Лекция 1.

§1. Понятие комплексного числа.

С комплексными числами исследователи сталкивались еще в глубокой древности, когда ученые вычисляли корни алгебраического уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Если $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$, то действительных корней нет. Если иметь дело только с действительными числами, то многие задачи, приводящие к квадратным уравнениям, не имеют решений. Чтобы обойти эти сложности, математики предложили рассмотреть некий значок i, который удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Никто не рассматривал его как число, а только как вспомогательный символ. Используя его, можем записать решение квадратного уравнения при $D < 0$ в виде

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{|D|}$$

С этим выражением можно работать как с числом. В этом не сложно убедиться.

Действительно, пусть дано выражение $a + ib$, где a и b -- действительные числа, а $i^2 = -1$. Значок ib будем называть мнимой частью нашего выражения, a -- действительной частью. Определим теперь операцию сложение для этих выражений:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Имеем выражение того же вида!

Умножение:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2) =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

Опять таки, имеем выражение того же вида.

Деление:

$$\frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}\frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Справедливы законы сложения и вычитания:

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$

1. Переместительный закон: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1;\ z_1z_2 = z_2z_1$
2. Сочетательный закон: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;\ (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
3. Распределительный закон: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

Математики XIX- го века не считали эти выражения числами, так как эти выражения не связаны с материальным миром. И только после статьи Гаусса «Теория биквадратичных вычетов» (1831), в которой Гаусс дает геометрическую интерпретацию комплексным выражениям (об этой интерпретации речь пойдет ниже), а также интерпретирует $+1, -1, +i, -i$ в виде элементов отображения $R^2 \to R^2$ ($+1$ -- перемещение нуля вправо, -1 -- перемещение нуля влево, $+i$ -- перемещение нуля вверх, $-i$ -- перемещение нуля вниз), математики признали символы $+i, -i$ как числа.

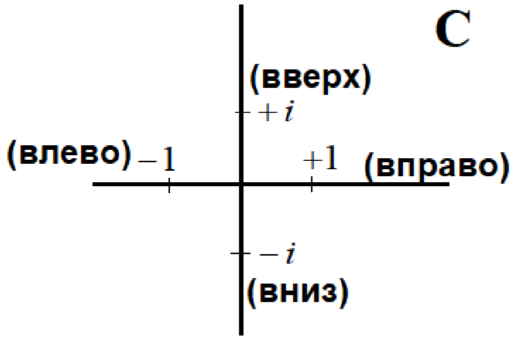

Рис. 1Интерпретация Гауссом чисел $+1, -1, +i, -i$

§2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть $z = a + ib$. Число z можно интерпретировать точкой с координатами $x = a,\ y = b$ на плоскости R^2.

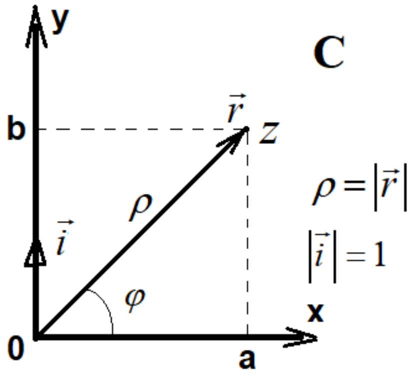

Рис.2

Здесь x -- действительная ось, y -- мнимая ось. Известно также, что пару точек (a,b) на плоскости можно интерпретировать вектором $\vec{r}$. Поэтому комплексное число z будем интерпретировать вектором $\vec{r}$, идущим из начала координат в точку с координатами (a,b). Оказывается, что векторная интерпретация комплексного числа наиболее удачная, так как арифметические операции над комплексными числами удобно изображать в векторном виде.

Положим $|\vec{r}| = \rho$, φ -- полярный угол. Тогда

$$r_x = a = \rho\cos\varphi,\ r_y = b = \rho\sin\varphi$$

Число ρ называют модулем числа z, φ -- аргумент числа z: $\rho = |z|,\ \ \varphi = \operatorname{Arg} z$. Несложно видеть, что

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до $2k\pi$:

$$\varphi \equiv \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ 0 \le \arg z < 2\pi$$

Итак, для комплексного числа z однозначно находится ρ, но φ определяется неоднохначно. Имеем

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad (1)$$

Сложение комплексных чисел. (см. рис.3)

Комплексные числа складываются как векторы (**проверить** !)

Умножение комплексных чисел

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Отсюда имеем $\quad \rho = \rho_1\rho_2, \ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (2)$

Итак, умножение двух комплексных чисел ведет к перемножению их модулей и сложение аргументов.

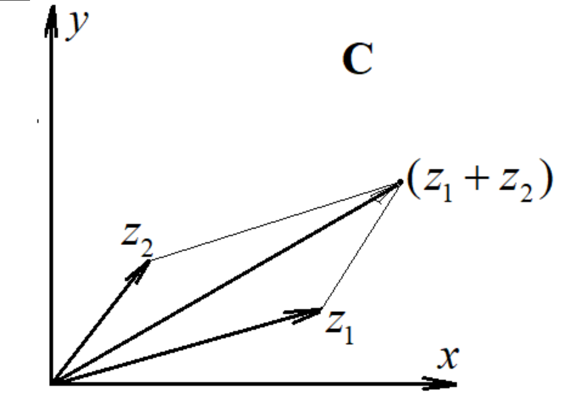

Рис.3

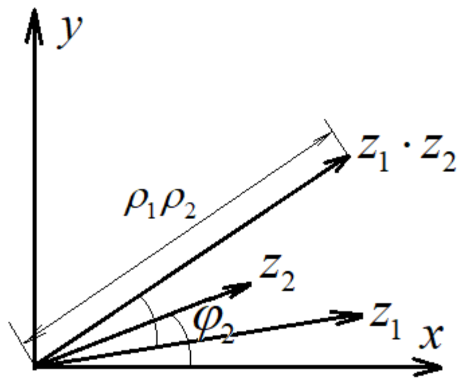

Рис.4

Из формулы (2) следует векторная интерпретация умножения комплексных чисел (рис. 4)

Из формулы умножения двух чисел z_1, z_2 следует, что

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

С другой стороны, из равенства $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ явствует, что $z^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$. Поэтому имеем формулу Муавра:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Извлечение корней

Рассмотрим уравнение $z^n = w$. Пусть

$$|z| = \rho, \ \arg z = \varphi, \ |w| = R, \ \arg w = \psi, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le \psi < 2\pi$$

Тогда

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{R}, \ \varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}} \quad k = 0,1,2...,(n-1)$$

Итак, модулю $\rho = \sqrt[n]{R}$ искомого корня уравнения $z^n = w$ соответствует n главных значений аргумента φ, т.е. значений, удовлетворяющих неравенству $0 \le \varphi < 2\pi$.

§3. Предел последовательности комплексных чисел

Для построения теории функций комплексного переменного большое значение имеет факт переноса многих фундаментальных понятий вещественного анализа в комплексную область.

Пусть $\{z_n\}$ $(n = 1,2,3,...)$ -- бесконечная последовательность комплексных чисел. Введем понятие предела этой последовательности чисел.

Определение окрестности. *Под ε окрестностью точки z будем подразумевать множество точек z' комплексной плоскости, принадлежащих внутренности круга радиуса ε.*

Окрестность точки z задается неравенством

$$|z - z'| < \varepsilon$$

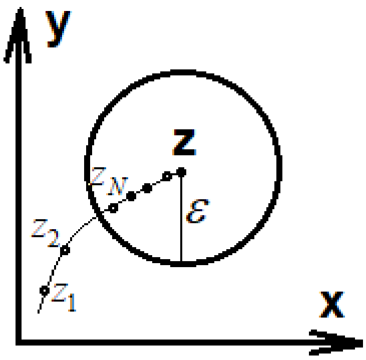

Рис. 5

Определение предела последовательности. *Последовательность* $\{z_n\}$ *называется сходящейся к пределу* z, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *все точки последовательности, начиная с некоторого номера* $N(\varepsilon)$, *принадлежат* ε*-окрестности точки* z (см. рис. 5)

Итак, при $n \ge N(\varepsilon)$ имеем $|z_n - z| < \varepsilon$ и это условие выполняется при любом, сколь угодно малом ε ! Пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Пусть $z_n = a_n + ib_n$, $z = a + ib$.

Лемма. *Равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = a + ib$ *эквивалентно двум равенствам*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = a + ib$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \ge N(\varepsilon)$ все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки z, т.е. $|z_n - z| < \varepsilon$. Это значит, что $|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$, поэтому $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$. Но это значит, в силу определения предела последовательности вещественных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N_1(\varepsilon)$ такое, что при $n \ge N_1(\varepsilon)$ имеем $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Тогда $|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$ при $n \ge N_1(\varepsilon)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Теорема доказана.

Эта лемма позволяет перевести всю теорию последовательности вещественных чисел на последовательность комплексных чисел.

Критерий Коши. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $N(\varepsilon)$, *что*

$$|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$$

при $n \ge N(\varepsilon)$ *и любом* $m \ge 0$.

Понятие бесконечно-удаленной точки комплексной плоскости. Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ такая, что для любого положительного, большего числа R найдется номер N такой, что при $n \geq N$ будем иметь $|z_n| > R$

Это определение указывает на то, что $|z_n|$ могут принимать бесконечно большие значения, и предела у последовательности нет. Однако мы можем ввести в рассмотрение понятие бесконечно удаленной точки $z = \infty$ комплексной плоскости. Тогда мы сможем записать, что

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

Это понятие основано на некоторой договоренности. А именно, введем понятие ρ-окрестности бесконечно удаленной точки как множество комплексных чисел z, удовлетворяющих неравенству $|z| > \rho$.

Тогда мы говорим, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ *тогда и только тогда, когда для любого* ρ *существует* $N(\rho)$ *такое, что все точки последовательности* $\{z_n\}$ *принадлежат этой окрестности, начиная с номера* $n \geq N(\rho)$.

Бесконечность и стереографическая проекция

Чтобы получить геометрическое изображение числа ∞, прибегают к представлению комплексных чисел точками сферы.

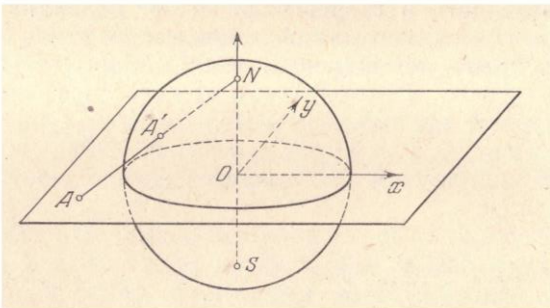

Рис. 6

Здесь Y, X -- комплексная плоскость. Из точки 0 этой плоскости описываем сферу радиуса единица. Верхнюю полусферу отображаем взаимно-однозначно на плоскость Y, X следующим образом. Берем произвольную точку A' сферы и соединяем ее с северным полюсом N сферы. Далее продолжаем отрезок до пересечения с плоскостью Y, X в точке A. Таким образом, точке A' ставится в соответствие точка A комплексной плоскости. Аналогично, берем произвольную точку A комплексной плоскости и ставим ей в соответствие точку A' сферы, как это изображено на рисунке.

Итак, существует взаимно-однозначное соответствие между точками комплексной плоскости и точками полусферы. С точностью до этого соответствия мы можем отождествить комплексную плоскость с верхней полусферой. Тогда северному полюсу N сферы будет отвечать бесконечно удаленная точка $z = \infty$ комплексной плоскости.

Определение *Комплексную плоскость, дополненную точкой* $z = \infty$, *называют полной комплексной плоскостью*.