ . Полагая, что  $\epsilon = 1$ , найти:

- а) модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния от центра шара  $r$ ;
- б) максимальное значение модуля напряженности  $E_{\max}$ .

**1.65.** Найти напряженность электрического поля в центре шара радиусом  $R$ , объемная плотность заряда которого  $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$ , где  $\vec{a}$  - постоянный вектор,  $\vec{r}$  - радиус - вектор, проведенный из центра шара.

**1.66.** Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых  $R_1 = 3$  см и  $R_2 = 5$  см, заряжено с объемной плотностью  $\rho = \rho_0/r^2$ , где  $\rho_0 = 10^{-8}$  Кл/м. Среда - вакуум. Найти напряженность электрического поля  $E$  в точках  $r_1 = 2$  см,  $r_2 = 4$  см,  $r_3 = 6$  см и индукцию  $D$  в этих точках.

**1.67.** Внутри шара, равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ , имеется сферическая полость. Центр полости смешен относительно центра шара на расстояние, характеризуемое вектором  $\vec{a}$ . Найти напряженность поля внутри полости.

**1.68.** Система состоит из заряженного шара радиусом  $R$  и окружающей среды ( $\epsilon = 1$ ), заполненной зарядом с объемной плотностью  $\rho = \alpha/r$ , где  $\alpha = \text{const}$ ,  $r$  - расстояние от центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от  $r$ . Чему равна эта напряженность?

**1.69.** Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha = \text{const}$ ,  $r$  - расстояние от центра системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию  $r$ .

**1.70.** Металлический шар имеет заряд  $Q_1 = 0,1 \text{ мКл}$ . На расстоянии от его поверхности, равном радиусу шара, находится конец нити, вытянутой вдоль силовой линии. Нить несет равномерно распределенный по длине заряд  $Q_2 = 10 \text{ нКл}$ . Длина нити равна радиусу шара. Определить силу  $F$ , действующую на нить, если радиус шара  $R = 10 \text{ см}$ .

**1.71.** Тонкое кольцо радиусом  $R = 8 \text{ см}$  равномерно заряжено с линейной плотностью  $\tau = 10 \text{ нКл/м}$ . Чему равна напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$ .

**1.72.** Кольцо радиусом  $R$  из тонкой проволоки имеет заряд  $q$ . Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца, как функцию расстояния  $r$  до его центра. Исследовать полученную зависимость при  $r \gg R$ . Определить максимальную напряженность и соответствующее расстояние  $r$ . Изобразить график функции  $E(r)$ .

**1.73.** Найти напряженность электрического поля в центре полукольца радиусом  $R_0 = 5 \text{ см}$ . По полукольцу равномерно распределен заряд  $q = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ .

**1.74.** Тонкий однородный диск радиусом  $R = 20 \text{ см}$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = 150 \text{ нКл/м}^2$ . Определить напряженность электрического поля в вакууме:

- 1) на высоте  $h = 20 \text{ см}$  над диском по оси симметрии;
- 2) в центре диска.

**1.75.** Тонкий стержень равномерно заряжен зарядом  $q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ . Определить напряженность поля в точке, отстоящей от концов стержня на расстоянии  $R = 3 \text{ м}$ , а от середины стержня на расстоянии  $R_0 = 0,1 \text{ м}$ .

**1.76.** На отрезке тонкого прямого проводника длиной  $L = 10 \text{ см}$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 3 \text{ мКл/м}$ . Вычислить напряженность, созданную этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное длине  $L$ .

**1.77.** Тонкий прямой стержень длиной  $2a$ , находящийся в вакууме, заряжен с одинаковой линейной плотностью  $\tau$ . Найти модуль напряженности поля  $E$ , как функцию расстояния  $r$  от центра стержня, для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящих через его центр.

**1.78.** Чему равен модуль вектора напряженности электрического поля равномерно заряженного стержня с линейной плотностью  $\tau$  в точке A, находящейся на расстоянии R от оси стержня, на прямой, перпендикулярной к оси (рис. 1.20). Углы, образованные стержнем и прямыми, проходящими через его концы в точку A, соответственно равны  $\alpha_1$  и  $(\pi - \alpha_2)$ .

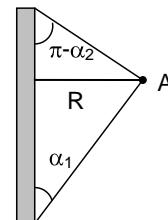


Рис. 1.20

**1.79.** По тонкой нити длиной  $L_0$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau$ . Найти напряженность поля в точках A и B, расположенных соответственно против середины нити и против одного из ее концов на одинаковом расстоянии a от нее.

**1.80.** Найти силу, действующую на точечный заряд  $q = 5 \cdot 10^{-9}$  Кл, расположенный в центре полукольца радиусом  $R = 5$  см, со стороны этого полукольца по которому равномерно распределен заряд  $Q = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл.

**1.81.** Тонкое кольцо радиусом  $R = 10$  см равномерно заряжено зарядом  $q = 10^{-7}$  Кл. На перпендикуляре к плоскости кольца находится точечный заряд  $q_1 = 10^{-8}$  Кл. Определить силу F, действующую на заряд  $q_1$  со стороны заряженного кольца, если заряд расположен в точке A на оси кольца на расстоянии  $L = 20$  см.

**1.82.** Тонкий стержень длиной  $L = 10$  см равномерно заряжен с линейной плотностью зарядов  $\tau = 1$  мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его ближайшего конца находится точечный заряд  $q = 100$  нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

**1.83.** Очень длинная тонкая прямая проволока заряжена равномерно по всей длине. Определить линейную плотность заряда  $\tau$ , если напряженность поля на расстоянии  $a = 0,5$  м от проволоки против ее середины  $E = 200$  В/м.

**1.84.** Тонкий стержень бесконечной длины равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 10$  мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из его конца, находится точечный заряд  $q = 10$  нКл. Расстояние от конца стержня до заряда равно  $a = 20$  см. Найти силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

**1.85.** Точечный заряд  $q = 1$  мкКл находится вблизи большой равномерно заряженной пластины вблизи ее середины. Определить поверхностную плотность  $\sigma$  заряда пластины, если на точечный заряд действует сила  $F = 60$  мН.

**1.86.** Шар равномерно заряжен зарядом  $q = 10^{-5}$  Кл. На расстоянии  $r = 5$  м от центра шара, вдоль его радиуса, расположен тонкий стержень длиной  $L = 22$  м, равномерно заряженный зарядом  $q_1 = q = 10^{-5}$  Кл. Определить силу их электрического взаимодействия. Считать  $R_{ш} < r$ .

**1.87.** Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом  $R$  и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной на оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Кольцо имеет заряд  $q$ . На единицу длины нити приходится заряд  $\tau$ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

**1.88.** Кольцо радиусом  $R$  равномерно заряжено зарядом  $+q$ . Определить период колебаний точечного заряда  $-q$ , находящегося на оси кольца на расстоянии  $x \ll R$ . Масса тела, на котором находится заряд  $-q$ , равна  $m$ . Силой тяжести пренебречь.

**1.89.** По тонкому кольцу радиусом  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1$  нКл/м. В центре кольца находится заряд  $q = 0,4$  мкКл. Определить силу, растягивающую кольцо. Взаимодействием зарядов кольца пренебречь.

**1.90.** В вершинах равнобедренного треугольника с основанием  $a$  и боковой стороной  $b$  (рис. 1.21) расположены положительные точечные заряды  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . Определить модуль вектора напряженности электрического поля этих зарядов в точке  $O$ , расположенной посередине основания треугольника.

**1.91.** В центре сферы радиусом  $R$ , равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $-\sigma$ , расположен точечный заряд  $+q$  (рис. 1.22). Определить модуль вектора напряженности электрического поля  $E_1$  внутри и  $E_2$  вне сферы.

**1.92.** Шар радиусом  $R$  ( $\epsilon = 1$ ) заряжен по объему так, что объемная плотность заряда  $\rho = \alpha/r$ , где  $\alpha = \text{const}$ , а  $r$  – расстояние точки до центра шара. Определить напряженность электрического поля  $E_1$  внутри и  $E_2$  вне шара.

**1.93.** Прямая бесконечная нить, равномерно заряженная с линейной плотностью  $+\tau$  расположена вдоль оси тонкого прямого бесконечного цилиндра радиусом  $R$ , равномерно заряженного с поверхностной плотностью  $-\sigma$  (рис. 1.23). Найти модуль вектора напряженности электрического поля этих зарядов внутри  $E_1$  и вне цилиндра  $E_2$ . При каком условии поле вне цилиндра будет равно нулю?

**1.94.** Найти напряженность электрического поля равномерно заряженного тонкого диска радиуса  $R$  в точке, расположенной на его оси на расстоянии  $x$  от плоскости диска. Поверхностная плотность зарядов на диске равна  $\sigma$ .

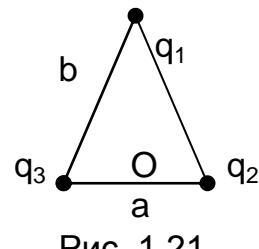


Рис. 1.21

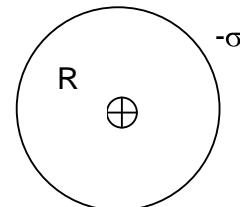


Рис. 1.22

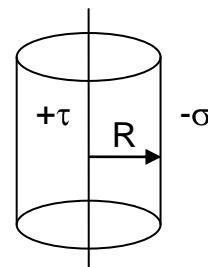


Рис. 1.23

## 2. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### Основные понятия и законы

Еще одной важной характеристикой электростатического поля является потенциал. Рассмотрим работу сил электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда в поле напряженностью  $\vec{E}$  из точки 1 в точку 2

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_1^2 E_L dL = \int_1^2 E \cos \alpha \cdot dL. \quad (2.1)$$

Если точки 1 и 2 совпадают, то интеграл по замкнутому контуру  $L$  называется циркуляцией вектора  $\vec{E}$  по контуру и представляет собой работу сил поля по перемещению единичного положительного заряда по этому контуру

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = \oint_L E_L dL, \quad (2.2)$$

где  $E_L$  - проекция вектора  $\vec{E}$  в данной точке контура  $L$  на направление касательной к контуру в этой точке.

*Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$ :* циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0. \quad (2.3)$$

Это означает, что работа по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2 не зависит от формы пути. Следовательно, электростатические силы консервативны, а поле потенциально, т.е. существует скалярная функция координат  $\phi(r)$ , убыль которой равна работе сил поля по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

$$dA = \vec{E} \cdot d\vec{L} = -d\phi. \quad (2.4)$$

По определению потенциал произвольной точки электростатического поля равен отношению работы сил поля  $A$  по перемещению точечного положительного  $q_0$  заряда из данной точки поля в бесконечность

$$\phi = \frac{A}{q_0}, \quad (2.5)$$

или потенциал электростатического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии  $W$  точечного положительного заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда  $q_0$

$$\varphi = \frac{W}{q_0}. \quad (2.6)$$

Потенциал электростатического поля в бесконечности условно принят равным нулю.

Следует отметить, что при перемещении заряда в электростатическом поле работа внешних сил  $A_{в.с.}$  равна по модулю работе сил поля  $A_{с.п.}$  и противоположна ей по знаку

$$A_{в.с.} = -A_{с.п.} \quad (2.7)$$

Потенциал электростатического поля, созданного *точечным электрическим зарядом*  $q$  на расстоянии  $r$  от него равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.8)$$

*Принцип суперпозиции:* потенциал электростатического поля, созданного системой  $n$  точечных зарядов, в данной точке поля в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , создаваемых отдельными точечными зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (2.9)$$

*Работа сил электростатического поля по перемещению заряда*  $q$  из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$  в соответствии с (2.4)

$$A = q \int_L E_L dL = q \Delta\varphi = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.10)$$

Для однородного поля последняя формула принимает вид

$$A = qE \cdot L \cdot \cos\alpha, \quad (2.11)$$

где  $L$  – перемещение,  $\alpha$  - угол между направлениями вектора  $\vec{E}$  и перемещения  $\vec{L}$ .

*Напряженность*  $\vec{E}$  *и потенциал*  $\varphi$  *связаны соотношением;*

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (2.12)$$

В декартовых координатах

$$\text{grad } \varphi = -\left(\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k}\right), \quad (2.13)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные орты осей ОХ, ОY и ОZ.

Компоненты вектора  $\vec{E}$

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}; \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.14)$$

В случае электростатического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь в скалярном виде выражается формулой

$$E = -\frac{d\phi}{dr}, \quad (2.15)$$

а в случае однородного поля

$$E = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}, \quad (2.16)$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – потенциалы двух эквипотенциальных поверхностей;  $d$  – расстояние между поверхностями вдоль силовой линии.

На заряженную частицу в электрическом поле действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.17).$$

Если напряженность поля известна, то, записав второй закон Ньютона для этой частицы

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{E}, \quad (2.18)$$

и решив его, можно полностью описать поведение частицы в этом электрическом поле.

### Примеры решения задач

**Задача 2.1.** Рассчитать потенциал поля точечного диполя  $\phi_1$  в точке А, расположенной на оси диполя на расстоянии  $r$  от его центра и потенциал  $\phi_2$  в точке В, находящейся на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя О, также на расстоянии  $r$  от каждого заряда (рис.1.5).

#### Решение

Так как дана система точечных зарядов, то для нахождения потенциалов  $\phi_i$  каждого заряда можно использовать формулу (2.8). Рассмотрим точку А (рис.1.5). По формуле (2.8) определяем потенциал  $\phi_1^-$  поля отрицательного заряда

$$\phi_1^- = -\frac{q^-}{4\pi\epsilon_0(r + L/2)}$$

и  $\phi_1^+$  поля положительного заряда

$$\phi_1^+ = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r - L/2)}.$$

Учитывая, что  $r \gg L$ , по принципу суперпозиции (2.9) находим результирующий потенциал  $\phi_1$  в точке А

$$\phi_1 = \phi_1^- + \phi_1^+ = \frac{qL}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где  $p = qL$  - модуль электрического момента диполя.

Рассмотрим точку В. Так как

$$\varphi_2^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi_2^+ = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$\text{то } \varphi_2 = \varphi_2^- + \varphi_2^+ = 0.$$

**Задача 2.2.** Определить потенциал электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким диском радиусом  $R = 1$  м в точке А, расположенной на оси диска на расстоянии  $a = 2$  м от плоскости диска (рис. 2.1). Поверхностная плотность электрических зарядов на диске  $\sigma = 2 \text{ мкКл/м}^2$ .

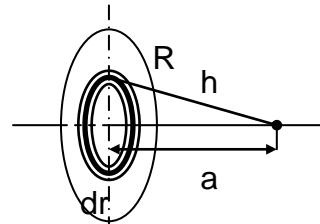


Рис. 2.1

### Решение

Заряд на диске не является точечным, поэтому разделим диск на достаточно узкие концентрические кольца. Рассмотрим одно такое кольцо шириной  $dr$ , расположенное на расстоянии  $r$  от центра диска.

Заряд кольца  $dq = 2\pi\sigma r dr$  не является точечным, однако, потенциал  $d\varphi$ , создаваемый этим зарядом в точке А, определяется по формуле (2.8)

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 h} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + a^2}},$$

поскольку все элементы кольца находятся от точки А на одинаковом расстоянии  $h$ . Положение каждого кольца определяется его радиусом  $r$ , поэтому в качестве переменной интегрирования выберем  $r$ .

Интегрируя выражение для  $d\varphi$  по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , получим

$$\varphi = \int_0^R \frac{2\pi\sigma \cdot r dr}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{d(r^2 + a^2)}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{r^2 + a^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{R^2 + a^2} - a] = 2,6 \cdot 10^4 \text{ В}$$

Теперь, если найден потенциал  $\varphi$ , то по формуле связи напряженности и потенциала (2.12) можно найти вектор напряженности  $\vec{E}$ .

Если каким-то образом найдем вектор  $\vec{E}$ , то по этой же формуле (что значительно труднее) можно найти потенциал  $\varphi$ .

**Задача 2.3.** Из решения задачи 2.1, зная потенциал  $\varphi_1$  диполя в точке А, найти напряженность  $E_1$  в этой же точке (рис. 1.5).

### Решение

Направим ось ОХ (рис. 1.5) вдоль оси диполя. Тогда переменные  $r$  и  $x$  не отличаются друг от друга. По формуле (2.14)

$$E = E_r = E_x = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{ибо } E_y = E_z = 0.$$

Подставляя значения потенциала в точке А, найденные в задаче 2.1, получаем значение напряженности в этой точке

$$E_1 = -\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3},$$

что совпадает со значениями напряженности в точке А, полученными в решении задачи 1.1

**Задача 2.4.** В условиях задачи 2.1, зная напряженность  $E_1$  диполя в точке А, определить потенциал  $\phi_1$  в той же точке (рис.1.5).

### Решение

Направим ось ОХ вдоль оси диполя. Тогда переменные  $r$  и  $x$  не отличаются друг от друга. Напряженность  $E_1$  поля диполя в точке А перепишем в виде

$$E_1 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3}.$$

Учитывая формулу связи напряженности и потенциала (2.14), получаем:

$$E_1 = -\frac{d\phi_1}{dx}, \text{ или } -\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3}.$$

Разделяя переменные в полученном соотношении, находим:

$$d\phi_1 = -\frac{2pdx}{4\pi\epsilon_0 x^3}.$$

Интегрируя обе части полученного соотношения, получаем

$$\phi_1 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x^3} \quad \text{или} \quad \phi_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^2} + C$$

Постоянную интегрирования  $C$  обычно находят, если известно значение потенциала в какой либо точке. Такой точкой в данном случае является бесконечно удаленная точка ( $\infty$ ). В этой точке потенциал условно считается равным нулю. Таким образом, при  $x \rightarrow \infty$  константа  $C = 0$ , и значение потенциала  $\phi_1$  имеет вид

$$\phi_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

что совпадает с потенциалом  $\phi_1$ , найденным в задаче (2.1).

**Задача 2.5.** Металлический шар радиусом  $R_1 = 1$  м равномерно заряжен зарядом  $q = 1$  нКл и окружен концентрической заземленной сферической проводящей оболочкой радиусом  $R_2 = 5$  м. Определить потенциал  $\phi$  в точке А, отстоящей от центра О шара на расстоянии  $r = 2$  м (рис.2.2).

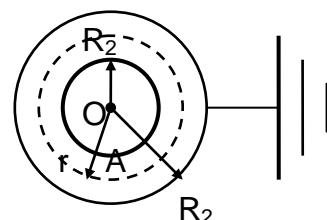


Рис. 2.2

### Решение

Заряд  $q$  на шаре неточечный, но напряженность в точке  $A$  от заряженного шара известна (1.17)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Используя связь напряженности и потенциала (2.15), получаем дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции  $\varphi(r)$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Из этих двух соотношений находим

$$d\varphi = -\frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

После интегрирования определяем потенциал  $\varphi$  как функцию  $r$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  можно найти, если известен потенциал какой либо одной точки. В данном случае такой точкой является любая точка на заземленной сферической оболочке радиусом  $R_2$ . Потенциал Земли условно принимают за ноль, таким образом, получаем

$$0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + C,$$

отсюда

$$C = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Подставляя значение  $C$  в выражение для потенциала, окончательно получаем его значение

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) = 2,7 \text{ В}.$$

**Задача 2.6.** Шар из диэлектрика ( $\epsilon = 1$ ) равномерно заряжен зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Найти потенциал поля шара в его центре и в произвольной точке  $A$  внутри шара, отстоящей от его центра  $O$  на расстоянии  $r < R$ , где  $R$  - радиус шара (рис. 2.3).

### Решение

Из определения объемной плотности заряда  $\rho$  (1.13) находим заряд шара  $q$

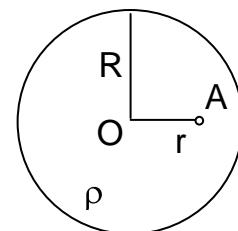


Рис. 2.3

$$q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Напряженность поля внутри шара определяем по формуле (1.17)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Учитывая связь напряженности и потенциала (2.15), получаем

$$d\varphi = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr,$$

откуда после интегрирования, находим значение потенциала

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{3\epsilon_0 \cdot 2} + C.$$

Для нахождения константы интегрирования С используем значение потенциала на поверхности шара. Согласно формуле (2.8) потенциал  $\varphi_R$  на поверхности шара равен

$$\varphi_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

Из последних двух соотношений получаем

$$\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 \cdot 2} + C \rightarrow C = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$$

Подставляя значение постоянной С в выражение для потенциала, находим распределение потенциала внутри шара:

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right).$$

Учитывая, что потенциал в центре шара (при  $r = 0$ )  $\varphi_0 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ ,

окончательно получаем

$$\varphi = \varphi_0 (1 - r^2 / 3R^2).$$

**Задача 2.7.** Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом  $R = 1$  см, равномерно заряженным с линейной плотностью  $\tau = 20$  нКл/м. Определить работу поля по перемещению заряда  $q = 1$  нКл между двумя точками, находящимися на расстояниях  $a_1 = 0,5$  см и  $a_2 = 2$  см от поверхности цилиндра в средней его части.

### Решение

Работа поля по перемещению заряда между двумя точками находится по формуле (2.10). Для определения разности потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) воспользуемся формулой связи между напряженностью и потенциалом (2.15)

$$d\varphi = -E dr.$$

Интегрируя последнее соотношение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих от оси цилиндра на  $r_1$  и  $r_2$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr.$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой (1.16). Подставив это выражение в разность потенциалов, получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляя значения заряда  $q$  и значения  $r_1 = R + a_1$  и  $r_2 = R + a_2$  в формулу для работы, получим

$$A = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R + a_2}{R + a_1} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

**Задача 2.8.** Электрон массой  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг и зарядом  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл с начальной скоростью  $v_0 = 10^7$  м/с влетает в однородное электрическое поле с напряженностью  $E = 10^3$  В/м под углом  $\alpha = 60^\circ$  к силовым линиям поля (рис. 2.4). В какой момент времени скорость электрона будет минимальной?

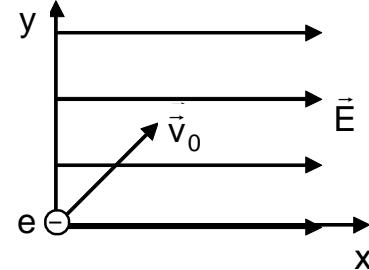


Рис. 2.4

### Решение

Поле  $E$  известно, следовательно, можно найти силу, действующую на электрон (отрицательный заряд)

$$\vec{F} = -eE\vec{i},$$

где  $\vec{i}$  - орт оси ОХ. Таким образом, вдоль оси ОХ электрон движется равнозамедленно с начальной скоростью

$$v_{ox} = v_0 \cos \alpha,$$

а вдоль оси ОУ равномерно со скоростью

$$v_{oy} = v_0 \sin \alpha = \text{const.}$$

Законы движения электрона вдоль осей ОХ и ОУ можно записать в виде

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{at^2}{2},$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t.$$

Ускорение  $a$  найдем из второго закона Ньютона

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Таким образом, перед нами основная задача кинематики: известны законы движения частицы вдоль осей ОХ и ОY, требуется найти скорость и время.

Определим компоненты скорости частицы

$$v_x = x' = v_0 \cos \alpha - at = v_0 \cos \alpha - \frac{eE}{m} t,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha = \text{const.}$$

Модуль скорости электрона

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

будет минимальен, если  $v_x = 0$ . Таким образом, из зависимости скорости  $v_x$  от времени находим  $t$ , когда скорость электрона будет минимальна

$$t = \frac{mv_0 \cos \alpha}{eE} \approx 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

**Задача 2.9.** Протон массой  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и зарядом  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, движущийся горизонтально со скоростью  $v_0$ , влетает в середину плоского конденсатора параллельно его пластинам длиной  $L$ . Расстояние между ними  $d$ . В этот же момент времени к пластинам прикладывается разность потенциалов  $\Delta\phi = \alpha t^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Какой должна быть величина  $\alpha$ , чтобы протон не вылетел из конденсатора (рис.2.5)?

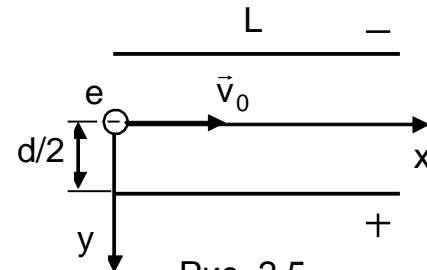


Рис. 2.5

### Решение

Напряженность поля  $E$  между пластинами конденсатора легко определить, учитывая связь напряженности и потенциала (2.16), а также то, что поле внутри конденсатора однородно

$$E = -\frac{\Delta\phi}{d} = -\frac{\alpha t^2}{d}.$$

Таким образом, найденное поле хотя и однородно, но зависит от времени  $t$  по квадратичному закону. Следовательно, и сила

$$F_y = eE = \frac{e\alpha t^2}{d},$$

действующая на протон непостоянна, а значит, и ускорение протона будет зависеть от времени

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e\alpha t^2}{md}.$$

Таким образом, перед нами обратная задача кинематики: известна зависимость компоненты ускорения  $a_y$  от времени  $t$ , требуется найти зависимость координаты  $y$  протона от времени (закон движения по оси ОУ). Для нахождения скорости протона проинтегрируем выражение для ускорения по времени

$$v_y = \int a_y \cdot dt = \int \frac{e\alpha t^2}{md} \cdot dt = \frac{e\alpha t^3}{3md} + C_1.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  находим из начальных условий: при  $t = 0, v_y = 0$ . Следовательно  $C_1 = 0$ .

Для нахождения закона движения вдоль оси ОY полученное выражение для скорости проинтегрируем по времени

$$y = \int v_y \cdot dt = \int \frac{e\alpha t^3}{3md} \cdot dt = \frac{e\alpha t^4}{12md} + C_2.$$

Постоянную  $C_2$  определяем из начальных условий: при  $t = 0 y = 0$ . Следовательно,  $C_2 = 0$ . Окончательно закон движения протона по оси ОУ имеет вид

$$y = \frac{e\alpha t^4}{12md}.$$

По оси ОХ протон движется равномерно со скоростью  $v_0$ , следовательно, закон движения вдоль оси ОХ

$$x = v_0 t.$$

Чтобы протон не вылетел из конденсатора необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} x = v_0 t \leq L \\ y = \frac{e\alpha t^4}{12md} = \frac{d}{2} \end{cases}$$

Исключая время  $t$  из этих двух соотношений находим, что при значении

$$\alpha \geq \frac{6md^2 v_0^4}{eL^4}$$

протон не вылетит из конденсатора.

**Задача 2.10.** На оси равномерно заряженного зарядом  $+q$  тонкого кольца радиусом  $R$  в точке A, находящейся на расстоянии  $x_0$  от центра кольца O находится электрон. Определить скорость электрона в центре кольца (точке O). Начальная скорость электрона  $v_0$  равна нулю (рис.2.6).

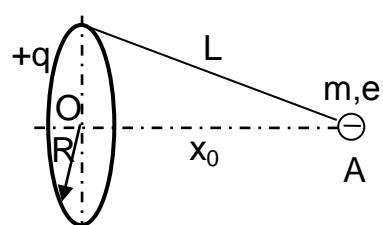


Рис. 2.6.

### Решение

Определим потенциал  $\phi_1$  поля кольца в центре О и  $\phi_2$  в точке А. Эти точки находятся на одинаковом расстоянии от всех элементарных участков кольца. Поэтому

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}; \quad \phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x_0^2}}.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии

$$\Delta E_k = A,$$

где  $A = e(\phi_1 - \phi_2)$  - работа по перемещению электрона из точки А в точку О. Так как начальная кинетическая энергия электрона была равна нулю, то

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2},$$

где  $v$  - искомая скорость электрона в точке О.

Подставляя значения потенциала в теорему об изменении кинетической энергии, получаем

$$v = \sqrt{\frac{2eq}{4\pi\epsilon_0 \cdot m} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \right]}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**2.11.** Точечный заряд  $q = 10$  нКл, находясь в некоторой точке поля, обладает потенциальной энергией  $W = 10$  мкДж. Найти потенциал  $\phi$  этой точки поля.

**2.12.** Поле создано точечным зарядом  $q = 1$  нКл. Определить потенциал  $\phi$  поля в точке, удаленной от заряда на расстояние  $r = 20$  см.

**2.13.** Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в точке, удаленной от зарядов  $q_1 = -0,2$  мкКл и  $q_2 = 0,5$  мкКл соответственно на  $r_1 = 15$  см и  $r_2 = 25$  см. Определить также минимальное и максимальное расстояния между зарядами, при которых возможно решение.

**2.14.** Заряды  $q_1 = 1$  мкКл и  $q_2 = -1$  мкКл находятся на расстоянии  $d = 10$  см. Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$  поля в точке, удаленной на расстояние  $r = 10$  см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно направлению от  $q_1$  к  $q_2$ .

**2.15.** Два уединенных металлических шарика радиусами  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 6$  см, имеющие одинаковые заряды  $q = 8 \cdot 10^{-9}$  Кл, соединяют длинной проволокой. Найти характер изменения зарядов на шариках после их соединения.

**2.16.** Найти потенциал  $\phi$  и напряженность  $E$  в центре сферы радиусом  $R$ , заряженной однородно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

**2.17.** Прямая бесконечная нить равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau = 0,01 \text{ мкКл/м}$ . Найти разность потенциалов между двумя точками, удаленными от нити на расстояния  $r_1 = 2 \text{ см}$  и  $r_2 = 4 \text{ см}$ .

**2.18.** На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 10 \text{ нКл/м}$ . Вычислить потенциал  $\phi$ , созданный этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

**2.19.** Находящийся в вакууме очень тонкий прямой стержень длиной  $2a$  заряжен равномерно с линейной плотностью заряда  $\tau$ . Найти напряженность поля  $E$  и потенциал  $\phi$  в точках, лежащих на оси стержня вне его, как функцию расстояния  $r$  от центра стержня (рис. 2.7). Исследовать случай  $r \gg a$ .

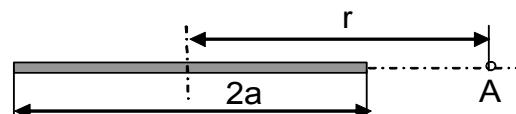


Рис. 2.7.

**2.20.** Тонкие стержни образуют квадрат со стороной  $a$ . Стержни заряжены с линейной плотностью заряда  $\tau = 1,33 \text{ нКл/м}$ . Найти потенциал  $\phi$  в центре квадрата.

**2.21.** Заряд  $q$  равномерно распределен по кольцу радиусом  $R$ . Найти потенциал относительно бесконечности и напряженность на оси кольца, как функцию расстояния  $h$  от центра кольца. Построить график зависимости  $E(h)$  и  $\phi(h)$ .

**2.22.** Имеются два тонких проволочных кольца радиусом  $R = 30 \text{ см}$  каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны  $q$  и  $-q$ , соответственно. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящих друг от друга на расстоянии  $L = 52 \text{ см}$ , если  $q = 0,4 \text{ мкКл}$ .

**2.23.** Определить потенциал в центре плоского кольца с внешним диаметром  $D = 0,8 \text{ м}$  и внутренним  $d = 0,4 \text{ м}$ , если на нем равномерно распределен заряд  $q = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ .

**2.24.** Тонкая круглая пластинка несет равномерно распределенный по плоскости заряд  $q = 1 \text{ нКл}$ . Радиус пластиинки  $R = 5 \text{ см}$ . Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в двух точках: 1) в центре пластиинки; 2) в точке, лежащей на оси, перпендикулярной плоскости пластиинки и отстоящей от центра на расстояние  $a = 5 \text{ см}$ .

**2.25.** Находящаяся в вакууме круглая тонкая пластиинка радиусом  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти

потенциал и модуль напряженности электрического поля на оси пластиинки, как функцию расстояния  $L$  от ее центра.

**2.26.** Две одинаковые металлические пластины площадью  $S$  находящиеся друг от друга на малом расстоянии  $d$ , заряжены: одна зарядом  $+q$ , другая зарядом  $+2q$ . Какова разность потенциалов между ними?

**2.27.** Очень тонкая пластиинка имеет форму кольца с внутренним радиусом  $a$  и внешним  $b$ . По пластиинке равномерно распределен заряд  $q$ . Приняв ось пластиинки за ось  $x$ , найти  $\phi$  и  $E_x$  на оси пластиинки как функции  $x$ .

**2.28.** Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностью плотностью  $\sigma = 10 \text{ Кл}/\text{м}^2$ . Определить разность потенциалов  $\Delta\phi$  двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от плоскости на расстояние  $d = 10 \text{ см}$ .

**2.29.** Определить разность потенциалов между точками А и В электростатического поля, создаваемого двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями (рис.2.8) с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1 = 0,2 \text{ мКл}/\text{м}^2$  и  $\sigma_2 = 0,42 \text{ мКл}/\text{м}^2$ . Плоскости пересекаются под прямым углом. Расстояния  $a = 7 \text{ см}$ ,  $b = 5 \text{ см}$ .

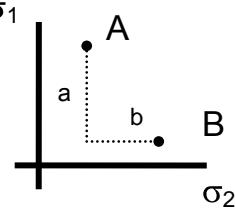


Рис. 2.8.

**2.30.** Две круглые металлические пластины радиусом  $R = 10 \text{ см}$  каждая, заряженные разноименно, расположены одна против другой параллельно друг другу и притягиваются с силой  $F = 2 \text{ МН}$ . Расстояние между пластиинами  $d = 1 \text{ см}$ . Определить разность потенциалов  $\Delta\phi$  между пластиинами.

**2.31.** Найти потенциал  $\phi$  и напряженность поля  $E$  в центре полусферы радиусом  $R$ , заряженной равномерно с поверхностью плотностью заряда  $\sigma$ .

**2.32.** Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностью плотностью заряда  $\sigma = 4 \text{ нКл}/\text{м}^2$ . Определить значение и направление градиента потенциала электрического поля, созданного этой плоскостью.

**2.33.** Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал поля в точке, удаленной от заряда на расстояние  $r = 12 \text{ см}$ , равен  $\phi = 24 \text{ В}$ . Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке.

**2.34.** Бесконечная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине заряд с плотностью  $\tau = 1 \text{ нКл}/\text{м}$ . Каков градиент потенциала в точке, удаленной на расстояние  $r = 10 \text{ см}$  от нити? Указать направление градиента потенциала.

**2.35.** Потенциал поля имеет вид  $\phi = x^2 - 2y^2$ . Найти модуль вектора напряженности этого поля в произвольной точке.

**2.36.** Потенциал поля, создаваемый некоторой системой зарядов имеет вид:  $\phi = a(x^2+y^2) - bz^2$ , где  $a$  и  $b$  - const. Найти вектор напряженности поля  $\vec{E}$  и модуль вектора  $E$ .

**2.37.** Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат  $x$  и  $y$  по закону: а)  $\phi = a(x^2 - y^2)$ ; б)  $\phi = ay$ , где  $a = \text{const}$ .

**2.38.** Напряженность некоторого поля имеет вид:  $\vec{E} = E_0 \hat{i}$ , где  $E_0 = \text{const}$ . Написать выражение для потенциала поля  $\phi$ .

**2.39.** Две проводящие концентрические сферы имеют радиусы  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 20$  см. На каждой из них распределен заряд  $q = 1,6 \cdot 10^{-8}$  Кл. Чему равна разность потенциалов  $\Delta\phi$  между ними, и какова напряженность поля, созданная этими зарядами?

**2.40.** Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом  $R = 10$  см, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда  $\tau = 20$  нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек, находящихся на расстоянии  $a_1 = 0,5$  см и  $a_2 = 2$  см от поверхности цилиндра в средней его части.

**2.41.** Заряд  $q = 2$  мкКл распределен равномерно по объему шара радиусом  $R = 40$  мм. Найти потенциал  $\phi$  и вектор напряженности  $\vec{E}$ : а) в центре шара; б) внутри шара, как функцию расстояния  $r$  от центра шара.

**2.42.** Сфера радиусом  $R_1 = 3$  см равномерно заряжена зарядом  $q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$  Кл и окружена тонкой концентрической сферой радиусом  $R = 9$  см. Какой заряд  $q_2$  надо сообщить внешней сфере, чтобы потенциал внутренней сферы относительно бесконечности обратился в ноль? Построить графики зависимости  $E(r)$  и  $\phi(r)$ .

**2.43.** Металлический шар, радиусом  $R_1 = 10$  см заряжен до потенциала  $\phi_1 = 300$  В. Какой потенциал будет иметь этот шар, если его окружить сферической проводящей заземленной оболочкой радиусом  $R_2 = 15$  см?

**2.44.** Найти потенциал незаряженной проводящей сферы, вне которой на расстоянии  $L = 30$  см от ее центра находится точечный заряд  $q = 0,5$  мкКл.

**2.45.** Внутри металлической сферы, внутренний радиус которой  $r_1 = 5$  см, внешний  $r_2 = 6$  см помещен точечный заряд  $q_0 = 10^{-8}$  Кл на расстоянии  $a = 2$  см от центра. Найти потенциал в центре сферы.

**2.46.** Заряд  $q = 1 \text{ нКл}$  распределен по шару радиусом  $R = 10 \text{ см}$  с объемной плотностью заряда  $\rho$ , пропорциональной расстоянию  $r$  от центра шара. Найти: а) потенциал  $\phi_0$  в центре шара; б) потенциал  $\phi(r)$  внутри шара, как функцию  $r$ .

**2.47.** Эбонитовый ( $\epsilon = 3$ ) толстостенный шар полый шар несет равномерно распределенный по объему заряд с объемной плотностью  $\rho = 2 \text{ мкКл}/\text{м}^3$ . Внутренний радиус шара  $R_1 = 3 \text{ см}$ , наружный  $R_2 = 6 \text{ см}$ . Определить потенциал шара в следующих точках: 1) на наружной поверхности шара; 2) на внутренней поверхности шара; 3) в центре шара.

**2.48.** Сплошной парафиновый ( $\epsilon = 2$ ) шар радиусом  $R = 10 \text{ см}$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho = 1 \text{ мкКл}/\text{м}^3$ . Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в центре шара и на его поверхности.

**2.49.** Плоская стеклянная ( $\epsilon = 7$ ) пластина заряжена равномерно с объемной плотностью  $\rho = 10 \text{ мкКл}/\text{м}^2$ . Найти разность потенциалов  $\Delta\phi$  между точкой, лежащей на поверхности, и точкой, находящейся внутри пластины в ее середине. Считать, что размеры пластины велики по сравнению с ее толщиной.

**2.50.** При перемещении заряда  $q = 20 \text{ нКл}$  между двумя точками поля внешними силами была совершена работа  $A = 4 \text{ мкДж}$ . Определить работу  $A_1$  сил поля и разность  $\Delta\phi$  потенциалов этих точек поля.

**2.51** Электрическое поле создано зарядом  $Q_1 = 50 \text{ нКл}$ . Определить работу внешних сил по перемещению точечного заряда  $q_2 = -2 \text{ нКл}$  из точки С в точку В (рис.2.9), если  $r_1 = 10 \text{ см}$ ,  $r_2 = 20 \text{ см}$ .

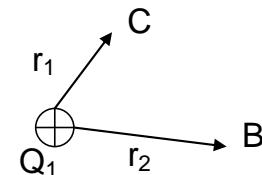


Рис. 2.9.

**2.52.** Точечные заряды  $q_1 = 1 \text{ мкКл}$  и  $q_2 = 0,1 \text{ мкКл}$  находятся на расстоянии  $r_1 = 10 \text{ см}$  друг от друга. Какую работу  $A$  совершают силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние: 1)  $r_2 = 10 \text{ м}$ ; 2)  $r_2 = \infty$ .

**2.53.** Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами  $q$ . Найти работу  $A_{1-2}$  сил поля по перемещению заряда  $q_1 = 10 \text{ нКл}$  из точки 1 с потенциалом  $\phi_1 = 300 \text{ В}$  в точку 2 с потенциалом  $\phi_2$  (рис.2.10).

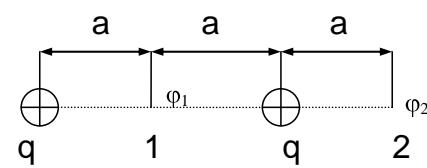


Рис. 2.10.

**2.54.** Определить работу  $A_{1-2}$  по перемещению заряда  $q_1 = 50 \text{ нКл}$  из точки 1 в точку 2 в поле, созданном двумя точечными зарядами, модуль которых равен  $|q| = 1 \text{ мкКл}$ . Расстояние  $a = 0,1 \text{ м}$  (рис.2.11).

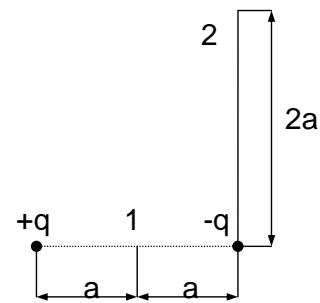


Рис. 2.11.

**2.55.** Два параллельных кольца, радиусы которых одинаковы и равны  $R$ , имеют общую ось. Расстояние между их центрами равно  $d$ . На первом кольце равномерно распределен заряд  $q_1 < 0$ , на втором  $q_2 > 0$ . Какую минимальную работу необходимо совершить для перемещения заряда  $q_0 > 0$  из центра первого кольца в центр второго?

**2.56.** Точечный заряд  $q = 20 \text{ мкКл}$  расположен вблизи бесконечной равномерно заряженной пластины с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = -50 \text{ нКл/м}^2$ . Заряд перемещают из точки 1 в точку 2 под углом  $\alpha = 60^\circ$  к пластине (рис.2.12). Определить минимальную работу, которую необходимо совершить при этом перемещении. Расстояние между точками равно  $L = 5 \text{ м}$ .

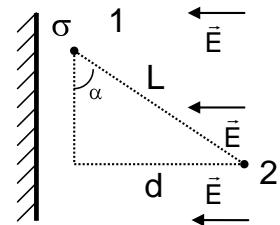


Рис. 2.12.

**2.57.** На отрезке прямого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1 \text{ мкКл/м}$ . Определить работу  $A$  сил поля при перемещении заряда  $q = 1 \text{ нКл}$  из точки В в точку С (рис.2.13).

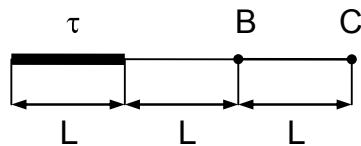


Рис. 2.13.

**2.58.** Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом  $R = 10 \text{ см}$ . Он заряжен с линейной плотностью  $\tau = 300 \text{ нКл/м}$ . Какую работу  $A$  надо совершить, чтобы перенести заряд  $q = 5 \text{ нКл}$  из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии  $L = 20 \text{ см}$  от его центра?

**2.59.** Определить работу  $A_{1-2}$  сил поля по перемещению заряда  $q = 1 \text{ мкКл}$  из точки 1 в точку 2 поля, созданного заряженным проводящим шаром (рис.2.14). Потенциал на поверхности шара равен  $\varphi = 1 \text{ кВ}$ .

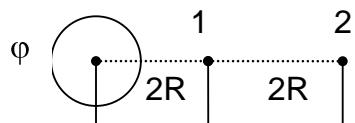


Рис. 2.14.

**2.60.** Вычислить работу сил электростатического поля при перемещении точечного заряда  $q = 20 \text{ нКл}$  из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии  $d = 1 \text{ см}$  от поверхности шара радиусом  $R = 1 \text{ см}$ , равномерно заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma = 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ .

**2.61.** Электрон с начальной скоростью  $v_0 = 3 \cdot 10^6$  м/с влетает в однородное электрическое поле напряженностью  $E = 150$  В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: 1) силу, действующую на электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через  $t = 0,1$  мкс.

**2.62.** Вначале электрон летит свободно со скоростью  $v_0$ . В момент  $t = 0$  включают однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , образующее с направлением  $v_0$  угол  $\alpha$ . Определить по какой траектории движется электрон после включения поля? Каков радиус кривизны  $R$  траектории в той точке, где скорость электрона минимальна?

**2.63.** Электрон находится в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 200$  кВ/м. Какой путь пройдет электрон за время  $t = 1$  нс, если его начальная скорость была равна нулю? Какой скоростью будет обладать электрон в конце этого промежутка времени?

**2.64.** Электрон влетел в плоский конденсатор со скоростью  $v = 10^7$  м/с, направленную параллельно пластинам конденсатора. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол  $\alpha = 35^\circ$  с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов  $U$  между пластинами, если длина пластин  $L = 10$  см и расстояние между пластинами  $d = 2$  см.

**2.65.** Разность потенциалов между катодом и анодом электронной лампы  $U = 90$  В, расстояние  $L = 1$  мм. С каким ускорением движется электрон от катода к аноду? Какова скорость электрона в момент удара об анод? За какое время  $t$  электрон пролетает расстояние от катода к аноду? Поле считать однородным.

**2.66.** Прямой бесконечный цилиндр радиусом  $r_0 = 1$  м равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 10^{-12}$  Кл/м<sup>2</sup>. Цилиндр является источником электронов. Вектор скорости вылетающего электрона перпендикулярен поверхности цилиндра. Какова должна быть скорость электронов, чтобы они удалились от поверхности цилиндра на расстояние большее, чем  $r = 10^4$  м?

**2.67.** Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью  $\sigma = 35,4$  нКл/м<sup>2</sup>. По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии  $L_0 = 5$  см он имел кинетическую энергию  $W_k = 80$  эВ.

**2.68.** В расположенному горизонтально плоскому конденсаторе с расстоянием между пластинами  $d = 10$  мм находится капелька массой  $m = 6,4 \cdot 10^{-16}$  кг. В отсутствие напряжения капелька падает со скоростью  $v_1 = 7,8 \cdot 10^{-5}$  м/с. После подачи напряжения  $U = 90$  В, капелька движется вверх со скоростью  $v_2 = 1,6 \cdot 10^{-5}$  м/с. Определить заряд капельки  $q$ .

**2.69.** Заряд  $q = -0,33 \cdot 10^{-7}$  Кл равномерно распределен по сферической поверхности. Какую скорость нужно сообщить точечному заряду  $q_0$  в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей центр сферической поверхности с точечным зарядом, чтобы он начал вращаться по окружности радиусом  $r = 10$  см, коаксиальной со сферической поверхностью? Отношение величины точечного заряда к его массе  $q_0/m = 0,33 \cdot 10^{-3}$  Кл/кг. Заряды находятся в вакууме. Радиус сферической поверхности  $R$  меньше  $r$ .

**2.70.** Два шарика с массами  $m_1 = 5$  г и  $m_2 = 15$  г, имеющие заряды  $q_1 = 8 \cdot 10^{-8}$  Кл и  $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$  Кл, движутся навстречу друг другу под действием электростатической силы притяжения. Первоначальное расстояние между ними  $L_0 = 20$  см и начальные скорости их равны нулю. Определить скорости, которые они будут иметь в тот момент, когда расстояние между ними станет равным  $L = 8$  см. (Силами сопротивления пренебречь; магнитные поля, обусловленные движением шариков, не учитывать).

**2.71.** В центре гладкой полусфери радиусом  $R$  расположен точечный заряд  $+q$ . С вершины полусфери без начальной скорости скользит материальная точка массой  $m$ , имеющая заряд  $+q$ . На какой высоте  $h$  (считая от вершины полусфери) она оторвется и полетит вниз?

**2.72.** Протон влетает в однородное электрическое поле против его силовых линий (параллельно им) с начальной скоростью  $v_0 = 10^6$  м/с. Определить путь, пройденный протоном до остановки, если напряженность электрического поля изменяется по закону  $E = at$ , где  $a = 10^{12}$  В/(м·с). Масса протона  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**2.73.** Какой минимальной скоростью  $v_{min}$  должен обладать протон ( $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл), чтобы он мог достигнуть поверхности закрепленного шара, который заряжен до потенциала  $\phi = 400$  В (рис. 2.15)?

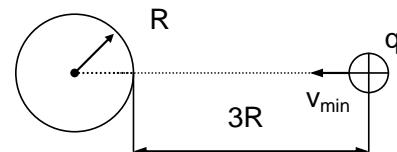


Рис. 2.15.

**2.74.** Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом  $\phi_1 = 100$  В электрон имел скорость  $v_1 = 6$  Мм/с. Определить потенциал  $\phi_2$  точки поля, в которой скорость электрона  $v_2$  будет равна  $0,5v_1$ . Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, заряд  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**2.75.** Электрон влетает в плоский конденсатор через очень маленькое отверстие в положительно заряженной пластине. Вектор скорости электрона перпендикулярен плоскости пластин и равен по величине  $v = 10^4$  км/с. Какова должна быть наименьшая разность потенциалов между пластинами, чтобы электрон вылетел обратно из

конденсатора? Поле между пластинами конденсатора считать однородным. Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, заряд электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Силой тяжести пренебречь.

**2.76.** Силовые линии электростатического поля представляют собой параллельные прямые. Вдоль силовых линий напряженность поля возрастает по закону  $E = \alpha x$ , где  $\alpha = 10^5$  В/м. Какую энергию приобретет частица с зарядом  $q = 2 \cdot 10^{-10}$  Кл, пройдя из начала координат вдоль силовой линии расстояние  $L = 1$  м?

**2.77.** Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi$ , влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно пластинам длиной  $L$  и вылетает из него. В тот момент, когда электрон влетает в конденсатор, в последнем возникает электрическое поле, напряженность которого меняется со временем по закону  $E = \alpha t$  (где  $\alpha = \text{const}$ ). Вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости пластин. Определить, с какой скоростью электрон вылетит из конденсатора. Заряд электрона  $|e|$ , его масса  $m$ .

**2.78.** Два электрона, находящиеся на очень большом расстоянии друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью  $v = 10^6$  м/с. Определить минимальное расстояние  $r_{\min}$ , на которое они могут подойти друг к другу.

**2.79.** Определить начальную скорость сближения протонов, находящихся на большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние их сближения равно  $r_{\min} = 10^{-11}$  см.

**2.80.** Из точки 1 на поверхности бесконечного длинного отрицательно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда  $\tau = -20$  нКл/м вылетает электрон с начальной скоростью  $v_0 = 0$ . Определить кинетическую энергию электрона в точке 2 (рис.2.16), находящейся на расстоянии  $9R$  от поверхности цилиндра, где  $R$  – его радиус.

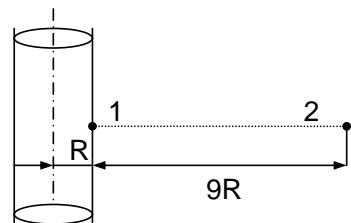


Рис. 2.16.

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ. ДИЭЛЕКТРИКИ. ПРОВОДНИКИ. КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### Основные понятия и законы

##### Электрический диполь.

Электрическим диполем называется система из двух одинаковых точечных электрических зарядов  $q$  противоположного знака (рис.3.1), расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга.

Электрическим моментом диполя или *дипольным моментом* называют вектор

$$\vec{p} = q\vec{L}. \quad (3.1)$$

Вектор  $\vec{L}$ , направленный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется *плечом диполя* (рис.3.1).

##### Напряженность поля диполя

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (3.2)$$

где  $p$  - электрический момент диполя;  $r$  - модуль радиус-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность в которой нас интересует;  $\alpha$  - угол между радиус-вектором  $\vec{r}$  и плечом диполя  $\vec{L}$  (рис.3.2).

Напряженности на оси диполя ( $\alpha = 0$ ) и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленному из его середины ( $\alpha = \pi/2$ ), соответственно равны

$$E_{\alpha=0} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad E_{\alpha=\pi/2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (3.3)$$

##### Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha. \quad (3.4)$$

Потенциалы на оси диполя ( $\alpha = 0$ ) и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленному из его середины ( $\alpha = \pi/2$ ), соответственно равны

$$\varphi_{\alpha=0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad \varphi_{\alpha=\pi/2} = 0. \quad (3.5)$$

*Механический вращательный момент*, действующий на диполь, помещенный в однородное поле с напряженностью  $\vec{E}$

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}] \quad \text{или} \quad M = pE \sin \alpha, \quad (3.6)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ .

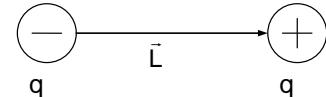


Рис. 3.1

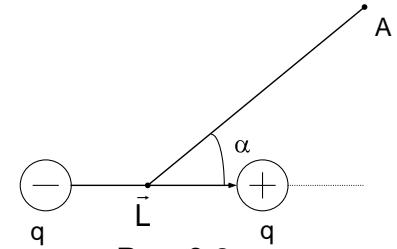


Рис. 3.2

*В неоднородном поле* кроме механического момента на точечный диполь действует сила  $\vec{F}$ , которая выталкивает (или втягивает) диполь из поля. В случае поля, обладающего симметрией относительно оси ОХ, сила выражается соотношением:

$$F_x = p \frac{dE}{dx} \cos \alpha, \quad (3.7)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{E}$ .

При  $\alpha > \pi/2$  сила  $F_x > 0$  т.е. диполь втягивается в область сильного поля, при  $\alpha < \pi/2$  сила  $F_x < 0$ , т.е. диполь выталкивается из области сильного поля.

*Потенциальная энергия* точечного электрического диполя, находящегося в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$

$$W = -\vec{p}\vec{E} \quad \text{или} \quad W = -pE \cos \alpha. \quad (3.8)$$

### **Электростатическое поле в диэлектриках.**

В незаряженном диэлектрике нет свободных зарядов. Молекулы диэлектрика представляют собой электрические диполи. В отсутствии внешнего электрического поля вследствие хаотического теплового движения суммарное поле всех молекул-диполей равно нулю.

Во внешнем электрическом поле молекулы-диполи ориентируются вдоль поля. Объемная плотность электрических зарядов внутри диэлектрика равна нулю. На границах диэлектрика появляются *связанные* (поляризационные) заряды с поверхностной плотностью  $\sigma'$ . Диэлектрик поляризуется.

При однородной поляризации *поляризованность*  $\vec{P}$  (вектор поляризации) есть суммарный электрический момент единицы объема диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (3.9)$$

где  $\vec{p}_i$  - электрический момент  $i$ -ой молекулы диполя,  $\Delta V$  - объем диэлектрика.

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  в диэлектрике по принципу суперпозиции (1.6) равна геометрической сумме напряженности внешнего поля  $\vec{E}_0$  и напряженности поля  $\vec{E}'$  связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (3.10)$$

*Связь поляризованности*  $\vec{P}$  *с вектором напряженности* электрического поля в диэлектрике  $\vec{E}$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.11)$$

где  $\chi$  - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, равная  $\chi = \epsilon - 1$ .

*Поверхностная плотность*  $\sigma'$  связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризованности  $P$

$$\sigma' = P = \chi \epsilon_0 E. \quad (3.12)$$

Для расчета поля в диэлектрике вводят *вектор электрического смещения*  $\vec{D}$  (или вектор электрической индукции)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (3.13)$$

Между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  существует связь

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.14)$$

где  $\epsilon$  относительная диэлектрическая проницаемость вещества,  $\vec{E}$  - напряженность поля в диэлектрике, которая меньше напряженности поля в вакууме  $\vec{E}_0$  в  $\epsilon$  раз ( $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon$ ).

Из формул (3.12) и (3.13) можно получить формулу для расчета поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma'$

$$\sigma' = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E. \quad (3.15)$$

Для вектора электрического смещения справедлива *теорема Гаусса*: поток  $\Phi_D$  вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\Phi_D = \sum_i q_i \text{ или } \Phi_D = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_{CB} dV. \quad (3.16)$$

### **Проводники в электрическом поле.**

В проводниках большая доля зарядов может перемещаться внутри вещества. При помещении проводника во внешнее электрическое поле на границах проводника возникают *индуцированные* заряды противоположных знаков, поле которых противоположно внешнему, что приводит к ослаблению внешнего поля.

Напряженность электрического поля *внутри* проводника, помещенного в электростатического поля, равна нулю

$$\vec{E} = 0. \quad (3.17)$$

Свободные заряды внутри проводника отсутствуют, а распределяются только по его поверхности. Силовые линии вблизи проводника перпендикулярны к его поверхности.

Напряженность *вблизи* поверхности проводника (*вне* его) равна

$$E = \sigma / \epsilon_0, \quad (3.18)$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность зарядов на поверхности проводника.

Потенциалы всех точек поверхности проводника (и внутри него) одинаковы, т.е. поверхность проводника является *эквипотенциальной*

$$\varphi = \text{const.} \quad (3.19)$$

На этом свойстве основан *метод зеркальных изображений*, суть которого изложена в разобранной задаче 3.5.

Соединение заряженного проводника с другим проводником приводит к перераспределению зарядов так, что потенциалы тел выравниваются. Поэтому *потенциал заземленного проводника равен нулю* (т.к. потенциал Земли равен нулю)

$$\varphi_{\perp} = 0. \quad (3.20)$$

### **Электрическая емкость. Конденсаторы.**

*Электрическая емкость* уединенного проводника или конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \quad (3.21)$$

где  $q$  – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору);  $\Delta\varphi$  - изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Величина  $C$  зависит от геометрических размеров, формы проводника и свойств среды, в которой находится уединенный проводник (или среды между обкладками конденсатора).

*Электрическая емкость* уединенной проводящей сферы радиусом  $R$ , находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (3.22)$$

*Электрическая емкость* плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}, \quad (3.23)$$

где  $S$  - площадь одной пластины конденсатора,  $d$  - расстояние между пластинами,  $\epsilon$  - диэлектрическая постоянная среды внутри конденсатора.

*Электрическая емкость* сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , пространство между которыми заполнено средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ )

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (3.24)$$

где  $R_1$  - радиус внутренней сферы,  $R_2$  - радиус внешней сферы.

*Емкость цилиндрического конденсатора* (два коаксиальных цилиндра длиной  $L$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , пространство между которыми заполнено средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ )

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (3.25)$$

где  $R_1$  - радиус внутреннего цилиндра,  $R_2$  - радиус внешнего цилиндра.

При *последовательном соединении* конденсаторов емкость батареи  $C$  определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (3.26)$$

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи С определяется соотношением

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (3.27)$$

### **Энергия электростатического поля.**

Из (2.6) следует, что заряд  $q$ , находящийся в точке с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией

$$W = q \cdot \varphi. \quad (3.28)$$

Потенциальная энергия двух точечных зарядов, находящихся в безграничной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  на расстоянии  $r$  друг от друга равна

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}. \quad (3.29)$$

Потенциальная энергия  $W$  взаимодействия системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  определяется работой, которую система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (3.30)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал поля, создаваемого всеми  $(n - 1)$  зарядами за исключением  $i$ -го, в точке, где расположен заряд  $q_i$ .

Потенциальная энергия проводника емкостью  $C$

$$W = \frac{1}{2} C \varphi^2 = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.31)$$

Объемная плотность энергии

$$w = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} ED, \quad (3.32)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ;  $D$  – электрическое смещение (индукция).

Энергия поля в объеме  $V$

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V \text{ - для однородного поля,} \quad (3.33)$$

$$W = \int_V w \cdot dV \text{ - для неоднородного поля} \quad (3.34)$$

### **Примеры решения задач**

**Задача 3.1.** Шар радиусом  $R$  равномерно заряжен зарядом  $q$ . На расстоянии  $r > R$  от центра шара находится свободно ориентированный точечный диполь с электрическим моментом  $p$ . Найти модуль силы, действующей на диполь и потенциальную энергию диполя.

### Решение

Напряженность поля шара известна (1.17)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

поэтому по (3.7) находим силу, действующую на диполь,

$$F_r = p \frac{dE}{dr} \cos \alpha = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Здесь учтено, что свободно ориентированный диполь устанавливается в электрическом поле так, что его ось совпадает по направлению с вектором  $\vec{E}$ , т.е.  $|\cos \alpha| = 1$ .

Потенциальная энергия диполя определяется по формуле (3.8)

$$|W| = pE = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

**Задача 3.2.** В центре О полусферы, равномерно заряженной с поверхностью плотностью заряда  $\sigma$ , расположен свободно ориентированный точечный диполь с электрическим моментом  $p$ . Найти период его малых колебаний относительно оси, перпендикулярной оси симметрии полусферы (ось  $A_1A_2$ ). Момент инерции диполя относительно оси вращения равен  $J$  (рис.3.3).

### Решение

Определим напряженность поля  $\vec{E}$  полусферы в ее центре О, для этого разделим полусферу на узкие кольца и рассмотрим одно такое кольцо. Радиус  $R$  полусферы, проведенный из центра О в любую точку этого кольца составляет угол  $\theta$  с осью ОХ (рис.3.3).

Радиус кольца  $r$  (не показан на рисунке) равен  $r = R \sin \theta$ ; ширина кольца  $dL = R d\theta$ .

Площадь кольца  $dS = 2\pi r \cdot dL = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ .

Заряд на кольце  $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta$ .

Каждый элемент кольца создает в точке О поле, вектор напряженности которого  $d\vec{E}$  составляет угол  $\theta$  с осью ОХ (рис.3.3). В силу симметрии результирующий вектор напряженности поля кольца направлен вдоль оси ОХ (ось симметрии полусферы). Проекция элементарного вектора  $d\vec{E}$  поля кольца на ось ОХ

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta}{2\epsilon_0}.$$

Интегрируя это соотношение по  $\theta$  в пределах от  $\theta_1 = 0$  (наиболее удаленное кольцо) до  $\theta_2 = \pi/2$  (ближайшее кольцо), находим

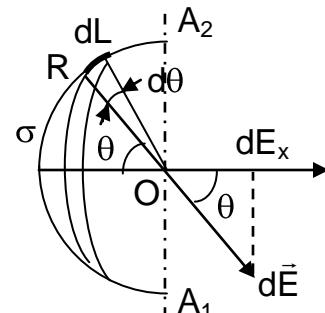


Рис. 3.3

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta}{2\epsilon_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \sin \theta d(\sin \theta)}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

Поле полусферы найдено. Далее решаем механическую задачу на малые колебания твердого тела с моментом инерции  $J$  относительно оси вращения. Если вывести диполь из положения равновесия, повернув его на малый угол  $\alpha$  относительно оси  $A_1A_2$ , то на диполь будет действовать врачательный момент  $M$ , который по (3.6) равен

$$M = pE \sin \alpha = \frac{p\sigma}{4\epsilon_0} \sin \alpha.$$

Из второго закона Ньютона для врачательного движения твердого тела относительно оси вращения, получаем

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -M = -\frac{p\sigma}{4\epsilon_0} \sin \alpha.$$

Так как угол  $\alpha$  - мал, то  $\sin \alpha \approx \alpha$  и последнее соотношение можно записать в виде

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{p\sigma}{4\epsilon_0} \alpha = 0 \text{ или } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{p\sigma}{4\epsilon_0 J}}$  - угловая частота колебаний, которая связана с периодом колебаний  $T$  соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0 J}{p\sigma}}.$$

**Задача 3.3.** Одной из пластин плоского конденсатора площадью  $S$  сообщили заряд  $q$ , другая пластина соединена с Землей. Расстояние между пластинами  $d$ . Между пластинами (параллельно им) находятся стеклянная ( $\epsilon_1$ ) и фарфоровая ( $\epsilon_2$ ) пластины, толщины которых соответственно равны  $d_1$  и  $d_2$ . Определить напряженности электрического поля в стекле  $E_1$  и фарфоре  $E_2$ , а также поверхностные плотности  $\sigma_1'$  и  $\sigma_2'$  связанных зарядов на них (рис.3.4).

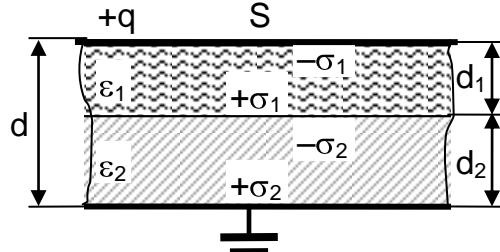


Рис. 3.4

### Решение

На пластинах конденсатора распределены свободные электрические заряды с плотностью  $\sigma = q/S$ , на диэлектриках связанные электрические заряды с плотностями  $\sigma_1'$  и  $\sigma_2'$ , которые требуется определить. Задачу можно решить двумя способами.

**1) Метод суперпозиции.** Поля свободных  $E_0$  и связанных  $E_1'$  и  $E_2'$  зарядов, расположенных на двух параллельных плоскостях определяются по (1.15)

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}; \quad E_1' = \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0}; \quad E_2' = \frac{\sigma_2'}{\epsilon_0}.$$

Так как силовые линии нормальны ко всем поверхностям, то

$$E_{1n} = E_1; \quad E_{2n} = E_2.$$

Поверхностная плотность зарядов считается по формуле (3.15):

$$\sigma_1' = \epsilon_0(\epsilon_1 - 1)E_1; \quad \sigma_2' = \epsilon_0(\epsilon_2 - 1)E_2.$$

Учитывая принцип суперпозиции (1.6) и направление полей, созданных связанными зарядами, получаем:

$$E_1 = E_0 - E_1' = \frac{q}{\epsilon_0 S} - (\epsilon_1 - 1)E_1,$$

отсюда напряженность  $E_1$  равна

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1 S}.$$

Аналогично напряженность  $E_2$  равна

$$E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_2 S}.$$

Окончательно получаем формулу для плотности связанных зарядов

$$\sigma_1' = \frac{(\epsilon_1 - 1)q}{\epsilon_1 S}; \quad \sigma_2' = \frac{(\epsilon_2 - 1)q}{\epsilon_2 S}.$$

**2) Метод Гаусса.** По теореме Гаусса (3.16) определяем вектор электрического смещения в любом диэлектрике:

$$D \Delta S = \sigma \Delta S, \quad D = \sigma = q/S.$$

Далее по (3.14) находим напряженности  $E_1$  и  $E_2$  электрического поля в диэлектриках

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1 S}; \quad E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_2 S}.$$

Плотности связанных зарядов  $\sigma_1'$  и  $\sigma_2'$  по формуле (3.15) соответственно равны:

$$\sigma_1' = \frac{(\epsilon_1 - 1)q}{\epsilon_1 S}; \quad \sigma_2' = \frac{(\epsilon_2 - 1)q}{\epsilon_2 S}.$$

**Задача 3.4.** Две концентрические металлические сферы радиусов  $R_1$  и  $R_2 > R_1$  имеют соответственно заряды  $-q_1$  и  $+q_2$ . Пространство между сферами заполнено эбонитом ( $\epsilon = 3$ ). Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в точках А, В и С, расположенных на расстояниях  $r_1 < R_1$ ,  $R_2 > r_2 > R_1$  и  $r_2 > R_2$  соответственно (рис.3.5).

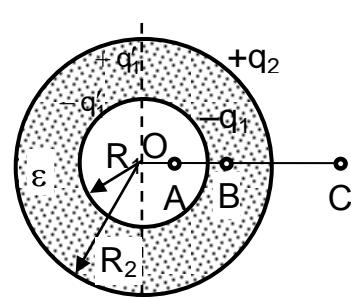


Рис. 3.5

### Решение

**1) Метод суперпозиции.** Результирующее поле создается свободными зарядами  $-q_1$  и  $q_2$  и связанными зарядами  $+q_1'$  и  $-q_2'$ . Для нахождения связанных зарядов по (3.15) необходимо знать напряженность  $E(r)$ , поля в диэлектрике, которую находим по теореме Гаусса (1.17) и (3.14)

$$E(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Пусть  $\sigma_1'$  и  $\sigma_1''$  - поверхностные плотности связанных зарядов  $q_1'$  и  $q_1''$ . Тогда из (3.15)

$$\sigma_1' = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_1 = \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon R_1^2}; \quad \sigma_1'' = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_2 = \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon R_2^2}.$$

Отсюда величины связанных зарядов равны

$$q_1' = \sigma_1' 4\pi R_1^2 = \frac{(\epsilon - 1)q_1}{\epsilon}; \quad q_1'' = \sigma_1'' 4\pi R_2^2 = \frac{(\epsilon - 1)q_1}{\epsilon}.$$

Таким образом, все четыре заряда  $q_1, q_2, q_1', q_1''$ , создающие результирующее поле, определены. Они расположены на сферах. Известно, что для равномерно заряженной сферы радиусом  $R$  в любой точке внутри и на поверхности сферы потенциал поля (в вакууме)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

а для точки вне сферы на расстоянии  $r$  от центра

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Используя принцип суперпозиции (1.6), определяем потенциал  $\varphi_{01}$  в точке А, расположенной на расстоянии  $r_1 < R_1$  от центра О

$$\begin{aligned} \varphi_{01} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_1''}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \\ &= -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1} - \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \end{aligned}$$

Потенциал  $\varphi_{02}$  в точке В на расстоянии  $r_2$  ( $R_1 < r_2 < R_2$ ) равен

$$\begin{aligned} \varphi_{02} &= -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_1''}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{-q_1''}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \\ &= -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_2} - \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \end{aligned}$$

Потенциал  $\varphi_{03}$  в точке С, создается свободными зарядами  $-q_1$  и  $+q_2$

$$\varphi_{03} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3}.$$

**2) Метод Гаусса.** По теореме Гаусса (3.16) и (3.14) находим напряженности  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  и  $E_{03}$  в точках А, В и С

$$E_{01} = 0; \quad E_{02} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^2}; \quad E_{03} = \frac{q_2 - q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_3^2}.$$

Для нахождения потенциала воспользуемся формулой связи  $E$  и  $\varphi$  (2.12). Потенциал на поверхности второй сферы  $\varphi_{03}$  известен, т.к. он создается только свободными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ .

$$\varphi(R_2) = \frac{q_2 - q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Интегрируя выражение для  $E_{02}$  по  $r$  в пределах от  $r_2$  до  $R_2$ , и учитывая значение  $\varphi(R_2)$ , получаем

$$\varphi(R_2) - \varphi(r_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2}.$$

Отсюда определяем  $\varphi(r_2) = \varphi_{02}$

$$\varphi_{02} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

что совпадает с результатом, полученным методом суперпозиции.

Интегрируя  $E_{02}$  в пределах от  $R_1$  до  $r_2$ , находим

$$\varphi(r_2) - \varphi(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}.$$

Отсюда определяем  $\varphi(R_1) = \varphi_{01}$ .

$$\varphi_{01} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} - \frac{(\epsilon - 1)q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

что совпадает с результатом, полученным методом суперпозиции.

**Задача 3.5.** Точечный заряд  $q = +2 \cdot 10^{-8}$  Кл находится на расстоянии  $L = 1$  м от бесконечной заземленной металлической плоскости (рис.3.6). Определить силу взаимодействия между зарядом и плоскостью.

### Решение

Для решения задачи применим метод зеркальных изображений, который основан на следующем положении. Если в произвольном электростатическом поле заменить эквипотенциальную поверхность металлической поверхностью такой же формы и создать на ней такой же потенциал, то данное электростатическое поле не изменится.

Рассмотрим электрическое поле между точечным зарядом  $+q$  и бесконечной металлической плоскостью,

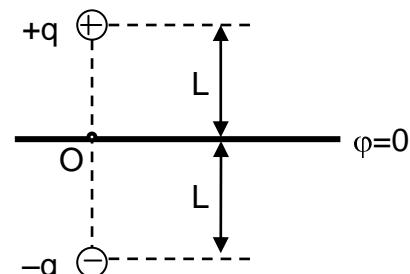


Рис. 3.6

потенциал которой  $\varphi = 0$  (рис.3.6). В силу выше сформулированного положения это поле эквивалентно электрическому полю, созданному данным точечным зарядом  $+q$  и точечным зарядом  $-q$ , являющимся зеркальным изображением данного заряда  $+q$  в металлической плоскости (рис.3.6).

Металлическая плоскость находится в электростатическом поле точечного заряда. Вследствие явления электростатической индукции на стороне металлической плоскости, ближайшей к точечному заряду, появляются наведенные электрические заряды противоположного знака. Поэтому возникает сила взаимодействия между данным точечным зарядом и зарядами, наведенными на плоскости. Потенциал заземленной плоскости равен нулю. Следовательно, согласно методу зеркального изображения, электрическое поле между точечным зарядом и плоскостью эквивалентно полю, созданному данным зарядом  $+q$  и его зеркальным изображением в металлической плоскости  $-q$ . По закону Кулона сила взаимодействия

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2L)^2} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ Н.}$$

**Задача 3.6.** В условиях задачи 3.5 определить плотность  $\sigma_x$  наведенных зарядов на плоскости в точке А, отстоящей от точки О на расстоянии  $OA = x$  (рис.3.7).

### Решение

Из рис.3.7 видно, что вектор результирующего поля  $\vec{E}_1$  направлен вдоль оси AY и равен  $E_1 = 2E_+ \sin\alpha$ , где  $E_+$  напряженность поля заряда  $+q$  в точке А, равная

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L^2 + x^2)}.$$

Так как  $\sin\alpha = L/\sqrt{L^2 + x^2}$ , то для напряженности  $\vec{E}_1$  получаем

$$E_1 = \frac{2qL}{4\pi\epsilon_0(L^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Учитывая, что поле  $E_2$  наведенных зарядов внутри плоскости  $E_2 = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0}$ ,

а также что  $E_1 = E_2$ , находим искомую плотность  $\sigma_x$  наведенных зарядов на плоскости в точке А

$$\sigma_x = \frac{2qL}{4\pi(L^2 + x^2)^{3/2}}.$$

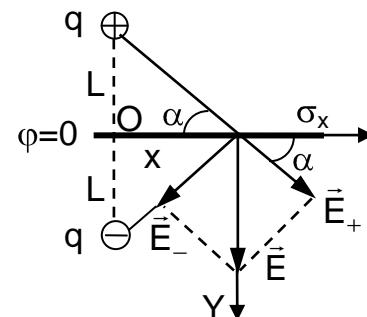


Рис. 3.7

При  $x = 0$  получим плотность заряда в точке О, которая лежит на линии, соединяющей данный точечный заряд и его изображение в плоскости

$$\sigma_0 = \frac{2q}{4\pi L^2}.$$

**Задача 3.7.** Определить емкость единственного шарового проводника радиусом  $R_1$ , окруженного прилегающим к нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  и наружным радиусом  $R_2$  (рис.3.8).

### Решение

Сообщим шаровому проводнику заряд  $q$ . Тогда вне и на поверхности проводника возникает электрическое поле. Зная потенциал проводника  $\phi(R_1)$ , по (3.21) можно найти емкость  $C$ .

По теореме Гаусса при  $R_2 > r > R_1$ :

$$D \cdot 4\pi r^2 = q.$$

Следовательно, напряженность поля в диэлектрике (по 3.14)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

По формуле связи напряженности и потенциала (2.15) после интегрирования получаем распределение потенциала в диэлектрике

$$\phi = - \int \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования const найдем из условия  $\phi(R_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ , то есть

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} + \text{const.}$$

Следовательно

$$\text{const} = \frac{q(\epsilon - 1)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2}.$$

Окончательное распределение потенциала в диэлектрике

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon - 1}{R_2} \right).$$

Используя условие непрерывности потенциала, находим потенциал  $\phi(R_1)$  шарового проводника

$$\phi(R_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon - 1}{R_2} \right),$$

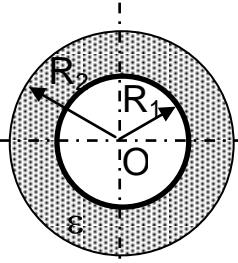


Рис. 3.8

и его емкость

$$C = \frac{q}{\phi(R_1)} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1}{1 + \frac{R_1(\epsilon - 1)}{R_2}}.$$

При  $R_2 \rightarrow \infty$  из полученного выражения получаем  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R_1$ , т.е. емкость шара радиусом  $R_1$ , погруженного в однородную бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

**Задача 3.8.** Определить емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону  $\epsilon = a/r^2$ , где  $a$  - постоянная,  $r$  - расстояние от центра конденсатора (рис.3.9).

*Решение*

Сообщив внутренней обкладке заряд  $q$ , по теореме Гаусса рассчитаем напряженность поля внутри диэлектрика

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

и разность потенциалов  $\Delta\phi$  между обкладками

$$\Delta\phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} (R_2 - R_1).$$

Следовательно, емкость такого сферического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{R_2 - R_1}.$$

**Задача 3.9.** В вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$  находятся три одинаковых точечных заряда. Во сколько раз потенциальная энергия этой системы зарядов больше потенциальной энергии двух таких же зарядов, находящихся на расстоянии  $a$  друг от друга?

*Решение*

По (3.29) находим энергию взаимодействия двух точечных зарядов

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Из (3.30) определяем энергию взаимодействия трех точечных зарядов

$$W_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} q\varphi_i.$$

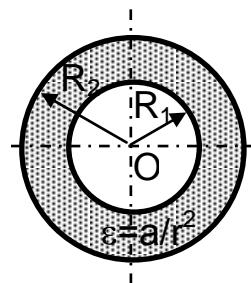


Рис. 3.9

Учитывая, что  $\phi_i = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a}$  - потенциал, созданный двумя зарядами,

в точке, где располагается i заряд, получаем

$$W_3 = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon a}.$$

Находим теперь отношение энергий  $W_3/W_2 = 3$ .

**Задача 3.10.** Сфера, равномерно заряженная зарядом  $q$ , и тонкий однородный стержень длиной  $L$ , равномерно заряженный с линейной плотностью  $\tau$ , расположены так, что один из концов стержня находится на расстоянии  $x_0$  от центра сферы О. Определить взаимную потенциальную энергию сферы и стержня (рис.3.10).

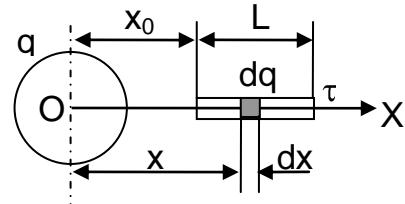


Рис. 3.10

### Решение

Заряд стержня неточечный. Поэтому разделим стержень на столь малые участки, чтобы заряд каждого участка был точечным. Рассмотрим один такой участок длиной  $dx$ , расположенный на расстоянии  $x$  от центра сферы. Заряд этого участка  $dq = \tau dx$ .

Этот заряд находится в точке, потенциал которой равен

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Тогда по (3.28) потенциальная энергия сферы и элементарного заряда равна

$$dW = \phi dq = \frac{q\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Интегрируя это выражение по  $x$  от  $x_0$  до  $x_0+L$ , получаем

$$W = \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{q\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_{x_0}^{x_0+L} = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( 1 + \frac{L}{x_0} \right).$$

**Задача 3.11.** Точечный заряд  $q = 1$  нКл расположен в вакууме. Определить энергию поля этого заряда, сосредоточенную в шаровом слое толщиной от  $R_1 = R = 10$  см до  $R_2 = 2R = 20$  см. Сравнить эту энергию с энергией поля точечного заряда в шаровом слое толщиной от  $R_2 = 2R = 20$  см до  $R_3 = 3R = 30$  см. (рис.3.11).

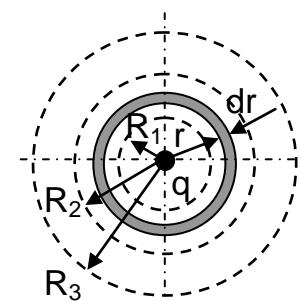


Рис. 3.11

### Решение

Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Объемы шаровых слоев известны

$$V_{12} = \frac{4}{3}\pi[(2R)^3 - R^3] = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$V_{23} = \frac{4}{3}\pi[(3R)^3 - (2R)^3] = 19 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Энергию шарового слоя будем искать по формуле (3.33) для неоднородного поля. Разделим шаровой слой на узкие элементарные слои. Энергия одного такого шарового слоя радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ .

$$dW = w \cdot dV,$$

где плотность энергии  $w$ , равна

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2$$

а объем слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

Таким образом, энергия узкого шарового слоя равна

$$dW = \frac{q^2 dr}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Интегрируя это выражение по  $r$  в пределах от  $R$  до  $2R$  и от  $2R$  до  $3R$ , находим энергии в первом и втором слоях:

$$W_{12} = \int_R^{2R} \frac{q^2 dr}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{2R} = \frac{q^2}{4 \cdot 4\pi\epsilon_0 R} = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ Дж};$$

$$W_{23} = \frac{q^2}{12 \cdot 4\pi\epsilon_0 R}.$$

Отношение энергий равно

$$W_{12}/W_{23} = 3.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**3.12.** Расстояние между зарядами диполя  $q = \pm 3,2$  нКл равно  $L = 0,12$  м. Найти напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$  поля, созданного диполем в точке, удаленной на расстояние  $r = 0,08$  м как от первого, так и от второго заряда.

**3.13.** По тонкому кольцу радиусом  $R$  распределен равномерно заряд  $-q$ . В центре кольца расположен точечный заряд  $+q$ . Чему равен электрический дипольный момент  $\vec{p}$  этой системы зарядов?

**3.14.** Диполь с электрическим моментом  $p = 100$  пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле, напряженность которого равна  $E = 9$  МВ/м. Диполь повернули на малый угол и

предоставили самому себе. Определить частоту собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции диполя относительно оси, проходящей через центр диполя  $J = 4 \cdot 10^{-12} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

**3.15.** Диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 150 \text{ кВ/м}$ . Вычислить работу  $A$ , необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол  $\alpha = 180^\circ$ .

**3.16.** Точечный диполь с электрическим моментом  $p = 10^{-8} \text{ Кл}\cdot\text{м}$  находится на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями на расстоянии  $L = 10 \text{ см}$  от вершины угла. Ось диполя ориентирована вдоль биссектрисы угла. Определить потенциал поля точки, в которой находится диполь.

**3.17.** Два диполя с электрическими моментами  $p_1 = 1 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  и  $p_2 = 4 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  находятся на расстоянии  $r = 2 \text{ см}$  друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

**3.18.** В поле точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него помещен свободно ориентированный точечный диполь с электрическим моментом  $p$ . Найти модуль силы, действующей на диполь.

**3.19.** Диполь с электрическим моментом  $p = 4 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в поле точечного заряда  $q = 100 \text{ нКл}$  на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$  от него. Определить для этой точки величину  $|dE/dr|$ , характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу  $F$ , действующую на диполь.

**3.20.** Две бесконечные плоскости заряжены одинаковым зарядом с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 100 \text{ нКл}/\text{м}^2$ . Плоскости пересекаются под углом  $\alpha = 60^\circ$ . Между ними находится точечный диполь с моментом  $p = 50 \text{ нКл}\cdot\text{м}$ , направленным по полу. Определить период  $T$  малых колебаний диполя в электрическом поле внутри этого угла. Момент инерции диполя относительно оси проходящей через его центр равен  $J = 4 \cdot 10^{-14} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

**3.21.** Два диполя с электрическими моментами  $p_1 = 20 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  и  $p_2 = 4 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  находятся на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$  друг от друга, так, что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

**3.22.** Диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 10 \text{ кВ/м}$ . Определить изменение его потенциальной энергии  $\Delta W$  при повороте диполя на угол  $\alpha = 60^\circ$ .

**3.23.** Две взаимно перпендикулярные бесконечные плоскости равномерно заряжены с

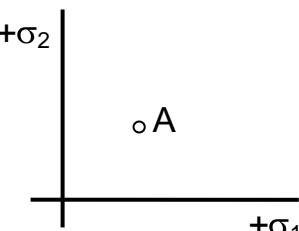


Рис. 3.12

поверхностными плотностями  $+\sigma_1$  и  $+\sigma_2$ . В произвольной точке А расположен свободно ориентированный диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}$ . Определить потенциальную энергию диполя (рис.3.12).

**3.24.** В центре сферы радиусом  $R$ , равномерно заряженной зарядом  $+q$ , находится точечный заряд такой же величины. Определить потенциальную энергию данной системы зарядов. Среда вакуум.

**3.25.** В поле прямой бесконечной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$ , на расстоянии  $r$  от нити помещен свободно ориентированный диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}$ . Определить модуль потенциальной энергии диполя.

**3.26.** Одной из пластин плоского конденсатора площадью  $S$  сообщили заряд  $q$ . Пространство между пластинами заполнено средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найти электрическое смещение  $D$ , напряженность электрического поля в диэлектрике  $E$ , разность потенциалов  $\Delta\phi$  между пластинами.

**3.27.** Две тонкие длинные коаксиальные трубы с радиусами  $R_1 = 2$  см и  $R_2 = 4$  см заряжены равномерно с линейными плотностями  $\tau_1 = 3$  нКл/м и  $\tau_2 = -1,5$  нКл/м. Пространство между цилиндрами заполнено эбонитом ( $\epsilon = 2,6$ ). Найти индукцию  $D$ , напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$  в точках, отстоящих от оси трубок на расстояниях:  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 3$  см,  $r_3 = 5$  см. Потенциал внешней трубы принять равным нулю.

**3.28.** Пространство между двумя концентрическими сферами радиусами  $R_1 = 3$  см и  $R_2 = 6$  см заполнено парафином ( $\epsilon = 2$ ). Заряд внутренней сферы  $q_1 = -1$  нКл, внешней  $q_2 = 2$  нКл. Найти потенциал электрического поля на расстояниях: 1)  $r_1 = 1$  см; 2)  $r_2 = 5$  см; 3)  $r_3 = 9$  см от центра сферы.

**3.29.** Эбонитовый ( $\epsilon = 3$ ) толстостенный полый шар равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho = 2$  мкКл/ $m^3$ . Внутренний радиус шара равен  $R_1 = 3$  см, наружный  $R_2 = 6$  см. Определить потенциал шара в следующих точках: 1) на наружной поверхности шара; 2) на внутренней поверхности шара; 3) в центре шара.

**3.30.** Найти распределение электрической индукции  $D$ , напряженности  $E$  и потенциала  $\phi$  поля бесконечно длинного равномерно заряженного по объему цилиндра, погруженного в диэлектрик. Радиус цилиндра  $R = 5$  см, объемная плотность заряда  $\rho = 20$  нКл/ $m^3$ , диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 7$ .

**3.31.** Шар радиусом  $R = 20$  см из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$  равномерно заряжен по объему с объемной плотностью  $\rho = 1$  мкКл/ $m^3$ . Найти силу  $F(r)$ , действующую на точечный заряд  $q = 10^{-7}$  Кл внутри и вне шара.

**3.32.** Сплошной шар из диэлектрика ( $\epsilon = 3$ ) радиусом  $R = 10$  см заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho = 50$  нКл/м<sup>3</sup>. Вычислить разность потенциалов между центром шара и его поверхностью.

**3.33.** Металлический шар радиусом  $R = 5$  см заряжен зарядом  $q = 1$  нКл. Шар окружен слоем эбонита толщиной  $d = 2$  см. Вычислить потенциал электрического поля на расстояниях  $r_1 = 3$  см;  $r_2 = 6$  см и  $r_3 = 9$  см от центра шара. Построить график зависимости  $\phi(r)$ .

**3.34.** Проводник произвольной формы, имеющий заряд  $q = 2,5$  мкКл, окружен однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon = 5$ . Найти суммарные поверхностные заряды на внутренней и наружной поверхности диэлектрика.

**3.35.** Металлический шар радиусом  $R_1 = 2$  см с зарядом  $q = 3 \cdot 10^{-8}$  Кл окружен металлической концентрической сферой радиусом  $R_3 = 6$  см, соединенной с землей. Между шаром и сферой имеется слой фарфора ( $\epsilon = 6$ ), примыкающий вплотную к внутреннему шару и имеющий наружный радиус  $R_2 = 4$  см. Найти потенциал внутреннего шара и поверхностную плотность связанных зарядов на обеих поверхностях фарфорового слоя.

**3.36.** Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между пластинами  $d = 4$  см зарядили до разности потенциалов  $\Delta\phi = 300$  В и отключили от источника напряжения. Затем в конденсатор на половину его длины вдвинули стеклянную пластину толщиной  $d = 4$  см ( $\epsilon = 7$ ). Определить плотность свободных зарядов на той половине пластины конденсатора, которая соприкасается с диэлектриком.

**3.37.** Определить, при какой напряженности  $E$  поля в диэлектрике ( $\epsilon = 3$ ) поляризованность достигает значения равного  $P = 200$  мкКл/м<sup>2</sup>.

**3.38.** Определить поляризованность  $P$  стекла ( $\epsilon = 7$ ), помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью  $E_0 = 5$  МВ/м.

**3.39.** Диэлектрик поместили во внешнее электрическое поле напряженностью  $E_0 = 200$  кВ/м. Чему равна поляризованность  $P$  диэлектрика, если напряженность макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной  $E = 4$  кВ/м?

**3.40.** На некотором расстоянии  $a = 5$  см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд  $q = 1$  нКл. Определить силу, действующую на заряд со стороны индуцированного им заряда на плоскости.

**3.41.** Точечный заряд  $q = 10$  нКл находится на расстоянии  $a = 30$  см от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность электрического поля в точке А (рис. 3.13)?

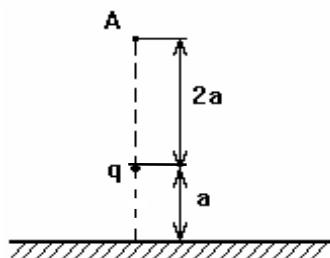
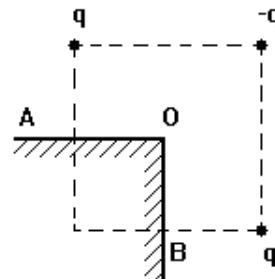


Рис. 3.13

**3.42.** Три разноименных точечных заряда расположены в вершинах квадрата с диагональю  $L = 50$  см, как показано на рисунке, где О - центр квадрата, АОВ - прямой угол, образованный двумя проводящими плоскостями. Найти силу, действующую на заряд  $-q$ , если  $q = 11$  мкКл (рис.3.14).



**3.43.** Точечный заряд  $q = 20$  нКл находится в вакууме на расстоянии  $a = 5$  см от заземленной плоской металлической стенки. Найти силу  $F$ , с которой стенка притягивает к себе заряд.

Рис. 3.14

**3.44.** Два одинаковых положительных заряда  $q$  находятся на одинаковом расстоянии  $d$  от бесконечной проводящей плоскости по одну сторону от нее. Расстояние между зарядами равно  $2d$ . Найти величину и направление вектора напряженности поля на середине расстояния между зарядами.

**3.45.** На расстоянии  $h$  от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд  $+q$ . Определить напряженность поля  $E$  в точке А, отстоящей от плоскости и от заряда на расстоянии  $h$  (рис.3.15).

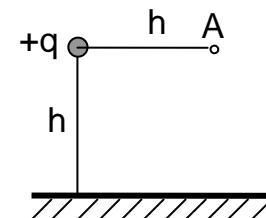


Рис. 3.15

**3.46.** Два точечных заряда  $q$  и  $-q$  расположены на расстоянии  $L$  друг от друга и на одинаковом расстоянии  $L/2$  от проводящей плоскости с одной стороны от нее. Найти модуль электрической силы  $F$ , действующей на каждый заряд.

**3.47.** Точечный заряд  $q = 2$  мкКл находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полубесконечными плоскостями. Расстояние от заряда до каждой плоскости  $L = 5$  см. Найти модуль силы, действующей на заряд.

**3.48.** Точечные заряды  $q_1 = 1,67 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = 10^{-9}$  Кл находятся на расстоянии  $d_1 = 4$  см друг от друга. Между ними на равных расстояниях помещена проводящая, отведенная к земле пластина толщиной  $d_2 = 2$  см. Поверхности пластины перпендикулярны к прямой, соединяющей заряды. Определить силу, действующую на пластину.

**3.49.** Точечный заряд  $q = 3 \cdot 10^{-8}$  Кл находится на расстоянии  $a = 3$  см от металлической стенки, отведенной к земле. Найти поверхностную плотность индуцированного заряда на стенке: а) в точке ближайшей к заряду; б) в точке, находящейся на расстоянии  $r = 5$  см от заряда.

**3.50.** Точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-5}$  Кл находится на расстоянии  $L = 1$  м от бесконечной заземленной металлической плоскости. Найти поверхностную плотность заряда, наведенного на металлической плоскости в точке, находящейся на расстоянии  $r = L$  от заряда  $q$ .

**3.51.** Точечный диполь с электрическим моментом  $\vec{p}$  находится на расстоянии  $L$  от бесконечной проводящей плоскости. Определить модуль вектора силы, действующей на диполь, если вектор  $\vec{p}$  перпендикулярен плоскости.

**3.52.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, объем которого  $V$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ . Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора  $\sigma$ . Вычислить работу, необходимую для удаления диэлектрика из конденсатора (трение диэлектрика о пластины мало).

**3.53.** Плоский воздушный конденсатор заряжен до некоторой разности потенциалов и отключен от источника. Во сколько раз изменится емкость конденсатора, разность потенциалов между пластинами, напряженность электрического поля при увеличении расстояния между пластинами от  $d$  до  $(d+x)$ .

**3.54.** Найти емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$ , если пространство между обкладками заполнено: а) однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ ; б) диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния  $r$  до центра конденсатора как  $\epsilon = \alpha/r$ , где  $\alpha$  - постоянная.

**3.55.** Найти напряженность поля  $E$  между обкладками сферического конденсатора, если радиус внутреннего шара 5 см, внешнего 7 см. Пространство между шарами заполнено диэлектриком с  $\epsilon = 5$ . На внутреннем шаре находится заряд  $q = 17 \cdot 10^{-9}$  Кл.

**3.56.** Металлический шар радиусом  $r = 5$  см окружен концентрическим слоем диэлектрика ( $\epsilon = 7$ ) с внешним радиусом  $R = 7$  см. Определить емкость такого шарового проводника.

**3.57.** Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин  $S = 500 \text{ см}^2$  подключен к батарее с э.д.с.  $\epsilon = 300$  В. Определить работу внешних сил по раздвижению пластин от  $d_1 = 1$  см до  $d_2 = 3$  см в случае, если перед этим конденсатор отключается от батареи.

**3.58.** Имеется плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого  $S$ . Какую работу против электрических сил надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками от  $x_1$  до  $x_2$ , если при этом поддерживать неизменным: а) заряд конденсатора  $q$ ; б) напряжение на конденсаторе  $U$ ?

**3.59.** Расстояние между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора с фарфоровым диэлектриком  $d = 5$  см. Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $\Delta\phi = 100$  В и отключен от источника. Затем, верхнюю пластину конденсатора сместили вверх, на расстояние  $x = 3$  см. Определить новую разность потенциалов  $\Delta\phi_1$  на пластинах конденсатора.

**3.60.** Металлический шар радиусом  $R = 3$  см наполовину опущен в керосин ( $\epsilon = 2$ ). Какой заряд находится на нем, если конденсатор заряжен до разности потенциала  $\Delta\phi = 1800$  В?

**3.61.** Определить емкость плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Между обкладками находится стекло толщиной  $d_1 = 1$  мм, покрытое с обеих сторон слоем парафина. Толщина каждого слоя  $d_2 = 0,2$  мм ( $\epsilon_1 = 7$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ).

**3.62.** Пластины воздушного конденсатора имеют площадь  $S = 300$  см<sup>2</sup>. Расстояние между ними  $d_1 = 3$  мм. Между пластинаами находится металлическая пластиночка той же площадью, толщиной  $d_2 = 1$  мм, изолированная от земли. Конденсатор заряжен до напряжения  $U = 600$  В и отсоединен от источника напряжения. Какую работу надо произвести, чтобы вытащить пластиночку?

**3.63.** Одну из обкладок плоского конденсатора зарядили с поверхностной плотностью  $\sigma = 0,5 \cdot 10^{-9}$  Кл/м<sup>2</sup>. Между обкладками вплотную вставили две пластины - одну из стекла ( $\epsilon_{ст} = 7$ ), другую из фарфора ( $\epsilon_{ф} = 6$ ). Определить напряженность электрического поля в стекле и фарфоре и поверхностную плотность связанных зарядов на них.

**3.64.** Металлический шар радиусом  $R$  заряжен до потенциала  $\phi_0$ . Шар наполовину помещен в среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Определить емкость шара.

**3.65.** Стеклянную пластиночку ( $\epsilon = 7$ ) вдвинули в плоский конденсатор так, что она вплотную прилегает к его обкладкам. Разность потенциалов между пластинаами конденсатора  $\Delta\phi = 3$  В, расстояние между пластинаами  $d = 10$  см. Найти плотность связанных зарядов на стеклянной пластине.

**3.66.** Расстояние между пластинаами плоского конденсатора равно  $d = 5$  мм, разность потенциалов  $\Delta\phi = 150$  В. На нижней пластине лежит плитка парафина ( $\epsilon = 2$ ) толщиной  $d_2 = 4$  мм. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на этой пластине.

**3.67.** Расстояние между пластинаами плоского конденсатора  $L = 0,4$  см. Разность потенциалов между обкладками  $\Delta\phi = 600$  В. В конденсатор, параллельно обкладкам, ввели слой слюды ( $\epsilon = 7$ ) толщиной  $d = L/2$ . Определить напряженности поля  $E$  в диэлектрике и в вакууме.

**3.68.** Найти емкость сферического конденсатора, радиусы внутренней и внешней обкладок которого равны  $a$  и  $b$ . Пространство между обкладками наполовину заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  (рис.3.16).

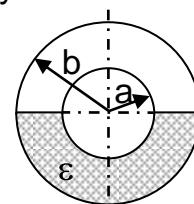


Рис. 3.16

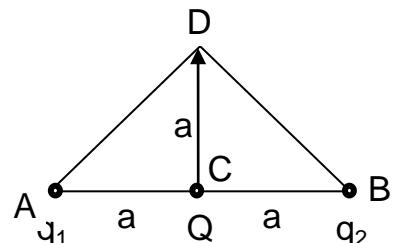
**3.69.** Между пластинаами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластиночка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $\Delta\phi = 100$  В. Какова будет разность

потенциалов, если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора? ( $\epsilon = 7$ ).

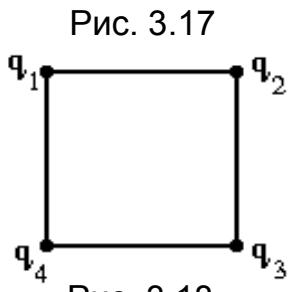
**3.70.** Положительные заряды  $q_1 = 3 \text{ мКл}$  и  $q_2 = 20 \text{ нКл}$  находятся в вакууме на расстоянии  $d = 1,5 \text{ м}$  друг от друга. Определить работу, необходимую для сближения зарядов до расстояния  $r = 1 \text{ м}$ .

**3.71.** Три точечных заряда находятся в вершинах треугольника ABC со сторонами: AB = 0,3 м; BC = 0,5 м; AC = 0,6 м;  $q_A = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ ;  $q_B = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ ;  $q_C = -6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ . Чему равна энергия этой системы зарядов? Заряды находятся в парафине ( $\epsilon = 2$ ).

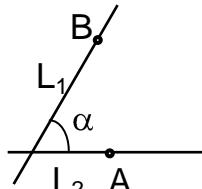
**3.72.** Определить работу сил поля, созданного двумя точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , (рис.3.17) при перенесении заряда  $Q = 10^{-9} \text{ Кл}$  из точки C в точку D, если  $a = 6 \text{ см}$ ,  $q_1 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ ,  $q_2 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ .



**3.73.** Определить потенциальную энергию системы 4-х точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $a = 10 \text{ см}$  (рис.3.18). Заряды одинаковы по абсолютной величине и равны  $q = 10 \text{ нКл}$ . Рассмотреть два возможных случая расположения зарядов: 1) все заряды - одноименные:  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ ; 2) два заряда - отрицательные:  $q_1 = q_2 = -q$ ;  $q_3 = q_4 = q$ .



**3.74.** Две бесконечные плоскости равномерно заряженные с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma = 0,2 \text{ мКл}/\text{м}^2$  пересекаются под углом  $\alpha = 60^\circ$  (рис.3.19). Вычислить работу сил поля по перемещению заряда  $q = 10 \text{ нКл}$  из точки A в точку B.  $L_1 < L_2$ .



**3.75.** Материальное тело массой  $m = 1 \text{ кг}$  находится на оси тонкого кольца радиусом  $R = 100 \text{ м}$  и массой  $m = 1 \text{ кг}$  на расстоянии  $x = 103 \text{ м}$  от плоскости кольца. Какой величины одинаковый заряд  $q$  необходимо сообщить кольцу и телу, чтобы энергии их электростатического и гравитационного взаимодействия были равны?

**3.76.** Определить взаимную потенциальную энергию двух одинаковых зарядов  $q_1 = q_2 = q = 10^{-8} \text{ Кл}$ , один из которых точечный, а другой равномерно распределен на тонком отрезке длиной  $L = 2 \text{ м}$  (рис.3.20). Расстояние от заряда до конца отрезка  $r = L = 2 \text{ м}$ .

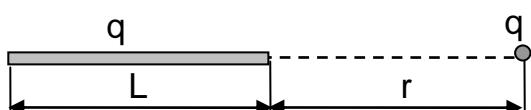


Рис. 3.20

**3.77.** Определить плотность энергии электрического поля, созданного в вакууме равномерно заряженной прямой длинной нитью с линейной плотностью заряда  $\tau = 3 \cdot 10^{-8}$  Кл/м, в точке, расположенной на расстоянии  $r_0 = 10$  см от середины нити.

**3.78.** Определить энергию электрического поля воздушного сферического конденсатора, если радиус внутренней сферы  $R_1$ , радиус внешней сферы  $R_2$ , и внутренняя сфера имеет заряд  $q$ .

**3.79.** Эбонитовый шар радиусом  $R$  равномерно заряжен электричеством с объемной плотностью  $\rho$ . Найти энергию электрического поля, заключенную внутри шара.

**3.80.** В условиях задачи 3.79 определить, сфера какого радиуса  $R_1$  делит шар на две части, энергии которых равны?

**3.81.** Тонкая прямая бесконечная нить равномерно заряженная с линейной плотностью  $\tau$ , расположена в вакууме. Найти энергию, приходящуюся на единицу длины, заключенную в цилиндрическом слое, внутренний радиус которого  $R_1$ , а внешний  $R_2$  (рис.3.21).

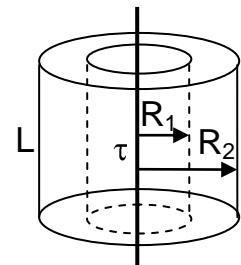


Рис. 3.21

**3.82.** Две концентрические сферические поверхности, находящиеся в вакууме, заряжены одинаковым количеством электричества  $q = 3 \cdot 10^{-6}$  Кл. Радиусы этих поверхностей  $R_1 = 1$  м и  $R_2 = 2$  м. Найти энергию электрического поля, заключенного между этими сферами.

**3.83.** Металлический шар радиусом  $R_1 = 5$  см заряжен зарядом  $q = 10^{-10}$  Кл. Шар окружен полым металлическим шаром, расположенным концентрически с первым, имеющим внутренний радиус  $R_2 = 8$  см, внешний  $R_3 = 10$  см. Заряд внешнего шара равен нулю. Определить энергию поля, заключенную между шарами.

**3.84.** Бесконечно длинный эбонитовый толстостенный полый цилиндр имеет внутренний радиус  $R_1 = 5$  см, внешний  $R_2 = 10$  см. Цилиндр равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда  $\rho = 1$  мкКл/м<sup>3</sup>. Определить линейную плотность энергии поля, локализованного в области между внутренней и внешней цилиндрическими поверхностями. Потенциал внешнего цилиндра принять равным нулю.

**3.85.** Шар, радиусом  $R = 10$  см из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon = 2$  равномерно заряжен по объему с объемной плотностью  $\rho = 1$  мкКл/м<sup>3</sup>. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы перенести точечный заряд  $q = 10^{-9}$  Кл из центра шара на его поверхность.

## 4. ЗАКОН БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### Основные понятия и законы

Известно что, источником магнитного поля может являться произвольный электрический ток или движущийся электрический заряд. Таким образом, вокруг электрического тока или движущегося электрического заряда возникает магнитное поле. Силовыми характеристиками магнитного поля являются вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  и вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , которые для изотропной среды связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (4.1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная (Гн - Генри - единица индуктивности),  $\mu$  - магнитная проницаемость вещества (для вакуума  $\mu = 1$ ).

Для расчета индукции магнитного поля, созданного током  $i$ , служит закон Био–Савара–Лапласа. Рассмотрим тонкий проводник с током  $i$  и разделим его на малые участки. Возьмем один такой участок длиной  $dL$  (рис. 4.1). Величину  $i \cdot dL$  назовем элементом тока. Каждый элемент тока создает магнитное поле, вектор индукции которого  $d\vec{B}$  в произвольной точке  $O$  определяется из закона Био – Савара - Лапласа

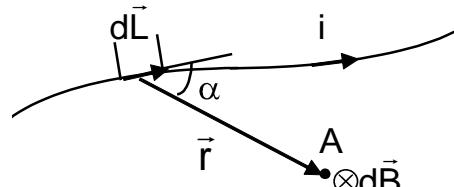


Рис. 4.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{L} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (4.2)$$

где  $\vec{r}$  - радиус вектор, проведенный от элемента тока  $i \cdot dL$  в точку  $O$  (рис. 4.1).

По правилу векторного произведения вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости векторов  $d\vec{L}$  и  $\vec{r}$  (в нашем случае это плоскость чертежа).

В скалярной форме закон Био – Савара - Лапласа имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{idL \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.3)$$

где  $\alpha$  - угол между вектором  $d\vec{L}$  и  $\vec{r}$  (рис. 4.1).

Из закона Био–Савара–Лапласа (4.3) следует, что

а) индукция магнитного поля в центре кругового витка радиусом  $R$  с током  $i$  может быть определена по формуле

$$B_0 = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{2R}, \quad (4.4)$$

б) индукция магнитного поля, создаваемого в вакууме **бесконечно длинным прямолинейным проводником** с током на расстоянии  $r$  от него:

$$B = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{2\pi r}. \quad (4.5)$$

При сложении магнитных полей справедлив **принцип суперпозиции**: индукция результирующего магнитного поля равна сумме векторов магнитной индукции слагаемых полей

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (4.6)$$

Соответственно для вектора напряженности имеем

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i. \quad (4.7)$$

В ряде случаев расчет магнитных полей токов с помощью закона Био – Савара – Лапласа связан со значительными трудностями.

В связи с этим для расчета магнитных полей токов целесообразно также использовать теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Иногда использование этой теоремы позволяет существенно упростить расчет индукции магнитного поля (например, для бесконечно длинного соленоида и тороида).

Рассмотрим прямой бесконечный ток  $i$ , расположенный в вакууме ( $\mu = 1$ ). Вокруг него существует магнитное поле. Вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  вдоль окружности радиусом  $r$  с центром на линии тока, как показано на рис.4.2.

Так как индукция  $\vec{B}$  для прямого бесконечного проводника с током  $i$  на расстоянии  $r$  от него в вакууме определяется формулой (4.5), находим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  ( $\oint_L \vec{B} d\vec{L}$ ) вдоль окружности радиусом  $r$ . Учитывая, что

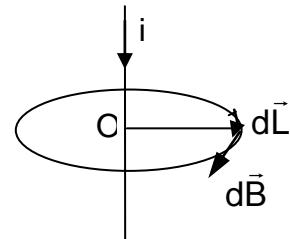


Рис.4.2

$$\vec{B} d\vec{L} = B dL \cos 0^\circ = B dL,$$

получаем:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{L} = \oint_L B dL = \int_{2\pi r} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dL = \mu_0 i. \quad (4.8)$$

Этот результат позволяет сформулировать **теорему о циркуляции вектора магнитной индукции** (или закон полного тока):

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu_0$ .

При записи теоремы (4.8) положительными считаются токи, направление которых связано с выбранным нами направлением обхода контура  $L$  правилом правого винта. Теорему (4.8) можно доказать для любого контура и для любых токов, охватываемых этим контуром.

## Примеры решения задач

**Задача 4.1.** Найти индукцию магнитного поля, созданного круговым током  $i$  радиусом  $R$  в точке  $A$ , расположенной на оси тока на расстоянии  $r_0 = AO$  от его плоскости (рис. 4.3).

### Решение

Разделим круговой ток на столь малые части, чтобы каждую из них можно было считать элементом тока. Рассмотрим один такой элемент тока  $i \cdot dL$ , перпендикулярный плоскости чертежа. В точке  $A$  он создает магнитное поле, индукция  $d\vec{B}_1$ , которого определяется с помощью закона Био – Савара - Лапласа (4.2) и (4.3).

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{idL \sin \alpha}{r^2}.$$

Все элементы (вектора  $d\vec{L}$ ) тока витка перпендикулярны своему радиус–вектору  $\vec{r}$ . Таким образом, угол  $\alpha$  для каждого элемента тока равен  $\pi/2$  ( $\alpha = \pi/2$ ). Из рис.4.3 расстояние от элемента тока до точки  $A$ :  $r^2 = R^2 + r_0^2$ . Следовательно, получаем

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{idL}{(R^2 + r_0^2)}.$$

Вектор  $d\vec{B}_1$  расположен в плоскости чертежа (рис.4.3), перпендикулярен радиус-вектору  $\vec{r}$  и составляет угол  $\beta$  с осью тока. Проекция вектора  $d\vec{B}_1$  на ось тока

$$dB = dB_1 \cos \beta,$$

$$\text{где } \cos \beta = \frac{R}{(R^2 + r_0^2)^{1/2}}.$$

Подставляя, получаем

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot dL \cdot R}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя по переменной  $L$  в пределах от нуля до  $2\pi R$ , находим

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{iR}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dL = \frac{\mu_0 \mu i R^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}}. \quad (4.9)$$

Если положить  $r_0 = 0$ , то приходим к формуле (4.4) для расчета индукции магнитного поля в центре кругового витка с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{2R}.$$

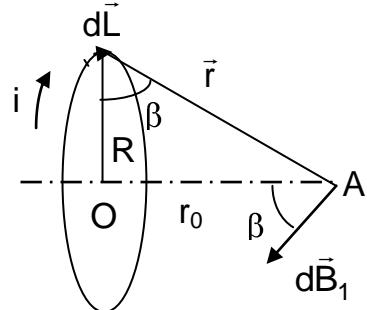


Рис. 4.3

**Задача 4.2.** Определить индукцию магнитного поля прямого отрезка BC = L с током  $i$  в произвольной точке A, отстоящей от отрезка на расстоянии  $r_0$ , если радиус-векторы, проведенные из концов отрезка в точку A, составляют углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с отрезком (рис.4.4).

### Решение

Разделим отрезок на столь малые участки, чтобы каждый из них можно было считать элементом тока. Рассмотрим один такой элемент тока  $i \cdot dL$ . Он составляет угол  $\alpha$  с радиус-вектором  $\vec{r}$ . Этот элемент создает в точке A магнитное поле, вектор индукции которого  $d\vec{B}$  определяется из закона Био – Савара - Лапласа (4.3)

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{idL \sin \alpha}{r^2}.$$

Вектор  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа (от нас) (рис.4.4). Используя метод, разобранный в задаче 1.10, получаем что

$$dL = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad r = \frac{r_0}{\sin \alpha}.$$

Подставляя выражения для  $dL$  и  $r$  в выражение для  $dB$ , находим

$$dB = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{4\pi r_0} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Интегрируя по углу  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , получаем формулу для расчета поля, созданного *прямым отрезком с током i*:

$$B = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.10)$$

В частном случае для прямого бесконечного проводника ( $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi$ ) из (4.10) получаем формулу (4.5)

$$B = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{2\pi r_0}.$$

**Задача 4.3.** Определить индукцию магнитного поля, созданного в вакууме двумя одинаково направленными прямыми бесконечными параллельными токами  $i_1 = i_2 = i = 10$  А, расстояние между которыми  $r_1 = 20$  см, в точке O, расположенной на расстоянии  $r_2 = r_1 = 20$  см от каждого проводника (рис. 4.5).

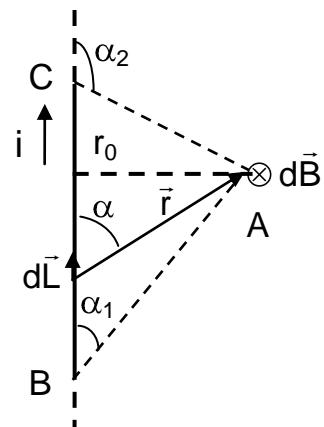


Рис. 4.4

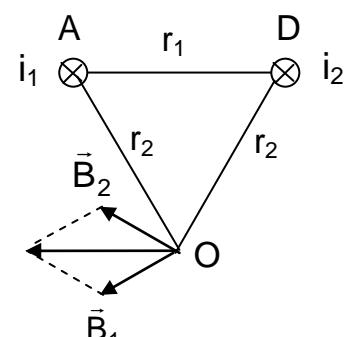


Рис. 4.5

### Решение

В Магнитное поле создано системой токов. Индукция магнитного поля от каждого бесконечно длинного проводника с током, согласно формуле (4.5), равна

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 \mu \cdot i}{2\pi r_2}.$$

Однако векторы  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  имеют различные направления: вектор  $\vec{B}_1$  перпендикулярен АО, а вектор  $\vec{B}_2$  перпендикулярен DO. По принципу суперпозиции магнитных полей (4.6) результирующий вектор является геометрической суммой векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Из треугольника ВОВ<sub>1</sub> находим решение в общем виде

$$B = B_1 \sqrt{3} = \frac{\mu_0 \mu i \sqrt{3}}{2\pi r_2}.$$

Произведя расчет в системе СИ, получим численный ответ

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 1,73}{2 \cdot \pi \cdot 0,2} = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

**Задача 4.4.** Прямой бесконечный ток  $i_1 = 2$  А расположен параллельно плоскости кругового тока  $i_2 = 5$  А радиусом  $R = 4$  м. Прямой ток и ось кругового тока пересекаются в точке  $O_1$ , отстоящей от центра кругового тока  $O$  на расстоянии  $d = 8$  м. Определить напряженность магнитного поля в точке  $O_2$ , если  $OO_2 = O_2O_1$  (рис.4.6).

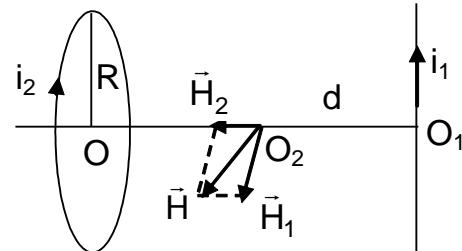


Рис. 4.6

### Решение

Магнитное поле создано системой токов, магнитные поля которых известны. Напряженность магнитного поля  $H_1$  прямого тока в точке  $O_2$  согласно формулам (4.1) и (4.5) равна

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu} = \frac{i_1}{2\pi \cdot d/2} = \frac{i_1}{\pi d}.$$

Напряженность магнитного поля  $H_2$  кругового тока в точке  $O_2$  на его оси получим из формул (4.1) и (4.4)

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu} = \frac{i_2 R^2}{2[R^2 + (d/2)^2]^{3/2}}.$$

Векторы  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  взаимно перпендикулярны (рис.4.6).

По принципу суперпозиции (4.7):

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

Из теоремы Пифагора получаем:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{i_1}{\pi d}\right)^2 + \left(\frac{i_2 R^2}{2[R^2 + (d/2)^2]^{3/2}}\right)^2} \approx 0,23 \text{ A/m.}$$

**Задача 4.5.** Определить модуль вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, созданного системой тонких проводников (рис.4.7), по которым идет ток  $i$ , в точке А {0, R, 0}, являющейся центром кругового тока радиусом  $R$ .

### Решение

Магнитное поле создается тремя источниками: полубесконечным прямым проводником XO, круговым проводником радиусом  $R$ , центр которого расположен в точке А {0, R, 0}, а плоскость совпадает с плоскостью ZOY; и полубесконечным прямым проводником OZ. По всем проводникам течет один и тот же ток  $i$ . Вектор  $\vec{B}_1$  магнитной индукции поля проводника XO лежит в плоскости ZOY и направлен против оси OZ (рис.4.7); вектор  $\vec{B}_2$  магнитной индукции кругового тока расположен в плоскости XOY и направлен вдоль оси OX; вектор  $\vec{B}_3$  магнитной индукции проводника OZ находится в той же плоскости XOY, но направлен противоположно вектору  $\vec{B}_2$ .

Из формулы (4.10) находим модули векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_3$  (угол  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pi$ , или  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ )

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 \mu i}{4\pi R}.$$

Следует заметить, что ту же формулу для расчета магнитной индукции поля полубесконечного провода можно получить и из выражения (4.5) для бесконечного проводника:

$$B_1 = B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \mu i}{2\pi r_0} = \frac{\mu_0 \mu i}{4\pi R}.$$

Из формулы (4.4) определяем модуль вектора  $\vec{B}_2$  в центре витка

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu i}{2R}.$$

По принципу суперпозиции

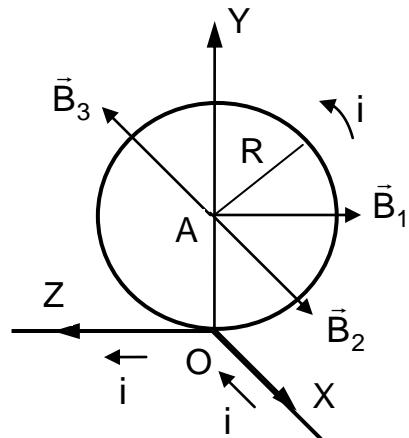


Рис. 4.7

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

откуда

$$B = \sqrt{B_1^2 + (B_2 - B_3)^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \sqrt{2(2\pi^2 - 2\pi + 1)}.$$

**Задача 4.6.** Найти индукцию магнитного поля в центре соленоида длиной  $L = 20$  см, радиусом  $R = 5$  см с числом витков  $N = 200$ . Ток в соленоиде  $i = 5$  А.

### Решение

Рассмотрим соленоид, как систему круговых токов, соединенных последовательно. Определим индукцию магнитного поля в произвольной точке  $O$  на оси соленоида (рис.4.8).

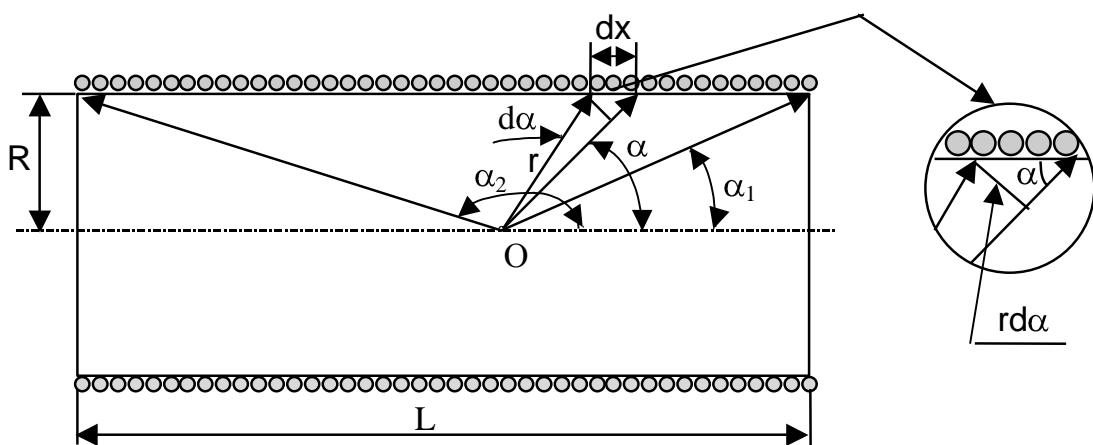


Рис. 4.8

Пусть на единицу длины соленоида приходится  $n$  витков. Тогда на участке  $dx$  будет  $(ndx)$  витков, которые, согласно выражению (4.4), создадут в точке  $O$  на оси соленоида магнитное поле с индукцией

$$dB_x = \frac{\mu_0 i R^2 n dx}{2r^3},$$

направленное вдоль оси соленоида.

Из геометрических построений, показанных на рис.4.8, следует

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad dx = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя эти значения в  $dB_x$ , имеем

$$dB_x = \frac{1}{2} \mu_0 i n \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя, получаем выражение для расчета индукции магнитного поля на оси соленоида

$$B = B_x = \frac{1}{2} \mu_0 i n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4.11)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между радиус–векторами, проведенными из точки О к крайним виткам, и осью соленоида.

Полученная формула (4.11) справедлива и для точек, находящихся на оси соленоида вне него. Заметим, что если точка О находится внутри соленоида, то угол  $\alpha_2$  будет тупой, а если вне соленоида, то угол  $\alpha_2$  острый.

В нашем случае

$$\cos \alpha_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}};$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}.$$

Учитывая, что  $n = N/L$  (где  $N$  – число витков в соленоиде), из (4.11) для средней точки на оси соленоида имеем

$$B = \frac{\mu_0 i N}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}.$$

Произведем численный расчет:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 200}{\sqrt{0,2^2 + 4 \cdot 0,05^2}} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Следует заметить, что в случае бесконечно длинного соленоида  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi$ , тогда из (4.11) получаем

$$B_\infty = \mu_0 i n. \quad (4.12)$$

**Задача 4.7.** По прямому бесконечному полому цилинду, внутренний радиус которого  $R_1$ , а внешний  $R_2$ , идет ток с постоянной плотностью  $j$ . Определить индукцию магнитного поля в точках А, В и С, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях, соответственно,  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , причем  $r_1 < R_1$ ,  $R_1 < r_2 < R_2$ ,  $r_3 > R_2$  (рис. 4.9).

### Решение

Закон Био – Савара – Лапласа непосредственно применять нельзя, так как он справедлив только для тонких проводников. Тонким называется проводник, поперечный размер которого мал по сравнению с расстоянием, рассматриваемым в данной задаче. В нашем случае поперечный размер проводника ( $R_1$  и  $R_2$ ) сравним с расстоянием ( $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ ), рассматриваемым в данной задаче.

Применим теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (4.8). Рассмотрим точку А (рис. 4.9).

1) Проведем через точку А замкнутый контур (окружность радиусом  $r_1$ ). Циркуляция вектора  $\vec{B}_1$  по окружности радиусом  $r_1$

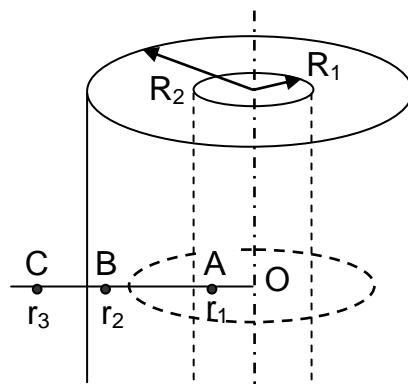


Рис.

$$\oint_{L_1} \vec{B}_1 d\vec{L} = \oint_{L_1} B_1 dL = B_1 \cdot 2\pi r_1.$$

Внутри окружности радиусом  $r_1$  токов нет. Следовательно,  $i_1 = 0$ .

По (4.8) находим

$$B_1 \cdot 2\pi r_1 = 0.$$

Таким образом

$$B_1 = 0.$$

2) Рассмотрим точку В. Проведем через нее окружность радиусом  $r_2$ . Циркуляция вектора  $\vec{B}_2$  по этой окружности

$$\oint_{L_2} \vec{B}_2 d\vec{L} = B_2 \cdot 2\pi r_2.$$

Из определения плотности тока

$$j = \frac{di}{dS},$$

где  $dS$  - элемент площади поперечного сечения проводника.

Ток  $i_2$ , охватываемый контуром (окружностью радиусом  $r_2$ ),

$$i_2 = \int_S j dS = j \int_S dS = j\pi(r_2^2 - R_1^2).$$

Подставляя полученное значение тока в (4.8), получаем

$$B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 j \pi(r_2^2 - R_1^2).$$

Отсюда

$$B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} \left( r_2 - \frac{R_1^2}{r_2} \right).$$

3) Для точки С по теореме о циркуляции (4.8) находим

$$B_3 = \frac{\mu_0 j(R_2^2 - R_1^2)}{2r_3}.$$

**Задача 4.8** По прямому бесконечному сплошному цилиндрическому проводнику радиусом  $R$  течет ток с постоянной плотностью  $j$ . Найти индукцию магнитного поля в точках А и В, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях, соответственно,  $r_1$  и  $r_2$ , причем  $r_1 < R$ ,  $r_2 > R$  (рис. 4.10).

*Решение*

Проведем окружность через точку А. Ток, охватываемый этой окружностью, равен

$$i_1 = j\pi r_1^2.$$

Тогда из теоремы о циркуляции (4.8) следует

$$B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2.$$

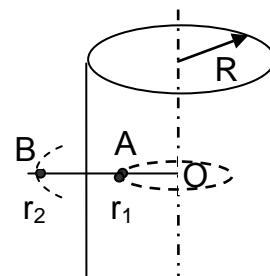


Рис. 4.10

Отсюда

$$B_1 = \frac{\mu_0 j r_1}{2},$$

Теперь проведем окружность через точку В. Так как точка В лежит за пределами цилиндра, то эта окружность будет охватывать весь ток, текущий по проводнику:

$$i_2 = j\pi R^2$$

Тогда согласно (4.8)

$$B_2 \cdot 2\pi r_1 = j\pi R^2.$$

Следовательно, индукция магнитного поля в точке В равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 j R^2}{2r_2}.$$

**Задача 4.9** В условиях задачи 4.8 плотность тока не постоянна и линейно зависит от  $r$ :  $j = \alpha r$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Определить величину вектора индукции магнитного поля в точках А и В.

### Решение

Применим теорему о циркуляции (4.8). Рассмотрим точку А. Проведем через нее окружность радиусом  $r_1$ . Циркуляция вектора  $\vec{B}_1$

$$\oint_L \vec{B}_1 d\vec{L} = B_1 \cdot 2\pi r_1.$$

Осталось рассчитать ток  $i_1$ , охватываемый окружностью радиусом  $r_1$ . Разделим сплошной проводник на столь узкие толщиной  $dr$  тонкостенные цилиндры, чтобы можно было в пределах такого цилиндра приближенно считать плотность тока постоянной (рис. 4.11).

Рассмотрим один такой цилиндр радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ . По нему идет ток

$$di = jdS,$$

где  $dS$  - площадь кольца:

$$dS = 2\pi r dr.$$

Учитывая, что  $j = \alpha r$ , получаем

$$di = 2\pi \alpha r^2 dr.$$

Интегрируя последнее выражение от нуля до  $r_1$ , определяем ток  $i_1$

$$i_1 = \int_0^{r_1} 2\pi \alpha r^2 dr = \frac{2\pi \alpha r_1^3}{3}.$$

Тогда из теоремы о циркуляции (4.8) находим

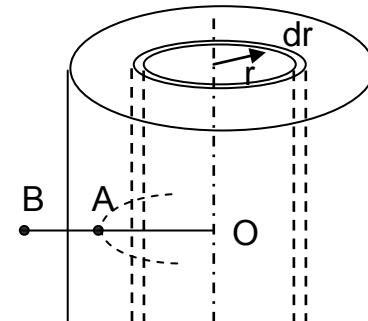


Рис. 4.11

$$B_1 \cdot 2\pi r_1 = \frac{2\pi \alpha \mu_0 r_1^3}{3}.$$

Следовательно

$$B_1 = \frac{\mu_0 \alpha r_1^2}{3}.$$

Для точки В ток  $i_2$ , охватываемый контуром, можно найти интегрированием выражение для  $di$  от нуля до  $R$

$$i_2 = \int_0^R 2\pi \alpha r^2 dr = \frac{2\pi \alpha \mu_0 R^3}{3}.$$

Соответственно, индукция магнитного поля в этой точке равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 \alpha R^3}{3r_2}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

- 4.10.** Тонкий прямой бесконечный провод по которому идет ток  $i$ , согнут так, как показано на рис.4.12. Найти индукцию магнитного поля в центре кругового тока О.

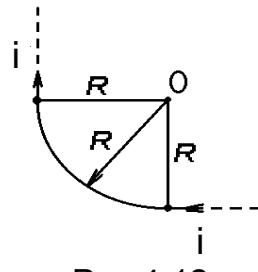


Рис.4.12

- 4.11.** Тонкий прямой бесконечный провод по которому идет ток  $i$ , согнут так, как показано на рис.4.13. Определить индукцию магнитного поля в центре кругового тока О.

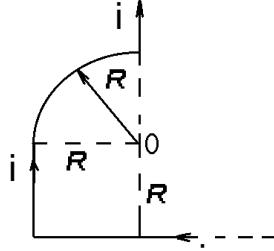


Рис. 4.13

- 4.12.** Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $i = 50$  А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10$  см. Определить в точке О магнитную индукцию В поля, создаваемого этим током, в случаях а) – в), изображенных на рис.4.14.

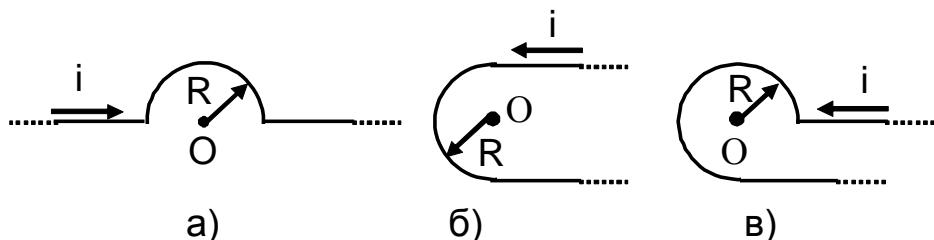


Рис. 4.14

**4.13.** Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $i = 50 \text{ А}$  имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10 \text{ см}$ . Определить в точке  $O$  магнитную индукцию  $B$  поля, создаваемого этим током, в случаях а) – в), изображенных на рис.4.15.

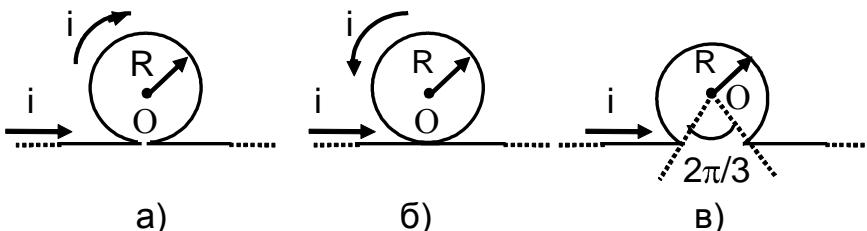


Рис. 4.15

**4.14.** Тонкий прямой бесконечный провод по которому идет ток  $i$ , согнут, как показано на рис.4.16. Определить индукцию магнитного поля в центре кругового тока  $O$ .

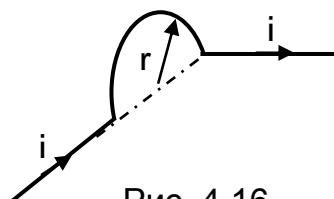


Рис. 4.16

**4.15.** Виток радиусом  $R = 1 \text{ м}$ , по которому идет ток  $i = 2 \text{ А}$ , сгибается по диаметру так, что две его полуплоскости составляют угол  $\alpha = 90^\circ$ . Найти изменение модуля вектора магнитной индукции в центре витка.

**4.16.** Два витка радиусом  $r_0 = 10 \text{ см}$  каждый расположены параллельно друг другу на расстоянии  $a = 20 \text{ см}$ . По каждому витку протекает ток  $i = 3 \text{ А}$ . Найти индукцию магнитного поля в центре каждого витка и на середине прямой, соединяющей их центры, и построить график зависимости индукции от расстояния вдоль этой прямой для 2-х случаев:

- 1) витки обтекаются равными токами одного направления;
- 2) витки обтекаются равными токами противоположного направления.

**4.17.** Бесконечный проводник согнут, как показано на рис.4.17. По проводнику течет ток  $i_0 = 10 \text{ А}$ . Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ , радиус витка  $r = 3 \text{ см}$ .

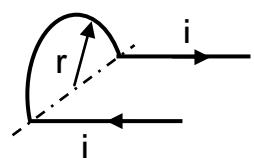


Рис. 4.17

**4.18.** По плоскому контуру, изображенному на рис.4.18, течет ток  $i = 1 \text{ А}$ . Угол между прямолинейными участками контура  $\phi = \pi/2$ ,  $r_1 = 10 \text{ см}$ ,  $r_2 = 20 \text{ см}$ . Найти магнитную индукцию поля  $B$  в точке  $C$ .

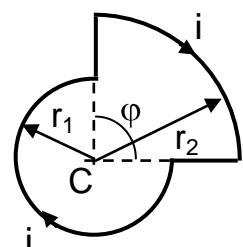


Рис. 4.18

**4.19.** Бесконечный проводник согнут, как показано на рис.4.19. По проводнику течет ток, изменяющийся по закону  $i = i_0 \sin \omega t$ . Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке  $O$  в момент времени  $t = 0,1$  с, если  $R = 5$  см,  $i_0 = 10$  А,  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup>.

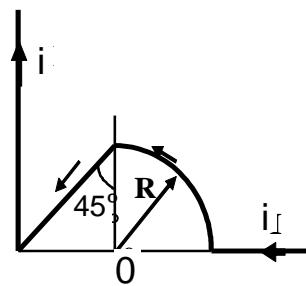


Рис. 4.19

**4.20.** Бесконечный проводник согнут, как показано на рис.4.20. По проводнику проходит ток  $i = 2$  А. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке  $O$ , если  $R = 2$  см,  $a = 2$  см.

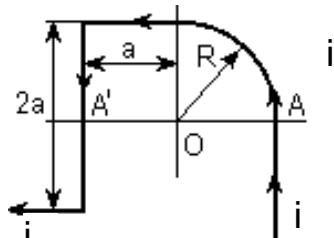


Рис. 4.20

**4.21.** Прямой бесконечно длинный проводник по которому течет ток  $i_1 = 3,14$  А, и круговой виток, по которому течет ток  $i_2$ , расположены, как показано на рис.4.21. Расстояние от центра витка до прямого проводника равно радиусу витка. Какой ток  $i_2$  должен протекать по витку, чтобы в его центре магнитная индукция была направлена под углом  $\alpha = 60^\circ$  к оси витка?

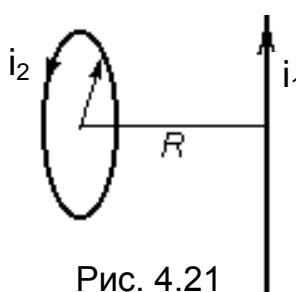


Рис. 4.21

**4.22.** Какую разность потенциалов необходимо приложить к плоскому круговому контуру, радиус которого  $r = 20$  см, чтобы в центре контура индукция магнитного поля была равна  $B = 10^{-5}$  Тл? Контур выполнен из медной проволоки сечением  $S = 1$  мм<sup>2</sup>. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

**4.23.** Два прямых бесконечных проводника расположены перпендикулярно друг другу и находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. (рис.4.22). Найти напряженность магнитного поля  $H$  в точке  $O$ , если  $AO = OC = 10$  см,  $i_1 = 5$  А,  $i_2 = 10$  А.

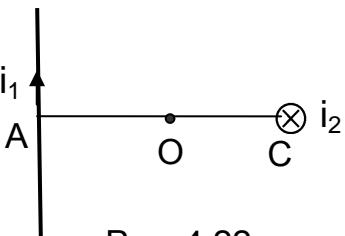


Рис. 4.22

**4.24.** Магнитное поле создано в вакууме двумя одинаково направленными прямыми бесконечными параллельными токами  $i_1 = i_2 = i = 10$  А, расстояние между которыми  $r_1 = 20$  см. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке, расположенной на расстоянии  $r_2 = 20$  см от каждого проводника.

**4.25.** Ток силой  $i$ , протекая по проволочному кольцу из медной проволоки сечением  $S$ , создает в центре кольца индукцию магнитного поля, равную  $B$ . Какова разность потенциалов между концами проволоки, образующей кольцо? Удельное сопротивление меди  $\rho$ .

**4.26.** Верхняя половина тонкого стержня из диэлектрика длиной  $L = 10$  см равномерно заряжена электричеством с линейной плотностью заряда  $\tau = 10^{-6}$  Кл/м. Стержень равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega = 104 \text{ c}^{-1}$  относительно оси перпендикулярной стержню и проходящей через его нижний конец (рис.4.23). Определить индукцию магнитного поля в нижнем конце стержня.

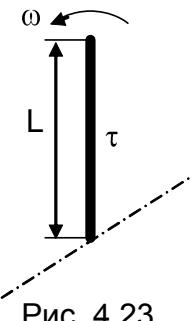


Рис. 4.23

**4.27.** Плоскость кругового витка с током  $i_1 = 3$  А параллельна прямому бесконечно длинному проводнику, по которому протекает ток  $i_2 = 3,14$  А. Перпендикуляр, опущенный из центра витка на проводник, является нормалью к плоскости витка. Расстояние от центра витка до прямого проводника  $d = 20$  см. Радиус витка  $r = 30$  см. Определить магнитную индукцию в центре витка.

**4.28.** Ток  $i = 3$  А течет по длинному проводу, согнутому под углом  $\alpha = 60^\circ$ . Определить напряженность магнитного поля в точке A, расположенной на биссектрисе угла  $\alpha$ , если  $a = 2$  см. (рис.4.24).

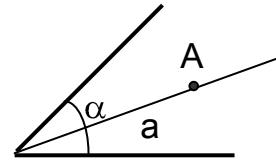


Рис. 4.24

**4.29.** Какова напряженность магнитного поля  $H$  в центре равностороннего треугольника со стороной  $a$ , обтекаемого током  $i$ ?

**4.30.** Определить индукцию магнитного поля в точке, равноудаленной от вершин проводящей квадратной рамки, на расстояние, равное ее стороне. По квадратной рамке течет ток  $i = 5$  А. Сторона рамки  $a = 10$  см.

**4.31.** По двум бесконечно длинным проводникам, параллельным друг другу, текут токи  $i_1 = 50$  А,  $i_2 = 100$  А в противоположных направлениях. Расстояние между проводниками  $d = 20$  см. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной от первого проводника на  $r_1 = 25$  см и от второго на  $r_2 = 40$  см.

**4.32.** По проводнику, согнутому в виде квадратной рамки со стороной  $a = 10$  см, течет ток  $i = 5$  А. Определить индукцию  $B$  магнитного поля в центре квадрата.

**4.33.** По двум бесконечно длинным параллельным проводникам, расположенным на расстоянии  $2b = 10$  см друг от друга текут в противоположных направлениях токи  $i_1 = i_2 = 10$  А (рис.4.25). Найти напряженность магнитного поля, как функцию расстояния  $x$  от середины прямой, соединяющей токи. Построить график  $H = f(x)$ .

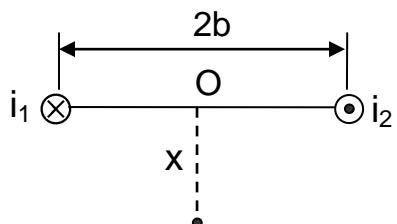


Рис. 4.25

**4.34.** Бесконечно длинный прямой проводник, по которому течет ток  $i = 5 \text{ A}$ , согнут под прямым углом, как показано на рис.4.26. Найти индукцию магнитного поля в точках А и С, находящихся на биссектрисе угла и в точке D на продолжении одной из его сторон. Расстояние от вершины угла до каждой из точек  $r = 10 \text{ см}$ .

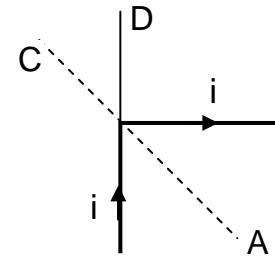


Рис.4.26

**4.35.** Катушка длиной  $L = 20 \text{ см}$  содержит  $N = 100$  витков. По обмотке катушки идет ток  $i = 5 \text{ A}$ . Диаметр катушки  $d = 20 \text{ см}$ . Определить магнитную индукцию вне катушки в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии  $a = 10 \text{ см}$  от ее конца.

**4.36.** Найти индукцию магнитного поля внутри соленоида на его оси, на расстоянии  $a = 1 \text{ см}$  от торца. Длина соленоида  $L = 3 \text{ см}$ , его диаметр  $d = 10 \text{ см}$ , плотность намотки  $n = 15 \text{ витков/см}$ . Ток в соленоиде  $i = 5 \text{ A}$ .

**4.37.** Тонкая лента шириной  $L = 40 \text{ см}$  свернута в трубку радиусом  $R = 30 \text{ см}$ . По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток  $i = 200 \text{ A}$  (рис.4.27). Определить магнитную индукцию  $B$  на оси трубы в средней точке и в точке, совпадающей с концом трубы.

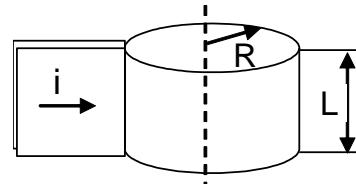


Рис. 4.27

**4.38.** По соленоиду длиной  $L = 0,3 \text{ м}$  идет ток  $i = 10 \text{ A}$ . Число витков на единицу длины соленоида  $n = 1000 \text{ 1/м}$ . Диаметр витка  $D = 0,2 \text{ м}$ . Определить индукцию магнитного поля в середине оси соленоида.

**4.39.** По бесконечному прямому полому круговому цилиндуру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Сила тока равна  $i = 10 \text{ A}$ . Найти магнитную индукцию:

- 1) в произвольной точке А внутри цилиндра;
- 2) в произвольной точке В вне цилиндра.

**4.40.** Ток  $i = 10 \text{ A}$  течет по полой тонкостенной трубе радиусом  $R_2 = 5 \text{ см}$  и возвращается по сплошному проводнику радиусом  $R_1 = 1 \text{ мм}$  проложенному по оси трубы. Найти индукцию магнитного поля в точках, лежащих на расстоянии  $r_1 = 6 \text{ см}$  и  $r_2 = 2 \text{ см}$  от оси трубы.

**4.41.** Найти распределение индукции магнитного поля тока, протекающего по сплошному цилиндуру бесконечной длины. Плотность тока  $j = \text{const}$ , радиус цилиндра  $R$ . Построить график зависимости  $B(r)$  во всей области.

**4.42.** Найти распределение напряженности поля для бесконечного проводника с током в виде полого цилиндра. Сила тока  $i$ , радиус

внутреннего цилиндра  $R_1$ , наружного  $R_2$ . Построить график зависимости  $H(r)$  во всем интервале изменения  $r$ .

**4.43.** Вдоль оси толстостенного полого цилиндрического проводника с внутренним радиусом  $R_1 = 1,5$  см и внешним  $R_2 = 2$  см расположен другой проводник в виде сплошного цилиндра радиусом  $R_3 = 1$  см. По проводникам в противоположных направлениях течет постоянный ток  $i = 30$  А. Найти распределение напряженности магнитного поля для этой системы токов. Изобразить графически  $H(r)$ .

**4.44.** Вычислить циркуляцию вектора  $B$  магнитной индукции вдоль контура, охватывающего токи  $i_1 = 10$  А и  $i_2 = 15$  А, текущие в одном направлении и  $i_3 = 20$  А, текущий в противоположном направлении.

**4.45.** Найти циркуляцию вектора  $H$  для контуров, изображенных на рис.4.28, если сила тока в каждом проводнике  $i = 8$  А. Токи направлены противоположно.



Рис.4.28

**4.46.** По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью  $j = 2$  мА/м<sup>2</sup>. Найти циркуляцию вектора напряженности  $H$  вдоль окружности радиусом  $r = 5$  мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вектором плотности тока.

**4.47.** В полую прямую бесконечную медную трубу (внутренний радиус  $R_1 = 10$  см, внешний  $R_2 = 20$  см) вставлен медный прямой сплошной бесконечный стержень радиусом  $R_1 = 10$  см, покрытый изоляционным лаком. По трубе и по стержню идут противоположно направленные токи одинаковой плотностью  $j_1 = j_2 = j = 20$  А/см<sup>2</sup>. Определить индукцию магнитного поля, созданного этими токами в точках, отстоящих от их общей оси на расстояниях  $r_1 = 6$  см и  $r_2 = 15$  см.

**4.48.** По прямому бесконечному полому цилинду, внутренний радиус которого  $R_1 = 0,08$  м, а внешний  $R_2 = 0,3$  м, идет ток, плотность которого зависит от расстояния  $r$  от оси по закону  $j = \alpha/r$ , где  $\alpha = 500$  А/м. Определить индукцию магнитного поля в точках, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях, соответственно,  $r_1 = 0,2$  м,  $r_2 = 0,4$  м.

**4.49.** Найти плотность тока как функцию расстояния  $r$  от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от  $r$  как  $B = b \cdot r^\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $b$  - const.

**4.50.** Определить циркуляцию магнитной индукции по контуру квадрата расположенного в вакууме, если через его центр, перпендикулярно плоскости, в которой он лежит, проходит бесконечно длинный прямолинейный провод, по которому течет ток  $i = 1 \text{ A}$ .

**4.51.** Внутри длинного круглого металлического цилиндра, вдоль которого проходит ток, сделана цилиндрическая полость, ось которой находится на расстоянии  $d = 5 \text{ см}$  от оси цилиндра. Радиус поперечного сечения цилиндра  $R = 20 \text{ см}$ . На каком расстоянии  $r$  от оси цилиндра вне его находятся точки, напряженность магнитного поля которых такая же, как напряженность в полости.

**4.52.** Внутри прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода. Смещение оси полости относительно оси провода определяется вектором  $\vec{a}$ . По проводу течет ток плотностью  $\vec{j}$ . Найти индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  внутри полости. Рассмотреть случай  $\vec{a} = 0$ .

**4.53.** По бесконечному соленоиду идет ток  $i = 10 \text{ A}$ . Число витков на 1 м длины соленоида  $n = 1000$ . Найти индукцию магнитного поля внутри соленоида.

**4.54.** Диаметр тороида без сердечника по средней линии равен  $D = 30 \text{ см}$  (рис.4.29). В сечении тороид имеет круг радиусом  $r = 5 \text{ см}$ . По обмотке тороида, содержащей  $N = 2000$  витков, течет ток  $i = 5 \text{ A}$ . Определить максимальное и минимальное значение магнитной индукции в тороиде.

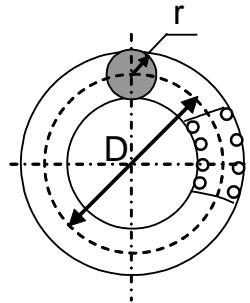


Рис. 4.29

**4.55.** Определить индукцию  $B$  и напряженность  $H$  магнитного поля на средней линии тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей  $N = 200$  витков, идет ток  $i = 5 \text{ A}$ . Внутренний диаметр тороида  $d_1 = 20 \text{ см}$ , внешний  $d_2 = 30 \text{ см}$ .

## 5. СИЛЫ ЛОРЕНЦА И АМПЕРА. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### Основные понятия и законы

Если заряд  $q$  движется со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , то на заряд действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \cdot \vec{B}] \quad (5.1)$$

или в скалярной форме

$$F_L = |q|vBsina, \quad (5.2)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Лоренца для случаев положительного и отрицательного зарядов показано на рис.5.1.

Вектор силы  $\vec{F}_L$  перпендикулярен плоскости, содержащей  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , следовательно, сила Лоренца работы не совершает.

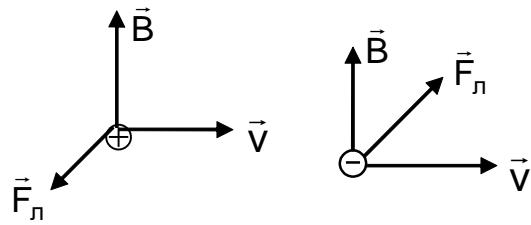


Рис. 5.1

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, то сила, действующая на заряженную частицу, определяется как

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \cdot \vec{B}]), \quad (5.3)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля.

На элемент тока  $d\vec{l}$ , расположенный в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , действует сила Ампера (магнитная сила)

$$d\vec{F}_A = i \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (5.4)$$

В скалярной форме закон Ампера (5.4) записывается в виде

$$dF_A = i \cdot dL B sina \quad (5.5)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Рассмотрим контур с током  $i$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Пусть контур представляет собой прямоугольную рамку со сторонами  $a$  и  $b$ . На каждую из сторон будет действовать сила Ампера, причем геометрическая сумма всех сил в однородном поле равна нулю.

На стороны 2-3 и 4-1 будут действовать силы  $\vec{F}_{23}$  и  $\vec{F}_{41}$ , которые стремятся растянуть рамку.

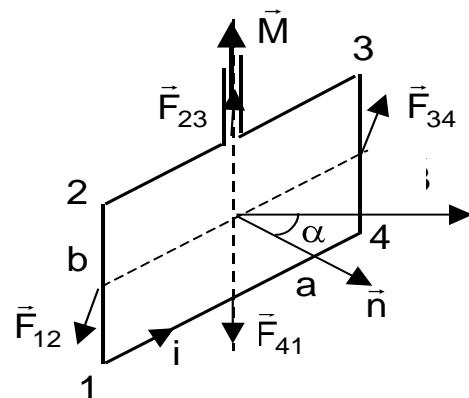


Рис. 5.2

На стороны 1-2 и 3-4 действуют силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{34}$ . Эти силы стремятся повернуть виток так, чтобы его плоскость была перпендикулярна к вектору  $\vec{B}$ .

Следовательно, на виток будет действовать пара сил, величина которых, согласно (5.5), одинакова и равна

$$F_{12} = F_{34} = ibB.$$

Тогда на виток действует врачающий механический момент, модуль которого равен

$$M = i \cdot bB \cdot a \cdot \sin\alpha = iS \cdot B \cdot \sin\alpha, \quad (5.6)$$

где  $S = a \cdot b$  площадь контура.

Важнейшим понятием, отражающим главные свойства контура с током в магнитном поле, является магнитный момент  $\vec{p}_m$ . Магнитным моментом плоского контура называется вектор, определяемый соотношением:

$$\vec{p}_m = iS\vec{n} \quad (5.7)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали к плоскости контура, направление которого определяется правилом буравчика.

Следовательно, момент пары сил (5.6) может быть записан в виде:

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin\alpha \quad (5.8)$$

где  $\alpha$  - угол между вектором  $\vec{p}_m$  (нормалью  $\vec{n}$ ) и вектором  $\vec{B}$ .

В векторном виде момент сил Ампера

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]. \quad (5.9)$$

Эта формула аналогична выражению для момента пары сил, действующей на электрический диполь в электрическом поле (3.6).

$$\vec{M} = [\vec{p}_e \cdot \vec{E}].$$

Под действием момента  $\vec{M}$ , контур в однородном магнитном поле разворачивается и устанавливается так, что вектор  $\vec{p}_m$  становится коллинеарен вектору  $\vec{B}$ . Таким образом, момент  $\vec{M}$  в конечном положении контура обращается в ноль. Это соответствует положению устойчивого равновесия контура.

Если поместить виток с током в неоднородное магнитное поле (будем считать для простоты, что магнитное поле в центре витка перпендикулярно плоскости витка (рис.5.3)), то на него будет действовать сила, равная:

$$\vec{F} = p_{mx} \cdot \frac{dB_x}{dx} \vec{i}. \quad (5.10)$$

Здесь  $\vec{p}_m = (p_{mx}, 0, 0)$ ,  $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ .

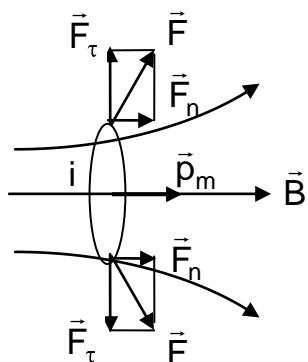


Рис. 5.3

Под действием этой силы контур с током втягивается в более сильные области магнитного поля, если направление  $\vec{r}_m$  совпадает с вектором  $\vec{B}$ , или выталкивается из магнитного поля, если направления векторов  $\vec{r}_m$  и  $\vec{B}$  противоположны.

В общем случае неоднородного поля, не перпендикулярного к плоскости витка, будут действовать и пара сил, стремящаяся повернуть виток, и сила, вызывающая поступательное перемещение.

### Работа по перемещению проводника в магнитном поле

Рассмотрим случай, когда прямой проводник длиной  $L$  под действием силы Ампера переместился в перпендикулярном магнитном поле параллельно самому себе (рис.5.4) на отрезок  $dx$ . Работа, совершенная при этом силой Ампера, выражается формулой:

$$dA = F_A dx = iLB \cdot dx = i \cdot BdS, \quad (5.11)$$

где величина  $dS = L \cdot dx$  – площадь, описанная проводником при движении.

Если индукция  $\vec{B}$  направлена иначе, не перпендикулярно движению, то ее всегда можно разложить на составляющую  $B_n$  перпендикулярную  $dx$  и составляющую  $B_t$  параллельную  $dx$ . Составляющая  $B_t$  вызовет такую силу, что работа этой силы будет равна нулю.

Поэтому в формулу для механической работы входит нормальная составляющая индукции  $B_n$

$$dA = i \cdot B_n dS. \quad (5.12)$$

Величина

$$d\Phi_m = B_n dS \quad (5.13)$$

называется *магнитным потоком* через площадку  $dS$ .

Полный магнитный поток через поверхность  $S$  равен

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S B \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (5.14)$$

где  $\alpha$  угол между направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  и направлением индукции  $\vec{B}$  (рис.5.5);  $B_n$  - проекция вектора  $\vec{B}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Единицы измерения магнитного потока в системе СИ Вебер (Вб).

Пользуясь понятием потока, элементарную работу по перемещению проводника (5.12) можно представить в виде:

$$dA = i \cdot d\Phi_m. \quad (5.15)$$

Если проводник совершает конечное перемещение, то

$$A = i \cdot \Delta\Phi_m = i \cdot (\Phi_{m2} - \Phi_{m1}), \quad (5.16)$$

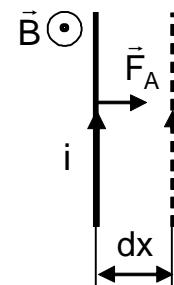


Рис. 5.4

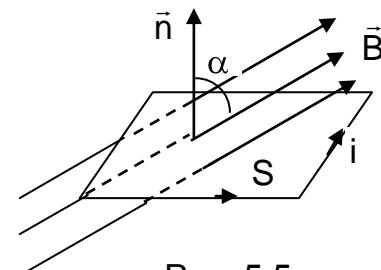


Рис. 5.5

где  $\Phi_{m1}$ ,  $\Phi_{m2}$  – магнитные потоки через поверхность  $S$ , охватываемую контуром с током, в начале и конце перемещения.

### Примеры решения задач

**Задача 5.1.** Протон массой  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и зарядом  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, пройдя разность потенциалов  $\Delta\phi = 1000$  В, влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл параллельно его силовым линиям (рис.5.6). Какой путь в магнитном поле пройдет протон за время  $t = 1$  мкс?

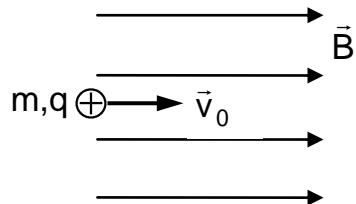


Рис. 5.6

#### Решение

На частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца (5.1), но она согласно (5.2) равна нулю, ибо векторы  $\vec{v}_0$  и  $\vec{B}$  коллинеарны. Таким образом, магнитное поле не будет действовать на протон, и он будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $v_0$ . Очевидно, что путь протона

$$S = v_0 t.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\Delta\phi,$$

найдем начальную скорость  $v_0$  протона

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}}.$$

Подставляя числовые данные, получим путь протона

$$S = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m} \cdot t} \approx 0,43 \text{ м.}$$

**Задача 5.2.** В условиях задачи 5.1 протон влетает в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям. Найти радиус окружности, которую будет описывать протон.

#### Решение

На протон будет действовать сила Лоренца (5.1). Так как угол между скоростью  $\vec{v}$  и индукцией  $\vec{B}$   $\alpha = 90^\circ$ , то магнитная сила всегда будет перпендикулярна вектору скорости протона. Поэтому протон будет двигаться с постоянной скоростью  $v_0$  по некоторой окружности радиусом  $R$  (рис.5.7).

Запишем для протона второй закон Ньютона

$$qv_0B = \frac{mv_0^2}{R}.$$

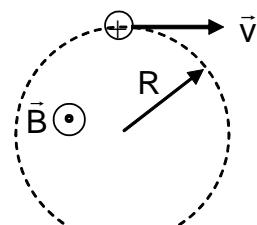


Рис. 5.7

$$\text{Отсюда получаем: } R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta\phi}{q}} \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

**Задача 5.3.** В условиях задачи 5.2 протон влетает в магнитное поле под углом  $\alpha = 60^\circ$  к его силовым линиям (рис.5.8). Определить период обращения протона по окружности и шаг его траектории.

### Решение

Разложив вектор начальной скорости по оси ОХ (направление силовых линий) и по оси ОY (направление им перпендикулярное)

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} \cos \alpha,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} \sin \alpha,$$

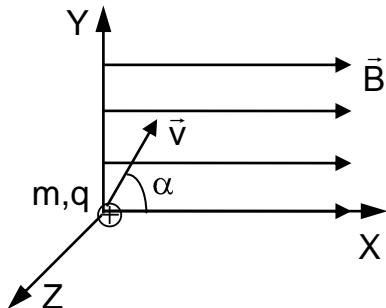


Рис. 5.8

находим, что в плоскости ZOY протон будет двигаться по окружности. Записав второй закон Ньютона

$$qv_{0y}B = \frac{mv_{0y}^2}{R},$$

получим радиус окружности

$$R = \frac{m \cdot v_{0y}}{qB} = \frac{\sin \alpha}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta\phi}{q}}.$$

Период Т (время одного оборота по окружности радиусом R) равен

$$T = \frac{2\pi R}{v_{0y}} = \frac{2\pi m}{qB} \approx 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

В направлении оси ОХ протон будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $v_{0x}$ , так как направление силы Лоренца всегда перпендикулярно оси ОХ. Таким образом, траектория движения протона будет представлять собой спираль.

За время одного оборота по окружности (период Т) вдоль оси ОХ протон пройдет расстояние, равное шагу винта траектории

$$h = v_{0x}T = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} \cdot T \cos \alpha.$$

Подставляя значение периода, получаем

$$h = \frac{2\pi \cos \alpha}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta\phi}{q}} \approx 0,14 \text{ м.}$$

**Задача 5.4.** Проволочный виток радиусом  $R = 5$  см находится в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 2$  кА/м. Плоскость витка образует угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением поля. По витку течет ток  $i = 4$  А. Найти магнитный момент  $p_m$  витка и механический момент  $M$ , действующий на виток.

### Решение

Согласно определению (5.7), магнитный момент контура с током

$$p_m = i \cdot S = i \cdot \pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 0,05^2 = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Величина механического момента, действующего на контур с током в магнитном поле, определяется формулой (5.8)

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin(\pi/2 - \alpha).$$

В этой формуле необходимо ставить угол  $(\pi/2 - \alpha)$ , так как в задаче дан угол между *плоскостью* контура и *силовыми линиями*, а в формуле (5.8) говорится об угле между *нормалью* к контуру и *силовыми линиями поля*.

Учитывая, что согласно (4.1)

$$B = \mu_0 H,$$

получаем  $M = i \cdot \pi R^2 \cdot \mu_0 H \cdot \sin(\pi/2 - \alpha) = 3,95 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$

**Задача 5.5.** Квадратная рамка из тонкого провода массой  $m = 100 \text{ г}$  может без трения вращаться вокруг вертикальной оси  $OO'$  проходящей через ее центр перпендикулярно двум противоположным сторонам рамки (рис.5.9). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$ , перпендикулярное плоскости чертежа. В рамке идет ток  $i = 2 \text{ А}$ . Определить циклическую частоту малых колебаний рамки около положения ее устойчивого равновесия.

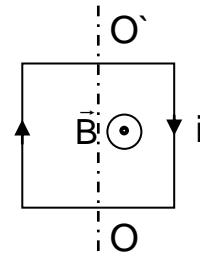


Рис. 5.9

### Решение

При отклонении рамки от положения равновесия на некоторый угол на нее будет действовать момент сил Ампера (5.8), модуль которого равен:

$$\bar{M} = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Так как  $p_m = ia^2$ , где  $a$  - сторона рамки, и для малых углов можно записать  $\sin \alpha \approx \alpha$ , то получаем

$$M \approx i \cdot a^2 \cdot B \cdot \alpha.$$

Применим к рамке основное уравнение вращательного движения

$$J \cdot \varepsilon = M,$$

где  $\varepsilon = \ddot{\alpha}$  - угловое ускорение,  $J$  - момент инерции рамки.

Подставляя значения  $M$  и  $\varepsilon$  в основное уравнение вращательного движения, учтем, что отклонение рамки от положения равновесия и момент силы противоположны по знаку:

$$J \varepsilon = J \ddot{\alpha} = -i \cdot a^2 B \alpha.$$

Получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний рамки

$$\ddot{\alpha} + \frac{ia^2 B}{J} \alpha = 0.$$

Известно, что множитель при  $\alpha$  есть не что иное, как угловая частота колебаний в квадрате, т.е.

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{ia^2 B}{J}.$$

Таким образом  $\omega_0 = \sqrt{\frac{ia^2 B}{J}}.$

Определим момент инерции рамки. Он равен сумме моментов инерции  $J_{||}$  сторон, параллельных оси ОО', и моментов инерции  $J_{\perp}$  сторон, перпендикулярных оси.

$$J = 2(J_{||} + J_{\perp}).$$

Поскольку

$$J_{||} = \frac{(m/4)a^2}{4} = \frac{ma^2}{16}; \quad J_{\perp} = \frac{(m/4)a^2}{12} = \frac{ma^2}{48},$$

получаем

$$J = \frac{1}{6}ma^2.$$

Подставляя значение момента инерции в формулу для циклической частоты колебаний рамки, получаем ответ задачи

$$\omega = \sqrt{\frac{6 \cdot i \cdot B}{m}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 2 \cdot 0,1}{0,1}} = 3,64 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

**Задача 5.6.** В плоскости прямоугольной рамки со сторонами  $a = 5 \text{ м}$  и  $b = 4 \text{ м}$  параллельно большой ее стороне расположен тонкий прямой бесконечный проводник на расстоянии  $r_0 = 4 \text{ м}$  от ближайшей большой стороны рамки. По проводнику течет ток  $i = 10 \text{ А}$ . Определить магнитный поток, пронизывающий рамку. Среда - вакуум.

### Решение

Рамка расположена в неоднородном магнитном поле, поэтому при вычислении потока  $\Phi_m$  рамку следует разбить на элементарные площадки  $dS$ , в пределах которых поле прямого тока остается постоянным.

Выделим на стороне рамки  $b$  элемент  $dx$ . Тогда элементарная площадь равна  $dS = a \cdot dx$ , и магнитный поток, пронизывающий эту площадку  $d\Phi_m = B \cdot dS = B \cdot adx$  (рис.5.10). Площадка расположена на расстоянии  $x$  от прямого проводника, тогда

$$d\Phi_m = B \cdot dS = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \cdot adx$$

где  $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$  - индукция магнитного поля, создаваемого

прямолинейным проводником с током  $i$  (4.5). Направление  $\vec{B}$  перпендикулярно плоскости чертежа.

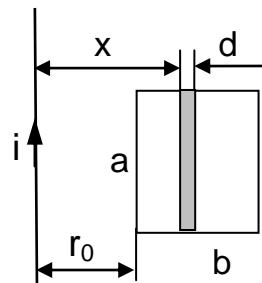


Рис. 5.10

Интегрируя  $d\Phi_m$  по  $x$  от  $r_0$  до  $r_0 + b$ , получаем:

$$\Phi_m = \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{\mu_0 i \cdot a}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{r_0} \right) = 0,69 \cdot 10^{-5} \text{ Вб.}$$

**Задача 5.7.** По двум длинным параллельным проводникам текут в противоположных направлениях токи  $i_1 = 6 \text{ А}$  и  $i_2 = 3 \text{ А}$ . Расстояние между проводниками уменьшили в три раза. Какую работу на единицу длины проводов при этом совершили?

### Решение

Сближая проводники, мы совершаем работу против сил Ампера, т.к. каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой проводник.

Предположим, что двигаем второй провод. Проведем силовую линию поля, созданного первым проводником, так, чтобы она касалась второго проводника (рис.5.11).

Модуль магнитной индукции  $B_1$  от первого проводника определяется формулой (4.5)

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x},$$

где  $x$  – расстояние между проводами в рассматриваемый момент времени.

Сила Ампера, действующая на второй проводник со стороны первого, согласно (5.5) запишется

$$F_{21} = i_2 B_1 L \sin \alpha.$$

Направление этой силы показано на рис.5.11.

Учитывая, что  $\alpha = \pi/2$ , и подставляя значение индукции  $B_1$ , получаем

$$F_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi x}.$$

Работа, совершенная против сил Ампера при сближении проводов на расстояние  $dx$ , равна

$$dA = -F_{21} dx = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi x} dx.$$

Интегрируя эту формулу от  $r$  до  $r/3$ , получаем

$$A = \int_r^{r/3} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r x} dx = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln 3.$$

Подставляя числовые значения, получаем ответ

$$A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 3}{2\pi} \ln 3 = 3,96 \text{ мкН.}$$

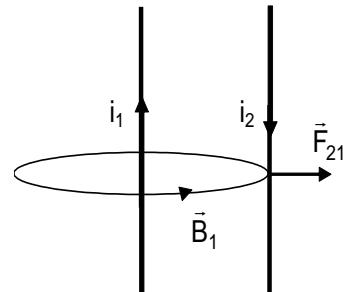


Рис. 5.11

**Задача 5.8.** Квадратная рамка с током  $i_1 = 2$  А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $i_2 = 30$  А. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии  $b = 3$  см. Сторона рамки  $a = 2$  см. Найти работу, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг ее оси на  $180^\circ$ .

### Решение

При решении задачи необходимо предположить, что движение рамки должно происходить крайне медленно, так как только в этом случае э.д.с. индукции, которая должна непременно вызывать изменение силы тока в проводнике и в рамке, можно пренебречь.

Работа, совершаемая внешними силами при повороте рамки согласно (5.16) равна:

$$A = i_1(\Phi_{m1} - \Phi_{m2}),$$

где  $\Phi_{m1}$ ,  $\Phi_{m2}$  – магнитные потоки, пронизывающие рамку в первом и втором положении.

При вычислении потока  $\Phi_m$  рамку следует разбить на элементарные площадки  $dS = a \cdot dx$ , в пределах которых поле прямого тока остается постоянным.

Индукция поля прямого тока равна (4.5)

$$B = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x}$$

и направлена перпендикулярно чертежу.

Тогда магнитный поток, пронизывающий рамку в начальном положении согласно (5.14):

$$\Phi_{m1} = \int_S BdS,$$

Производя интегрирование в пределах рамки, получаем

$$\Phi_{m1} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \cdot a \cdot \int_{b-a/2}^{b+a/2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i_2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a/2}{b-a/2}.$$

При повороте рамки на  $180^\circ$  знак потока индукции магнитного поля изменится на противоположный

$$\Phi_{m2} = -\frac{\mu_0 i_2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a/2}{b-a/2},$$

следовательно, совершенная работа равна

$$A = \frac{\mu_0 a i_1 \cdot i_2}{\pi} \ln \frac{b+a/2}{b-a/2} = 0,33 \text{Дж.}$$

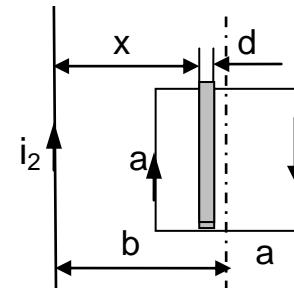


Рис. 5.12

**Задача 5.9.** В центре тонкого длинного соленоида расположена маленькая плоская рамочка состоящая из  $N = 20$  витков площадью  $S = 1 \text{ см}^2$  каждый. По рамочке идет ток  $i_0 = 1 \text{ А}$  того же направления, что и в соленоиде. Обмотка соленоида состоит из  $n = 50$  витков на 1 см длины. Сила тока в соленоиде  $i = 5 \text{ А}$ . Какую работу нужно совершить, чтобы переместить рамочку в середину основания соленоида? Плоскость рамки перпендикулярна оси соленоида. Токи в соленоиде и рамке считать постоянными.

### Решение

Поле в соленоиде неоднородно вдоль оси: уменьшение индукции поля от центра соленоида к основаниям объясняется рассеянием линий индукции. На рамку, внесенную в такое неоднородное поле, действуют силы, изображенные на рис.5.13.

Горизонтальные составляющие этих сил, обусловленные неоднородностью поля, будут втягивать рамку в поле, в центр соленоида. Следовательно, перемещая рамку в середину основания соленоида, внешние силы будут совершать положительную работу.

Условие, заданное в задаче: "Тонкий, длинный соленоид" означает, что длина соленоида настолько больше его диаметра, что, согласно (4.11) в центре поле может быть рассчитано по формуле бесконечно длинного соленоида:

$$B_1 = \mu_0 i \cdot n,$$

а в середине основания равно половине этого значения

$$B_2 = \mu_0 i \cdot n / 2.$$

Кроме того, в задаче указано, что в соленоиде "маленькая рамочка". Это означает, что размеры рамочки малы, по сравнению с площадью витков соленоида, поэтому поле в пределах рамки можно считать однородным. Следовательно, согласно (5.14), поток, пронизывающий рамку в двух положениях, можно рассчитать по формулам:

$$\Phi_{m1} = NB_1 S = N\mu_0 i \cdot n S ,$$

$$\Phi_{m2} = NB_2 S = \frac{1}{2}N\mu_0 i \cdot n S$$

Тогда работа, совершенная при перемещении рамки, равна:

$$A = i_0 \cdot (\Phi_{m1} - \Phi_{m2}) = \frac{1}{2}N\mu_0 i i_0 n \cdot S = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

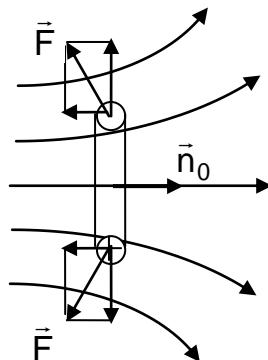


Рис. 5.13

## Задачи для самостоятельного решения

**5.10.** Определить индукцию магнитного поля, в котором движется электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi = 400$  В. Известно, что вектор скорости электрона перпендикулярен вектору индукции магнитного поля  $\vec{B}$  и радиус кривизны траектории электрона  $R = 4,4 \cdot 10^{-2}$  м.

**5.11.** Определить импульс  $p$  протона, движущегося в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,015$  Тл по окружности радиусом  $R = 10$  см.

**5.12.** Определить момент импульса электрона при движении его по окружности радиусом  $R = 0,2$  см в магнитном поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл.

**5.13.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,52$  Тл заряженная частица, обладающая скоростью  $v = 2 \cdot 10^6$  м/с, описывает дугу окружности радиусом  $R = 4$  см. Найти отношение заряда частицы к ее массе. Определить какая это частица.

**5.14.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,2$  Тл движется электрон по окружности радиусом  $R = 5$  см. Найти величину магнитного момента эквивалентного кругового тока.

**5.15.** Протон, обладающий скоростью  $v = 20$  км/с, движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 3 \cdot 10^{-3}$  Тл под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению силовых линий. Определить радиус  $R$  и шаг  $h$  винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

**5.16.** По винтовой линии, радиус которой  $R = 1$  см и шаг  $h = 7,8$  см, движется электрон в магнитном поле с индукцией  $B = 9 \cdot 10^{-3}$  Тл. Определить период обращения электрона и его скорость.

**5.17.** Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, начинают двигаться в однородном магнитном поле. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом  $R_1 = 5$  см, второй ион - по окружности радиусом  $R_2 = 2,5$  см. Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

**5.18.** Два электрона движутся в вакууме "бок о бок" по параллельным проводам с одинаковой скоростью  $v = 3 \cdot 10^5$  м/с. Расстояние между электронами  $a = 10$  мм. Найти силу  $F_m$  магнитного взаимодействия между электронами. Сравнить  $F_m$  с силой  $F_e$  кулоновского взаимодействия между этими электронами.

**5.19.** Какова кинетическая энергия  $W_k$  протона, если его траектория в магнитном поле с индукцией  $B = 2$  Тл представляет собой винтовую линию с радиусом  $R = 10$  см и шагом  $h = 60$  см?

**5.20.** Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 10$  кА/м. Вычислить период  $T$  вращения электрона.

**5.21.** Определить частоту вращения электрона по круговой орбите в однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B = 0,2 \text{ Тл}$ .

**5.22.** Протон с кинетической энергией  $W_k = 1 \text{ МэВ}$  влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции ( $B = 1 \text{ Тл}$ ). Какова должна быть минимальная протяженность  $L$  поля в направлении, по которому летел протон, когда он находился вне поля, чтобы поле изменило направление движения протона на противоположное.

**5.23.** Во взаимно перпендикулярных магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$  и электрическом поле напряженностью  $E = 100 \text{ кВ/м}$  движется прямолинейно, перпендикулярно к обоим полям, заряженная частица. Вычислить скорость  $v$  этой частицы.

**5.24.** Точечный заряд  $q = 5 \text{ мкКл}$  со скоростью  $v = 10^5 \text{ м/с}$  влетает в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля (рис.5.14). Напряженность электрического поля  $E = 800 \text{ В/м}$ , индукция магнитного поля  $B = 0,02 \text{ Тл}$ . Найти величину результирующей силы, действующей на заряд в этих полях.

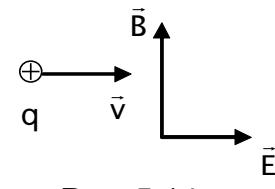


Рис. 5 14

**5.25.** В магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$  движется по окружности радиусом  $R = 1 \text{ см}$  заряженная частица. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью  $E = 100 \text{ В/м}$ . В течение какого промежутка времени  $\Delta t$  должно действовать электрическое поле для того, чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое.

**5.26.** Покоящийся в начальный момент электрон ускоряется постоянным электрическим полем  $E$ . Через время  $\tau = 10 \text{ мс}$  электрон влетает в магнитное поле  $\vec{B} \perp \vec{E}$ . Во сколько раз нормальное ускорение электрона в этот момент больше его тангенциального ускорения, если  $B = 10^{-5} \text{ Тл}$ ?

**5.27.** Протон начинает движение со скоростью  $v_0 = 100 \text{ км/с}$  в области совпадающих по направлению электрического ( $E = 210 \text{ В/м}$ ) и магнитного ( $B = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$ ) полей. Определить для начального момента движения ускорение протона, если направление скорости  $\vec{v}_0$ : 1) совпадает с направлением полей; 2) перпендикулярно этому направлению.

**5.28.** Определить силу  $F$ , действующую на электрон в момент, когда он пересекает под прямым углом ось длинного соленоида без сердечника в непосредственной близости к его концу. Сила тока в соленоиде  $i = 2 \text{ А}$ . Число витков на единицу длины  $n = 3 \cdot 10^3 \text{ 1/м}$ . Скорость электрона  $v = 3 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ .

**5.29.** Протон делает 40 оборотов в магнитном поле циклотрона при максимальном значении переменной разности потенциалов между дуантами  $U_{\max} = 60$  кВ. Какую кинетическую энергию приобретет протон в конце ускорения? Какую скорость приобретет протон?

**5.30.** Кинетическая энергия протона в конце ускорения в циклотроне равна  $W_k = 12,5$  МэВ. Найти индукцию магнитного поля в циклотроне  $B$ , если максимальный радиус кривизны траектории протонов  $R = 50$  см.

**5.31.** Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии  $d = 4$  см друг от друга. По проводам текут одинаковые токи  $i = 50$  А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины проводов.

**5.32.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл расположен отрезок прямолинейного проводника длиной  $L = 10$  см под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению  $\vec{B}$ . По проводнику течет ток  $i = 20$  А. С какой силой  $F$  действует магнитное поле на этот проводник?

**5.33.** Квадратная рамка со стороной  $a$  и массой  $m$  расположена в воздухе в одной плоскости на расстоянии  $b$  от прямого бесконечного проводника с током  $i_1$ . При каком токе  $i_2$  в рамке она будет “висеть” неподвижно?

**5.34.** Длинный прямой проводник расположен в одной плоскости с квадратной проволочной рамкой параллельно двум ее сторонам (рис.5.15). По рамке и проводу текут одинаковые токи  $i = 10^3$  А. Ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии  $b = a$ . Определить силу  $F$ , действующую на рамку.

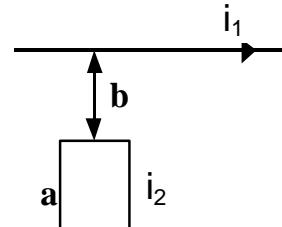


Рис. 5.15

**5.35.** Найти магнитный момент  $p_m$  тонкого кругового витка с током  $i$ , если радиус витка  $R = 100$  мм и индукция магнитного поля в его центре  $B = 6$  мкТл.

**5.36.** Магнитный момент кругового витка  $p_m = 1 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Индукция магнитного поля в центре витка  $B = 2,5 \cdot 10^{-4}$  Тл. Вычислить силу тока  $i$  в витке и радиус  $R$  витка.

**5.37.** Найти магнитный момент  $p_m$  кольца с током  $i$ , если на оси кольца на расстоянии  $d = 1$  м от его плоскости магнитная индукция  $B = 10^{-8}$  Тл. Считать радиус кольца  $R$  много меньше  $d$ .

**5.38.** В атоме водорода вокруг ядра движется электрон по круговой орбите некоторого радиуса. Зная заряд электрона и его массу, найти отношение магнитного момента  $p_m$  эквивалентного кругового тока к величине момента импульса  $L$  орбитального движения электрона. Укажите направления векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$ .

**5.39.** Заряд  $q = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл равномерно распределен на тонком кольце радиусом  $R = 0,1$  м. Кольцо равномерно вращается с частотой  $v = 10$  Гц относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить магнитный момент, обусловленный вращением кольца.

**5.40.** Рамка гальванометра длиной  $a = 4$  см и шириной  $b = 1,5$  см, содержащая  $N = 200$  витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти 1) механический момент  $M$ , действующий на рамку, когда по витку течет ток  $i = 1$  мА; 2) магнитный момент  $p_m$  рамки при этом токе.

**5.41.** Короткая катушка с площадью поперечного сечения  $S = 150$   $\text{см}^2$  содержит  $N = 200$  витков провода, по которому течет ток  $i = 4$  А. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H = 8$  кА/м. Определить магнитный момент  $p_m$  катушки, а также вращающий момент  $M$ , действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с линиями индукции.

**5.42.** В атоме водорода движется электрон вокруг ядра по окружности радиусом  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  м. Атом помещен в магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл, направленное параллельно плоскости орбиты электрона. Вычислить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока и механический момент  $M$ , действующий на круговой ток.

**5.43.** Виток установили в плоскости магнитного меридиана Земли и пустили по нему ток  $i = 10$  А. Виток может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с диаметром витка  $d = 20$  см. Какой вращающий момент  $M$  нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении? Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B_r = 2 \cdot 10^{-5}$  Тл.

**5.44.** На проволочный виток с током  $i$  радиусом  $R = 10$  см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент  $M_{\max} = 65 \cdot 10^{-7}$  Н·м. Виток закрепили неподвижно так, что плоскость витка параллельна силовым линиям. Помещенная в центр витка магнитная стрелка установилась под углом  $\varphi = 5^\circ$  к плоскости витка. Определить напряженность поля между магнитами. Действием магнитного поля Земли пренебречь.

**5.45.** Магнитная стрелка помещена в центре кругового проводника радиусом  $r = 20$  см. Виток расположен в плоскости магнитного меридиана Земли. Какой силы ток течет по витку, если магнитная стрелка отклонена на угол  $\alpha = 9^\circ$  от плоскости магнитного меридиана? Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна  $B_r = 2 \cdot 10^{-5}$  Тл.

**5.46.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$  находится квадратная рамка из тонкого провода массой  $m = 0,05 \text{ кг}$ , которая может вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр перпендикулярно двум противоположным сторонам рамки. По рамке идет ток  $i = 10 \text{ А}$ . Магнитное поле в начальный момент перпендикулярно плоскости рамки. Определить период малых гармонических колебаний рамки около положения ее устойчивого равновесия.

**5.47.** Квадратная рамка из тонкой проволоки свободно подвешена за середину одной из сторон на неупругой нити. По рамке пустили ток  $i = 6 \text{ А}$ . Определить период  $T$  малых гармонических колебаний рамки в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ , если масса рамки  $m = 2 \text{ г}$ .

**5.48.** Виток с током  $i = 2 \text{ А}$  свободно подвешен на неупругой нити в однородном магнитном поле. Период малых крутильных колебаний относительно вертикальной оси  $T = 1,2 \text{ с}$ . Масса кольца  $m = 3 \text{ г}$ . Найти индукцию  $B$  магнитного поля. Момент инерции витка относительно оси, совпадающей с его диаметром, равен  $J = mR^2/2$ , где  $R$  – радиус витка.

**5.49.** Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током, представленных на рис. 5.16.

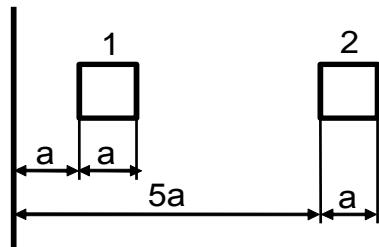


Рис. 5.16

**5.50.** По тороиду с прямоугольным поперечным сечением (рис. 5.17) пропускают ток  $i = 2,4 \text{ А}$ . Число витков в тороиде  $N = 500$ , внутренний радиус тороида  $R_1 = 5 \text{ см}$ , наружный радиус  $R_2 = 8 \text{ см}$ , ширина тороида  $b = 5 \text{ см}$ . Определить магнитный поток через тороид.

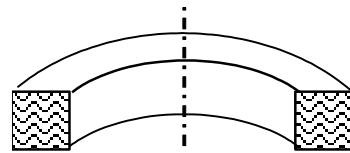


Рис. 5.17

**5.51.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01 \text{ Тл}$  находится прямой провод длиной  $L = 8 \text{ см}$ , расположенный под углом  $\alpha = 60^\circ$  к силовым линиям поля. По проводу течет ток  $i = 2 \text{ А}$ . Под действием сил поля провод переместился на расстояние  $s = 5 \text{ см}$ . Найти работу  $A$  сил поля.

**5.52.** Два тонких прямых бесконечных параллельных проводника, по которым в одном направлении идут токи  $i_1 = 5 \text{ А}$ ,  $i_2 = 10 \text{ А}$  находятся в вакууме на расстоянии  $r_1 = 2 \text{ см}$  друг от друга. Определить работу на единицу длины проводников, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между ними до  $r_2 = 12 \text{ см}$ .

**5.53.** По двум длинным параллельным проводникам течет в одном направлении ток  $i = 6 \text{ А}$  в каждом. Проводники удалили друг от друга так, что расстояние между ними стало в 2 раза больше первоначального. Какую работу на единицу длины проводов совершили при этом силы Ампера?

**5.54.** Квадратная рамка со стороной  $a = 10 \text{ см}$ , по которой течет ток  $i = 200 \text{ А}$ , свободно установилась в однородном магнитном поле ( $B = 0,2 \text{ Тл}$ ). Определить работу, которую необходимо совершить при повороте рамки вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции, на угол  $\theta = 2\pi/3$ .

**5.55.** Виток, по которому течет ток  $i = 20 \text{ А}$ , свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,016 \text{ Тл}$ . Диаметр витка равен  $D = 10 \text{ см}$ . Определить работу  $A$ , которую необходимо совершить, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром. Расчет выполнить для двух случаев: а) поворот на угол  $\alpha = \pi/2$ ; б) поворот на угол  $\alpha = \pi$ .

**5.56.** В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 0,1 \text{ Тл}$  находится проводник, согнутый в виде квадрата со стороной  $a = 0,1 \text{ м}$ . По проводнику течет ток  $i = 20 \text{ А}$ . Плоскость квадрата составляет угол  $\alpha = 20^\circ$  с направлением  $\vec{B}$ . Определить работу, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить проводник за пределы поля.

**5.57.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,016 \text{ Тл}$  свободно установился проводящий виток диаметром  $d = 10 \text{ см}$ . Для того, чтобы повернуть виток на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно оси, совпадающей с диаметром, необходимо совершить работу  $A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ . Какой ток течет по витку?

**5.58.** Квадратная рамка с током  $i_1 = 2 \text{ А}$  расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $i_2 = 30 \text{ А}$  (рис.5.18). Проходящая через середины противолежащих сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии  $b = 3 \text{ см}$ . Сторона рамки  $a = 2 \text{ см}$ . Найти работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг ее оси на  $180^\circ$ .

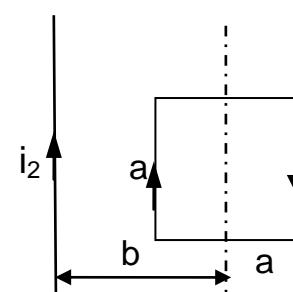


Рис. 5.18

**5.59.** В центре тонкого длинного соленоида расположен маленький виток площадью  $S = 1 \text{ см}^2$ . По витку идет ток  $i_0$  того же направления, что и в соленоиде. Плотность намотки соленоида  $n = 20$  витков/см. Сила тока в соленоиде  $i = 5 \text{ А}$ . Виток перемещают в середину основания соленоида, совершая при этом работу  $A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ . Найти величину тока  $i_0$  в витке.

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### Основные понятия и законы

Явление электромагнитной индукции заключается в возникновении электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур. Этот ток называется индукционным.

Возникновение индукционного тока показывает, что в проводнике появляется определенная электродвижущая сила. Эта электродвижущая сила определяется законом электромагнитной индукции Фарадея: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, в последнем возникает э.д.с. индукции, равная скорости изменения магнитного потока

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (6.1)$$

Знак минус в законе отражает *правило Ленца*: э.д.с. индукции создает ток такого направления, что он своим магнитным полем противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего этот ток.

Закон Ленца применим, если проводник движется, а магнитное поле остается постоянным, а также, когда проводники неподвижны, а изменяется магнитное поле. В этих случаях индукционные токи вызывают такие поля, которые стремятся противодействовать изменениям внешнего поля, вызвавшего эти токи.

Явление электромагнитной индукции наблюдается всегда, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот поток может создаваться самим током, текущим в рассматриваемом контуре. Поэтому при всяком изменении собственного тока в каком-либо контуре в нем возникает э.д.с. индукции, которая в этом случае называется э.д.с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ .

Согласно закону Био – Савара - Лапласа величина магнитной индукции в любой точке поля пропорциональна силе тока в контуре (4.2). Поэтому и магнитный поток пропорционален силе тока

$$\Phi_m = Li. \quad (6.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью контура. Индуктивность контура зависит от геометрической формы, размеров контура и магнитных свойств среды. Единицей индуктивности в системе единиц СИ служит Генри.

Подставляя в формулу э.д.с. индукции (6.1) значение потока (6.2) получаем закон Фарадея для э.д.с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (6.3)$$

То есть э.д.с. самоиндукции пропорциональна быстроте изменения тока в контуре.

Реальная катушка индуктивности обладает сопротивлением, поэтому ее можно представить в виде последовательно соединенных индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$ .

При подключении и отключении источника постоянного тока в цепи, показанной на рис.6.1, ток через катушку индуктивности будет изменяться. Следовательно, в катушке возникнет э.д.с. самоиндукции, препятствующая изменению тока в контуре.

В качестве примера рассмотрим подробнее отключение источника из цепи (ключ К переводят из точки А в точку В). В этом случае ток в цепи поддерживается за счет э.д.с. самоиндукции в катушке:

$$iR = -L \frac{di}{dt}.$$

Разделяя переменные, проинтегрируем это уравнение

$$\int_{i_0}^i \frac{di}{i} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt,$$

где  $i_0$  – сила тока в цепи при  $t = 0$ .

Получаем  $\ln \frac{i}{i_0} = -\frac{R}{L} t$ ,

или  $i = i_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right).$  (6.4)

Т.е. при отключении источника ток в цепи экспоненциально убывает до нуля.

Аналогично можно получить, что при подключении источника ток будет нарастать по закону

$$i = i_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\right). \quad (6.5)$$

### Энергия магнитного поля

Всякий электрический ток создает магнитное поле, обладающее энергией. Плотность энергии магнитного поля определяется формулой:

$$w_m = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu \mu_0} \quad (6.6)$$

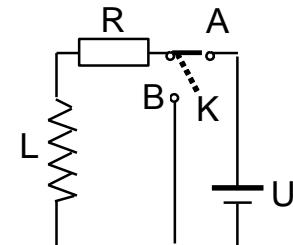


Рис. 6.1

Для определения энергии неоднородного поля применяют интегрирование. Очевидно, что энергия  $dW_m$  магнитного поля в элементарном объеме  $dV$  равна

$$dW_m = w_m \cdot dV. \quad (6.7)$$

Интегрируя это выражение по всему объему магнитного поля, находят энергию неоднородного магнитного поля:

$$W_m = \int_V \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} dV \text{ или } W_m = \int_V \frac{B^2 dV}{2\mu\mu_0}. \quad (6.8)$$

### Примеры решения задач

**Задача 6.1.** В вакууме внутри соленоида, имеющего длину  $L = 50$  см и число витков  $N = 300$ , находится металлическое кольцо, которое площадью  $S = 5$  см<sup>2</sup>. Сопротивление кольца  $R = 2$  Ом. Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида. Ток в соленоиде нарастает по закону  $i = kt$ , где  $k = 1$  А/с. Определить индукционный ток в кольце.

#### Решение

Поскольку ток в соленоиде переменный, то вдоль оси соленоида возникает переменное магнитное поле индукцией (4.12)

$$B = \mu_0 n i = \frac{\mu_0 N i}{L},$$

а, следовательно, и магнитный поток  $\Phi$  через сечение соленоида будет меняться (увеличиваться с течением времени)

$$\Phi_m = BS = \frac{\mu_0 NiS}{L} = \frac{\mu_0 Nkt \cdot S}{L}.$$

Переменный магнитный поток приведет к возникновению э.д.с. индукции (6.1) в металлическом кольце, находящемся в соленоиде

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 Nk \cdot S}{L}.$$

Знак «-» показывает, что индукционный ток в кольце направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало увеличению магнитного потока в соленоиде.

Величина индукционного тока, возникающего в кольце

$$i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mu_0 NkS}{LR} = \frac{4\pi \cdot 300 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0.5 \cdot 2} = 1.89 \text{ А.}$$

**Задача 6.2.** Пусть в магнитном поле имеется замкнутый контур сопротивлением  $R = 5$  Ом, пронизываемый потоком магнитной индукции  $\Phi = 3$  мВб. Предположим, что этот поток уменьшится до 0. Вычислить величину заряда, прошедшего по цепи.

### Решение

Мгновенное значение э.д.с. индукции в процессе исчезновения магнитного потока выражается формулой (6.1)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Следовательно, мгновенное значение силы индукционного тока по закону Ома будет равно:

$$i = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Тогда величина прошедшего заряда

$$q = \int i \cdot dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} \frac{d\Phi_m}{dt} \cdot dt = \frac{\Phi_{m1} - \Phi_{m2}}{R}.$$

Так как  $\Phi_{m2} = 0$ , получаем

$$q = \frac{\Phi_{m1}}{R} = \frac{\Phi}{R} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

**Задача 6.3.** Прямолинейный проводник длиной  $L = 2 \text{ м}$  движется параллельно самому себе в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 7 \text{ мТл}$  со скоростью  $v = at$  ( $\text{м/с}$ ), где  $a = 0,3 \text{ м/с}^2$ . Скорость направлена перпендикулярно проводнику и силовым линиям магнитного поля. Найти э.д.с. индукции, возникающую в проводнике через  $t = 5 \text{ с}$  после начала движения.

### Решение

Если мгновенное значение скорости проводника есть  $v$ , то за малое время  $dt$  проводник опишет площадь (рис.6.2)

$$dS = Lv \cdot dt = Lat \cdot dt$$

и за это время пересечет все линии магнитной индукции, проходящие через площадку  $dS$ .

Поэтому магнитный поток  $d\Phi$  через поверхность  $dS$ , пересекаемую проводником за время  $dt$  запишется:

$$d\Phi_m = B_n \cdot dS = B \cdot Lv \cdot dt = BLat \cdot dt.$$

Здесь  $B_n$  - составляющая магнитной индукции, перпендикулярная к  $dS$ .

Величина э.д.с. индукции согласно (6.1)

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_m}{dt} = B \cdot Lat = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 0,3 \cdot 5 = 21 \text{ мВ}.$$

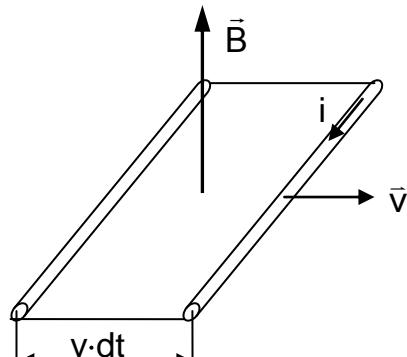


Рис. 6.2

**Задача 6.4.** В центре круглой рамки, состоящей из  $N_1 = 50$  витков радиусом  $r = 20$  см каждый, расположена маленькая рамочка, состоящая из  $N_2 = 100$  витков, площадью  $S = 1 \text{ см}^2$  каждый. Эта рамка вращается вокруг одного из диаметров большой рамки с постоянной угловой скоростью  $\omega = 300 \text{ с}^{-1}$  (рис.6.3). Найти максимальное значение возникающей э.д.с. индукции, если в обмотке первой рамки течет ток  $i = 10 \text{ А}$ .

### Решение

Так как вторая рамка мала по сравнению с первой (ее радиус  $\approx 0,5$  см), индукцию поля в ее пределах можно считать постоянной и равной индукции магнитного поля в центре первой рамки (4.4), то есть

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} \cdot N_1.$$

Согласно определению (5.13), магнитный поток через  $N_2$  витков маленькой рамочки

$$\Phi_0 = BS N_2 \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол между нормалью  $\vec{n}_0$  к плоскости рамочки и индукцией  $\vec{B}$ .

При вращении маленькой рамочки поток будет меняться вследствие изменения угла  $\varphi$ . Так как скорость вращения рамки постоянна, то в любой момент времени  $\varphi = \omega t$  и поток, пронизывающий маленькую рамочку, равен

$$\Phi_m = BS N_2 \cos \omega t.$$

Подставляя величину индукции поля, получаем

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 i}{2r} S N_1 N_2 \cos \omega t.$$

При изменении магнитного потока сцепления в маленькой рамочке будет возникать электродвижущая сила индукции (6.1)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2r} S N_1 N_2 \omega \sin \omega t.$$

Максимального значения  $\mathcal{E}_i$  будет достигать каждый раз, когда  $\sin \omega t = \pm 1$ , то есть когда

$$\omega t = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Максимальное значение э.д.с. индукции в рамочке равно

$$\mathcal{E}_{i,m} = \frac{\mu_0 i}{2r} S N_1 N_2 \omega = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

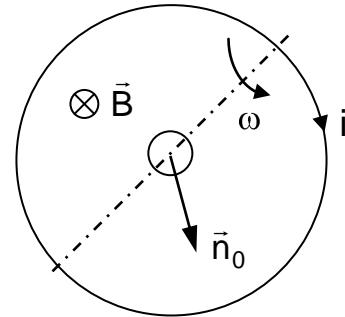


Рис. 6.3

**Задача 6.5.** Определить индуктивность  $L$  длинного соленоида с немагнитным сердечником, состоящего из  $N = 500$  витков с площадью поперечного сечения  $S = 0,3 \text{ см}^2$ . Длина соленоида  $l = 20 \text{ см}$ .

### Решение

Согласно (4.12) внутри бесконечно длинного соленоида с током  $i$  существует магнитное поле индукцией

$$B = \mu_0 n i = \frac{\mu_0 N i}{l},$$

направленное вдоль оси соленоида.

Соответственно, магнитный поток внутри соленоида запишется

$$\Phi_m = BS = \frac{\mu_0 N i S}{l}.$$

Индуктивность соленоида определим из формулы (6.2), учитывая, что магнитный поток, пронизывающий все витки соленоида, равен ( $N\Phi_m$ ):

$$L = \frac{N\Phi_m}{i} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}. \quad (6.9)$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-4}}{0,2} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ ГН}.$$

**Задача 6.6.** Катушку сопротивлением  $R = 20 \text{ Ом}$  отключают от источника постоянного напряжения, не разрывая при этом цепи. Ток в катушке уменьшается на 20% от своего первоначального значения за время  $t = 0,15 \text{ мс}$ . Определить индуктивность катушки.

### Решение

Закон изменения тока в цепи при отключении источника (6.4)

$$i = i_o \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Отсюда

$$\frac{R}{L}t = \ln \frac{i_o}{i}.$$

Получаем формулу для определения индуктивности катушки

$$L = \frac{Rt}{\ln(i_o/i)}.$$

Подставляя заданное значение тока  $i = 0,8 \cdot i_o$ , получаем

$$L = \frac{Rt}{\ln 1,25} = \frac{20 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\ln 1,25} = 0,013 \text{ ГН}.$$

**Задача 6.7.** По бесконечной прямой полой трубочке радиусом  $R_1 = 1$  см идет ток  $i = 100$  А. Определить энергию магнитного поля, заключенного в цилиндре радиусом  $R_2 = 1$  м и длиной  $L = 1$  м, расположенного соосно с трубочкой.

### Решение

Магнитное поле, созданное током  $i$ , идущим по трубочке, является неоднородным. Для расчета энергии такого поля разобьем цилиндр на малые полые цилиндры толщиной  $dr$  (рис.6.4), в пределах которых магнитное поле можно считать однородным.

Рассмотрим такой элементарный цилиндр объемом

$$dV = 2\pi r \cdot L \cdot dr.$$

Энергия магнитного поля внутри этого цилиндра

$$dW_m = \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r L dr.$$

По закону Био – Савара - Лапласа, индукция магнитного поля, создаваемая бесконечно длинным проводником на расстоянии  $r$  от центра, равна (4.5):

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Тогда энергия  $dW_m$ , заключенная в элементарном цилиндре, равна

$$dW_m = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ , имеем

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

**Задача 6.8.** В горизонтально расположенному соленоиде радиусом  $R_1 = 20$  см, имеющем на единице длины число витков  $n = 1000$  1/м находится железный сердечник. Длина сердечника равна длине соленоида  $L = 2$  м, а радиус равен  $R_2 = 2$  см. Определить, какую работу необходимо совершить, чтобы вытащить сердечник из соленоида. Магнитная проницаемость материала сердечника  $\mu = 500$ . Ток в соленоиде  $i = 10$  А.

### Решение

Магнитное поле внутри соленоида однородно, тогда энергия поля в объеме  $V$  может быть, согласно (6.8), определена по формуле

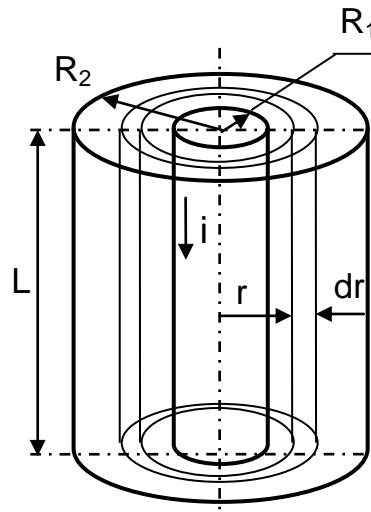


Рис. 6.4

$$W_m = w_m V = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} V.$$

где  $w_m$  – плотность энергии поля.

Энергия магнитного поля соленоида с сердечником складывается из магнитного поля, заключенного в объеме  $V_1 = \pi(R_1^2 - R_2^2) \cdot L$  внутри соленоида без сердечника

$$W_1 = \frac{\mu_0 H^2}{2} \pi (R_1^2 - R_2^2) \cdot L,$$

и энергии магнитного поля, заключенной в сердечнике с магнитной проницаемостью  $\mu$

$$W_2 = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \pi R_2^2 L.$$

Следовательно, полная энергия соленоида с сердечником равна

$$W_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} \pi (R_1^2 - R_2^2) L + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \pi R_2^2 L.$$

Энергия магнитного поля после удаления сердечника

$$W'_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} \pi R_1^2 L;$$

Работа, совершаемая при удалении сердечника из соленоида:

$$A = W_m - W'_m = \frac{\pi \mu_0 H^2}{2} R_2^2 L (\mu - 1).$$

Так как напряженность поля внутри соленоида, согласно (4.1) и (4.12), равна  $H = ni$ , то получаем

$$A = \frac{\pi \mu_0 n^2 i^2}{2} R_2^2 L (\mu - 1) = 80 \text{ Дж.}$$

**Задача 6.9.** Обмотка тороида содержит  $n = 10$  витков/см. Сердечник немагнитный. При какой силе тока  $i$  плотность энергии магнитного поля тороида  $w_m = 1 \text{ Дж}/\text{м}^3$ ? Считать, что диаметр витка обмотки много меньше диаметра тороида (рис.6.5).

### Решение

Силовая линия радиусом  $r$ , проходящая внутри тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. По теореме о циркуляции для вектора  $\vec{B}$  запишем

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 Ni.$$

где  $N = nL = n \cdot 2\pi r$  - число витков в тороиде.

Подставляя, получаем

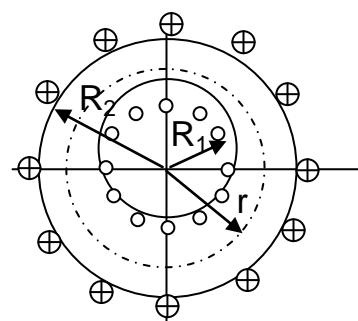


Рис. 6.5

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} = \frac{\mu_0 n \cdot 2\pi r}{2\pi r} = \mu_0 i \cdot n.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (6.6)

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Подставляя индукцию магнитного поля

$$w_m = \frac{\mu_0 i^2 n^2}{2},$$

определяем ток  $i$ :

$$i = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2w_m}{\mu_0}} = 1,26 \text{ А.}$$

### Задачи для самостоятельного решения

**6.10.** Тонкий прямой бесконечный проводник расположен в плоскости прямоугольной рамки со сторонами  $a = 5$  м и  $b = 4$  м параллельно большой ее стороне на расстоянии  $r_0 = 4$  м от ближней стороны рамки. По проводнику течет ток  $i = 10$  А. Определить, какая средняя э.д.с. индукции возникнет в рамке, если ее удалить от провода на бесконечность за время  $t = 0,2$  с?

**6.11.** Рамка площадью  $S = 200$  см<sup>2</sup> равномерно вращается с частотой  $n = 10$  1/с относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля ( $B = 0,2$  Тл). Каково среднее значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{i\text{ср}}$  за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

**6.12.** Прямой бесконечный проводник с током  $i$  расположен в одной плоскости с квадратной рамкой, сторона которой  $a = 0,2$  м. Ток в проводнике меняется по закону  $i = \alpha \cdot t^3$ , где  $\alpha = 2$  А/с<sup>3</sup>. Расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки  $r_0 = 0,2$  м, сопротивление рамки  $R = 7$  Ом. Определить ток в рамке в момент времени  $t = 10$  с.

**6.13.** Квадратная рамка из тонкой проволоки находится в магнитном поле, индукция которого изменяется по закону  $B = (\alpha + \beta \cdot t^2)$  Тл, где  $\beta = 2$  Тл/с<sup>2</sup>. Сторона рамки  $a = 0,2$  м. Плоскость рамки перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ . Определить э.д.с. индукции в рамке в момент времени  $t = 5$  с.

**6.14.** Прямой бесконечный ток, изменяющийся по закону  $i = i_0(1 + \sin \pi t)$ , где  $i_0 = 2 \cdot 10^3$  А, расположен в плоскости прямоугольной рамки параллельно большой ее стороне  $b = 1$  м на расстоянии  $r = 0,25$  м

от нее. Другая сторона рамки  $a = 0,5$  м, сопротивление рамки  $R = 20$  Ом.

Определить индукционный ток в рамке в момент времени  $t = \frac{1}{3}$  с.

**6.15.** Тонкий медный проводник массой  $m = 1$  г согнут в виде квадрата и концы его замкнуты. Квадрат помещен в магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл так, что плоскость его перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ . Какой заряд  $q$  протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию? Удельное сопротивление  $\rho_{\text{меди}} = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м; плотность  $D_{\text{меди}} = 8930$  кг/м<sup>3</sup>.

**6.16.** Радиус эластичного витка увеличивается с постоянной скоростью  $dr/dt = 5$  см/с. Виток находится в однородном магнитном поле индукцией  $B = 0,04$  Тл, перпендикулярном плоскости витка. При  $t = 0$  площадь витка  $S = 0,285$  м. Определить э.д.с. индукции в витке в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 2$  с.

**6.17.** Плоский контур площадью  $S = 0,1$  м<sup>2</sup> с источником э.д.с.  $\mathcal{E} = 10$  мВ находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости контура (рис.6.6). Во сколько раз изменится мощность тока в контуре, если величина магнитной индукции начнет расти со скоростью  $(\Delta B / \Delta t) = 0,02$  Тл/с? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

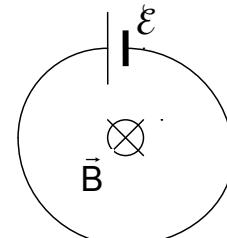


Рис. 6.6

**6.18.** Проводящий контур площадью  $S = 400$  см<sup>2</sup>, в который включен конденсатор емкостью  $C = 10$  мкФ, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции (рис.6.7). Магнитная индукция поля возрастает по закону  $B = (2 + 5t) \cdot 10^{-2}$  [Тл]. Определить максимальный заряд и максимальную энергию электрического поля конденсатора.

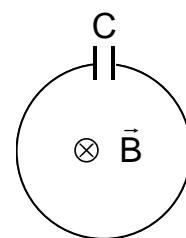


Рис. 6.7

**6.19.** В магнитном поле, индукция которого изменяется по закону  $B = B_0(1 + \alpha \cdot t^3)$ , где  $B_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  Тл,  $\alpha = 2$  с<sup>-3</sup>, расположена квадратная рамка площадью  $S = 2$  м<sup>2</sup>. Определить количество тепла, выделяющееся в рамке за первые  $t = 2$  с, если сопротивление рамки  $R = 6$  Ом и плоскость рамки перпендикулярна вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ .

**6.20.** Вблизи длинного прямого проводника, по которому течет ток  $i = 10^3$  А, расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением  $R = 0,02$  Ом. Проводник лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны  $a_1 = 10$  см,  $a_2 = 20$  см. Какой заряд  $q$  протечет через рамку при выключении тока в проводнике?

**6.21.** Квадратная проволочная рамка со стороной  $a$  и бесконечный прямой проводник с током  $i$  лежат в одной плоскости (рис.6.8). Рамку повернули на  $180^\circ$  вокруг оси  $OO'$ , которая отстоит от бесконечного проводника на расстоянии  $b$ . Какой заряд протечет по рамке, если ее сопротивление равно  $R$ ?

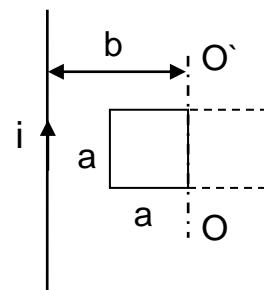


Рис. 6.8

**6.22.** На расстоянии  $a = 1$  м от длинного прямого проводника с током  $i = 10^3$  А расположено кольцо радиусом  $R = 1$  см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий кольцо, максимален. Чему равен заряд  $q$ , который протечет по кольцу, если ток в проводнике выключить? Сопротивление кольца  $r = 10$  Ом. Поле в пределах кольца считать однородным.

**6.23.** В магнитном поле, индукция которого изменяется по закону  $B = B_0[1 + \ln(\alpha t + 1)]$ , где  $B_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  Тл,  $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$ , находится плоский виток площадью  $S = 0,2 \text{ м}^2$  с сопротивлением  $R = 5$  Ом. Нормаль к плоскости витка  $\vec{n}$  составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с вектором индукции  $\vec{B}$ . Определить заряд, который пройдет через виток за первые  $t = 5$  с.

**6.24.** Стержень длиной  $L = 10$  см вращается относительно оси, проходящей через конец стержня, в магнитном поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл. Вращение происходит в плоскости, перпендикулярной индукции поля  $\vec{B}$ . При какой частоте вращения  $\omega$  на концах стержня возникнет разность потенциалов  $\Delta\phi = 0,2$  В?

**6.25.** Индукция неоднородного магнитного поля изменяется по закону  $B = B_0(1 + \alpha \cdot r)$ , где  $B_0 = 0,01$  Тл,  $\alpha = 1 \text{ м}^{-1}$ ,  $r$  - расстояние точки от оси вращения. В этом поле вращается в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси прямой проводник длиной  $L = 1$  м с постоянной угловой скоростью  $\omega = 50$  рад/с. Ось вращения проходит через один из концов проводника, силовые линии магнитного поля вертикальны. Определить э.д.с. индукции, возникающую в проводнике.

**6.26.** Стержень длиной  $a$  перемещается со скоростью  $v = 0,5$  м/с вдоль бесконечно длинного проводника, по которому течет ток  $i = 3$  А (рис.6.9). Ближний конец стержня находится на расстоянии  $a/2$  от проводника. Определить разность потенциалов на концах стержня.

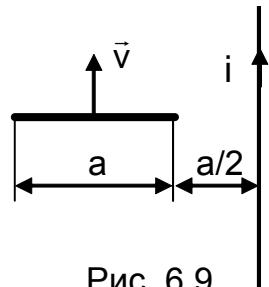


Рис. 6.9

**6.27.** Рамка, содержащая  $N = 1500$  витков площадью  $S = 50 \text{ см}^2$ , вращается в магнитном поле с индукцией  $B = 0,35$  Тл относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции. Частота вращения рамки

$v = 8$  Гц. Определить максимальную э.д.с. индукции  $\mathcal{E}_m$ , возникающую в рамке.

**6.28.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл равномерно вращается рамка, содержащая  $N = 1000$  витков. Площадь рамки  $S = 150$  см<sup>2</sup>. Рамка вращается с частотой  $n = 10$  об/с. Определить мгновенное значение э.д.с. индукции, соответствующее углу поворота рамки  $\alpha = 30^\circ$ . В начальный момент плоскость рамки перпендикулярна магнитным силовым линиям.

**6.29.** Рамка из провода сопротивлением  $R = 0,01$  Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,05$  Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Найти, какой заряд протечет через рамку за время поворота на  $\Delta\alpha = 30^\circ$ , если угол между плоскостью рамки и силовыми линиями меняется: 1) от  $\alpha_1 = 0^\circ$  до  $\alpha_2 = 30^\circ$ ; 2) от  $\alpha_1 = 60^\circ$  до  $\alpha_2 = 90^\circ$ .

**6.30.** Прямой бесконечный проводник, по которому течет ток, изменяющийся по закону  $i = \alpha t^2$ , где  $\alpha = 2$  А/с<sup>2</sup>, расположен перпендикулярно плоскости кругового контура радиусом  $R = 1$  м и проходит через его центр. Определить э.д.с. индукции, возникающей в контуре в момент времени  $t = 10$  с.

**6.31.** В катушке, индуктивность которой  $L = 10^{-2}$  Гн, с помощью реостата равномерно увеличивают силу тока по закону  $i = i_0 + \alpha \cdot t$  (А), где  $i_0 = \text{const}$ ,  $\alpha = 0,1$  А/с. Определить э.д.с. самоиндукции.

**6.32.** Сколько витков у катушки длиной  $l = 8$  см и диаметром  $D = 2,2$  см, если ее индуктивность составляет  $L = 0,25$  мГн? Сердечник катушки немагнитный.

**6.33.** Определить индуктивность единицы длины коаксиального кабеля (рис.6.10), состоящего из двух тонких проводников: внутреннего радиусом  $R_1$  и внешнего радиусом  $R_2$ . Силы тока в проводниках одинаковы и направлены в противоположные стороны.

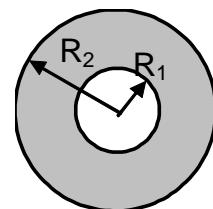


Рис. 6.10

**6.34.** Соленоид с индуктивностью  $L = 0,1$  Гн и сопротивлением  $R = 0,02$  Ом замыкается на источник с э.д.с.  $\mathcal{E}_0 = 2$  В, внутреннее сопротивление которого ничтожно мало (рис.6.11). Какой заряд пройдет через соленоид за первые пять секунд ( $t_1 = 5$  с) после замыкания?

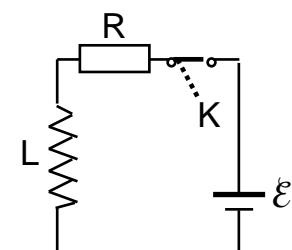


Рис. 6.11

**6.35.** Катушку сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  подключили к источнику тока. Через сколько времени сила тока достигнет  $0,9$  предельного значения?

**6.36.** Источник тока отключили (не разрывая цепи) от катушки индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$ . Определить время  $t$ , по истечении которого сила тока уменьшится до  $0,001$  первоначального значения.

**6.37.** Катушка индуктивностью  $L = 0,5 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$  подключена к источнику тока с внутренним сопротивлением  $r_i = 2 \text{ Ом}$ . В течение какого времени  $\Delta t$  ток в катушке, нарастаая, достигнет значения, отличающегося от максимального на  $1\%$ ?

**6.38.** Электрическая цепь состоит из катушки с индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и сопротивления  $R = 1 \text{ Ом}$ . Через сколько времени после замыкания цепи ток достигнет значения  $i = 0,5 \cdot i_0$ , где  $i_0$  - максимальное значение тока в этой цепи.

**6.39.** По электрической цепи с сопротивлением  $R = 0,5 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  идет ток  $i_0 = 2 \text{ А}$  (рис.6.12). Какое количество тепла выделится в этой цепи за первую секунду после отключения источника напряжения?

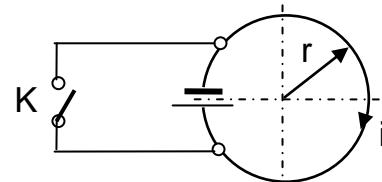


Рис. 6.12

**6.40.** В электрическую цепь с омическим сопротивлением  $R_1 = 6 \text{ Ом}$  включен соленоид с сопротивлением  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ . Определить индуктивность соленоида, если через время  $t = 0,001 \text{ с}$  после размыкания цепи ток уменьшился в три раза.

**6.41.** В магнитном поле, индукция которого изменяется по закону  $B = B_0 - \frac{\alpha}{2 \cdot S} t^2$ , где  $B_0 = 20 \text{ Тл}$ ,  $\alpha = 10^{-1} \text{ Тл} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ , расположенный плоский контур площадью  $S = 1 \text{ м}^2$ , сопротивлением  $R = 1 \text{ Ом}$ , индуктивностью  $L$ . Плоскость контура перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ . Определить ток в контуре в момент времени  $t = 5 \text{ с}$ , если при  $t = 0$  ток в контуре  $i = 0$ . Рассмотреть два случая:

- индуктивность  $L$  пренебрежимо мала;
- $L = 1 \text{ Гн}$ .

**6.42.** По витку проволоки течет ток  $i_1 = 10 \text{ А}$ . В цепь второго витка, расположенного рядом с первым, включен гальванометр. Полное сопротивление второй цепи  $R = 5 \text{ Ом}$ . Чему равна взаимная индукция  $L_{12}$  витков, если при выключении тока  $i_1$  через гальванометр проходит заряд  $q = 10^{-8} \text{ Кл}$ ?

**6.43.** По витку радиусом  $r = 1 \text{ м}$  и индуктивностью  $L = 10^{-4} \text{ Гн}$  идет постоянный ток  $i_0 = 6 \text{ А}$ . Определить, через сколько времени после

замыкания ключа плотность энергии магнитного поля в центре витка уменьшится в 10 раз. Сопротивление витка  $R = 0,01 \text{ Ом}$ .

**6.44.** Вычислить энергию магнитного поля внутри соленоида, содержащего  $N = 10^3$  витков с немагнитным сердечником. Сила тока в обмотке соленоида  $i = 1 \text{ А}$ , магнитный поток  $\Phi = 0,001 \text{ Вб}$ .

**6.45.** На стержень из немагнитного материала длиной  $L = 50 \text{ см}$  и сечением  $S = 2 \text{ см}^2$  намотан в один слой провод так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится по  $N = 20$  витков. Определить энергию  $W$  магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке  $i = 0,5 \text{ А}$ .

**6.46.** Индукция магнитного поля в вакууме  $B = 10^{-6} \text{ Тл}$ . Какова должна быть напряженность  $E$  электрического поля (в вакууме), чтобы объемная плотность энергии этого поля была равна объемной плотности энергии данного магнитного поля?

**6.47.** Вычислить объемную плотность энергии магнитного поля тороида, содержащего  $n = 10$  витков на каждый сантиметр длины, с немагнитным сердечником. Сила тока в обмотке тороида  $i = 2 \text{ А}$ .

**6.48.** В катушке, содержащей  $N = 400$  витков, намотанных на картонный цилиндр радиусом  $R = 2 \text{ см}$  и длиной  $L = 0,4 \text{ м}$ , сила тока изменяется по закону  $i = \alpha t (\text{А})$ , где  $\alpha = 0,2 \text{ А/с}$ . Определить энергию магнитного поля в конце десятой секунды и э.д.с. самоиндукции в катушке.

**6.49.** Определить объемную плотность энергии магнитного поля в центре витка радиусом  $R = 8 \text{ см}$ , по которому течет ток  $i = 3 \text{ А}$ .

**6.50.** По бесконечной прямой полой трубке радиусом  $R_1 = 1 \text{ см}$  идет ток  $i = 100 \text{ А}$ . Определить энергию магнитного поля, заключенного в цилиндре радиусом  $R_2 = 1 \text{ м}$  и длиной  $L = 1 \text{ м}$ , расположенного соосно с трубкой.

**6.51.** Определить энергию магнитного поля внутри бесконечного прямого сплошного цилиндрического медного проводника радиусом  $R = 0,03 \text{ м}$  на длине  $L = 1 \text{ м}$ . По проводнику течет постоянный ток плотностью  $j = 10^4 \text{ А/м}^2$ .

**6.52.** Определить энергию магнитного поля в пространстве между внутренним ( $R_1 = 5 \text{ мм}$ ) и внешним ( $R_2 = 8 \text{ мм}$ ) проводниками, приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля (рис.6.10). По кабелю идет ток  $i = 20 \text{ А}$ .

## 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### Основные понятия и законы

Основная задача в теории электромагнитных колебаний заключается в нахождении закона изменения во времени какой-либо электрической или магнитной физической величины. При исследовании электромагнитных колебаний в физическую систему обычно включают электромагнитное поле и тела в которых оно локализовано (проводники, катушки индуктивности, конденсаторы и т.д.). Электрические и магнитные колебания взаимосвязаны. Поэтому говорят об электромагнитных колебаниях.

В колебательном контуре (рис.7.1), содержащем последовательно соединенные конденсатор  $C$ , катушку индуктивностью  $L$ , активное сопротивление  $R$  и внешнюю переменную э.д.с.  $\mathcal{E}$ , зависящую от времени по гармоническому закону, возникают и поддерживаются электромагнитные колебания, дифференциальное уравнение которых имеет вид:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_m \cos \omega t \quad (7.1)$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$\ddot{q} + 2\beta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t, \quad (7.2)$$

где введены обозначения:

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (7.3)$$

Величину  $\omega_0$  называют собственной циклической частотой колебаний,  $\beta$  - коэффициентом затухания.

Если внешняя э.д.с.  $\mathcal{E} = 0$ , то колебания называют свободными. При  $R = 0$  они будут незатухающими, при  $R \neq 0$  - затухающими.

#### **Свободные незатухающие колебания.**

Наиболее простой тип колебаний - свободные незатухающие колебания. Дифференциальное уравнение этих колебаний - частный случай уравнения (7.2), когда  $\mathcal{E} = 0$  и  $R = 0$ :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (7.4)$$

Решением уравнения (7.4) является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (7.5)$$

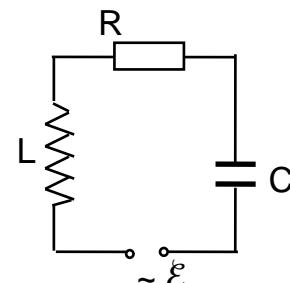


Рис. 7.1

где  $q_m$  - амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора,  $\omega_0$  - собственная частота колебаний,  $\alpha_0$  - начальная фаза. Значения  $q_m$  и  $\alpha_0$  определяются начальными условиями, в качестве которых можно взять, например, значения заряда  $q$  и тока  $i = \dot{q}$  в момент времени  $t = 0$ .

Так как собственная циклическая частота колебаний (7.3):  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то период свободных колебаний запишется

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) называется формулой Томсона.

### **Свободные затухающие колебания.**

Каждый реальный контур обладает активным омическим сопротивлением  $R \neq 0$  и энергия, запасенная в контуре, постепенно уменьшается. В этом случае свободные электромагнитные колебания будут затухающими.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний следует из (7.2) при  $\xi = 0$  и имеет вид:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (7.7)$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения (при  $\omega_0^2 > \beta^2$ ) запишется:

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (7.8)$$

где  $\omega$  - частота затухающих колебаний, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}; \quad (7.9)$$

$q_m$  и  $\alpha_0$  - постоянные, определяемые из начальных условий. Множитель  $(q_m e^{-\beta t})$  называют амплитудой затухающих колебаний. График функции, определяющей затухающие колебания, показан на рис.7.2.

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (7.10)$$

Зная закон изменения заряда  $q(t)$ , можно найти напряжение на конденсаторе и ток в контуре.

Напряжение на конденсаторе С:

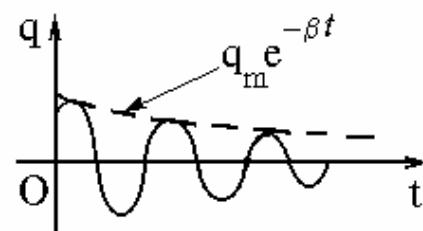


Рис. 7.2

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0).$$

Ток в контуре находим, как  $i = \dot{q}$ . После некоторых преобразований выражение для тока принимает вид:

$$i = \omega q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0 + \phi),$$

где сдвиг по фазе  $\phi$  может принимать значения от  $\pi/2$  до  $\pi$ , то есть при наличии сопротивления  $R$  ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\pi/2$ .

Затухание колебаний характеризуют следующие величины.

1) Коэффициент затухания  $\beta$ . Это величина, обратная времени релаксации  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $e$  раз.

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

2) Логарифмический декремент затухания  $\delta$  - натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период  $T$ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{q_m e^{-\beta t}}{q_m e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (7.11)$$

Логарифмический декремент затухания – величина обратная числу колебаний, совершенных за время релаксации  $\tau$ :

$$\delta = \frac{1}{N_e}.$$

3) Добротность  $Q$  колебательного контура:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e. \quad (7.12)$$

Чем меньше затухание, тем больше добротность контура  $Q$ .

Учитывая, что  $\beta = R/2L$ , получаем, что в случае малого затухания ( $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ) добротность контура равна

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Следует заметить, что согласно (7.9), электромагнитные колебания в контуре будут существовать при условии  $\omega_0^2 > \beta^2$ .

Если  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , то вместо колебаний в контуре будет происходить апериодический разряд конденсатора ( $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ). Активное сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют критическим

$$R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.13)$$

### **Вынужденные электромагнитные колебания.**

Рассмотрим случай, когда в контур включена внешняя переменная э.д.с.  $\mathcal{E}$ , зависящая от времени по гармоническому закону:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_B t .$$

Под действием э.д.с. такого типа в реальном колебательном контуре возникают установившиеся гармонические колебания с постоянной амплитудой. Электромагнитные колебания, обусловленные действием внешней э.д.с., называются вынужденными.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний (в случае последовательного соединения  $L$ ,  $C$ ,  $R$  и внешней э.д.с.) для заряда  $q$  на конденсаторе записывается в виде (7.2):

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t .$$

Частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания, можно представить в виде:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi); \quad (7.14)$$

где  $q_m$  - максимальное значение заряда на конденсаторе;  $\psi$  - разность фаз между колебаниями заряда и внешней э.д.с.  $\mathcal{E}$ ,  $\omega$  - циклическая частота внешней э.д.с.

В данном случае  $q_m$  и  $\psi$  не зависят от начальных условий и определяются только свойствами контура и вынуждающей э.д.с.  $\mathcal{E}$ , причем  $\psi > 0$ , поэтому колебания заряда  $q$  всегда отстают по фазе от внешней э.д.с.

Ток в контуре:

$$i = \dot{q} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

или:

$$i = i_m \cos(\omega t - \phi); \quad (7.15)$$

где  $i_m$  - амплитуда тока

$$i_m = \omega \cdot q_m ,$$

$\phi$  - сдвиг по фазе между током и внешней э.д.с.  $\mathcal{E}$ :

$$\phi = \psi - \pi/2 .$$

Для вычисления  $i_m$  и  $\phi$  поступим следующим образом. Найдем падение напряжения на сопротивлении  $U_R$ , емкости  $U_C$ , индуктивности  $U_L$

$$U_R = Ri = R i_m \cos(\omega t - \phi) ,$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \frac{i_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L i_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega L i_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Согласно закону Кирхгофа можно записать:

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Таким образом, сумма напряжений на индуктивности  $L$ , сопротивлении  $R$  и емкости  $C$  равна в каждый момент времени э.д.с.  $\mathcal{E}$ . Из последних соотношений следует, что  $U_R$  находится в фазе с током  $i$ ,  $U_C$  отстает по фазе от  $i$  на  $\pi/2$ ,  $U_L$  опережает  $i$  на  $\pi/2$ .

Все это можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы, как показано на рис.7.3.

Метод векторных диаграмм заключается в том, что на графике изображаются амплитуды напряжений

$$(U_R)_m = R \cdot i_m, (U_C)_m = \frac{i_m}{\omega C}, U_{Lm} = \omega L i_m$$

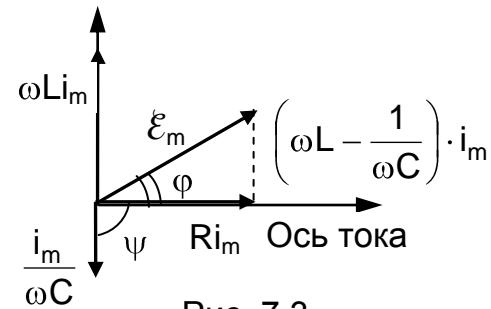


Рис. 7.3

и их векторная сумма, равная вектору величины  $\mathcal{E}_m$ . На векторной диаграмме каждое напряжение изображается в виде вектора, модуль которого равен его амплитуде, а угол, который он составляет с осью тока, соответствует сдвигу по фазе между этим напряжением и током. Из диаграммы можно получить следующие выражения для  $i_m$  и  $\varphi$ :

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad (7.16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7.17)$$

Метод векторных диаграмм оказывается весьма удобным при решении многих конкретных вопросов. Он позволяет наглядно, легко и быстро анализировать различные ситуации.

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

называется полным сопротивлением электрической цепи переменного тока, где  $R$  - омическое сопротивление.  $\omega L$  - индуктивное сопротивление,  $1/\omega C$  - емкостное сопротивление.

Явление резонанса - это возбуждение сильных колебаний (возрастание амплитуды) при частоте внешней э.д.с., равной или близкой к собственной частоте колебательного контура.

Графики зависимости амплитуд тока  $i$ , заряда  $q$  и напряжений  $U_R$ ,  $U_C$ ,  $U_L$  от частоты  $\omega$  внешней э.д.с. называются резонансными кривыми.

Резонансные кривые для силы тока  $i_m(\omega)$  показаны на рис.7.4. Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при условии  $\omega L - 1/\omega C = 0$ .

Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Максимум при резонансе оказывается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания  $\beta = R/2L$ .

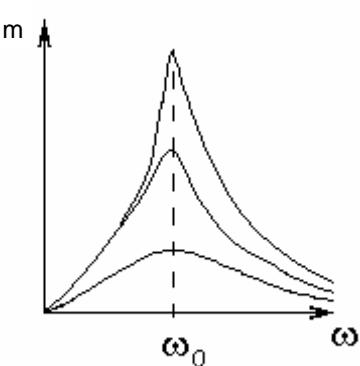


Рис. 7.4

### Примеры решения задач

**Задача 7.1.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 5 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивностью  $L = 0,2 \text{ Гн}$ . Определить максимальную силу тока  $i_m$  в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора  $U_m = 90 \text{ В}$ . Сопротивлением контура  $R$  пренебречь.

#### Решение

Рассмотрим два способа решения задачи. Первый из них основан на исследовании уравнения свободных электромагнитных колебаний, второй - на законе сохранения энергии.

#### Первый способ.

Так как  $R \approx 0$ , то  $\beta \approx 0$  и в контуре будут незатухающие колебания, при этом согласно (7.5):

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Сила тока есть производная от заряда по времени. Поэтому для силы тока в контуре выражение будет иметь вид

$$i = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Величина  $i_m = \omega_0 q_m$  является амплитудным, то есть максимальным значением тока в контуре. Учитывая, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad q_m = CU_m,$$

определим исковую величину

$$i_m = \omega_0 q_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C U_m = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} .$$

### Второй способ.

В процессе незатухающих электромагнитных колебаний полная электромагнитная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора  $W_e = \frac{CU_m^2}{2}$  и магнитного поля катушки  $W_M = \frac{Li^2}{2}$ , остается постоянной. При этом в те моменты, когда конденсатор максимально заряжен ( $U = U_m$ ), сила тока равна нулю, а полная энергия контура

$$W_e = \frac{CU_m^2}{2} .$$

В то время, когда конденсатор разряжен ( $U = 0$ ), сила тока достигает максимального значения  $i_m$ , а полная энергия контура

$$W_M = \frac{Li_m^2}{2} .$$

Приравняв правые части последних формул, найдем:

$$i_m = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} .$$

Произведем вычисление:

$$i_m = 90 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,2}} = 1,45 \text{ A.}$$

**Задача 7.2.** Разность потенциалов на конденсаторе идеального контура Томсона изменяется по закону  $U_C = 0,5 \sin(10^5 t + \pi/2)$  (все параметры заданы в единицах системы СИ). Определить максимальное значение э.д.с. самоиндукции, возникающей в контуре.

### Решение

Э.д.с. самоиндукции вычисляется по формуле (6.3)

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt} .$$

Учитывая, что  $i = -\frac{dq}{dt}$ ,  $q = CU$  или  $q = 0,5C \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)$ , найдем

закон изменения тока  $i$  в контуре

$$i = -C \frac{dU}{dt} = -C \cdot 0,5 \cdot 10^5 \cos\left(10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Тогда

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt} = -LC \cdot 0,5 \cdot 10^{10} \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

По условию задачи:  $U = U_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$ , то есть:  
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^5 \text{ с}^{-1}$ , следовательно  $LC = \frac{1}{10^{10}}$ .

Следовательно

$$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{10^{10}} \cdot 0,5 \cdot 10^{10} \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) = -0,5 \sin\left(10^5 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Максимальная э.д.с. самоиндукции  $\mathcal{E}_{s \max} = 0,5 \text{ В.}$

**Задача 7.3.** Колебательный контур содержит конденсатор С и катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L. Найти отношение энергии магнитного поля к энергии электрического поля в контуре в момент максимума тока.

### Решение

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний (7.7)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

можно записать через ток

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

В момент максимума тока  $\frac{di}{dt} = 0$ , следовательно

$$Ri = -\frac{q}{C} \quad \text{или} \quad i = -\frac{q}{RC}.$$

Энергия магнитного поля

$$W_M = \frac{Li^2}{2} = \frac{Lq^2}{2R^2C^2}.$$

Энергия электрического поля

$$W_E = \frac{q^2}{2C}.$$

Поэтому искомое отношение

$$\frac{W_M}{W_E} = \frac{L}{CR^2}.$$

**Задача 7.4.** Найти индукцию магнитного поля в катушке колебательного контура в момент времени  $t = 10^{-3} \text{ с}$ , если при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q_C = 10^{-5} \text{ Кл}$ , а начальный ток в контуре  $i_0 = 0$ . Емкость конденсатора  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ ; индуктивность катушки  $L = 10^{-2} \text{ Гн}$ ; число витков на единицу длины в катушке  $n = 10^4 \text{ 1/м}$ ; омическое

сопротивление контура  $R = 60 \text{ Ом}$ . Длину катушки считать много больше диаметра ее витков.

### Решение

Так как индукция магнитного поля в длинной катушке (4.12)

$$B = \mu_0 n i,$$

то необходимо определить ток в контуре.

Уравнение затухающих колебаний в контуре (7.8)

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Отсюда находим ток

$$i = -\frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t} [\beta \sin(\omega t + \alpha_0) - \omega \cos(\omega t + \alpha_0)].$$

Из условия задачи определяем параметры колебаний:

$$\beta = \frac{R}{2L} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7 \text{ с}^{-2};$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Учитывая начальные условия, находим  $q_0$  и  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\pi}{10};$$

$$q_0 = \frac{q_C}{\sin \alpha_0} \approx 3q_C = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Тогда индукция магнитного поля в катушке равна

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 n \frac{q_0}{\sin(\pi/10)} e^{-\beta t} \left[ \beta \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{10}\right) - \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{10}\right) \right].$$

Произведя вычисления, получим:  $B \approx 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$

**Задача 7.5.** Колебательный контур имеет емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и активное сопротивление  $R$ . Найти, через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в  $e$  раз.

### Решение

Амплитуда тока ( $i_m \sim e^{-\beta t}$ ) уменьшается в  $e$  раз за время  $\tau = 1/\beta$ . За это время совершится  $N_e$  колебаний:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1}.$$

Учитывая, что  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  и  $\beta = \frac{R}{2L}$ , получим

$$N_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}.$$

**Задача 7.6.** Найти время, за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью  $Q$  уменьшится в  $n$  раз, если частота затухающих колебаний равна  $\omega$ .

### Решение

Так как

$$\frac{i_{m1}}{i_{m2}} = \frac{i_0 e^{-\beta t}}{i_0 e^{-\beta(t+t_0)}} = n,$$

то получаем

$$n = e^{\beta t_0}.$$

Отсюда время  $t_0$ , за которое амплитуда уменьшится в  $n$  раз:

$$t_0 = \frac{\ln(n)}{\beta}.$$

Для определения коэффициента затухания  $\beta$  запишем формулу для добротности контура (7.12)

$$Q = \frac{\pi}{\delta}.$$

Учитывая, что, согласно (7.11),  $\delta = \beta T$ , а также  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , получаем

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{\omega}{2Q}.$$

Подставляя  $\beta$  в выражение для  $t_0$ , находим

$$t_0 = \frac{2Q}{\omega} \ln(n).$$

**Задача 7.7.** Колебательный контур имеет емкость  $C = 1,3 \cdot 10^{-9}$  Ф и индуктивность  $L = 5 \cdot 10^{-3}$  Гн. Логарифмический декремент затухания  $\delta = 0,005$ . Через сколько времени  $\tau$  энергия в контуре уменьшится в 10 раз?

### Решение

Энергия в колебательном контуре пропорциональна  $U^2$  (или  $q^2$ , или  $i^2$ ), следовательно,  $W \sim e^{-2\beta t}$ .

По условию

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{e^{-2\beta t_1}}{e^{-2\beta(t_1+\tau)}} = 10$$

Отсюда

$$e^{+2\beta\tau} = 10, \quad \tau = \frac{\ln 10}{2\beta} = \frac{2,3}{2\beta}.$$

Логарифмический декремент затухания (7.11)

$$\delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Находим  $\beta$  из последнего соотношения

$$\beta = \frac{\omega_0 \delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Тогда искомое время

$$\tau = \frac{2,3}{2 \frac{\omega_0 \delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}} = \frac{2,3 \sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}{2\omega_0 \delta}.$$

Произведем вычисления

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,3 \cdot 10^{-9}}} \approx 3,9 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$$

$$\tau = \frac{2,3 \sqrt{4 \cdot 3,14^2 + 25 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

**Задача 7.8.** Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных конденсатора и активного сопротивления  $R$ , подключили к внешнему переменному напряжению с амплитудой  $U_m$ . При этом амплитуда установившегося тока оказалась равной  $i_m$ . Найти разность фаз между током и внешним напряжением.

### Решение

Запишем законы изменения внешнего напряжения и тока (7.15) в цепи

$$U = U_m \cos \omega t,$$

$$I = i_m \cos(\omega t - \phi).$$

Где сдвиг фаз  $\phi$  определяется по формуле (7.17)

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Так как по условию задачи индуктивность контура  $L = 0$ , то

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\omega CR}.$$

Изобразим амплитуды напряжений на конденсаторе и сопротивлении с помощью векторной диаграммы, как показано на рис.7.5. Значение

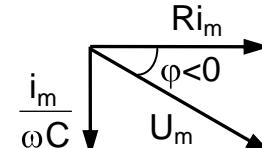


Рис. 7.5

величины  $(1/\omega C)$  найдем из выражения для амплитуды тока (7.16)

$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Получаем

$$\frac{1}{\omega C} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{i_m}\right)^2 - R^2}.$$

Следовательно, разность фаз между током и напряжением равна:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\sqrt{\left(\frac{U_m}{R i_m}\right)^2 - 1}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \left( -\sqrt{\left(\frac{U_m}{R i_m}\right)^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

В нашем случае  $\varphi < 0$ , то есть ток опережает по фазе внешнее напряжение.

**Задача 7.9.** Сопротивление  $R = 10$  Ом и катушка с индуктивностью  $L = 0,1$  Гн соединены последовательно. Какую емкость необходимо включить последовательно в цепь, чтобы уменьшить сдвиг фазы между э.д.с. и силой тока на  $\Delta\varphi = 27^\circ$ ? Частота изменения э.д.с.  $v = 50$  Гц.

### Решение

Используя метод векторных диаграмм (рис. 7.6), получаем, что до включения конденсатора в цепь сдвиг фаз был равен:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L i_m}{R i_m} = \frac{\omega L}{R}.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

По условию задачи  $\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta\varphi$ .

Сдвиг фаз после подключения конденсатора равен

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

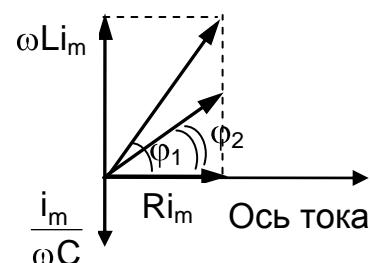


Рис. 7.6

Учитывая, что  $\omega = 2\pi v$ , определяем неизвестную емкость  $C$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu(2\pi\nu L - R \operatorname{tg}\phi_2)} .$$

Произведем вычисления:

$$\phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-1}}{10} \approx 72^\circ;$$

$$\phi_2 = 72^\circ - 27^\circ = 45^\circ.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg}\phi_2 = 1$  и величина емкости

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 50(2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-1} - 10)} = 1,5 \cdot 10^{-4} \Phi.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**7.10.** Определить заряд на пластинах плоского конденсатора в идеальном контуре Томсона в момент времени  $t = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-3}$  с, если при  $t = 0$  заряд  $q_0 = 10^{-2}$  Кл, ток в контуре  $i_0 = 0$ , а дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний имеет вид:  $\ddot{q} + 10^6 q = 0$

**7.11.** Найти максимальную плотность энергии магнитного поля внутри катушки (без сердечника) идеального контура Томсона, если дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в контуре имеет вид  $\ddot{q} + 10^8 q = 0$ . Конденсатор емкостью  $C = 10^{-6}$  Ф был заряжен до разности потенциалов  $\Delta\phi_0 = 100$  В, а начальный ток в контуре был равен нулю. Число витков катушки контура на единицу ее длины  $n = 10^3$  1/м.

**7.12.** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в идеальном контуре Томсона имеет вид  $\ddot{q} + 10^8 q = 0$ . Определить магнитный поток, пронизывающий катушку контура в момент времени  $t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-4}$  с, если при  $t = 0$  магнитный поток сквозь катушку равен нулю, а заряд на конденсаторе  $q_0 = 10^{-6}$  Кл. Емкость конденсатора  $C = 10^{-6}$  Ф.

**7.13.** Чему равно отношение энергии магнитного поля  $W_M$  колебательного контура Томсона к энергии его электрического поля  $W_e$  в момент времени  $t = T/8$  от начала разряда конденсатора?

**7.14.** Конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ, заряженный до напряжения  $U_0 = 100$  В, разряжается через катушку с индуктивностью  $L = 1$  мГн. Каково максимальное значение тока  $i_m$  в катушке? В какой момент времени достигается это значение?

**7.15.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 1$  мГн и конденсатора емкостью  $C = 10$  мкФ. Конденсатор заряжен до максимального напряжения  $U_0 = 100$  В. Определить максимальный

заряд конденсатора и максимальную силу тока в контуре. Записать уравнение мгновенного значения силы тока.

**7.16.** В колебательном контуре с индуктивностью  $L = 0,4 \text{ Гн}$  и емкостью  $C = 20 \text{ мкФ}$  амплитудное значение силы тока равно  $i_m = 0,1 \text{ А}$ . Каким будет напряжение на конденсаторе в момент, когда энергии электрического и магнитного полей будут равны?

**7.17.** В идеальном колебательном контуре максимальный заряд конденсатора составляет  $q_m = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ , а максимальная сила тока в контуре  $i_m = 1 \text{ А}$ . Какова емкость конденсатора, если индуктивность контура  $L = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$ ? Какова энергия электрического поля конденсатора в момент времени, когда энергия магнитного поля составляет  $\frac{3}{4}$  от ее максимального значения?

**7.18.** В колебательном контуре (рис.7.7), состоящем из конденсатора емкости  $C$  и катушки с индуктивностью  $L$ , при разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения  $U_0$ . Затем в момент времени  $t = 0$  замкнули ключ. Считая омическое сопротивление пренебрежимо малым, найти э.д.с. самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора равна энергии тока в катушке.

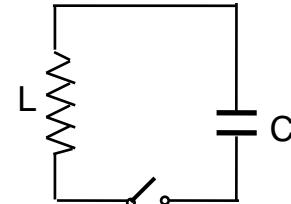


Рис. 7.7

**7.19.** Определить напряженность магнитного поля внутри катушки идеального контура Томсона в момент времени  $t = \frac{\pi}{6} \cdot 10^{-4} \text{ с}$ , если при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q_0 = 10^{-5} \text{ Кл}$ , ток в контуре  $i_0 = 0$ . Индуктивность катушки  $L = 10^{-3} \text{ Гн}$ , число витков на 1 м длины катушки  $n = 10^3 \text{ 1/м}$ , емкость конденсатора  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ . Считать, что длина катушки много больше диаметра витков.

**7.20.** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в колебательном контуре имеет вид  $\ddot{q} + 6 \cdot 10^3 \dot{q} + 10^8 q = 0$  (записано в системе СИ). Определить логарифмический декремент затухания.

**7.21.** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в контуре имеет вид:  $\ddot{q} + 1,4 \cdot 10^5 \dot{q} + 10^{10} q = 0$  (записано в системе СИ). Омическое сопротивление контура  $R = 14 \text{ Ом}$ . Найти разность потенциалов на конденсаторе контура в момент времени  $t = 10^{-5} \text{ с}$ , если при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q_0 = 10^{-4} \text{ Кл}$ , а ток в контуре  $i_0 = 0$ .

**7.22.** Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью  $L = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$  и конденсатора емкостью  $C = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ . Активное сопротивление контура  $R = 10 \text{ Ом}$ . Найти отношение энергии

магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

**7.23.** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в реальном колебательном контуре имеет вид  $\ddot{q} + 5 \cdot 10^5 \dot{q} + 10^{12} q = 0$  (записано в системе СИ). Найти отношение энергии магнитного поля к энергии электрического поля в контуре в момент максимума тока.

**7.24.** В колебательном контуре конденсатору сообщили заряд  $q = 1 \text{ мКл}$ , после чего в контуре возникли затухающие электромагнитные колебания. Какое количество теплоты выделится к моменту, когда максимальное напряжение на конденсаторе станет меньше начального максимального напряжения в четыре раза? Емкость конденсатора  $C = 10 \text{ мкФ}$ .

**7.25.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 48 \text{ мкФ}$  катушки с индуктивностью  $L = 24 \text{ мГн}$  и активным сопротивлением  $R = 20 \Omega$ . Определить частоту свободных электромагнитных колебаний в этом контуре. На сколько изменится частота электромагнитных колебаний в контуре, если пренебречь активным сопротивлением катушки?

**7.26.** Частота свободных колебаний в контуре равна  $v = 250 \text{ кГц}$ . Определить емкость в контуре, если индуктивность в нем равна  $L = 0,024 \text{ мГн}$  и активное сопротивление  $R = 34 \Omega$ .

**7.27.** Какое сопротивление надо включить в идеальный колебательный контур, чтобы изменить частоту колебаний в нем на  $0,1\%$ ? Увеличится или уменьшится частота колебаний?

**7.28.** Колебательный контур состоит из последовательно соединенных катушки с индуктивностью  $L = 40 \text{ мГн}$ , резистора сопротивлением  $R = 3 \Omega$  и конденсатора емкостью  $C = 4,8 \text{ мкФ}$ . Определить частоту колебаний. Через какое время начальная амплитуда колебаний заряда уменьшится в два раза?

**7.29.** Колебательный контур состоит из последовательно соединенных катушки с индуктивностью  $L = 50 \text{ мГн}$ , резистора сопротивлением  $R = 2 \Omega$  и конденсатора. Через какое время энергия электрического поля в конденсаторе уменьшится до половины начального значения?

**7.30.** Во сколько раз уменьшится энергия контура за первую секунду, если омическое сопротивление контура  $R = 0,6 \Omega$ , а индуктивность  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ?

**7.31.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 0,5 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$ . Чему равно сопротивление контура  $R$ , если амплитуда колебаний в нем за время  $\tau = 0,05 \text{ с}$  уменьшается в 2,7 раза? При каком омическом сопротивлении  $R_{kp}$  произойдет апериодический разряд конденсатора?

**7.32.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 1,5 \cdot 10^{-9} \Phi$ , катушки индуктивностью  $L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$  и активного сопротивления  $R$ . Через сколько времени после начала колебаний энергия в контуре уменьшится в  $e$  раз, если логарифмический декремент затухания  $\delta = 0,005$ ?

**7.33.** Найти логарифмический декремент затухания в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью  $C = 0,2 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивностью  $L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ , если разность потенциалов на обкладках конденсатора за время  $t = 10^{-3} \text{ с}$  уменьшается в три раза. Чему равно омическое сопротивление  $R$  контура?

**7.34.** Конденсатор емкостью  $C = 0,025 \text{ мкФ}$ , заряженный до разности потенциалов  $U_m = 20 \text{ В}$ , разряжается через проводник с индуктивностью  $L = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ . Активное сопротивление цепи  $R = 1 \text{ Ом}$ . Определить угловую частоту колебаний  $\omega$ , логарифмический декремент затухания  $\delta$  и максимальное значение силы тока  $i_m$ .

**7.35.** В колебательном контуре, собственная частота колебаний в котором  $\omega_0 = 34,5 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ , возбуждаются затухающие колебания. Найти добротность контура, если известно, что за время  $t = 10^{-3} \text{ с}$  энергия, запасенная в контуре, уменьшится в  $\eta = 2$  раза.

**7.36.** Параметры некоторого колебательного контура имеют значения:  $C = 4 \text{ мкФ}$ ,  $L = 10^{-4} \text{ Гн}$ ,  $R = 1 \text{ Ом}$ . Чему равна добротность контура  $Q$ ? Какая относительная ошибка будет сделана, если вычислить добротность контура по приближенной формуле  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ?

**7.37.** Добротность некоторого колебательного контура  $Q = 10$ . Определить, на сколько процентов отличается частота свободных колебаний контура  $\omega$  от собственной частоты  $\omega_0$ ?

**7.38.** В цепь 50-периодного тока ( $v = 50 \text{ Гц}$ ) последовательно включены реостат с сопротивлением  $R = 3 \cdot 10^3 \text{ Ом}$  и конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$ . Определить, пользуясь методом векторных диаграмм, сдвиг фазы между силой тока и э.д.с.

**7.39.** Конденсатор емкостью  $C = 0,2 \text{ мкФ}$  и активное сопротивление  $R = 4,7 \text{ кОм}$  подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудой  $U_m = 170 \text{ В}$  и частотой  $v = 60 \text{ Гц}$ . Определить сдвиг фаз между напряжением и током. Чему равно амплитудное значение силы тока в цепи?

**7.40.** Катушка индуктивностью  $L = 50 \text{ мГн}$  с активным сопротивлением  $R = 65 \text{ Ом}$  подключена к внешней переменной э.д.с. с амплитудой  $\varepsilon_m = 120 \text{ В}$  и частотой  $v = 60 \text{ Гц}$ . Определить сдвиг фаз между током и э.д.с. Чему равно амплитудное значение силы тока в цепи?

**7.41.** Катушка индуктивностью  $L = 12 \text{ мГн}$ , конденсатор емкостью  $C = 30 \text{ мкФ}$  и активное сопротивление  $R = 20 \text{ Ом}$  подключены к внешней переменной э.д.с., изменяющейся по закону  $\varepsilon = 8,1 \sin 754t [\text{В}]$ . Определить а) полное сопротивление цепи, б) сдвиг фаз между током и э.д.с., в) амплитудное значение силы тока.

**7.42.** Катушка индуктивностью  $L = 35 \text{ мГн}$  с активным сопротивлением  $R = 2 \text{ Ом}$  соединена последовательно с конденсатором емкостью  $C$  и источником напряжения частотой  $v = 360 \text{ Гц}$ . Какую емкость должен иметь конденсатор, чтобы напряжение и сила тока в цепи совпадали по фазе? Чему в этом случае равно полное сопротивление цепи?

**7.43.** Конденсатор емкостью  $C = 1200 \text{ пФ}$ , катушка индуктивностью  $L = 16 \text{ мкГн}$  и активное сопротивление  $R = 2 \text{ Ом}$  подключены к внешней переменной э.д.с., амплитудное значение которой  $\mathcal{E}_m = 12 \text{ В}$ . Чему равна резонансная частота для тока в контуре? Определить амплитудное значение силы тока в цепи при резонансе, а также амплитудные значения напряжения на конденсаторе и катушке.

**7.44.** Катушка индуктивностью  $L = 2,15 \text{ мГн}$  с активным сопротивлением  $R = 120 \text{ Ом}$  соединена последовательно с конденсатором  $C$  и внешней переменной э.д.с., амплитудное значение которой  $\mathcal{E}_m = 136 \text{ В}$ . Какой должна быть емкость конденсатора, чтобы резонансная частота для тока в контуре составила  $v_{рез} = 33 \text{ кГц}$ ? Чему равна максимальная сила тока при резонансе?

**7.45.** Катушка индуктивностью  $L = 2,15 \text{ мГн}$  с активным сопротивлением  $R = 120 \text{ Ом}$  соединена последовательно с конденсатором  $C$  и внешней переменной э.д.с., амплитудное значение которой  $\mathcal{E}_m = 136 \text{ В}$ . Емкость конденсатора выбрана такой, что резонансная частота для токов в контуре вдвое превышает частоту приложенного напряжения  $v = 33 \text{ кГц}$ . Чему равно амплитудное значение силы тока в контуре?

**7.46.** В цепь переменного тока (частота переменного питающего напряжения  $v = 50 \text{ Гц}$ ) последовательно включены катушка индуктивностью  $L$ , конденсатор емкостью  $C$  и активное сопротивление  $R$ . Параллельно катушке и конденсатору подключен вольтметр, который показывает ноль при значении емкости конденсатора  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Найти значение индуктивности  $L$  катушки.

## 8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### Основные понятия и законы

Уравнения Максвелла в интегральной форме являются обобщением основных законов электродинамики. С их помощью можно найти напряженность и индукцию электрического и магнитного полей для любых точек пространства и любого момента времени; уравнения справедливы для поверхностей и контуров любой формы. Уравнения Максвелла могут быть положены в основу истолкования различных электромагнитных явлений. Они полностью описывают электромагнитное поле.

Теория Максвелла рассматривает электромагнитное поле, как неразрывную связь электрического и магнитного полей, которые могут превращаться друг в друга и распространяться в пространстве.

*Первое уравнение Максвелла* является обобщением закона электромагнитной индукции. Из закона электромагнитной индукции Фарадея следует, что переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля (с замкнутыми силовыми линиями)

Закон электромагнитной индукции Фарадея  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  может быть записан в обобщенном виде. Учитывая, что магнитный поток  $\Phi$  и ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  могут быть записаны в виде

$$\Phi = \int_S B_n dS \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_i = \oint_L E_L dL \quad (8.1)$$

получаем:

$$\oint_L E_L dL = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (8.2)$$

или в векторном виде:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (8.3)$$

*Физический смысл первого уравнения* заключается в том, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющееся во времени магнитное поле. Максвелл показал, что переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля в пространстве независимо от наличия контура.

*Второе уравнение Максвелла* является обобщением теоремы о циркуляции вектора напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля по замкнутому контуру или закона полного тока.

Согласно Максвеллу, источником вихревого магнитного поля могут быть не только движущиеся электрические заряды, но и

изменяющееся во времени электрическое поле, условно названное *током смещения*

$$\vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8.4)$$

где  $\vec{D}$  - вектор электрического смещения.

Ток смещения может создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Если в проводнике имеется переменный ток (т.е. ускоренно движущиеся электрические заряды), то внутри проводника существует и ток проводимости, и ток смещения. Магнитное поле определяется их суммой, т.е. полным током, плотность которого

$$\vec{j}_{full} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{cm}, \quad (8.5)$$

где  $\vec{j}_{np}$  плотность тока проводимости,  $\vec{j}_{cm}$  - плотность тока смещения.

Теорема о циркуляции с использованием понятия полного тока будет иметь вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \sum_{\text{линии}} (i_{np} + i_{cm}), \quad (8.6)$$

где токи проводимости и смещения соответственно равны

$$\sum i_{np} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S}, \quad \sum i_{cm} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (8.7)$$

Второе уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \int_S (\vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}, \quad (8.8)$$

или в скалярном виде

$$\oint_L H_L dL = \int_S \left( j_{np} + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS. \quad (8.9)$$

*Физический смысл второго уравнения* заключается в том, что источником вихревого магнитного поля могут быть не только движущиеся электрические заряды, но и изменяющееся во времени электрическое поле.

Из первого и второго уравнений Максвелла вытекает важнейший вывод: переменное электрическое и переменное магнитное поле не могут существовать отдельно. Они всегда существуют вместе, образуя единое электромагнитное поле.

*Третье уравнение системы уравнений Максвелла* - это теорема Гаусса для потока вектора электрического смещения (или электрической индукции)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad \text{или} \quad \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV, \quad (8.10)$$

где  $\rho$  - объемная плотность свободных (сторонних) электрических зарядов.

Для расчета напряженности электрического поля используется теорема Гаусса в виде:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}. \quad (8.11)$$

*Четвертое уравнение Максвелла* - это теорема Гаусса для потока вектора магнитной индукции (оно указывает на отсутствие магнитных зарядов)

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \text{ или } \oint_S B_n dS = 0. \quad (8.12)$$

*Пятое и шестое уравнения* выражают для изотропных сред связь векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (8.13)$$

*Седьмым уравнением* является закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j}_{np} = \gamma \vec{E}, \quad (8.14)$$

где  $\gamma$  - удельная электрическая проводимость среды.

Из уравнений Максвелла следует существование электромагнитных волн. Электромагнитной волной называется распространяющееся в пространстве электромагнитное поле, характеризуемое в каждой точке периодическим изменением вектора напряженности электрического и магнитного полей.

Изменение во времени магнитного поля ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ) вызывает появление вихревого электрического поля, а изменение во времени электрического поля ( $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ) возбуждает вихревое магнитное поле. За счет непрерывного взаимопревращения электромагнитное возмущение будет распространяться в пространстве.

В электромагнитной волне, распространяющейся со скоростью  $v$ , векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  всегда колеблются в одинаковых фазах, причем между мгновенными значениями  $E$  и  $B$  в любой точке существует определенная связь, а именно  $E = vB$ , или

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H. \quad (8.15)$$

Это означает, что  $E$  и  $H$  (или  $B$ ) одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т.д.

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему (рис.8.1).

Итак, если в какой-либо точке

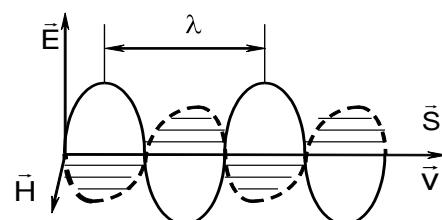


Рис.8.1

пространства создано изменяющееся во времени электромагнитное поле, то оно не будет локализовано только в этой точке, а будет распространяться в виде электромагнитной волны.

Для решения задач мы ограничимся простым видом электромагнитного поля, когда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (или  $\vec{B}$ ) зависят только от одной координаты (например,  $x$ ) и от времени  $t$ . Это - случай плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ . Тогда, волновые уравнения для  $E$  и  $H$  записываются в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (8.16)$$

Скорость  $v$  распространения электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (8.17)$$

где  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с - скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

Решения волновых уравнений (8.16) для  $E$  и  $H$  имеют вид:

$$E = E_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{v})); \quad H = H_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{v})), \quad (8.18)$$

или:

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx); \quad H = H_0 \sin(\omega t - kx), \quad (8.19)$$

где  $\omega$  - угловая частота,  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число.

**Электромагнитные волны переносят энергию.** Для характеристики переноса энергии волной введена величина - вектор Пойнтинга  $\vec{S}$ . Вектор  $\vec{S}$  характеризует плотность потока электромагнитной энергии, т.е. энергию, переносимую электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]. \quad (8.20)$$

Мгновенное значение модуля вектора  $\vec{S}$ :

$$S = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx). \quad (8.21)$$

На практике обычно измеряют среднюю по времени энергию, переносимую волной. Среднее значение модуля вектора Пойнтинга равно

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0, \quad (8.22)$$

так как среднее значение по времени (за период)  $\langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$ .

Учитывая формулу (8.15), среднее значение вектора Пойнтинга

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot \mathbf{E}_0^2. \quad (8.23)$$

Таким образом, средняя энергия, переносимая электромагнитной волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, прямо пропорциональна квадрату ее амплитуды. По существу,  $\langle S \rangle$  является *интенсивностью волны*.

Вектор Пойнтинга  $\vec{S}$  связан с объемной плотностью энергии электромагнитного поля в волне  $w$  соотношением

$$\vec{S} = w \cdot \vec{v}, \quad (8.24)$$

где объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного полей:

$$w = w_{\text{эл}} + w_m = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (8.25)$$

Электромагнитная волна, падающая на какое-либо тело с коэффициентом отражения  $r$ , оказывает на него давление

$$p = (1+r)w. \quad (8.26)$$

Для абсолютно поглощающей поверхности ( $r = 0$ )

$$p = w; \quad (8.27)$$

для абсолютно отражающей поверхности ( $r = 1$ )

$$p = 2w. \quad (8.28)$$

### Примеры решения задач

**Задача 8.1.** Плоская электромагнитная волна с частотой  $v$  распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью  $\gamma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

#### Решение

Пусть напряженность электрического поля в электромагнитной волне изменяется со временем по закону

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx) = E_0 \cos(2\pi v t - kx),$$

тогда плотность тока смещения равна

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \epsilon E_0 \cos(2\pi v t - kx)] = -\epsilon_0 \epsilon E_0 2\pi v \sin(2\pi v t - kx);$$

где амплитуда тока смещения  $j_{0\text{см}} = \epsilon_0 \epsilon E_0 2\pi v$ .

По закону Ома

$$j_{\text{пр}} = \gamma E = \gamma E_0 \cos(2\pi\nu t - kx),$$

где амплитуда тока проводимости  $j_{0\text{пр}} = \gamma E_0$ .

Следовательно, отношение амплитуд плотностей токов равно:

$$\frac{j_{0\text{пр}}}{j_{0\text{см}}} = \frac{\gamma E_0}{2\pi\nu\varepsilon_0 E_0} = \frac{\gamma}{2\pi\nu\varepsilon_0}.$$

**Задача 8.2.** Ток, текущий по длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого  $R$ , меняют так, что индукция магнитного поля внутри соленоида возрастает со временем по закону  $B = \beta t^2$ , где  $\beta$  - постоянная. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида.

### Решение

Чтобы определить плотность тока смещения  $j_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  надо найти напряженность электрического поля, которое в данном случае будет вихревым, так как магнитное поле меняется со временем. Воспользуемся первым уравнением Максвелла для циркуляции вектора  $\vec{E}$ :

$$\oint \vec{E} d\vec{L} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Для  $r < R$ :

$$2\pi r E = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \pi r^2 2\beta t, \text{ откуда: } E = \beta r t.$$

Для  $r > R$ :

$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \pi R^2 2\beta t, \text{ откуда: } E = \frac{R^2 \beta t}{r}.$$

Учитывая, что:  $j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ , найдем

плотность тока смещения:

$$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta r \quad (\text{для } r < R);$$

$$j_{\text{см}} = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r} \quad (\text{для } r > R).$$

График зависимости  $j_{\text{см}}(r)$  показан на рис.8.2.

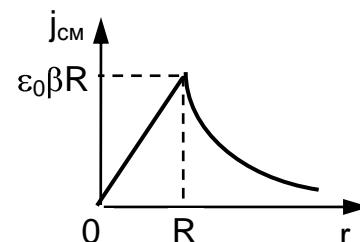


Рис. 8.2

**Задача 8.3.** Найти амплитуду плотности тока смещения, возникающего в плоском конденсаторе, образованном двумя проводящими дисками радиусом  $R$ , если расстояние между дисками  $d = 1$  см ( $d \ll R$ ) и напряжение на конденсаторе меняется по закону  $U = U_0 \sin \omega t$ , где  $U_0 = 10^3$  В,  $\omega = 2\pi \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

### Решение

Электрическое поле  $\vec{E}$  между пластинами конденсатора однородно. Силовые линии магнитного поля  $\vec{H}$  - окружности с центрами на оси симметрии. Рассмотрим в качестве контура такую окружность радиусом  $r$  в плоскости между пластинами конденсатора.

Воспользуемся вторым уравнением Максвелла для циркуляции вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , учитывая, что токи проводимости в данной задаче отсутствуют.

Имеем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = H L = H \cdot 2\pi r = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Интеграл в правой части уравнения будем вычислять в предположении, что поле  $\vec{E}$  вне конденсатора пренебрежимо мало. Тогда, при  $r < R$ :

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2.$$

Так как:

$$H 2\pi r = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2,$$

то

$$H = \frac{\partial D}{\partial t} \frac{r}{2}.$$

При  $r \geq R$ :

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial D}{\partial t} \pi R^2 = H \cdot 2\pi r,$$

откуда

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial t} \frac{R^2}{r};$$

Найдем максимальное значение тока смещения:

$$j_{cm} = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Так как

$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d} = \epsilon_0 \frac{U_0 \sin \omega t}{d},$$

то

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 U_0}{d} \omega \cos \omega t.$$

Максимальное значение тока смещения

$$(j_{cm})_{max} = \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{max} = \frac{\epsilon_0 U_0 \omega}{d} = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{A}{m^2}.$$

Это весьма слабый ток, и обнаружить создаваемое им магнитное поле не просто, поэтому во многих случаях можно пренебречь током смещения. Однако этот ток зависит линейно от частоты, и при достаточно больших частотах его учет становится необходимым.

**Задача 8.4.** Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабопроводящей средой с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . В момент  $t = 0$  внутренней сфере сообщили некоторый заряд. Найти ток смещения через произвольную замкнутую поверхность, расположенную целиком в среде и охватывающую внутреннюю сферу, если заряд этой сферы в данный момент равен  $q$ .

### Решение

В пространстве между сферами возникает ток смещения  $i_{cm}$ :

$$i_{cm} = \oint_S \vec{j}_{cm} d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{D} d\vec{S}.$$

По теореме Гаусса  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i = q$ .

Следовательно, ток смещения равен току проводимости:

$$i_{cm} = \frac{dq}{dt} = i_{np},$$

где  $i_{np}$  - ток проводимости,  $S$  - произвольная замкнутая поверхность, расположенная между внешней и внутренней сферами. Таким образом, доказано, что ток смещения равен току проводимости.

$$i_{np} = \oint_S \vec{j}_{np} d\vec{S} = \oint_S \frac{1}{\rho} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\rho \epsilon_0} q,$$

где учтено, что по закону Ома:  $\vec{j}_{np} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ ,

а по теореме Гаусса:  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

Следовательно, ток смещения:

$$i_{cm} = \frac{1}{\rho \epsilon_0} q.$$

**Задача 8.5.** Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиусом  $R = 6$  см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частотой  $\omega = 10^3$  1/с. Найти отношение максимальных значений энергии магнитного поля и электрического поля внутри конденсатора.

### Решение

Пусть напряжение на конденсаторе меняется по закону  $U = U_m \cos \omega t$  и расстояние между пластинами конденсатора  $h$ . Тогда электрическая энергия конденсатора

$$W_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot V = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \pi R^2 h = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{2h} U_m^2 \cos^2 \omega t.$$

(так как  $E = \frac{U_m \cos \omega t}{h}$ ).

Магнитная энергия определяется по формуле

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV.$$

Индукцию магнитного поля  $B$  найдем из теоремы о циркуляции вектора  $\vec{H}$  по контуру произвольным радиусом  $r$ :

$$\oint_L H_L dL = H \cdot 2\pi r = j_{cm} \cdot S_r = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2,$$

отсюда

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial t} r.$$

Так как  $H = \frac{B}{\mu_0}$ ,  $E = \frac{U}{h} = \frac{U_m \cos \omega t}{h}$ , то  $\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = -\frac{\epsilon_0 U_m}{h} \omega \sin \omega t$ .

Тогда  $|B| = \mu_0 H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \frac{r \omega U_m}{h} \sin \omega t$ .

В качестве объема  $dV$  надо взять элементарный объем цилиндра, для которого  $dV = 2\pi r dr \cdot h$ .

Тогда

$$W_m = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{\pi}{16} \frac{\epsilon_0^2 \mu_0 \omega^2 R^4 U_m^2}{h} \sin^2 \omega t.$$

Отношение максимальных значений энергии магнитного поля и энергии электрического поля:

$$\frac{W_{m,max}}{W_{e,max}} = \frac{1}{8} \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 = 5 \cdot 10^{-15}.$$

**Задача 8.6.** Напишите уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ в однородной среде ( $\epsilon = 4$ ;  $\mu = 1$ ), если при  $t = 0$  и  $x = 0$  напряженность ее электрического поля  $E = 5$  В/м. Амплитуда волны  $E_0 = 5$  В/м, длина волны  $\lambda = 1$  м.

### Решение

Запишем уравнение волны (с учетом начальной фазы  $\alpha$ )

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Для того, чтобы записать конкретный вид этого уравнения, необходимо определить угловую частоту  $\omega$ , волновое число  $k$  и начальную фазу  $\alpha$ .

Волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ; скорость волны  $v = \frac{\omega}{k}$ .

Учитывая, что скорость  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ ,

(где  $c$  - скорость электромагнитной волны в вакууме) получаем выражение для угловой частоты и ее численное значение

$$\omega = v \cdot k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{4 \cdot 1}} \cdot \frac{2\pi}{1} \approx 9,4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Начальную фазу определяем из начальных условий: при  $t = 0$  и  $x = 0$ ,  $E = E_0$ . Следовательно,  $E_0 = E_0 \sin \alpha$ , откуда  $\sin \alpha = 1$ ;  $\alpha = \pi/2$ .

Объединяя полученные результаты, запишем уравнение волны

$$E = 5 \sin\left(9,4 \cdot 10^8 t - 2\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В/м.}$$

**Задача 8.7.** Оценить максимальное давление, производимое в вакууме лучом лазера на абсолютно поглощающую поверхность, если амплитуда напряженности электрического поля в луче лазера  $E_0 = 10^{10}$  В/м.

#### Решение

Давление электромагнитной волны для частично поглощающей и частично отражающей поверхности (8.26)

$$p = (1+r)w,$$

где  $r$  - коэффициент отражения,  $w$  - объемная плотность энергии.

В предложенной задаче  $r = 0$ , следовательно, максимальное давление электромагнитной волны на абсолютно поглощающую поверхность равно плотности энергии электромагнитного поля в электромагнитной волне:

$$p = w = \epsilon_0 E_0^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{20} = 8,85 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

**Задача 8.8.** Вычислить энергию  $dW$ , переносимую за время  $dt$  через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны (в вакууме).

#### Решение

Если в месте нахождения этой площадки известны значения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , то  $dW = w \cdot c dt$ , где  $w$  - объемная плотность энергии,  $c$  - скорость электромагнитной волны в вакууме.

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Для электромагнитной волны справедливо (8.15)

$$\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2.$$

Это означает, что в электромагнитной волне плотность электрической энергии в любой момент времени равна плотности магнитной энергии в той же точке, и можно записать для плотности энергии:

$$w_m = w_{el} = \epsilon_0 E^2.$$

Тогда энергия волны за время  $dt$

$$dW = \epsilon_0 E^2 c dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 dt.$$

Эту же величину  $dW$  можно представить через модуль вектора Пойнтинга  $\vec{S}$ :

$$dW = S dt = EH dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E^2 dt.$$

Таким образом, оба выражения приводят к одинаковому результату.

**Задача 8.9.** На пути плоской электромагнитной волны длиной  $\lambda = 10$  м и амплитудой  $E_0 = 70$  В/м расположена абсолютно поглощающая поверхность, имеющая форму полусфера радиусом  $R = 1$  м, обращенная своей сферической поверхностью к падающей волне. Волна распространяется в вакууме. Определить энергию, поглощаемую сферической поверхностью за время  $t = 5$  мин.

### Решение

Покажем, что промежуток времени  $t = 5$  мин значительно больше периода  $T$  электромагнитной волны.

$$\text{Период } T = \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{c} = \frac{10}{3 \cdot 10^8} \approx 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ с, то есть } t \gg T.$$

В этом случае можно вычислить среднюю по времени энергию, переносимую волной, т.е. среднее значение модуля вектора Пойнтинга

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2.$$

В условиях данной задачи энергия, падающая на поверхность полусфера, будет равна энергии, падающей на поверхность круга площадью  $\pi R^2$ . Тогда на поверхность  $\pi R^2$  за время  $t$  падает и полностью поглощается ею энергия, переносимая электромагнитной волной

$$W = \langle S \rangle \cdot \pi R^2 \cdot t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot E_0^2 \cdot \pi R^2 t = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

**Задача 8.10.** Протоны, имеющие одинаковую скорость  $\vec{v}$ , образуют пучок круглого сечения с током  $i$ . Найти направление и модуль вектора Пойнтинга  $\vec{S}$  вне пучка на расстоянии  $r$  от его оси.

*Решение*

Из рис.8.3 видно, что вектора  $\vec{S}$  и  $\vec{v}$  параллельны. Найдем модуль вектора  $\vec{S}$ :

$$S = EH,$$

где  $E$  и  $H$  зависят от  $r$ .

$$\text{По теореме Гаусса } E \cdot 2\pi r = \frac{\tau}{\epsilon_0},$$

где  $\tau$  - заряд на единицу длины пучка. По теореме о циркуляции вектора  $\vec{H}$

$$H \cdot 2\pi r = i.$$

Определяя  $E$  и  $H$  из последних двух уравнений и учитывая, что  $i = \tau v$ , получаем

$$S = EH = \frac{\tau}{2\pi r \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{i}{2\pi r} = \frac{i^2}{4\pi^2 \epsilon_0 v \cdot r^2}.$$

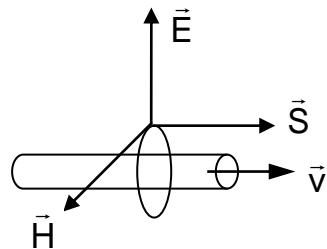


Рис. 8.3

### Задачи для самостоятельного решения

**8.11.** Покажите, что в типичных металлах, например меди с удельной проводимостью  $\gamma \approx 6,3 \cdot 10^7$  См/м, плотность тока смещения мала по сравнению с плотностью тока проводимости. Численную оценку сделать для частоты тока  $v = 10^3$  МГц (декиметровый диапазон волн).

**8.12.** Найти плотность тока смещения  $j_{\text{см}}$  в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью  $v$ , оставаясь параллельными друг другу. Расстояние  $d$  между пластинами остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. Рассмотреть два случая: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов  $\Delta U$  между пластинами остается постоянной. Объяснить полученный результат.

**8.13.** В слабопроводящей среде с удельной проводимостью  $\gamma = 10^{-2}$  См/м и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 9$  распространяется плоская электромагнитная волна с частотой  $v = 10$  МГц. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

**8.14.** Напряжение на пластинах плоского воздушного конденсатора изменяется по закону  $U = U_0 \sin \omega t$ . Определить ток смещения через сечение AA' (рис.8.4.). Площадь пластин конденсатора  $S$ , расстояние между пластинами  $d$ .

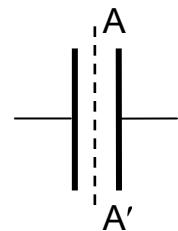


Рис. 8.4

**8.15.** Пространство между двумя обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено слабопроводящей средой с удельной проводимостью  $\gamma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти модуль вектора  $\vec{H}$  между обкладками на расстоянии  $r$  от их оси, если напряженность электрического поля между обкладками меняется со временем по закону  $E = E_0 \cos(\omega t)$ .

**8.16.** Скорость изменения магнитной индукции в бетатроне  $dB/dt = 60$  Тл/с. Вычислить напряженность  $E$  вихревого электрического поля на орбите электрона, если ее радиус  $r = 0,5$  м.

**8.17.** Электрон в бетатроне движется по орбите радиусом  $R = 3$  м. Какую скорость приобретает электрон в конце первого витка, если напряженность магнитного поля изменяется по закону  $H = \alpha \cdot t$ , где  $\alpha = 10^5$  А/(м·с)?

**8.18.** Рассчитать кинетическую энергию  $W_k$ , которую приобретает электрон в бетатроне, сделав  $n = 1,2 \cdot 10^6$  оборотов, если средняя скорость изменения магнитного потока в бетатроне  $|\Delta\Phi/\Delta t| = 50$  Вб/с. Определить путь  $L$ , пройденный электроном, если радиус орбиты  $R = 0,2$  м.

**8.19.** Двигаясь в бетатроне по орбите радиусом  $r = 0,4$  м электрон приобретает за один оборот кинетическую энергию  $W_k = 20$  эВ. Определить скорость изменения магнитной индукции  $\Delta B / \Delta t$  за время одного оборота.

**8.20.** Средняя скорость изменения магнитного потока в бетатроне, рассчитанном на энергию  $W_k = 60$  МэВ, составляет  $|\Delta\Phi/\Delta t| = 50$  Вб/с. Определить: 1) число оборотов  $n$  электрона на орбите за время ускорения; 2) путь  $L$ , пройденный электроном, если радиус орбиты  $R = 20$  см. Заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**8.21.** Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабопроводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника. Пренебрегая краевыми эффектами, показать, что магнитное поле внутри конденсатора отсутствует.

**8.22.** Заряженный и отключенный от источника плоский конденсатор медленно разряжается токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой проводимости. Вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора. Объяснить полученный результат.

**8.23.** Плоский воздушный конденсатор, площадь каждой пластины которого  $S = 100$  см<sup>2</sup>, включен последовательно в цепь переменного тока. Найти амплитуду напряженности электрического поля в конденсаторе, если амплитуда синусоидального тока в проводящих проводах  $i_0 = 1$  мА и частота тока  $\omega = 1,6 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>.

**8.24.** Радиусы обкладок сферического конденсатора равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Пространство между обкладками заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельной проводимостью  $\gamma$ . Первоначально конденсатор не заряжен. Затем внутренней обкладке сообщается заряд  $q_0$ . Найти закон изменения заряда  $q$  на внутренней обкладке. Показать, что несмотря на наличие токов проводимости, текущих в радиальных направлениях, напряженность магнитного поля  $H$  в зазоре этого конденсатора равна нулю. (Использовать теорему о циркуляции  $\vec{H}$ ).

**8.25.** Заряженный и отключенный от источника плоский конденсатор, состоящий из двух дисков радиусом  $R$ , пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Расстояние между дисками  $h$ . Вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля внутри конденсатора в зависимости от расстояния  $r$  до оси, проходящей через центры дисков. Сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна  $i$ .

**8.26.** Плоский конденсатор образован двумя дисками радиусом  $R$ , между которыми находится однородная среда с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Расстояние между обкладками  $d$ . Конденсатор подключен к источнику с напряжением  $U = U_0 \cos \omega t$ . Найти плотность тока смещения и циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по окружности радиусом  $r = R/2$ . (Центр окружности расположен на оси диска).

**8.27.** Плоский воздушный конденсатор с площадью каждой пластины  $S = 200 \text{ см}^2$  заряжен до разности потенциалов  $\Delta\phi = 100 \text{ В}$ . Пластины конденсатора стали раздвигать со скоростью  $v = 1 \text{ мм/с}$ . Найти плотность тока смещения в момент времени  $t = 10 \text{ с}$  от начала движения, если первоначальное расстояние между пластинами  $d_0 = 3 \text{ мм}$ . Ответ обосновать.

**8.28.** Пластины плоского воздушного конденсатора емкостью  $C$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Одну из пластин начинают отодвигать от другой по нормали к ним со скоростью  $v$ . Найти плотность тока смещения в конденсаторе в зависимости от времени, если конденсатор все время остается подключенным к источнику тока. Начальный заряд на пластинах конденсатора  $q_0$ .

**8.29.** Пластины плоского воздушного конденсатора площадью  $S$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Одну из пластин начинают отодвигать от другой по нормали к пластинам с постоянным ускорением  $\ddot{a}$ . Найти плотность тока смещения в конденсаторе в зависимости от времени, если конденсатор все время остается подключенным к источнику тока. Начальный заряд на пластинах конденсатора  $q_0$ .

**8.30.** Ток, текущий по длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого  $R$ , меняют так, что магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по закону  $B = \beta t^2$ , где  $\beta$  -

постоянная. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида. Изобразить график зависимости  $j_{\text{см}}(r)$ .

**8.31.** Бетатрон предназначен для получения быстрых электронов. Он состоит из вакуумной камеры, которая помещена между полюсами электромагнита, обмотка которого питается переменным током. Принцип работы бетатрона основан на явлении электромагнитной индукции. Возникающее переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны (рис.8.5). Определить, какую скорость приобретает электрон в конце первого витка в бетатроне, радиус которого  $R$ , если напряженность однородного магнитного поля изменяется по закону  $H = \alpha t$ , где  $\alpha$  - постоянный коэффициент.

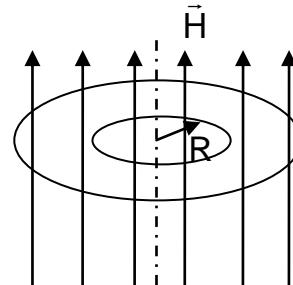


Рис. 8.5

**8.32.** Электрический контур состоит из плоского воздушного конденсатора, расстояние между пластинами которого  $d = 2$  мм, площадь каждой пластины  $S = 400$  см<sup>2</sup> и катушки индуктивностью  $L = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн. Определить максимальный ток смещения в конденсаторе, если при  $t = 0$  разность потенциалов на конденсаторе  $U_0 = 50$  В, а начальный ток в контуре равен нулю.

**8.33.** Чему равна длина электромагнитной волны  $\lambda$ , соответствующая собственной частоте колебательного контура, состоящего из катушки индуктивностью  $L = 0,4$  Гн и конденсатора емкостью  $C = 10^{-8}$  Ф?

**8.34.** На какую длину волны  $\lambda$  резонирует колебательный контур Томсона, состоящий из катушки индуктивности  $L = 1$  мкГн и плоского воздушного конденсатора, площадь пластин которого  $S = 100$  см<sup>2</sup>, расстояние между пластинами  $d = 3$  мм?

**8.35.** Индуктивность колебательного контура  $L = 5 \cdot 10^{-4}$  Гн. Какова должна быть емкость контура  $C$ , чтобы он резонировал на длину волны  $\lambda = 300$  м?

**8.36.** Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью  $L = 10^{-3}$  Гн и переменного конденсатора, емкость которого может меняться в пределах от  $C_1 = 9,7 \cdot 10^{-12}$  Ф до  $C_2 = 92 \cdot 10^{-12}$  Ф. В каком диапазоне длин  $\lambda$  волн может принимать радиопередачи этот приемник?

**8.37.** Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью  $L = 10^{-6}$  Гн и плоского воздушного конденсатора, площадь каждой пластины которого  $S = 10^{-2}$  м<sup>2</sup>. Контур резонирует на волну  $\lambda = 10$  м. Найти расстояние  $d$  между пластинами конденсатора.

**8.38.** Как изменится длина электромагнитной волны с частотой  $v = 5$  МГц при переходе волны из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 9$ ?

**8.39.** Волновое уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ , имеет вид (в системе СИ):  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 10^{-16} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ .

Найти относительную диэлектрическую постоянную среды  $\epsilon$ .

**8.40.** Выразить модуль напряженности электрического поля  $E$  плоской волны через модуль вектора Пойнтинга  $\vec{S}$  и диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$ . (Считать  $\mu = 1$ ).

**8.41.** Заданы параметры импульса, излучаемого рубиновым лазером: длительность  $\tau = 0,1$  мс, энергия  $W = 0,3$  Дж, диаметр пучка  $d = 5,0$  мм. Найти максимальное значение напряженности электрического поля  $E_{max}$  и интенсивность  $I$  излучения лазера.

**8.42.** Амплитуда электрической составляющей плоской электромагнитной волны  $E_0 = 50$  мВ/м. Волна распространяется в вакууме. Найти среднее за период колебаний значение плотности потока энергии  $\langle S \rangle$ .

**8.43.** В источнике колебаний отношение максимального ускорения к максимальной скорости колебаний равно  $5c^{-1}$ . Чему равна длина распространяющейся от этого источника волны, если скорость распространения колебаний  $v = 20$  м/с?

**8.44.** Среднее значение плотности потока энергии в плоской электромагнитной волне  $\langle S \rangle = 8,5 \cdot 10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>. Волна распространяется в вакууме. Найти амплитуду электрической составляющей волны  $E_0$ .

**8.45.** Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Частота волны  $\omega$ , среднее значение плотности потока энергии равно  $\langle S \rangle$ . Найти амплитудное значение плотности тока смещения  $j_{cm(max)}$  в этой волне.

**8.46.** Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля в волне  $E_0 = 50$  мВ/м. Частота  $v = 100$  кГц. Найти амплитуду плотности тока смещения.

**8.47.** В современных лазерных установках достигаются напряженности электрических полей  $E_{max} \approx 10^9$  В/м. Оценить соответствующие им плотность энергии и интенсивность лазерного излучения.

**8.48.** В немагнитной среде ( $\mu = 1$ ) с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$  распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой электрической составляющей  $E_0 = 200$  В/м. На пути волны находится шар радиусом  $R = 0,5$  м. Какая энергия падает на шар за время  $t = 60$  с?

**8.49.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна длиной  $\lambda = 10$  м с амплитудой вектора напряженности  $E_0 = 50$  В/м. На пути волны располагается поглощающая поверхность, имеющая форму полусферы радиусом  $R = 1$  м, обращенная своей

внешней сферической поверхностью к падающей волне. Определить энергию, поглощаемую этой поверхностью за время  $t = 5$  мин. (Учесть, что время  $t \gg T$ , где  $T$  - период электромагнитной волны).

**8.50.** Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $OX$ , имеет вид  $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$ , где  $E_0 = 200$  В/м,  $\omega = 2\pi \cdot 10^8$  рад/с,  $k = 2\pi m^{-1}$ . Определить, какая энергия ежеминутно проходит через квадратную рамку площадью  $S = 2$  м<sup>2</sup>, расположенную так, что нормаль к плоскости рамки составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением фазовой скорости волны. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ , магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$ .

**8.51.** Плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности магнитного поля  $H_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  А/м распространяется в вакууме. Определить среднее значение плотности потока энергии  $\langle S \rangle$ . Найти максимальное  $p_{max}$  и среднее  $\langle p \rangle$  давление, которое оказывает волна при нормальном падении на поверхность тела, полностью поглощающего волну.

**8.52.** Оценить максимальное давление, производимое лучом лазера на абсолютно поглощающую поверхность, если амплитуда напряженности электрического поля в луче лазера  $E_0 = 10^{10}$  В/м. Среда – вакуум.

**8.53.** В вакууме вдоль оси  $OX$  распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны  $H_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  А/м. Определить: а) амплитуду напряженности электрического поля волны  $E_0$ ; б) среднюю по времени плотность энергии волны  $w$ .

**8.54.** Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде ( $\mu = 1$ ) с показателем преломления  $n$ , через амплитуду вектора напряженности электрического поля  $E_0$ .

**8.55.** Электромагнитная волна распространяется в немагнитной ( $\mu = 1$ ) среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2$ . Напряженность электрического поля изменяется по закону  $\vec{E} = 10 \cos(\omega t + \alpha) \vec{k}$ . Вектор  $\vec{H}$  колеблется вдоль оси  $OX$ . Найти вектор Пойнтинга.

**8.56.** Какая энергия передается поглощающей стенке, площадь которой  $S$ , за время  $\tau$  при нормальном падении на нее плоской электромагнитной волны с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\omega \gg 1/\tau$ ? (Считать  $\epsilon$  и  $\mu$  вещества стенки заданными).

**8.57.** Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

### ***ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ***

#### 1. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля

1.11.  $q = 50,1 \text{ нКл.}$

1.12. На расстоянии  $x = 40 \text{ см}$  от заряда  $4q$ . Заряд положительный.

$$1.13. F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4}} \text{ мН.}$$

$$1.14. F = \frac{6q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 54 \text{ мН.}$$

1.15.  $q_{1,2} = 2r\sqrt{\pi\epsilon_0}(\sqrt{F_2} \pm \sqrt{F_2 - F_1})$ ;  $q_1 = 0,09 \text{ мкКл}; q_2 = -0,01 \text{ мкКл.}$

$$1.16. q_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2}) = -0,287 \text{ нКл.}$$

$$1.17. q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \sqrt{4\pi\epsilon_0\gamma} = 1,21 \cdot 10^{-18} \text{ Кл.}$$

1.18.  $\epsilon = 2,2.$

$$1.19. q_1 = \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

$$1.20. Q = -4\pi\epsilon_0(n-1)mgL^2/q \approx -5,6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

1.21. Уменьшится в  $\sqrt{2\cos\alpha} \approx 1,3$  раза.

$$1.22. q = L\sqrt{\frac{2}{5}\pi\epsilon_0 k(L-L_0)}.$$

$$1.23. g = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m L^2} = 9,99 \text{ м/с}^2.$$

$$1.24. Q > \frac{8\pi^2\epsilon_0(T_0 - T) \cdot R^2}{q}.$$

$$1.25. \Delta T = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

$$1.26. \frac{dq}{dt} = \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 mg}{L}}.$$

1.27. 3а отрицательным зарядом на расстоянии  $r = d(\sqrt{2} + 1)$ .

$$1.28. E = \frac{q_1 + |q_2|}{\pi\epsilon_0 L^2} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

$$1.29. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{q_1 q_2}{r_1^2 \cdot r_2^2} \cos\alpha} = 1,7 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$1.30. E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx 81 \text{ В/м.}$$

$$1.31. E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{(r^2 + L^2)^2} - \frac{2}{r(r^2 + L^2)^{3/2}}}.$$

$$1.32. E = 1,41 \text{ В/м.}$$

$$1.33. E_B = \frac{8}{5} E_A \cos 30^\circ = 34,8 \text{ В/м.}$$

$$1.34. \text{a) } 0; \text{ б) } 0; \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2}; \text{ или } \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \text{ в зависимости от расположения зарядов.}$$

$$1.35. \vec{E} = 2,7\vec{i} - 3,6\vec{j}; E = 4,5 \text{ В/м.}$$

$$1.36. \Phi_D = \sigma a^2 \sin \beta / 2 = 2,5 \text{ нКл.}$$

$$1.37. \Phi_E = \frac{qS}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 4,5 \text{ В·м.}$$

$$1.38. \Phi_E = \frac{\pi\sigma r^2}{2\epsilon_0} = 1,78 \text{ кВ·м.}$$

$$1.39. \Phi_D = 10 \text{ нКл.}$$

$$1.40. \Phi_D = \frac{b\tau}{\pi} \arcsin \frac{a}{2r} = 20 \text{ нКл.}$$

$$1.41. \Phi_E = 4\pi Ra$$

$$1.42. E_1 = 396 \text{ В/м}; E_2 = 170 \text{ В/м.}$$

$$1.43. E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 127 \text{ В/м.}$$

$$1.44. E = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 5,65 \text{ кВ/м.}$$

$$1.45. E = \frac{\sqrt{5}\sigma}{2\epsilon_0}.$$

$$1.46. E_1 = \frac{2\sigma_2}{\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}; \quad E_3 = \frac{2\sigma_2}{\epsilon_0}.$$

$$1.47. r = \sqrt{\frac{3\sigma q}{2\epsilon_0 \cdot 4\pi\rho g}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$1.48. \text{Слева от первой плоскости } E_1 = 0; D_1 = 0.$$

Между первой и второй плоскостями  $E_2 = 3,4 \cdot 10^3 \text{ В/м}; D_2 = 3 \cdot 10^8 \text{ Кл/м}^2$ .

Между второй и третьей плоскостями  $E_3 = 3 \cdot 10^3 \text{ В/м}; D_3 = 3 \cdot 10^8 \text{ Кл/м}^2$ .

Между третьей и четвертой плоскостями  $E_4 = 7,9 \cdot 10^8 \text{ В/м}; E_4 = 7,9 \cdot 10^8 \text{ В/м.}$

$$1.49. E = \frac{|Q_1 - Q_2|}{2\epsilon_0 ab} = 377 \text{ кВ/м.}$$

$$1.50. F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{\epsilon_0} = 16,9 \text{ мкН.}$$

$$1.51. |Q| = R \sqrt{2\pi\epsilon_0 F} = 33,3 \text{ нКл.}$$

$$1.52. E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} = 12 \text{ В/м.}$$

$$1.53. E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

$$1.54. E_1 = 0; \quad E_2 = \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r_2} = 75,5 \text{ В/м.}$$

$$1.55. f = \frac{\Delta F}{\Delta L} = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0 R} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м.}$$

$$1.56. E_{\text{внe}} = \frac{\pi R_0^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r_B}, \text{ точка B - вне цилиндра;}$$

$$E_{\text{внутр}} = \frac{\rho r_A}{2\epsilon_0}, \text{ точка A - внутри цилиндра.}$$

$$1.57. E = 43,2 \text{ МВ/м.}$$

$$1.58. E_1 = 0; \quad E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 r_2} = 200 \text{ В/м}; \quad E_3 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\epsilon_0 r_3} = 180 \text{ В/м.}$$

$$1.59. F = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0 a} = 9 \text{ мН.}$$

$$1.60. F = \frac{q\sigma R}{\epsilon_0 r} = 2,26 \text{ мН.}$$

$$1.61. E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} = 10^5 \text{ В/м.}$$

$$1.62. 1) E(r_1) = 0, \quad 2) E(R) = 900 \text{ В/м,} \quad 3) E(r_2) = 400 \text{ В/м.}$$

$$1.63. a) E = 3,3 \cdot 10^4 \text{ В/м;} \quad b) E = -1,2 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$1.64. a) E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right) \text{ при } r \leq R; \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R;$$

$$b) E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0} \text{ при } r_{\max} = \frac{2R}{3}.$$

$$1.65. \vec{E} = -\frac{R^2}{6\epsilon_0} \vec{a}.$$

$$1.66. E(r_1) = 0; \quad D(r_1) = 0$$

$$r_3 > R_2 \quad E(r_3) = \frac{\rho_0 (R_2 - R_1)}{\epsilon_0 r_3^2} = 3,76 \cdot 10^2 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad D(r_3) = \frac{\rho_0 (R_2 - R_1)}{r_3^2} = 3,3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Кн}}{\text{м}^2};$$

$$R_1 < r < R_2 \quad E(r_2) = \frac{\rho(r_2 - R_1)}{\epsilon_0 r_2^2} = 1,8 \cdot 10^2 \frac{B}{M}, \quad D(r_2) = \frac{\rho(r_2 - R_1)}{r_2^2} = 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{K\pi}{M^2}.$$

$$1.67. \vec{E} = \vec{a} \cdot \rho / 3\epsilon_0 .$$

$$1.68. q = 2\pi R^2 \alpha; \quad E = \alpha / 2\epsilon_0 .$$

$$1.69. E = \left( \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 \alpha r^2} \right) \left[ -\exp(-\alpha r^3) \right].$$

$$1.70. F = \frac{Q_1 Q_2}{24\pi\epsilon_0 R^2} = 150 \text{ мкН.}$$

$$1.71. E = \frac{1}{2} \frac{\tau R}{\epsilon_0 r^3} \sqrt{r^2 - R^2} = 2,71 \text{ кВ/м.}$$

$$1.72. E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_{\max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{при } r = \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

$$1.73. E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

$$1.74. 1) \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right] = 2,54 \cdot 10^3 \text{ В/м.} \quad 2) \quad E = 8,47 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

$$1.75. E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R R_0} = 0,6 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$1.76. E = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0 L} = 135 \text{ кВ/м.}$$

$$1.77. E = \frac{\tau a}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} .$$

$$1.78. E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right).$$

$$1.79. \text{ В точке A: } E_x = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau}{a} \sin \alpha_A; \quad E_y = 0.$$

$$\text{В точке B: } E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{a} \sin \alpha_B; \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{a} (1 - \cos \alpha_B).$$

$$1.80. F = \frac{Q \cdot q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$1.81. F = \frac{q_1 q L}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}} = 0,16 \text{ мН.}$$

$$1.82. F = \frac{q \cdot \tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) = 1,5 \text{ мН.}$$

$$1.83. F = \frac{\sqrt{5} q \tau}{4\pi\epsilon_0 a} = 4,03 \text{ мН.}$$

$$1.84. F = \frac{\sqrt{2}q\tau}{4\pi\epsilon_0 a} = 6,37 \text{ мН.}$$

$$1.85. \sigma = 2\epsilon_0 F/q = 1,06 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$1.86. F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(r+L) \cdot r} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$1.87. F = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$1.88. T = \frac{2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 R m} \cdot R}{q}.$$

$$1.89. F = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon_0 R} = 35 \text{ мкН.}$$

$$1.90. E = \frac{1}{\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{(q_3 - q_2)^2 + q_1^2}{(2b/a)^2 - 1}}.$$

$$1.91. E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (q - 4\pi R^2 \sigma).$$

$$1.92. E_1 = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\alpha R^2}{2\epsilon_0 r^2}.$$

$$1.93. E_1 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad E_2 = \frac{1}{\epsilon_0 r} \left( \frac{\tau}{2\pi} - R\sigma \right), \quad E_2 = 0 \text{ при } \tau = 2\pi R\sigma.$$

$$1.94. E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right].$$

## 2. Потенциал электростатического поля. Работа по перемещению заряда. Движение зарядов в электростатическом поле

$$2.11. \varphi = 1 \text{ кВ.}$$

$$2.12. \varphi = 45 \text{ В.}$$

$$2.13. \varphi = 6 \text{ кВ; } d_{\min} = r_2 - r_1 = 10 \text{ см; } d_{\max} = r_1 + r_2 = 40 \text{ см.}$$

$$2.14. E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{(r^2 + d^2)^2} - \frac{2}{r(r^2 + d^2)^{3/2}}} = 664 \text{ кВ/м;}$$

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) = 26,4 \text{ В.}$$

$$2.15. \Delta q_1 > 0; \Delta q_2 < 0.$$

$$2.16. \varphi = \sigma R / \epsilon_0; \quad E = 0.$$

$$2.17. \Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 125 \text{ В.}$$

$$2.18. \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2 = 62,4 \text{ В.}$$

$$2.19. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a\tau}{(r^2 - a^2)}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r+a}{r-a}.$$

$$2.20. \varphi = 33,6 \text{ В.}$$

$$2.21. E = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{3/2}}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{1/2}}.$$

$$2.22. \Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (L/R)^2}}\right) = 12 \text{ кВ.}$$

$$2.23. \varphi = \frac{q}{\pi(D/2 + d/2) \cdot 2\epsilon_0} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

$$2.24. 1) \varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} = 360 \text{ В; } 2) \varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 - a^2} - a) = 149 \text{ В.}$$

$$2.25. \varphi = \frac{\sigma L}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{1 + (R/L)^2} - 1 \right), \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right).$$

$$2.26. \Delta\varphi = \frac{qd}{2\epsilon_0 S}.$$

$$2.27. \varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(b^2 - a^2)} (\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$E_x = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0(b^2 - a^2)} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right),$$

при  $|x| \geq b$  - поле точечного заряда.

$$2.28. \Delta\varphi = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} = 56,6 \text{ В.}$$

$$2.29. \varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma_1 b - \sigma_2 a}{2\epsilon_0} = -1,1 \text{ кВ.}$$

$$2.30. \Delta\varphi = \frac{d}{R} \sqrt{\frac{2F}{\pi\epsilon_0}} = 1,2 \text{ кВ.}$$

$$2.31. \varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

$$2.32. \operatorname{grad} \varphi = -E; \quad |\operatorname{grad} \varphi| = E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

$$2.33. |\operatorname{grad} \varphi| = \varphi / r = 200 \text{ В/м.}$$

$$2.34. |\operatorname{grad} \varphi| = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = 180 \text{ В/м.}$$

$$2.35. E = 2\sqrt{x^2 + 4y^2}$$

$$2.36. \vec{E} = -2(ax\vec{i} + ay\vec{j} - bz\vec{k}); \quad E = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}.$$

$$2.37. \vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j}); \quad \vec{E} = -a\vec{j}.$$

$$2.38. \phi = -E_0x + \text{const.}$$

$$2.39. E = 0 \text{ (внутри первой сферы)}; \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ (между сферами)};$$

$$E = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ (вне второй сферы)}; \quad \Delta\phi = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}.$$

$$2.40. \phi_1 - \phi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R + a_2}{R + a_1} = 47B.$$

$$2.41. \text{a) } \phi_0 = \frac{3q \cdot L}{2R \cdot 4\pi\epsilon_0} = 6,8 \cdot 10^5 B; \quad \vec{E}_0 = 0;$$

$$\text{б) } \phi = \phi_0 \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) = 6,8 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{r^2}{4,8 \cdot 10^{-3}}\right);$$

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 2,8 \cdot 10^8 \vec{r} \quad (\text{для } r \leq R);.$$

$$2.42. q_2 = -q_1 \frac{R_2}{R_1} = -21 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

$$2.43. \phi_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_2} \phi_1 = 100 \text{ В.}$$

$$2.44. \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} = 15 \text{ кВ.}$$

$$2.45. \phi_c = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 4200 \text{ В.}$$

$$2.46. \phi_0 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 3R} = 120 \text{ В}, \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3R} \left[ 4 - \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right] = 120 - 3 \cdot 10^4 r^3.$$

$$2.47. \phi_1 = \frac{(R_2^2 - R_1^2)\rho}{3\epsilon_0 R_2} = 238 \text{ В}; \quad \phi_2 = \phi_3 = 116 \text{ В.}$$

$$2.48. \phi_1 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_0}\right) = 472 \text{ В}; \quad \phi_2 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = 377 \text{ В.}$$

$$2.49. \Delta\phi = \frac{\rho d^2}{8\epsilon_0 \epsilon} = 8,07 \text{ В.}$$

$$2.50. A_1 = -4 \text{ мкДж}; \quad \Delta\phi = 200 \text{ В.}$$

$$2.51. A = \frac{Q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 4,5 \text{ мкДж.}$$

$$2.52. 1) A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 8,91 \text{ мДж}; 2) A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 9 \text{ мДж}.$$

$$2.53. A_{1-2} = q_1 \varphi_1 / 3 = 1 \text{ мкДж}.$$

$$2.54. A_{1-2} = \frac{q q_1}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 659 \text{ мкДж}.$$

$$2.55. A_{\min} = q_0 \frac{|q_1| + q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R+a^2}} \right).$$

$$2.56. A = \frac{q|\sigma| \cdot L \sin \alpha}{2\epsilon_0} = 0,24 \text{ Дж}.$$

$$2.57. A = 2,62 \text{ мкДж}.$$

$$2.58. A = \frac{q\tau}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) = 47 \text{ мкДж}.$$

$$2.59. A_{1-2} = q\varphi / 4 = 250 \text{ мкДж}.$$

$$2.60. A = -\frac{q\sigma R^2}{\epsilon_0(d+R)} = -1,13 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$2.61. F = 2,4 \cdot 10^{-17} \text{ Н}; \quad a = 2,75 \cdot 10^{13} \text{ м/с}^2; \quad v = 4,07 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$2.62. 1) \text{ по параболе; } 2) R = \frac{m_e v_0^2 \sin \alpha^2}{eE}.$$

$$2.63. S = \frac{eEt^2}{2m} = 1,76 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad v = \frac{eEt}{m} = 35,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$2.64. U = \frac{mv^2 d}{eL} \operatorname{tg} 35^\circ = 79,6 \approx 80 \text{ В}$$

$$2.65. a = 1,58 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2; \quad v = 5,63 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad t = 3,56 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

$$2.66. v = \sqrt{\frac{2|e|r_0\sigma \ln(r/r_0)}{m\epsilon_0}} = 6 \cdot 10^5 \text{ м/с}, \text{ где } |e| - \text{заряд электрона}.$$

$$2.67. L = L_0 - \frac{2\epsilon_0 W_k}{e\sigma} = 1 \text{ см}.$$

$$2.68. q = mg \left( 1 + \frac{v_2}{v_1} \right) \cdot \frac{d}{U} = 5e = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

$$2.69. v = 1 \text{ м/с}.$$

$$2.70. v_1 = 0,17 \text{ м/с}; \quad v_2 = 0,06 \text{ м/с};$$

$$2.71. h = \frac{R}{3} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R \cdot 3mg}.$$

$$2.72. x = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{\alpha q}} = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$2.73. v_{\min} = \sqrt{\frac{3|q|\phi}{2m}} = 0,24 \text{ Мм/с.}$$

$$2.74. \phi_2 = \phi_1 - \frac{3mv_1^2}{8|e|} = 23,3 \text{ В.}$$

$$2.75. \Delta\phi_{\min} = \frac{mv^2}{2|e|} = 284 \text{ В.}$$

$$2.76. W = q\alpha L^2/2 = 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$2.77. v = \sqrt{\frac{2|e|\Delta\phi}{m} + \frac{\alpha^2 L^4}{16\Delta\phi^2}}.$$

$$2.78. r_{\min} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 mv^2} = 10,1 \text{ пм.}$$

$$2.79. v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\epsilon_0 mr_{\min}}} = 2,35 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$2.80. W = \frac{|e|\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 10 = 828 \text{ эВ.}$$

### 3. Электрический диполь. Диэлектрики. Проводники. Конденсаторы. Энергия электростатического поля

$$3.12. E = 6,75 \cdot 10^3 \text{ В/м; } \phi = 0.$$

$$3.13. \vec{p} = 0.$$

$$3.14. v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{pE}{J}} = 2390 \text{ Гц.}$$

$$3.15. A = 2pE = 30 \text{ мкДж.}$$

$$3.16. \phi = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 L^2} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

$$3.17. F = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^4} = 1,35 \text{ мкН.}$$

$$3.18. F = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

$$3.19. \frac{dE}{dr} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 1,8 \text{ МВ/м}^2; \quad F = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 9 \text{ мкН.}$$

$$3.20. T = 2\pi \sqrt{\frac{2J\epsilon_0}{p\sigma}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{pE}} = 74,1 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

$$3.21. W = \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 18 \text{ нДж.}$$

$$3.22. \Delta W = pE(1 - \cos \alpha) = 0,5 \text{ мкДж.}$$

$$3.23. |W| = pE = \frac{p}{2\epsilon_0} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

$$3.24. W = q\varphi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$3.25. |W| = \frac{\tau p}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

$$3.26. D = \frac{q}{S}; \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}; \quad \Delta \varphi = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

$$3.27. 1) r < R_1: \quad D = E = 0; \quad \varphi(R_1) = 14,35 \text{ В.}$$

$$2) r > R_2: \quad E = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad D = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi r}; \quad \varphi(r) = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2}.$$

$$3) R_1 < r < R_2: \quad E = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}; \quad D = \frac{\tau_1}{2\pi r}; \quad \varphi(r) = -\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r}.$$

$$3.28. \varphi_1(r_1) = 375 \text{ В}; \quad \varphi_2(r_2) = 315 \text{ В}; \quad \varphi_3(r_3) = 100 \text{ В.}$$

$$3.29. \varphi_1 = \frac{\rho(R_1^2 - R_2^2)}{3\epsilon_0 R_2} = 238 \text{ В}; \quad \varphi_2 = \varphi_3 \approx 116 \text{ В.}$$

$$3.30. r < R \quad D(r) = \frac{\rho r}{2}; \quad E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}; \quad \varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}; \quad \text{принять } \varphi(0)=0.$$

$$r > R \quad D(r) = \frac{\rho R^2}{2r}; \quad E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon\epsilon_0 r}; \quad \varphi(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right).$$

$$3.31. F_{\text{внутри}} = \frac{q\rho r}{3\epsilon\epsilon_0} = 1,25 \cdot 10^{-3} r \text{ Н}; \quad F_{\text{вне}} = \frac{q\rho R^3}{3\epsilon\epsilon_0 r^2} = 10^{-5} \cdot \frac{1}{r^2} \text{ Н.}$$

$$3.32. \Delta \varphi = \frac{\rho \cdot R^2}{6\epsilon\epsilon_0} = 3,14 \text{ В.}$$

$$3.33. \varphi(r_1) = 174 \text{ В}; \quad \varphi(r_2) = 140 \text{ В}; \quad \varphi(r_3) = 100 \text{ В.}$$

$$3.34. q'_{\text{внутр}} = -\frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon} = -2,0 \text{ мкКл}; \quad q'_{\text{внеш}} = \frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon} = 2,0 \text{ мкКл.}$$

$$3.35. \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] = 3,4 \cdot 10^3 \text{ В};$$

$$\sigma'_{2(r=R_2)} = \frac{q}{4\pi R_2^2} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2;$$

$$\sigma'_{1(r=R_1)} = \frac{q}{4\pi R_1^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = -5,0 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.36. \sigma = \frac{2\epsilon_0 \epsilon \Delta \varphi}{(\epsilon + 1)d} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.37. E = 11,3 \text{ МВ/м.}$$

$$3.38. P = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) E_0}{\epsilon} = 37,9 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.39. P = 142 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.40. F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} = 0,9 \text{ мкН.}$$

$$3.41. E = \frac{3q}{64\pi\epsilon_0 a^2} = 187,5 \text{ В/м.}$$

$$3.42. F = \frac{(2\sqrt{2} - 1)q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = 8 \text{ Н.}$$

$$3.43. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} = 0,36 \text{ мН.}$$

$$3.44. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{5\sqrt{5}d^2}.$$

$$3.45. E = \frac{q\sqrt{26 - 2\sqrt{5}}}{5h^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{0,92 \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot h^2}.$$

$$3.46. F = \frac{(2\sqrt{2} - 1)q^2}{8\pi\epsilon_0 L^2}.$$

$$3.47. F = \frac{(2\sqrt{2} - 1)q^2}{32\pi\epsilon_0 L^2} = 3,3 \text{ Н.}$$

$$3.48. F = \frac{4(q_1^2 - q_2^2)}{4\pi\epsilon_0 (d_1 - d_2)^2} = 16 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

$$3.49. a) \sigma_1 = -\frac{q}{2\pi a^2} = -5,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2; \quad b) \sigma_2 = -\frac{qa}{2\pi r^3} = -1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.50. \sigma = \frac{q}{2\pi L^2} = -3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.51. F = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 L^4}.$$

$$3.52. A = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{V}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right).$$

$$3.53. \frac{C_1}{C_2} = \frac{d}{d+x}; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{d+x}{d}; \quad E_1 = E_2.$$

3.54. а)  $C = 4\pi\epsilon_0 ab/(b-a)$ ; б)  $C = 4\pi\epsilon_0 \alpha \sqrt{\ln \frac{b}{a}}$ .

3.55.  $5 \cdot 10^{-2} < R < 7 \cdot 10^{-2}$  м  $E = \frac{17 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R^2}$  В/м.

3.56.  $C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}{1 + \sqrt{\frac{r}{R}(\epsilon - 1)}} = 7,38 \cdot 10^{-12}$  Ф.

3.57.  $A = \frac{\epsilon_0 S}{2d_1^2} \epsilon^2 (d_2 - d_1) = 3,9$  мкДж.

3.58. а)  $A = \frac{q^2(x_2 - x_1)}{2\epsilon_0 S}$ ; б)  $A = \frac{\epsilon_0 S U^2 (x_2 - x_1)}{2x_1 x_2}$ .

3.59.  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi \cdot (1 + \frac{\epsilon x}{d}) = 460$  В.

3.60.  $q = \frac{R}{2}(\epsilon + 1)\Delta\varphi = 9 \cdot 10^{-9}$  Кл.

3.61.  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 d_1 + 2\epsilon_1 d_2} = 65 \cdot 10^{-11}$  Ф.

3.62.  $A = \frac{\epsilon_0 S U^2 d_2}{2(d_1 - d_2)^2} = 119 \cdot 10^{-7}$  Дж.

3.63.  $E_{ct} = 8,1$  В/м;  $E_\phi = 9,4$  В/м;  
 $\sigma' = 4,3 \cdot 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\sigma'' = 4,2 \cdot 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup>.

3.64.  $C = 2\pi R(1 + \epsilon)\epsilon_0$ .

3.65.  $\sigma' = 1,59 \cdot 10^{-9}$  Кл/м<sup>2</sup>.

3.66.  $\sigma' = \frac{\Delta\varphi\epsilon_0}{\epsilon d_1 + d_2} = 2,21 \cdot 10^{-7}$  Кл/м<sup>2</sup>, где  $d_1 = d - d_2$ .

3.67.  $E_1 = 3,75 \cdot 10^4$  В/м;  $E_2 = 26,25 \cdot 10^4$  В/м.

3.68.  $C = \frac{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon)ab}{b - a}$ .

3.69.  $\Delta\varphi = 700$  В.

3.70.  $A = 0,18 \cdot 10^{-3}$  Дж.

3.71.  $W = -0,18$  Дж.

3.72.  $A = 0,57 \cdot 10^{-7}$  Дж.

3.73. 1) если заряды одного знака:  $W_1 = \frac{q^2(\sqrt{2} + 4)}{4\pi\epsilon_0 a} = 4,8 \cdot 10^{-5}$  Дж.

2) если заряды разного знака:  $W_2 = -\frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a} = -1,27 \cdot 10^{-5}$  Дж.

$$3.74. A = \frac{\sigma q \cdot (L_2 - L_1)}{2\epsilon_0} \cos \frac{\alpha}{2} = 97,9 \text{ мкДж.}$$

$$3.75. q = 2m \sqrt{\pi \epsilon_0 \tau} = 8,6 \cdot 10^{-11} \text{ Кл.}$$

$$3.76. W = 3,15 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

$$3.77. \omega = \frac{\tau^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r_0^2} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/м}^3.$$

$$3.78. W = \frac{q^2(R_2 - R_1)}{8\pi \epsilon_0 R_1 R_2}.$$

$$3.79. W = \frac{2\pi \rho^2 R^5}{45\epsilon_0 \epsilon}.$$

$$3.80. R_1 = R / \sqrt[5]{2} \approx 0,87R$$

$$3.81. \frac{W}{L} = \frac{\tau^2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$3.82. W = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

$$3.83. W = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

$$3.84. W/L = 5,33 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/м.}$$

$$3.85. A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q \rho R^2}{6\epsilon_0 \epsilon} = 95 \cdot 10^{-9} \text{ Дж.}$$

#### 4. Закон Био – Савара - Лапласа. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

$$4.10. B = \frac{\mu_0 \mu i \cdot (\pi + 4)}{8\pi R}$$

$$4.11. B = \frac{\mu_0 \mu i \cdot [\pi + 2(1 + \sqrt{2})]}{8\pi R}$$

$$4.12. \text{ а) } B = \frac{\mu_0 i}{4R} = 157 \text{ мкТл, б) } B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} (\pi + 2) = 257 \text{ мкТл,}$$

$$\text{в) } B = \frac{\mu_0 i}{8\pi R} (3\pi + 2) = 286 \text{ мкТл.}$$

$$4.13. \text{ а) } B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} (\pi - 1) = 214 \text{ мкТл, б) } B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} (\pi + 1) = 414 \text{ мкТл,}$$

$$\text{в) } B = \frac{\mu_0 i}{R} \left( \frac{1}{3} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2\pi} \right) = 183 \text{ мкТл.}$$

$$4.14. B = \frac{\mu_0 \mu i \cdot \sqrt{1 + \pi^2}}{4\pi R}.$$

$$4.15. \Delta B = \frac{\mu_0 \mu i}{2R} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ Тл.}$$

$$4.16. B_I(x=0, x=a) = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; \\ B_I(x=a/2) = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; \\ B_{II}(x=0) = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; B_{II}(x=a) = -1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; \\ B_{II}(x=a/2) = 0.$$

$$4.17. B = \frac{\mu_0 i}{2R} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$4.18. B = \frac{\mu_0 i}{8} \left( \frac{3}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 54,95 \cdot 10^{-7} \text{ Тл.}$$

$$4.19. B = \frac{\mu_0 i}{8\pi R} (2 + \pi) = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.20. B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \right) = 0,28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.21. i_2 = \frac{i_1}{\pi \cdot \operatorname{tg} \alpha} = 0,58 \text{ А.}$$

$$4.22. \Delta U = \frac{4\pi r^2 \rho B}{\mu_0 S} = 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

$$4.23. H = 18 \text{ А/м.}$$

$$4.24. B = \frac{\mu_0 \mu i \cdot \sqrt{3}}{2\pi r_2} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.25. U = \frac{\mu \mu_0 \pi i^2 \rho}{B \cdot S}.$$

$$4.26. B = \mu \mu_0 \frac{\omega \tau}{4\pi} \ln 2 = 7 \cdot 10^{-10} \text{ Тл.}$$

$$4.27. B = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\left( \frac{i_1}{r} \right)^2 + \left( \frac{i_2}{\pi d} \right)^2} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

$$4.28. H = \frac{i \cdot (\sqrt{3} + 2)}{2\pi a} = 88,4 \text{ А/м.}$$

$$4.29. H = 9i/2\pi a.$$

$$4.30. B = \frac{2\mu_0 i}{3\pi a} = 13,3 \text{ мкТл.}$$

$$4.31. B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{i_1^2}{r_1^2} + \frac{i_2^2}{r_2^2} - \frac{i_1 i_2}{r_1^2 r_2^2} (r_1^2 + r_2^2 - d^2)} = 51 \text{ мкТл.}$$

$$4.32. B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot 2\sqrt{2}}{\pi a} = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.33. H(x) = \frac{i \cdot b}{\pi(x^2 + b^2)}; \quad H(0) = \frac{i}{\pi b} = 63,3 \text{ A/m.}$$

$$4.34. B_A = \frac{\mu_0 i}{\pi r \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; \quad B_C = \frac{\mu_0 i}{\pi r \sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл};$$

$$B_D = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.35. B = \frac{\mu_0 i N}{2L} \cdot \left( \frac{a + L}{\sqrt{(d/2)^2 + (a + L)^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + (d/2)^2}} \right) = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$4.36. B = \frac{\mu_0 n i}{2} \cdot \left( \frac{L - a}{\sqrt{(d/2)^2 + (L - a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (d/2)^2}} \right) = 2,68 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

$$4.37. B_1 = \frac{\mu_0 i}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} = 349 \text{ мкТл}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\sqrt{L^2 + R^2}} = 251 \text{ мкТл.}$$

$$4.38. B = \frac{\mu_0 i n L}{\sqrt{L^2 + D^2}} = 0,01 \text{ Тл.}$$

$$4.39. B_1 = 0; \quad B_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

$$4.40. B(r_1) = 0; \quad B(r_2) = 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$4.41. \text{Для } r > R: B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}; \quad \text{для } r < R: B = \frac{1}{2} \mu_0 j r.$$

$$4.42. \text{Для } r > R_2: H = \frac{i}{2\pi r}; \quad \text{для } R_1 < r < R_2: H = \frac{i}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right);$$

$$\text{для } r < R_1: H = 0.$$

$$4.43. 1) \text{Для } r < R_1: H(r) = \frac{i}{2\pi R_1^2} \cdot r = 4,77 \cdot 10^4 r; \quad H(R_1) = 4,77 \cdot 10^4 \text{ А/m};$$

$$2) \text{Для } R_1 < r < R_2: H(r) = \frac{i}{2\pi r}; \quad H(R_2) = 3,18 \cdot 10^2 \text{ А/m.}$$

$$3) \text{Для } R_2 < r < R_3: H(r) = \frac{i}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot \left( \frac{R_3^2 - r^2}{r} \right); \quad H(R_3) = 0.$$

$$4) \text{Для } r > R_3: H = 0.$$

$$4.44. \oint \vec{B} d\vec{L} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м.}$$

$$4.45. \text{а) } \oint \vec{H} d\vec{L} = 0; \quad \text{б) } \oint \vec{H} d\vec{L} = 16 \text{ А.}$$

$$4.46. \oint \vec{H} d\vec{L} = \pi r^2 j \sin \alpha = 78,6 \text{ А.}$$

$$4.47. B_1 = \frac{\mu_0 j r_1}{2} = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 i (r_2^2 - 2R_1^2)}{2r_2} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

$$4.48. B_1 = \mu_0 \alpha \left( 1 - \frac{R_1}{r_1} \right) = 377 \text{ мТл}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 \alpha (R_2 - R_1)}{r_2} = 346 \text{ мТл}.$$

$$4.49. j(r) = \frac{b}{\mu_0} \cdot (1 + \alpha) \cdot r^{\alpha-1}$$

$$4.50. \oint \vec{B} d\vec{L} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}.$$

$$4.51. r = R^2/d = 0,8 \text{ м}.$$

$$4.52. \bar{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \times \vec{a}] . \text{ Поле внутри полости однородно.}$$

$$4.53. B = \mu_0 n i = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}.$$

$$4.54. B_{\max} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi(D/2 - r)} = 20 \text{ мТл}; \quad B_{\min} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi(D/2 + r)} = 10 \text{ мТл}.$$

$$4.55. B = \frac{2\mu_0 Ni}{\pi(d_1 + d_2)} = 1,6 \text{ мТл}, \quad H = 1,27 \text{ кА/м}.$$

## 5. Силы Лоренца и Ампера.

Контур с током в магнитном поле

$$5.10. B = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2m\Delta\phi}{e}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

$$5.11. p = 2,4 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

$$5.12. L = B|e|R^2 = 3,2 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

$$5.13. q/m = 96,3 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг} (\text{протон}).$$

$$5.14. p_m = Be^2 R^2 / 2m = 7,04 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.15. R = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} = 0,035 \text{ м}; \quad h = \frac{2\pi mv_0 \cos \alpha}{qB} = 0,38 \text{ м}.$$

$$5.16. T = 3,97 \cdot 10^{-9} \text{ с}; \quad v = \frac{Be}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = 25 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$5.17. \frac{m_1}{m_2} = \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 = 4.$$

$$5.18. F_m = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi a^2} = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ Н}; \quad F_m = \left( \frac{v}{c} \right)^2 \cdot F_e = 10^{-6} F_e.$$

$$5.19. W_k = \frac{(4\pi^2 R^2 + h^2) \cdot B^2 q^2}{8\pi^2 m} = 5,8 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

$$5.20. T = \frac{2\pi m}{\mu_0 |H| e} = 2,84 \text{ нс}.$$

$$5.21. v = \frac{B|e|}{2\pi m} = 560 \text{ МГц}.$$

$$5.22. L = \frac{\sqrt{2mW_k}}{B|e|} = 14,5 \text{ см}.$$

$$5.23. v = 10^6 \text{ м/с.}$$

$$5.24. F = q\sqrt{E^2 + (vB)^2} = 10,8 \text{ мН.}$$

$$5.25. \Delta t = 10 \text{ мкс.}$$

$$5.26. \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{eBt}{m} = 1,8 \cdot 10^4.$$

$$5.27. a_1 = 2 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2; a_2 = \sqrt{\left(\frac{eE}{m}\right)^2 + \left(\frac{Bev_0}{m}\right)^2} = 37,5 \cdot 10^9 \text{ м/с}^2.$$

$$5.28. F = \frac{\mu_0 n i |e| v}{2} = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ Н.}$$

$$5.29. W_k = 4,8 \text{ МэВ}; v = 3 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$5.30. B = \frac{\sqrt{2mW_k}}{qR} = 1 \text{ Тл.}$$

$$5.31. F/L = 0,0125 \text{ Н/м.}$$

$$5.32. F = 10 \text{ мН.}$$

$$5.33. i_2 = \frac{2\pi b(a+b)mg}{\mu_0 i_1 a^2}.$$

$$5.34. F = 0,1 \text{ Н.}$$

$$5.35. p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.36. i = \sqrt[3]{\frac{4B^2 p_m}{\mu_0^2 \pi}} = 37 \text{ А}; R = \sqrt[3]{\frac{\mu_0 p_m}{2\pi B}} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$5.37. p_m = \frac{2\pi d^3 B}{\mu_0} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.38. p_m/L = 87,9 \cdot 10^9 \text{ Кл/кг.}$$

$$5.39. p_m = \pi q v R^2 = 6,28 \cdot 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.40. M = abNiB = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}; p_m = abNi = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.41. p_m = 12 \text{ А} \cdot \text{м}^2; M = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$5.42. p_m = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m}} \approx 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2; M = p_m \cdot B \approx 9,26 \cdot 10^{-25} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$5.43. M = \frac{\pi B_F i d^2}{4} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$5.44. H = \sqrt{M_{\max} / 2\mu_0 \pi r^3 \operatorname{tg} \varphi} = 96 \text{ А/м.}$$

$$5.45. i = \frac{2rB_F \operatorname{tg} \alpha}{\mu_0} = 1 \text{ А.}$$

$$5.46. T = \pi \sqrt{2m/3iB} = 0,57 \text{ с.}$$

$$5.47. T = 2\pi \sqrt{m/6iB} = 1,05 \text{ с.}$$

$$5.48. B = \frac{2\pi m}{iT^2} = 6,65 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

$$5.49. \Phi_1/\Phi_2 = 3,81.$$

$$5.50. \Phi = \frac{\mu_0 N_i \cdot b \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi} = 5,65 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

$$5.51. A = 80 \text{ мкДж.}$$

$$5.52. \frac{A}{L} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$$

$$5.53. \frac{A}{L} = - \left( \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \right) \cdot \ln 2 = -5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/м.}$$

$$5.54. A = iBa^2(1 - \cos \theta) = 0,6 \text{ Дж.}$$

$$5.55. \text{а)} A = \frac{\pi i B D^2}{4} = 2,5 \text{ мДж; б)} A = 5 \text{ мДж.}$$

$$5.56. A = 6,84 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$5.57. i = 40 \text{ А.}$$

$$5.58. A = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{\pi} \ln \frac{b + a/2}{b - a/2} = 0,33 \text{ мкДж.}$$

$$5.59. i_0 = \frac{2A}{\mu_0 \ln S} = 3,2 \text{ А.}$$

## 6. Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля

$$6.10. \mathcal{E}_i = \mu_0 \frac{ia}{2\pi t} \ln \left( 1 + \frac{b}{r_0} \right) = 3,45 \cdot 10^{-5} \text{ В.}$$

$$6.11. \mathcal{E}_{i \text{ cp}} = 4nBS = 0,16 \text{ В.}$$

$$6.12. i_1 = \frac{3\mu_0 a \alpha \ln(1 + a/r_0)}{2\pi R} t^2 = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ А.}$$

6.13.  $|\mathcal{E}_i| = 0,8 \text{ В.}$

6.14.  $i = \frac{\mu_0 b i_0 \ln(1 + a/r) \cos(\pi t)}{2R} \approx 3,45 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$

6.15.  $q = \frac{mB}{16\rho D} = 41,4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$

6.16.  $\mathcal{E}_i = 2\pi B \left( \sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{dr}{dt} \cdot t \right) \cdot \frac{dr}{dt}; \text{ при } t=0 \quad \mathcal{E}_i = 3,7 \text{ В; при } t=2 \text{ с } \mathcal{E}_i = 5 \text{ В.}$

6.17.  $\frac{P_2}{P_1} = \left( 1 + \frac{S}{\varepsilon} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) = 1,44.$

6.18.  $q = 5 \cdot 10^{-2} SC = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл; } W = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$

6.19.  $Q = \frac{9B_0^2 S^2 \alpha^2 t^5}{5R} = 0,14 \text{ Дж.}$

6.20.  $q = \frac{\mu_0 i \cdot (a_2 - a_1) \ln(a_2/a_1)}{2\pi R} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$

6.21.  $q = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}.$

6.22.  $q = \frac{\mu_0 i R^2}{2ar} = 62,8 \text{ мкКл.}$

6.23.  $q = \frac{B_0 \ln(\alpha t + 1) S \cos \alpha}{R} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$

6.24.  $v = \frac{\Delta \varphi}{\pi L^2 B} = 16 \text{ с}^{-1}.$

6.25.  $\mathcal{E}_i = \frac{\omega B_0 L^2}{2} \left( 1 + \frac{2}{3} a \cdot L \right) = 0,42 \text{ В.}$

6.26.  $\Delta \varphi = \frac{\mu_0 i \cdot v}{2\pi} \ln 3 = 9 \cdot 10^{-7} \text{ В.}$

6.27.  $\mathcal{E}_m = 132 \text{ В.}$

6.28.  $\mathcal{E}_i = 47,1 \text{ В.}$

6.29. 1)  $q = \frac{BS \sin \alpha_2}{R} = 25 \text{ мКл; } 2) q = \frac{BS(1 - \sin \alpha_1)}{R} = 6,7 \text{ мКл.}$

6.30.  $\mathcal{E}_i = 0.$

6.31.  $\mathcal{E}_s = 10^{-3} \text{ В.}$

6.32.  $N = \frac{2}{D} \cdot \sqrt{\frac{L \cdot l}{\mu_0 \pi}} = 205.$

$$6.33. \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$6.34. q = \frac{\varepsilon_0}{R} \left[ t_1 + \frac{L}{R} \exp \left( -\frac{Rt_1}{L} \right) \right] \approx 180 \text{ Кл.}$$

$$6.35. t = 0,23 \text{ с.}$$

$$6.36. t = 0,69 \text{ с.}$$

$$6.37. \Delta t = \frac{1}{R + r_i} L \cdot \ln \frac{i_m}{\Delta i} = 0,19 \text{ с.}$$

$$6.38. t = 0,69 \text{ с.}$$

$$6.39. Q = \frac{i_0^2 L}{2} \left( 1 - \exp \left( -\frac{2R}{L} \right) \right) = 1,28 \text{ Дж.}$$

$$6.40. L = \frac{(R_1 + R_2) \cdot t}{\ln 3} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

$$6.41. \text{a)} i = \frac{\alpha t}{R} = 0,5 \text{ А; б)} i = \frac{\alpha t}{R} - \frac{\alpha L}{R^2} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Rt}{L} \right) \right) = 0,4 \text{ А.}$$

$$6.42. L_{1,2} = \frac{qR}{i_1} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

$$6.43. t \approx 1,15 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

$$6.44. W_m = 0,5 \text{ Дж.}$$

$$6.45. W_m = 126 \text{ мкДж.}$$

$$6.46. E = cB = 3 \cdot 10^2 \text{ В/м, где } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$6.47. w_m = 2,5 \text{ Дж/м}^3.$$

$$6.48. W_m = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 i^2}{2L} = 1,3 \text{ мДж}, \quad \mathcal{E}_i = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ В.}$$

$$6.49. w_m = \frac{\mu_0 i^2}{8R^2} = 2,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

$$6.50. W_m = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$6.51. W_m = \frac{\mu_0 \mu i^2 \pi R^4}{16} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$$

$$6.52. \frac{W_m}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 18,8 \frac{\text{мкДж}}{\text{м}}$$

## 7. Электромагнитные колебания

$$7.10. q = 7 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$

$$7.11. W_m = \frac{\mu_0 n^2 C^2 \Delta \Phi_0^2 \omega_0^2}{2} = 0,6 \text{ Дж/м}^3.$$

$$7.12. \Phi = -\frac{q_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2)}{\omega_0 C} = 10^{-4} \text{ Вб.}$$

$$7.13. W_M/W_\vartheta = 1.$$

$$7.14. i_m = U_0 \frac{C}{L} = 3,14 \text{ А; } t = \frac{\pi}{2} \sqrt{LC} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

$$7.15. q_m = 10^{-3} \text{ Кл, } i_m = 10 \text{ А, } i = 10 \sin(10^4 t).$$

$$7.16. U = i_m \sqrt{\frac{L}{2C}} = 10 \text{ В.}$$

$$7.17. C = \frac{q_{max}^2}{Li_{max}^2} = 2 \cdot 10^{-9} \Phi, \quad W_{el} = \frac{Li_{max}^2}{8} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

$$7.18. E_s = U_0 / \sqrt{2}.$$

$$7.19. H = \frac{q_0 n}{\sqrt{LC}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{\pi}{2}\right) = 50 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

$$7.20. \delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2,1$$

$$7.21. \Delta\phi = \frac{0,7 \cdot q_0 R \omega_0^2}{\beta} \cdot e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t = \frac{\pi}{4}\right) \approx 70 \text{ В.}$$

$$7.22. W_M/W_\vartheta = 5.$$

$$7.23. W_M/W_\vartheta = 4$$

$$7.24. Q = \frac{15q^2}{32C} = 0,047 \text{ Дж.}$$

$$7.25. v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 132 \text{ Гц, } \Delta v = 16 \text{ Гц.}$$

$$7.26. C = \frac{1}{L[(2\pi v)^2 + (R/2L)^2]} = 1,4 \cdot 10^{-8} \Phi.$$

$$7.27. R \approx \sqrt{\frac{8\eta L}{C}} = 1150 \text{ Ом, уменьшится.}$$

$$7.28. v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 2,3 \text{ кГц, } t = \frac{2L}{R} \ln 2 = 18 \text{ мс.}$$

$$7.29. t = \frac{L}{R} \ln 2 = 17,3 \text{ мс.}$$

$$7.30. W_1/W_2 = 403,4.$$

$$7.31. R = 40 \text{ Ом; } R_k = 2,8 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

$$7.32. t = \frac{\sqrt{LC(4\pi^2 + \delta^2)}}{2\delta} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$7.33. \delta = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{t} \ln \frac{U_0}{U} = 0,22; R = \frac{2L}{t} \ln \frac{U_0}{U} = 11 \text{ Ом.}$$

$$7.34. \omega \approx 3 \cdot 10^6 \text{ рад/с; } \delta = \frac{\pi R}{\sqrt{L/C - R^2/4}} \approx 0,25; i_m = CU_m \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \approx 1,6 \text{ А.}$$

$$7.35. Q = \frac{\omega_0 t}{\ln \eta} = 50.$$

$$7.36. Q = \sqrt{L/(CR^2) - 1/4} = 5,0; \frac{\Delta Q}{Q} \approx \frac{CR^2}{8L} = 0,005 = 0,5\%.$$

$$7.37. \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(4Q^2 + 1)}} \approx \frac{1}{8Q^2 + 2} = 0,0012 = 0,12\%.$$

$$7.38. \varphi = -\arctg \frac{1}{2\pi\nu CR} \approx -47^\circ.$$

$$7.39. \varphi = \arctg \left( \frac{1}{2\pi\nu CR} \right) = 70,5^\circ, i_m = \frac{2\pi\nu CU_m}{\sqrt{(2\pi\nu CR)^2 + 1}} = 12 \text{ мА.}$$

$$7.40. \varphi = \arctg \left( \frac{2\pi\nu L}{R} \right) = 16,2^\circ, i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}} = 1,77 \text{ А.}$$

$$7.41. \text{a) } Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 40,45 \text{ Ом, б) } \varphi = \arctg \left( \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right) = -60^\circ,$$

$$\text{в) } i_m = E_m/Z = 0,2 \text{ А.}$$

$$7.42. C = \frac{1}{\omega^2 L} = 8,5 \text{ мкФ, } Z = 0,8 \text{ Ом.}$$

$$7.43. v_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,13 \text{ МГц, } i_m = \frac{E_m}{R} = 6 \text{ А, } U_{Cm} = U_{Lm} = i_m \sqrt{\frac{L}{C}} = 693 \text{ В.}$$

$$7.44. C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L} = 10,8 \text{ нФ, } i_m = E_m/R = 1,13 \text{ А.}$$

$$7.45. i_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (6\pi\nu L)^2}} = 0,1 \text{ А.}$$

$$7.46. L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 0,1 \text{ Гн.}$$

## 8. Уравнения Максвелла. Ток смещения. Электромагнитные волны

8.11.  $\frac{j_{\max \text{пр}}}{j_{\max \text{см}}} = 10^9.$

8.12. 1)  $j_{\text{см}} = 0;$  2)  $|j_{\text{см}}| = \frac{\epsilon_0 v \Delta U}{(d + vt)^2}.$

8.13.  $\frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{см}}} = \frac{\gamma}{2\pi v \epsilon \epsilon_0} = 2.$

8.14.  $i_{\text{см}} = \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0 \omega \cos \omega t.$

8.15.  $H = \frac{r E_0}{2} (\gamma \cdot \cos \omega t - \epsilon \epsilon_0 \omega \cdot \sin \omega t).$

8.16.  $E = 15 \text{ В/м.}$

8.17.  $v = \sqrt{2\pi R^2 \mu_0 \alpha e / m} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

8.18.  $W_k = 60 \text{ МэВ; } L = 1,5 \cdot 10^6 \text{ м.}$

8.19.  $|dB/dt| = \frac{W_k}{e \pi r^2} = 40 \text{ Тл/с.}$

8.20. 1)  $n = \frac{W_k}{e \cdot (\Delta \Phi / \Delta t)} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ оборотов.}$

2)  $L = n \cdot 2\pi R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ м.}$

8.21.  $j_{\text{полн}} = 0; H = 0.$

8.22.  $H = 0.$

8.23.  $E_0 = \frac{i_0}{\epsilon_0 \omega S} = 7 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$

8.24.  $q = q_0 \cdot e^{\gamma t / \epsilon \epsilon_0}.$

8.25.  $H = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right).$

8.26.  $j_{\text{см}} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{U_0}{d} \omega \sin \omega t; \quad \int_r^R H dr = \frac{\epsilon \epsilon_0 U_0 \pi R^2}{4d} \omega \sin \omega t.$

8.27.  $j_{\text{см}} = 0.$

8.28.  $j_{\text{см}} = \frac{\epsilon_0 q_0 v}{C(d + vt)^2}.$

8.29.  $j_{\text{см}} = \frac{q_0 ad}{S} \cdot \frac{t}{(d + at^2/2)^2}.$

8.30.  $j_{\text{см}} = \epsilon_0 \beta r \text{ (для } r < R); \quad j_{\text{см}} = \frac{\epsilon_0 \beta R^2}{r} \text{ (для } r > R).$

$$8.31. v = \sqrt{\frac{2\epsilon\mu_0\alpha\pi R^2}{m}}.$$

$$8.32. i_{cm} = U_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 S}{Ld}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$$

$$8.33. \lambda = 4\pi \cdot 10^4 \text{ м.}$$

$$8.34. \lambda = c \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0 LS}{d}} = 10,2 \text{ м.}$$

$$8.35. C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = 5 \cdot 10^{-11} \Phi, \text{ где } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$8.36. \text{От } \lambda_1 = 186 \text{ м до } \lambda_2 = 570 \text{ м.}$$

$$8.37. d = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 S L c^2}{\lambda^2} = 3,14 \text{ мм.}$$

$$8.38. \Delta\lambda = \frac{c}{v} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) = 40 \text{ м.}$$

$$8.39. \epsilon = \frac{c^2}{v^2} = 9.$$

$$8.40. E = \sqrt{\frac{S}{c\epsilon_0 \sqrt{\epsilon}}}.$$

$$8.41. I = \frac{4W}{\pi d^2 \tau} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2; \quad E_{max} = \sqrt{\frac{I}{c\epsilon_0}} \approx 2,4 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

$$8.42. \langle S \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2.$$

$$8.43. \lambda = 25,12 \text{ м.}$$

$$8.44. E_0 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

$$8.45. j_{cm(max)} = \frac{\omega \sqrt{2\langle S \rangle \epsilon_0}}{c}.$$

$$8.46. j_{cm(max)} = 2,78 \cdot 10^{-7} \text{ А/м}^2.$$

$$8.47. \langle w \rangle \approx 10^6 \text{ Дж/м}^3; \quad I \approx 10^{15} \text{ Вт/м}^2.$$

$$8.48. W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \pi R^2 t = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

$$8.49. W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \pi R^2 t = 3,12 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

$$8.50. W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2 S t \cos \alpha \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

8.51.  $\langle S \rangle = c\mu_0 H_0^2/2 = 0,47 \text{ Вт/м}^2$ ;  $\langle p \rangle = \mu_0 H_0^2/2 = 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ Па}$ ;  
 $P_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-9} \text{ Па}$ .

8.52.  $p_{\max} = \epsilon_0 E_0^2 \approx 9 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

8.53.  $E_0 = 18,8 \text{ В/м}$ ;  $\langle w \rangle = 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/м}^3$ .

8.54.  $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n E_0^2$ .

8.55.  $\vec{S} = -0,375 \cos^2(\omega t + \alpha) \vec{j}$ .

8.56.  $W = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 S \tau$ .

8.57.  $\Phi = \frac{dW_m}{dt} = \pi R^2 L \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 H^2}{2} \right)$ , где  $R$  – радиус,  $L$  - длина соленоида.

### ***ПРИЛОЖЕНИЕ***

#### Некоторые фундаментальные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$
Масса электрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$
Масса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$
Удельный заряд электрона	$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/кг.}$

**ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ № 1 (1 часть)**

№ Var	Закон Кулона. Напряженность электростатичес- кого поля	Потенциал. Работа по перемещению заряда. Движение заряда в электростатичес- ком поле	Диполь. Диэлектрики. Проводники. Конденсаторы Энергия электростатического поля.
1	1.11; 1.34; 1.74	2.23; 2.49; 2.71	3.12; 3.40; 3.70
2	1.27; 1.48; 1.61	2.27; 2.54; 2.73	3.26; 3.54; 3.84
3	1.12; 1.35; 1.75	2.22; 2.44; 2.70	3.13; 3.41; 3.71
4	1.28; 1.37; 1.62	2.28; 2.55; 2.80	3.27; 3.55; 3.85
5	1.13; 1.39; 1.76	2.21; 2.43; 2.69	3.14; 3.42; 3.72
6	1.29; 1.49; 1.63	2.29; 2.45; 2.67	3.28; 3.56; 3.81
7	1.15; 1.33; 1.77	2.20; 2.42; 2.68	3.15; 3.43; 3.73
8	1.30; 1.50; 1.64	2.30; 2.48; 2.78	3.29; 3.57; 3.77
9	1.17; 1.40; 1.78	2.19; 2.41; 2.67	3.16; 3.44; 3.74
10	1.31; 1.52; 1.65	2.31; 2.56; 2.68	3.30; 3.58; 3.79
11	1.18; 1.41; 1.79	2.18; 2.46; 2.66	3.17; 3.45; 3.75
12	1.32; 1.53; 1.66	2.13; 2.37; 2.59	3.31; 3.59 3.82
13	1.19; 1.42; 1.80	2.17; 2.47; 2.65	3.18; 3.46; 3.76
14	1.17; 1.54; 1.67	2.11; 2.38; 2.80	3.32; 3.60; 3.84
15	1.20; 1.43; 1.81	2.16; 2.53; 2.64	3.19; 3.47; 3.77
16	1.11; 1.58; 1.86	2.19; 2.32; 2.77	3.33; 3.61; 3.75
17	1.21 1.44; 1.68	2.15; 2.36; 2.63	3.20; 3.48; 3.78
18	1.12; 1.56; 1.82	2.30; 2.47; 2.76	3.34; 3.62; 3.72
19	1.22; 1.45; 1.69	2.14; 2.40; 2.62	3.21; 3.49; 3.79
20	1.15; 1.57; 1.83	2.29; 2.50; 2.75	3.35; 3.63; 3.84
21	1.23; 1.46; 1.70	2.13; 2.39; 2.61	3.22; 3.50; 3.80
22	1.12; 1.60; 1.84	2.23; 2.57; 2.74	3.36; 3.64; 3.77
23	1.24; 1.36; 1.71	2.12; 2.35; 2.60	3.23; 3.51; 3.81
24	1.21; 1.55; 1.85	2.26; 2.51; 2.73	3.37; 3.65; 3.74
25	1.25; 1.47; 1.72	2.11; 2.34; 2.59	3.24; 3.52; 3.82
26	1.20; 1.59; 1.83	2.25; 2.52; 2.72	3.38; 3.66; 3.76
27	1.26; 1.38; 1.73	2.24; 2.33; 2.58	3.25; 3.53; 3.83

**ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ № 1 (2 часть)**

№ Var	Закон Био– Савара–Лапласа. Теорема о цир- куляции вектора магнитной индукции	Силы Лоренца и Ампера. Контур с током в магнитном поле	Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля
1	<b>4.10; 4.44; 4.55</b>	<b>5.10; 5.28; 5.44</b>	<b>6.16; 6.27; 6.41</b>
2	<b>4.20; 4.30; 4.50</b>	<b>5.24; 5.42; 5.50</b>	<b>6.24; 6.36; 6.47</b>
3	<b>4.11; 4.43; 4.54</b>	<b>5.1; 5.29; 5.45</b>	<b>6.17; 6.37; 6.45</b>
4	<b>4.21; 4.31; 4.51</b>	<b>5.25; 5.43; 5.59</b>	<b>6.15; 6.25; 6.49</b>
5	<b>4.12a; 4.42; 4.52</b>	<b>5.12; 5.30; 5.46</b>	<b>6.18; 6.27; 6.42</b>
6	<b>4.22; 4.29; 4.43</b>	<b>5.26; 5.38; 5.58</b>	<b>6.21; 6.38; 6.52</b>
7	<b>4.12б; 4.41; 4.51</b>	<b>5.13; 5.31; 5.47</b>	<b>6.19; 6.26; 6.43</b>
8	<b>4.23; 4.34; 4.49</b>	<b>5.27; 5.41; 5.58</b>	<b>6.10; 6.28; 6.51</b>
9	<b>4.12в; 4.40; 4.53</b>	<b>5.14; 5.32; 5.48</b>	<b>6.20; 6.39; 6.45</b>
10	<b>4.24; 4.33; 4.47</b>	<b>5.20; 5.30; 5.55</b>	<b>6.11; 6.27; 6.40</b>
11	<b>4.13a; 4.39; 4.50</b>	<b>5.15; 5.33; 5.49</b>	<b>6.25; 6.40; 6.50</b>
12	<b>4.25; 4.33; 4.49</b>	<b>5.19; 5.33; 5.54</b>	<b>6.10; 6.29; 6.44</b>
13	<b>4.13б 4.38; 4.54</b>	<b>5.16; 5.34; 5.50</b>	<b>6.26; 6.38; 6.48</b>
14	<b>4.26; 4.40; 4.51</b>	<b>5.23; 5.36; 5.59</b>	<b>6.12; 6.30; 6.52</b>
15	<b>4.13в; 4.37; 4.48</b>	<b>5.17; 5.35; 5.51</b>	<b>6.18; 6.29; 6.43</b>
16	<b>4.27; 4.25; 4.50</b>	<b>5.11; 5.38; 5.48</b>	<b>6.13; 6.31; 6.47</b>
17	<b>4.14; 4.36; 4.45</b>	<b>5.18; 5.36; 5.52</b>	<b>6.26; 6.39; 6.44</b>
18	<b>4.28; 4.41; 4.49</b>	<b>5.12; 5.31; 5.47</b>	<b>6.14; 6.32; 6.46</b>
19	<b>4.15; 4.35; 4.48</b>	<b>5.19; 5.37; 5.53</b>	<b>6.11; 6.27; 6.52</b>
20	<b>4.29; 4.33; 4.48</b>	<b>5.14; 5.29; 5.55</b>	<b>6.15; 6.33; 6.45</b>
21	<b>4.16; 4.34; 4.50</b>	<b>5.20; 5.38; 5.54</b>	<b>6.18; 6.29; 6.43</b>
22	<b>4.14; 4.31; 4.47</b>	<b>5.15; 5.32; 5.51</b>	<b>6.21; 6.34; 6.49</b>
23	<b>4.17; 4.33; 4.55</b>	<b>5.21; 5.39; 5.55</b>	<b>6.11; 6.22; 6.44</b>
24	<b>4.12в; 4.46; 4.53</b>	<b>5.13; 5.36; 5.52</b>	<b>6.22; 6.40; 6.51</b>
25	<b>4.18; 4.32; 4.47</b>	<b>5.22; 5.40; 5.56</b>	<b>6.14; 6.35; 6.46</b>
26	<b>4.13б; 4.37; 4.45</b>	<b>5.10; 5.28; 5.34</b>	<b>6.23; 6.39; 6.50</b>
27	<b>4.19; 4.31; 4.42</b>	<b>5.23; 5.41; 5.57</b>	<b>6.16; 6.28; 6.48</b>

***ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ № 2 (1 часть)***

№ Вар	Электромагнитные колебания	Уравнения Максвелла. Ток смещения. Электромагнитные волны
1	<b>7.17; 7.36</b>	<b>8.11; 8.25; 8.38</b>
2	<b>7.23; 7.44</b>	<b>8.23; 8.31; 8.45</b>
3	<b>7.16; 7.35</b>	<b>8.12; 8.26; 8.39</b>
4	<b>7.10; 7.25</b>	<b>8.24; 8.33; 8.50</b>
5	<b>7.15; 7.34</b>	<b>8.13; 8.27; 8.40</b>
6	<b>7.19; 7.39</b>	<b>8.14; 8.37; 8.49</b>
7	<b>7.14; 7.32</b>	<b>8.18; 8.28; 8.53</b>
8	<b>7.25; 7.43</b>	<b>8.13; 8.35; 8.41</b>
9	<b>7.13; 7.29</b>	<b>8.19; 8.34; 8.57</b>
10	<b>7.20; 7.46</b>	<b>8.24; 8.32; 8.48</b>
11	<b>7.12; 7.28</b>	<b>8.16; 8.36; 8.42</b>
12	<b>7.20; 7.41</b>	<b>8.14; 8.29; 8.51</b>
13	<b>7.11; 7.42</b>	<b>8.13; 8.37; 8.43</b>
14	<b>7.16; 7.31</b>	<b>8.15; 8.26; 8.40</b>
15	<b>7.10; 7.40</b>	<b>8.12; 8.30; 8.52</b>
16	<b>7.23; 7.45</b>	<b>8.20; 8.36; 8.50</b>
17	<b>7.18; 7.30</b>	<b>8.17; 8.25; 8.44</b>
18	<b>7.14; 7.39</b>	<b>8.19; 8.34; 8.54</b>
19	<b>7.19; 7.37</b>	<b>8.16; 8.31; 8.49</b>
20	<b>7.15; 7.38</b>	<b>8.13; 8.33; 8.45</b>
21	<b>7.20; 7.43</b>	<b>8.17; 8.26; 8.52</b>
22	<b>7.13; 7.44</b>	<b>8.15; 8.34; 8.46</b>
23	<b>7.21; 7.46</b>	<b>8.21; 8.35; 8.55</b>
24	<b>7.11; 7.27</b>	<b>8.11; 8.32; 8.47</b>
25	<b>7.22; 7.45</b>	<b>8.22; 8.37; 8.56</b>
26	<b>7.18; 7.26</b>	<b>8.20; 8.31; 8.48</b>
27	<b>7.24; 7.38</b>	<b>8.13; 8.34; 8.54</b>

***ЛИТЕРАТУРА***

1. Савельев И.В. Курс физики, т.2 - М, Наука, 1989 г.
2. Калашников «Электричество»- М, 1988 г.
3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике - М; Наука, 1988 г.
4. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М; Высшая школа, 1988 г.
5. Сивухин Д.В., Общий курс физики. Оптика, М., Наука, 1980 г.
6. Волькенштейн В.С., Сборник задач по общему курсу физики.- М., Наука, 1985г.
7. Хохлачева Г.М., Юркевич К.Б., Рудакова Л.И., Соколова Е.Ю. Практический курс физики. Электричество. Волновая оптика. М., ОАО «Авиаиздат», 2006 г.

## **Учебное пособие**

**Гета Михайловна Хохлачева  
Людмила Андреевна Лаушкина  
Галина Энгелевна Солохина**

**ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС ФИЗИКИ**

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО**