МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

В. П. ДЕМКОВ, О. И. СУРОВ, А. В. ЦИПЕНКО

Ф И З И К А

Э Л Е К Т Р О Д И Н А М И К А

Электростатика
Постоянный ток

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
14 октября 2019 г.

Москва
Издательство МАИ
2020

Демков В. П., Суров О. И., Ципенко А. В. Физика. Электродинамика. Электростатика. Постоянный ток: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2020. 156 с.: ил.

Этой книгой начинается изложение раздела «Электродинамика» курса общей физики для инженерно-технических специальностей вузов. Содержание и расположение материала пособия соответствуют курсу лекций, читаемых студентам МАИ.

В книгу включены темы по электростатике и постоянному току. Каждая тема содержит теоретическую часть, задачи с подробными решениями и тесты. Задачи связаны с текстом и часто являются его развитием и дополнением. Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения, и тесты снабжены ответами.

Ссылки на §§1 14 и формулы с номерами (1.x) (14.x) адресуют читателя к книгам [14] [16], продолжением которых является настоящее учебное пособие тех же авторов.

Для студентов и преподавателей высших технических учебных заведений.

Рецензенты:

кафедра физики Уфимского государственного авиационного технического университета (зав. кафедрой доктор техн. наук, профессор *И. В. Александров*);

кандидат физ.-мат. наук, доцент МГУ им. М. В. Ломоносова *В. С. Козловский*

ISBN 978-5-4316-0670-0

Введение

Как показывает опыт, между электрически заряженными или намагниченными телами, а также телами, по которым текут электрические токи, действуют силы, называемые *электромагнитными*. В процессе развития физики на природу возникновения этих сил существовало две точки зрения. Долгое время предполагалось, что заряженным или намагниченным телам и токам присуще свойство действовать на другие тела и токи на расстоянии без участия каких бы то ни было промежуточных материальных посредников и что при наличии только одного тела никаких изменений в окружающем пространстве не происходит (*теория дальнодействия*). При этом взаимодействие осуществляется с бесконечно большой скоростью. Дальнейшие экспериментальные исследования электромагнитных явлений показали несоответствие теории дальнодействия физическому опыту. Кроме того, теория дальнодействия находится в противоречии со следствиями постулатов специальной теории относительности, в соответствии с которыми скорость передачи взаимодействия тел ограничена и не должна превышать скорость света в вакууме.

Несколько позже появилась другая точка зрения – силовые взаимодействия между разобщенными телами могут передаваться только при наличии некоторой среды, окружающей эти тела, последовательно от одной части этой среды к другой. При этом наличие даже одного тела приводит к определенным изменениям в окружающем пространстве (*теория близкодействия*). Было установлено, что электромагнитное взаимодействие происходит не мгновенно – скорость распространения взаимодействия равна скорости света. В настоящее время физика сохраняет только теорию близкодействия, основоположником которой считается Фарадей. Согласно Фарадею, действие одного тела на другое может либо осуществляться непосредственным соприкосновением, либо передаваться через промежуточную среду. Таким образом, для понимания происхождения и передачи электромагнитного взаимодействия тел на расстоянии необходимо допустить наличие некоторой среды, создаваемой телами в окружающем пространстве. Такой средой является особый вид материи – *электромагнитное поле*.

Дж. Максвелл путем обобщения опытных фактов облек основные идеи Фарадея в математическую форму, сформулировав систему уравнений электродинамики, в которой содержатся все количественные законы электромагнитного поля. Уравнения Максвелла играют в электродинамике такую же роль, какую законы Ньютона играют в классической механике. Установление этих уравнений является одним из наиболее крупных открытий физики XIX века.

Максвелл показал, что из его уравнений следует существование электромагнитных волн, и вычислил скорость их распространения. Оказалось, что в вакууме эта скорость совпадает со скоростью света. Электромагнитные волны впервые были получены и экспериментально исследованы в знаменитых опытах Герца. Их свойства оказались в точности такими, как предсказывала теория Максвелла. Поэтому после опытов Герца вопрос о характере электромагнитных взаимодействий был однозначно решен в пользу теории поля.

Современная физика утверждает, что электромагнитное поле реально существует и, наряду с веществом, является одним из видов материи. Поле обладает энергией, импульсом и другими физическими свойствами.

§15. Электрическое поле в вакууме

Как известно, электромагнитное взаимодействие является одним из четырех видов фундаментальных взаимодействий, каждое из которых связано с определенной характеристикой взаимодействующих частиц. Например, если гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, то электромагнитное взаимодействие зависит от электрических зарядов частиц. *Электрический заряд* – это скалярная физическая величина, которая является одной из основных характеристик частиц.

Существует два вида электрических зарядов. Принято одни заряды называть положительными, другие – отрицательными. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине и равен $1{,}6\ 10^{-19}$ Кл. Его называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e. К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (отрицательный элементарный заряд), протон (положительный элементарный заряд), нейтрон (заряд равен нулю). Из этих частиц состоят атомы любого вещества, поэтому элементарные заряды входят в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в теле в равных количествах и распределены с одинаковой плотностью. При этом алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным. Если каким-либо образом создать в теле избыток зарядов одного знака, тело окажется заряженным. Поскольку заряд q тела образуется совокупностью элементарных зарядов, то он всегда будет кратным e:

$$q \qquad N e, \qquad N \quad 1, 2, 3, \ldots$$

Если физическая величина может принимать только определенные дискретные значения, то говорят, что эта величина квантуется. Следовательно, *электрический заряд квантован*.

Экспериментально установлено, что величина заряда, измеренная в различных системах отсчета, одинакова. Это означает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится, то есть *электрический заряд является инвариантом*.

Электрические заряды могут исчезать и появляться вновь. Однако всегда исчезают или появляются два элементарных заряда противоположных знаков. Например, электрон и позитрон (частица массой, равной массе электрона, и с положительным элементарным зарядом) при взаимодействии исчезают (аннигилируют), превращаясь в два нейтральных -кванта. В ходе процесса, называемого рождением пары, -квант вблизи атомного ядра превращается в пару частиц – электрон и позитрон. Таким образом, суммарный электрический заряд не изменяется. Опыт показывает, что это справедливо для любых процессов взаимодействия частиц, в которых изменяется их состав: *суммарный заряд электрически изолированной системы* (то есть такой системы, в которой через поверхность, ее ограничивающую, не переносятся электрические заряды) *со временем не изменяется*, *какие бы процессы не протекали в системе*. Это утверждение называют **законом сохранения заряда**.

Электрические заряды наделяют окружающее их пространство особыми физическими свойствами – создают электромагнитное поле. Основным его свойством является то, что на находящуюся в нем заряженную частицу действует некоторая сила. Раздел физики – *электростатика* – изучает постоянное во времени поле, создаваемое неподвижными зарядами. Такое поле называется *электростатическим*.

15.1. Закон Кулона

Тот факт, что тело имеет электрический заряд, может быть обнаружен, если к этому телу поднести другое заряженное тело. Опыт показывает, что тела, обладающие зарядами одного знака (одноименно заряженные), отталкиваются друг от друга, а тела, обладающие зарядами разных знаков (разноименно заряженные), притягиваются. Впервые количественное значение силы взаимодействия заряженных тел было получено Ш. Кулоном для точечных зарядов. При этом под *точечным зарядом* понимают заряженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

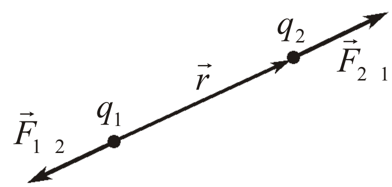


Рис. 15.1

Рассмотрим два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2, расстояние между которыми равно r (рис. 15.1). Пусть $\vec{F}_{21}$ – сила, с которой заряд q_1 действует на заряд q_2, а $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2. Тщательные измерения показывают, что *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна величинам этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды*. Это утверждение выражает **закон Кулона**. Математически в системе СИ его записывают в виде

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}; \quad \vec{F}_{12} = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}; \quad F_{12} = F_{21} = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{15.1}$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный от заряда q_1 к заряду q_2; r – его модуль, то есть расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н$\cdot$м^2) – *электрическая постоянная*.

Легко заметить, что соотношения (15.1) справедливы для любых знаков зарядов q_1 и q_2.

Рассмотрим систему N неподвижных точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$). Опыт показывает, что сила, с которой заряд q_i действует на некоторый точечный заряд q, не зависит от присутствия других зарядов:

$$\vec{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i, \tag{15.2}$$

где $\vec{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд q_i с зарядом q; r_i – его модуль.

Очевидно, что результирующая сила $\vec{F}$, с которой система зарядов q_i действует на заряд q, равна векторной сумме сил $\vec{F}_i$, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \tag{15.3}$$

Это утверждение выражает **принцип суперпозиции сил**. Свойство суперпозиции используется в электростатике при рассмотрении взаимодействия заряженных тел, которые нельзя считать точечными.

15.2. Напряженность электрического поля

Согласно теории близкодействия силовые взаимодействия между разобщенными электрически заряженными телами могут передаваться только при наличии некоторой среды, окружающей эти тела. В случае неподвижных зарядов такой средой является *электрическое поле*, которое создается заряженными телами в окружающем их пространстве.

Судить о существовании электрического поля в данной точке пространства можно только по наличию силы, с которой поле действует на помещенный в эту точку электрический заряд.

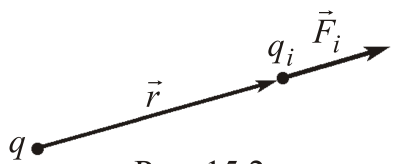


Рис. 15.2

Исследуем электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q. Для этого будем поочередно помещать в точку, положение которой относительно заряда q задано радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 15.2), точечные заряды q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Из (15.1) следует, что при изменении заряда q_i сила

$$\vec{F}_i = \frac{q\,q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad (15.4)$$

также будет меняться. Поскольку правая часть отношения

$$\frac{\vec{F}_i}{q_i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad (15.5)$$

не зависит от величины заряда q_i, а определяется лишь зарядом q и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным в данную точку пространства, то можно сделать вывод, что отношение $\vec{F}_i/q_i$ характеризует электрическое поле, которое существует в данной точке безотносительно к заряду q_i.

Вектор, равный отношению силы $\vec{F}$, с которой заряд q действует на малый положительный точечный заряд q (так называемый *пробный заряд*), помещенный в некоторую точку пространства, к величине пробного заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (15.6)$$

называется *напряженностью электрического поля*, создаваемого зарядом q в данной точке.

Из соотношений (15.5) и (15.6) следует, что напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}; \qquad E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (15.7)$$

Рассмотрим систему, состоящую из N точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), и вычислим результирующую силу, действующую на пробный заряд q, помещенный в некоторую точку пространства. Согласно (15.3), она будет равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы. Разделив обе части соотношения (15.3) на q, получим

$$\frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{F}_i}{q}. \qquad (15.8)$$

Поскольку отношение $\vec{F}_i/q$ есть напряженность электрического поля $\vec{E}_i$, создаваемого зарядом q_i в точке, где расположен заряд q, то напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{F}/q$ системы зарядов в данной точке

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i, \qquad (15.9)$$

то есть векторы напряженности электрического поля подчиняются, как и векторы сил, **принципу суперпозиции**.

Используя понятие электрического поля, можно перейти к другому способу описания взаимодействия зарядов. Так, вместо утверждения о том, что на некоторый заряд q действует заряд q_i (система зарядов q_i) с силой $\vec{F}$ можно сказать, что заряд q_i (система зарядов q_i) создает электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ и на заряд q, находящийся в этом поле, действует сила

$$\vec{F} \quad q\vec{E}. \tag{15.10}$$

При этом направление силы $\vec{F}$ совпадает с направлением напряженности электрического поля $\vec{E}$, если заряд q положительный, и направления векторов $\vec{F}$ и $\vec{E}$ противоположны, если заряд q отрицательный. Такой способ описания взаимодействия очень удобен, так как формула (15.10), в отличие от закона Кулона, справедлива для электрических полей, создаваемых любой системой зарядов.

Для описания электрического поля нужно задать векторы напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически в виде зависимости напряженности поля от координат. Для наглядности такую зависимость можно представить графически с помощью силовых линий (рис. 15.3). *Силовой линией* называют такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Поскольку касательная может иметь два взаимно противоположных направления, то силовым линиям приписывают определенное направление, отмечая его на чертеже стрелкой в направлении вектора напряженности. При этом силовые линии нигде не пересекаются и не касаются друг друга. В противном случае в точках их пересечения (касания) вектор напряженности поля имел бы одновременно разные направления.

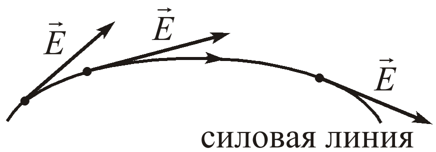
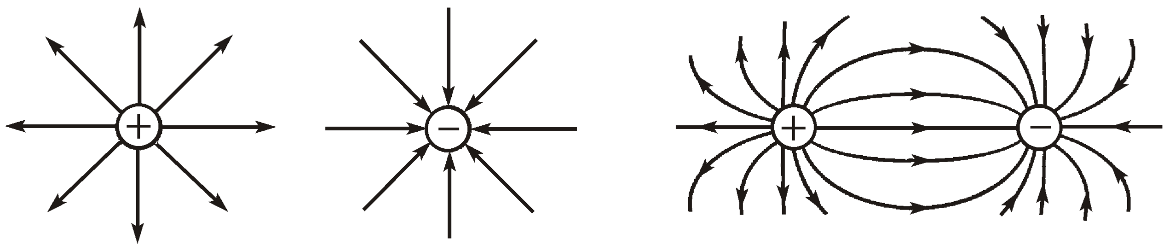


Рис. 15.3



а) *б*) *в*)

Рис. 15.4

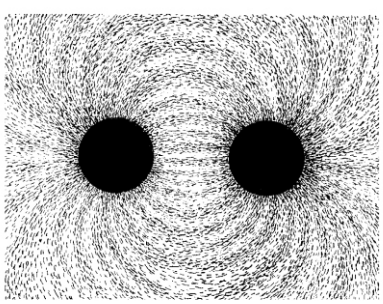


Рис. 15.5

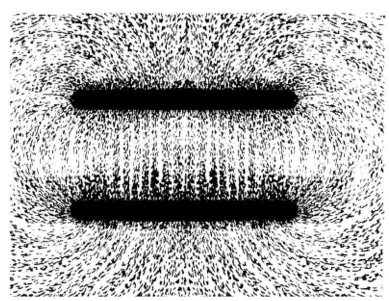


Рис. 15.6

Рассмотрим положительный точечный заряд q. Перемещая в поле заряда q пробный заряд q , можно построить векторы напряженности в каждой его точке. Сила, с которой заряд q действует на пробный заряд q , направлена вдоль линий, соединяющих заряды, к заряду q . Точно так же будут направлены и векторы напряженности поля заряда q. Поэтому картина силовых линий для положительного заряда будет иметь вид, представленный на рис. 15.4, *а*. Аналогично можно построить силовые линии для отрицательного заряда (рис. 15.4, *б*) и, например, для двух точечных зарядов разных знаков (рис. 15.4, *в*). В случае заряженных тел сложной формы картину силовых линий можно получить экспериментально. Не вникая в подробности таких опытов, приведем картины силовых линий двух разноименно заряженных шариков (рис. 15.5) и двух разноименно заряженных пластин (рис. 15.6).

Обратим внимание на то, что вблизи зарядов, где напряженность электрического поля больше, силовые линии расположены гуще. Этот факт дает общее правило изображения силовых линий: число силовых линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную направлению $\vec{E}$, должно быть пропорционально величине напряженности поля в данном месте.

Из определения силовых линий следует, что они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или «уходят» на бесконечность от положительного заряда; или «приходят» из бесконечности к отрицательному заряду). Кроме того, силовые линии не замкнуты, не пересекаются и не касаются друг друга.

Наконец, обратим внимание на картину силовых линий поля, созданного двумя разноименно заряженными параллельными пластинами (рис. 15.6): силовые линии между пластинами параллельны и расположены на равных расстояниях друг от друга, исключая области вблизи краев пластин. Таким образом, в центральной части напряженность электрического поля во всех точках одинакова. Такие электрические поля называют *однородными*.

15.3. Потенциал электрического поля

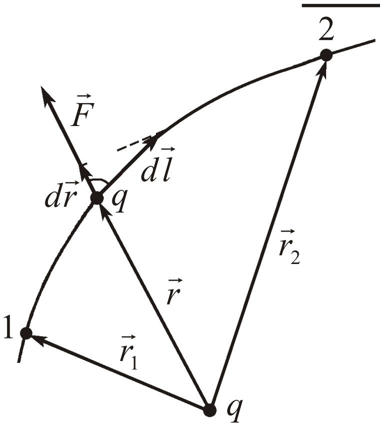


Рис. 15.7

Рассмотрим электрическое поле, созданное точечным зарядом q. В любой точке этого поля на пробный заряд q действует сила (см. формулу (15.1))

$$\vec{F} \quad \frac{q\ q}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}.$$

Эта сила является центральной. Поле такой силы консервативно, и работа, которая совершается силами поля над зарядом q при перемещении его из одной точки в другую, не зависит от пути. Это означает, что в электрическом поле можно ввести понятие потенциальной энергии одного заряда в силовом поле другого.

Пусть заряд $q \quad 0$. Вычислим работу силы $\vec{F}$ при перемещении заряда q из точки *1* в точку *2* (рис. 15.7) по произвольной траектории:

$$A_{1\ 2} \quad {}_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) \quad {}_1^2 \frac{q\ q}{4 \quad {}_0 r^3}(\vec{r}, d\vec{l}) \quad {}_1^2 \frac{q\ q}{4 \quad {}_0 r^2}\cos \quad dl, \qquad (15.11)$$

где – угол между направлением радиус-вектора $\vec{r}$ и бесконечно малым перемещением $d\vec{l}$. Из рисунка видно, что произведение $dl\cos$ равно величине приращения $dr \quad |d\vec{r}|$ радиус-вектора $\vec{r}$ в данной точке траектории. Следовательно,

$$A_{1\ 2} \quad \frac{q\ q}{4 \quad {}_0}{}_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} \quad \frac{q\ q}{4 \quad {}_0} \quad \frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} \quad \frac{q\ q}{4 \quad {}_0 r_1} \quad \frac{q\ q}{4 \quad {}_0 r_2}. \qquad (15.12)$$

Легко проверить, что при $q \quad 0$ выражение (15.12) не изменится.

Поскольку работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии

$$A_{1\to 2} = W_1 - W_2 \qquad (15.13)$$

(в электростатике энергию принято обозначать буквой W), то из (15.12) следует:

$$W_1 = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \text{const}; \qquad W_2 = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \text{const}.$$

Очевидно, если нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбрать на бесконечности, то const $= 0$ и потенциальная энергия заряда q', находящегося на расстоянии r от заряда q,

$$W = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (15.14)$$

Если вместо пробного заряда q' в данную точку поля заряда q поместить произвольный заряд q_i, то его потенциальная энергия будет равна

$$W_i = \frac{q_i\,q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

однако отношение

$$\frac{W_i}{q_i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

не изменится, поскольку оно не зависит от значения q_i, а определяется лишь зарядом q и расстоянием r от него до данной точки пространства. Поэтому отношение W_i/q_i, наряду с напряженностью $\vec{E}$, является характеристикой электрического поля.

Скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии пробного заряда q' в электрическом поле заряда q к величине пробного заряда

$$\varphi = \frac{W}{q'}, \qquad (15.15)$$

называется *потенциалом электрического поля* заряда q в данной точке.

Из определения потенциала следует, что потенциал точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (15.16)$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой N неподвижных точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), расстояние от каждого из которых до некоторой точки поля равно r_i. Работа, совершаемая силами этого поля при перемещении заряда q' из точки *1* в точку *2*, будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N} A_i.$$

Согласно (15.12), каждая из работ A_i равна

$$A_i = \frac{q'\,q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,1}} - \frac{q'\,q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,2}},$$

где $r_{i,1}, r_{i,2}$ – расстояния от заряда q_i до начального и конечного положений заряда q' соответственно. Следовательно,

$$A_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q'\,q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,1}} - \sum_{i=1}^{N} \frac{q'\,q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,2}}.$$

Сопоставив данное соотношение с (15.13), получим выражение для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов

$$W = q\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i},$$

из которого следует, что потенциал поля системы зарядов в данной точке

$$\varphi = \frac{W}{q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i. \tag{15.17}$$

Используя определение потенциала (15.15), выражение для работы (15.13) можно переписать в виде

$$A_{1-2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{15.18}$$

Поскольку потенциал точечного заряда убывает обратно пропорционально расстоянию от него до рассматриваемой точки поля, то на бесконечности $\varphi_\infty = 0$. Поэтому работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность численно равна потенциалу в этой точке:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}. \tag{15.19}$$

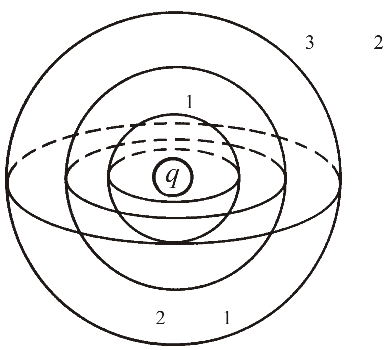


Рис. 15.8

Потенциал можно использовать, подобно линиям напряженности, для графического изображения электрического поля. Объединяя в электрическом поле точки, обладающие одинаковым потенциалом, получают некоторые поверхности, называемые *поверхностями равного потенциала* или *эквипотенциальными поверхностями*. Как и силовые линии электрического поля, эквипотенциальные поверхности не пересекаются и не касаются друг друга. Очевидно, что для уединенных точечных зарядов эквипотенциальные поверхности представляют собой совокупность сфер с общим центром, расположенным на заряде (рис. 15.8).

15.4. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля

Электрическое поле можно описать либо с помощью напряженности, либо с помощью потенциала. Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь.

Как известно из механики, консервативная сила $\vec{F}$ связана с потенциальной энергией W соотношением [14, §4, (4.32)]

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W = -\vec{\nabla} W.$$

Для заряженной частицы, находящейся в электрическом поле, $\vec{F} = q\vec{E}$, $W = q\varphi$. Следовательно,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi, \tag{15.20}$$

то есть *напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком.*

Приняв во внимание определение градиента

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

найдем проекции вектора напряженности электрического поля на координатные оси:

$$E_x \qquad \frac{}{x}\,; \qquad E_y \qquad \frac{}{y}\,; \qquad E_z \qquad \frac{}{z}\,. \tag{15.21}$$

Аналогично, проекция вектора $\vec{E}$ на произвольное направление $\vec{l}$ равна

$$E_l \qquad \frac{}{l}\,. \tag{15.22}$$

В справедливости (15.22) легко убедиться, выбрав направление $\vec{l}$ в качестве одной из координатных осей и приняв во внимание соотношения (15.21). Следовательно, *проекция E_l вектора напряженности электрического поля на данное направление равна скорости убывания потенциала в этом направлении*.

Рассмотрим электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, созданное некоторой системой неподвижных зарядов. Работу сил электрического поля над зарядом q при его перемещении из точки *1* в точку *2* можно выразить, во-первых, через напряженность поля:

$$A_{1\ 2} \qquad {}_{1}^{2}(\vec{F}, d\vec{l}) \qquad {}_{1}^{2}(q\vec{E}, d\vec{l}) \quad q\ {}_{1}^{2}E_l\, dl$$

(где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление перемещения $d\vec{l}$), во-вторых, через разность потенциалов точек *1* и *2*:

$$A_{1\ 2} \quad q\,(\ {}_{1} \qquad {}_{2}).$$

Приравнивая оба выражения для работы, получим разность потенциалов между точками *1* и *2*:

$${}_{1} \qquad {}_{2} \qquad {}_{1}^{2}(\vec{E}, d\vec{l}) \qquad {}_{1}^{2}E_l\, dl. \tag{15.23}$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки *1* и *2*, так как работа сил поля не зависит от пути.

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности $_1$ и $_2$ $_1$ (рис. 15.9). Вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля в произвольной точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно касательной к ней в данной точке. В этом легко убедиться, если допустить наличие касательной составляющей $\vec{E}$ вектора $\vec{E}$, например на эквипотенциальной поверхности $_1$: тогда работа, совершаемая силами электрического поля по перемещению заряда q вдоль эквипотенциальной поверхности $_1$ const на расстояние dl, имела бы, с одной стороны, значение $dA \quad qE \quad dl \quad 0$, а с другой стороны – $dA \quad q\,d \quad 0$. Следовательно, $\vec{E} \quad 0$. Таким образом, *силовые линии поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены от поверхности с бо́льшим потенциалом к поверхности с меньшим потенциалом*.

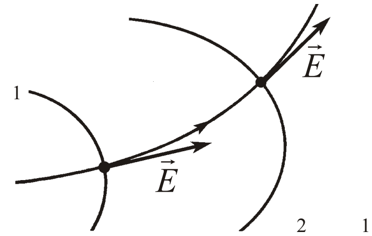


Рис. 15.9

15.5. Расчет электрического поля с помощью принципа суперпозиции

Пусть в пространстве создано электрическое поле системой точечных зарядов q_i, системой нитей, заряженных с линейной плотностью $_i \quad dq_i/dl_i$, системой поверхностей, заряженных с поверхностной плотностью $_i \quad dq_i/dS_i$, и системой тел, заряженных с объемной плотностью $_i \quad dq_i/dV_i$. Тогда потенциал и напряженность электрического поля в произвольной точке пространства могут быть определены по принципу суперпозиции.

Пример 1. Электрическое поле диполя.

Электрический диполь – это система двух одинаковых по величине разноименных зарядов (q), расстояние l между которыми значительно меньше расстояний до точек, в которых определяется поле. Прямая, проходящая через заряды, называется *осью диполя*. Ориентацию оси диполя в пространстве задают с помощью вектора $\vec{l}$, направленного от отрицательного заряда к положительному. При этом вектор

$$\vec{p} \quad q\vec{l} \tag{15.24}$$

называется *электрическим моментом диполя*.

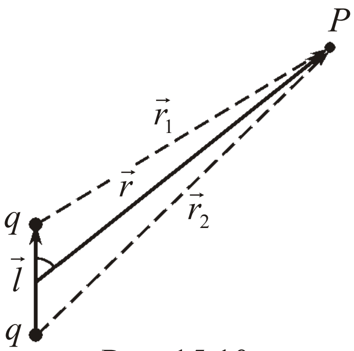


Рис. 15.10

Поле диполя обладает осевой симметрией. Поэтому картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, будет одинаковой, причем вектор $\vec{E}$ будет лежать в этой плоскости. Положение точки P, в которой будем искать поле, зададим в полярных координатах r и (рис. 15.10).

Вычислим сначала потенциал поля в точке P, а затем напряженность поля:

$$\frac{q}{4 \quad {}_0 r_1} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r_2} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0} \quad \frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r_2} \quad ,$$

где $\vec{r}_1 \quad \vec{r} \quad \frac{1}{2}\vec{l};\ \vec{r}_2 \quad \vec{r} \quad \frac{1}{2}\vec{l}$. Следовательно,

$$r_1^2 \quad r^2 \quad (\vec{r},\vec{l}) \quad \tfrac{1}{4}l^2; \qquad r_2^2 \quad r^2 \quad (\vec{r},\vec{l}) \quad \tfrac{1}{4}l^2.$$

Поскольку $r \quad l$, то

$$r_1^2 \quad r^2 \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{r^2}\ ; \ r_2^2 \quad r^2 \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{r^2}\ ; \ \frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r} \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{r^2}^{\ 1/2}; \ \frac{1}{r_2} \quad \frac{1}{r} \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{r^2}^{\ 1/2}.$$

С учетом приближенного равенства $(1 \quad x) \quad 1 \quad x$ при малых x

$$\frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r} \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{2r^2}\ ; \qquad \frac{1}{r_2} \quad \frac{1}{r} \ 1 \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{2r^2}\ .$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r_2} \quad \frac{(\vec{r},\vec{l})}{r^3}; \qquad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^3}(\vec{r},\vec{l}) \quad \frac{1}{4 \quad {}_0 r^3}(\vec{r},\vec{p}) \quad \frac{p\cos}{4 \quad {}_0 r^2}.$$

Как видим, потенциал электрического поля в точке P зависит от r и :

$$\frac{p\cos}{4 \quad {}_0 r^2}. \tag{15.25}$$

Для нахождения напряженности поля воспользуемся формулой (15.20), где градиент в полярных координатах

$$\vec{} \quad \overline{r}\,\vec{e}_r \quad \frac{1}{r}\,\overline{\ \ }\,\vec{e}\ .$$

Следовательно,

$$\vec{E} \quad \vec{E}_r \quad \vec{E} \qquad \overline{r}\,\vec{e}_r \quad \frac{1}{r}\,\overline{\ \ }\,\vec{e} \qquad \frac{p\cos}{2 \quad {}_0 r^3}\,\vec{e}_r \quad \frac{p\sin}{4 \quad {}_0 r^3}\,\vec{e}\ ; \tag{15.26}$$

$$E \quad \sqrt{E_r^2 \quad E^2} \quad \frac{p}{4 \quad {}_0 r^3}\sqrt{1 \quad 3\cos^2}\ . \tag{15.27}$$

Пример 2. Электрическое поле равномерно заряженного прямолинейного стержня.

Рассмотрим бесконечно длинный прямолинейный стержень, заряженный с линейной плотностью $\quad dq/dl$, и найдем напряженность электрического поля на расстоянии x от стержня (рис. 15.11).

Пусть для определенности $\quad 0$.

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dl с зарядами $dq \quad dl$, которые можно считать точечными. Напряженность поля такого заряда в точке P, находящейся на расстоянии r от него, равна

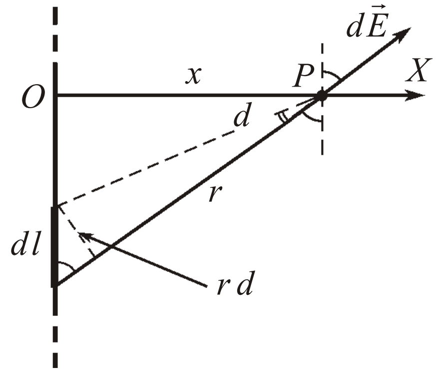


Рис. 15.11

$$dE \quad \frac{dq}{4 \quad _0 r^2} \quad \frac{dl}{4 \quad _0 r^2}.$$

Поле стержня обладает осевой симметрией, поэтому вектор $\vec{E}$ будет направлен перпендикулярно стержню. Проекция вектора $d\vec{E}$ на ось OX, перпендикулярную стержню,

$$dE_x \quad dE \sin \quad \quad \frac{dl}{4 \quad _0 r^2} \sin$$

зависит от переменных dl, r и $\quad$. Чтобы перейти к одной переменной, надо представить две из них через третью. Легко проверить, что наиболее простое выражение получается при переходе к углу $\quad$.

Из рисунка видно, что

$$r \quad \frac{x}{\sin}; \quad dl \quad \frac{r\,d}{\sin} \quad \frac{x\,d}{\sin^2}.$$

Следовательно,

$$dE_x \quad \frac{\sin \quad d}{4 \quad _0 x}.$$

Угол $\quad$ для всех элементов dl стержня изменяется в пределах от нуля до $\quad$. Следовательно,

$$E \quad \quad dE_x \quad _0 \quad \frac{\sin \quad d}{4 \quad _0 x} \quad \left.\frac{\cos}{4 \quad _0 x}\right|_0 \quad \frac{\quad}{2 \quad _0 x}. \qquad (15.28)$$

Пример 3. Электрическое поле на оси тонкого равномерно заряженного диска.

Рассмотрим диск радиусом R, заряженный с поверхностной плотностью $\quad dq/dS$, и найдем потенциал и напряженность электрического поля на оси диска на расстоянии x от его центра (рис. 15.12).

Пусть для определенности $\quad 0$.

Мысленно разобьем диск на бесконечно тонкие кольца площадью $\quad S$. В свою очередь, кольца разобьем на элементарные площадки dS с зарядами $dq \quad dS$, которые можно считать точечными. Потенциал поля такого заряда в точке P, находящейся на расстоянии r от него, равен

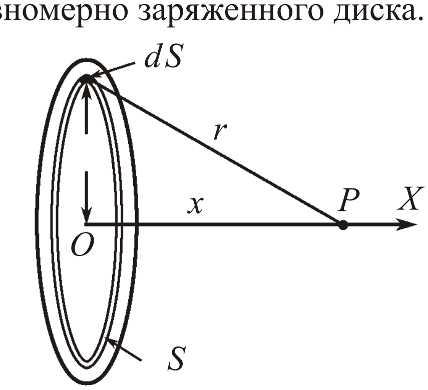


Рис. 15.12

$$d \quad \frac{dq}{4 \quad _0 r} \quad \frac{dS}{4 \quad _0 r},$$

а потенциал всего кольца

$$d \qquad \frac{}{4 \quad {}_0 r} \qquad dS \qquad \frac{}{4 \quad {}_0 r} \qquad S.$$

Для кольца радиусом и шириной d площадь S d . Следовательно,

$$\frac{d}{2 \quad {}_0 r}.$$

Так как $r \quad \sqrt{\ ^2 \quad x^2}$, то потенциал поля, создаваемого рассматриваемым кольцом в точке P, равен

$$\frac{d}{2 \quad {}_0 \sqrt{\ ^2 \quad x^2}},$$

а потенциал поля, создаваемого всем диском,

$$\int_0^R \frac{d}{2 \quad {}_0 \sqrt{\ ^2 \quad x^2}} \qquad \frac{}{2 \quad {}_0} \sqrt{\ ^2 \quad x^2}\Big|_0^R \qquad \frac{}{2 \quad {}_0} \left\{\sqrt{R^2 \quad x^2} \quad x\right\}. \qquad (15.29)$$

Очевидно, что вектор напряженности поля в точке P будет направлен вдоль оси OX. Поэтому

$$E \qquad \frac{}{x} \qquad \frac{}{2 \quad {}_0} \quad \frac{x}{\sqrt{R^2 \quad x^2}} \quad 1 \quad . \qquad (15.30)$$

При R диск превращается в бесконечную плоскость, напряженность электрического поля которой в точке P

$$E \qquad \frac{}{2 \quad {}_0}. \qquad (15.31)$$

Краткие выводы

1. Закон сохранения заряда: суммарный заряд электрически изолированной системы со временем не изменяется, какие бы процессы не протекали в системе.

2. Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна величинам этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды:

$$\vec{F}_{2\ 1} \quad \frac{q_1 q_2}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}; \qquad \vec{F}_{1\ 2} \qquad \frac{q_2 q_1}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}; \qquad F_{1\ 2} \quad F_{2\ 1} \quad \frac{|q_1 q_2|}{4 \quad {}_0 r^2}.$$

3. *Принцип суперпозиции сил*: результирующая сила, с которой система зарядов действует на некоторый точечный заряд, равна векторной сумме сил $\vec{F}_i$, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы:

$$\vec{F} \quad {}_{i\ \ 1}^{\ \ N} \vec{F}_i.$$

4. *Напряженностью электрического поля* в данной точке называется вектор, равный отношению силы, действующей на пробный заряд, помещенный в эту точку, к величине пробного заряда:

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{F}}{q}.$$

5. Напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\vec{E} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}; \qquad E \quad \frac{|q|}{4 \quad {}_0 r^2}.$$

6. *Принцип суперпозиции напряженности электрического поля*: напряженность электрического поля системы зарядов в данной точке равна векторной сумме напряженностей полей $\vec{E}_i$, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i.$$

7. *Силовой линией электрического поля* называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля в этой точке. Силовые линии электрического поля:

а) начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или «уходят» на бесконечность от положительного заряда; или «приходят» из бесконечности к отрицательному заряду);

б) незамкнуты, не пересекаются и не касаются друг друга;

в) расположены тем гуще, чем больше напряженность электрического поля.

8. *Потенциальной энергией* одного заряда в электрическом поле другого заряда называется величина

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

9. *Потенциалом электрического поля* в данной точке называется скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в эту точку, к величине пробного заряда:

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

10. Потенциал электрического поля в данной точке численно равен работе сил поля по перемещению пробного заряда из данной точки на бесконечность:

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

11. Потенциал электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

12. *Потенциал электрического поля системы зарядов* в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов полей φ_i, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i.$$

13. *Эквипотенциальной* называется поверхность, в каждой точке которой потенциал одинаков. Эквипотенциальные поверхности не пересекаются и не касаются друг друга.

14. *Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля*: напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятому со знаком «минус»:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Силовые линии электрического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены от поверхности с бóльшим потенциалом к поверхности с меньшим потенциалом.

15. *Работа сил электрического поля* по перемещению точечного заряда в поле другого точечного заряда не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями зарядов и равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{1\;2} \quad W_1 \quad W_2 \quad q\,(\;_1 \qquad _2).$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Сформулируйте закон Кулона. Для каких заряженных тел он справедлив?

2. Дайте определение напряженности электрического поля.

3. Дайте определение потенциала электрического поля.

4. Может ли быть напряженность электрического поля системы двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов в каких-то точках пространства равной нулю (за исключением бесконечности)?

5. Может ли быть потенциал электрического поля системы двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов в каких-то точках пространства равен нулю (за исключением бесконечности)?

6. По поверхности сферы радиусом R равномерно распределен заряд q. Чему равны напряженность и потенциал электрического поля в центре сферы?

7. Чему равна работа сил электрического поля неподвижных зарядов по перемещению точечного заряда по замкнутой траектории?

8. Что такое силовые линии напряженности электрического поля? Каковы их свойства?

9. Что такое эквипотенциальные поверхности?

10. Изобразите на рисунке эквипотенциальные поверхности и силовые линии напряженности электрического поля для системы двух, равных по величине, одноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

Задачи

1. Два одинаковых свинцовых шарика радиусом R 1 см каждый расположены на расстоянии r 1 м друг от друга. С какой силой взаимодействовали бы шарики, если бы удалось у каждого атома одного шарика «отнять» по одному электрону и все их перенести на другой шарик? Молярная масса свинца 0,207 кг/моль, плотность 11,3 10^3 кг/м^3. Величина элементарного заряда e 1,6 10^{-19} Кл. Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь. Среда вакуум.

Решение

Число атомов, находящихся в каждом из шариков,

$$N \quad \frac{m}{\;}\, N_{\mathrm{A}},$$

где $m \qquad V \quad {}^4\!/_3 \quad R^3$ – масса шарика.

Если у каждого атома одного шарика «отнять» по одному электрону и все их перенести на другой шарик, то первый шарик приобретет положительный заряд $q_1 \quad N\,e$, а второй – отрицательный q_2, причем $|q_2| \quad q_1$. При этом между шариками возникнет сила притяжения

$$F \quad \frac{|q_1\,q_2|}{4 \quad {}_0\,r^2} \quad \frac{N^2 e^2}{4 \quad {}_0\,r^2} \quad \frac{4 \quad N_{\mathrm{A}}^2\, e^2 \quad {}^2 R^6}{9 \quad {}_0 \quad {}^2 r^2} \quad 4{,}36\ 10^{18}\ \text{Н}.$$

Сравним силу электрического взаимодействия этих шариков с силой их гравитационного притяжения.

На основании закона всемирного тяготения шарики притягиваются с силой

$$F_{\text{гр}} \quad G\frac{m^2}{r^2} \quad G\frac{16 \quad ^2R^6 \quad ^2}{9\,r^2} \quad 1{,}5\ 10^{-13}\ \text{Н},$$

которая в

$$\frac{F}{F_{\text{гр}}} \quad \frac{N_{\text{A}}^2 e^2}{4 \quad G \quad _0 \quad ^2} \quad 3\ 10^{31}$$

раз меньше силы кулоновского притяжения при данном условии задачи.

Ответ: $F \quad \frac{4 \quad N_{\text{A}}^2 e^2 \quad ^2 R^6}{9 \quad _0 \quad ^2 r^2} \quad 4{,}36\ 10^{18}$ Н.

2. Три одинаковых точечных заряда $q \quad 10^{-6}$ Кл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определите, где и какой заряд q нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии. Среда вакуум.

Решение

Так как, по условию задачи, все заряды одноименные, находятся на равных расстояниях друг от друга и величины зарядов одинаковы, то между любыми двумя из них будет действовать сила отталкивания

$$F \quad \frac{q^2}{4 \quad _0 a^2},$$

где a расстояние между двумя произвольными зарядами (см. рисунок).

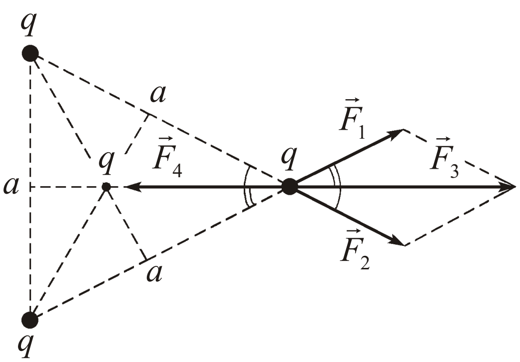


Рис. к задаче №2

Рассмотрим один из зарядов. Со стороны соседних зарядов на него будут действовать равные по величине силы

$$F_1 \quad F_2 \quad \frac{q^2}{4 \quad _0 a^2},$$

результирующая которых

$$F_3 \quad 2\frac{q^2}{4 \quad _0 a^2}\cos \quad ,$$

где $\quad 30^{\circ}$. Сила $\vec{F}_3$ будет направлена по диагонали ромба, построенного на векторах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Такие же по величине силы будут действовать и на остальные два заряда. Очевидно, для равновесия системы в геометрическом центре треугольника (в случае равностороннего треугольника это точка пересечения биссектрис, медиан или высот) необходимо поместить отрицательный заряд q, который будет притягивать каждый из зарядов q с силой

$$F_4 \quad \frac{q\,|q\,|}{4 \quad _0 r^2},$$

где $r \quad a/(2\cos \quad)$ расстояние между зарядами q и q. Следовательно,

$$F_4 \quad F_3; \quad \frac{q\,|q\,|}{4 \quad _0 a^2}4\cos^2 \quad 2\frac{q^2}{4 \quad _0 a^2}\cos \quad ; \quad q \quad \frac{q}{2\cos} \quad 5{,}8\ 10^{-7}\ \text{Кл}.$$

Ответ: заряд $q \quad 5{,}8\ 10^{-7}$ Кл нужно поместить в геометрическом центре треугольника.

3. Тонкое проволочное кольцо радиусом R имеет электрический заряд q. Каково будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центр кольца поместить точечный заряд q_0, одноименный с зарядом q? Среда вакуум.

Решение

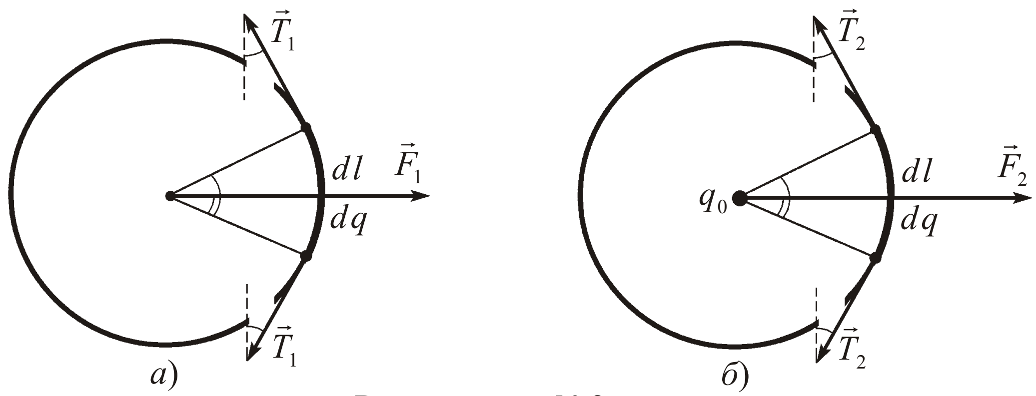


Рис. к задаче №3

Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной dl. Полагая, что электрический заряд q кольца распределен по его длине равномерно, найдем заряд dq на выделенном элементе кольца.

Так как на единицу длины кольца приходится заряд

$$\frac{q}{L} \qquad \frac{q}{2 \quad R}$$

(где L 2 R длина кольца), то на элементе кольца длиной dl будет находиться заряд

$$dq \qquad dl \qquad \frac{q}{2 \quad R}\,dl.$$

Если длину dl выразить через радиус кольца R и центральный угол (см. рис. a)

$$dl \quad 2 \quad R,$$

то заряд dq можно представить в виде

$$dq \qquad \frac{q}{2 \quad R}\,2 \quad R \qquad \frac{q}{\ } \qquad . \tag{1}$$

На заряд dq со стороны остальных зарядов кольца будет действовать сила Кулона $\vec{F}_1$, направленная вдоль радиуса и стремящаяся разорвать кольцо. Кроме силы $\vec{F}_1$, на выделенный элемент кольца со стороны соседних участков будут действовать силы натяжения $\vec{T}_1$. Очевидно, при этом

$$F_1 \quad 2\,T_1 \sin \quad . \tag{2}$$

Если в центр кольца поместить точечный заряд q_0, одноименный с зарядом q (см. рис. $б$), то на выделенный элемент кольца будет действовать сила

$$\vec{F}_2 \quad \vec{F}_1 \quad \vec{F}; \qquad F_2 \quad F_1 \quad F, \tag{3}$$

где

$$F \qquad \frac{q_0\,dq}{4 \qquad {}_0 R^2}\,, \tag{4}$$

и силы натяжения $\vec{T}_2$. При этом

$$F_2 \quad 2\,T_2 \sin \quad . \tag{5}$$

Так как угол мал, то можно положить sin и записать выражения (2) и (5) в виде

$$F_1 \quad 2\,T_1 \quad ; \qquad F_1 \quad F \quad 2\,T_2 \quad .$$

Отсюда с учетом (4) и (1) получим:

$$2\,T_1 \quad \frac{q_0\,dq}{4 \quad {}_0 R^2} \quad 2\,T_2 \;\; ; \quad 2\,T_1 \quad \frac{q_0\,q}{4 \;\; ^2 \;\; {}_0 R^2} \quad 2\,T_2 \;\; ; \quad T \quad T_2 \quad T_1 \quad \frac{q_0\,q}{8 \;\; ^2 \;\; {}_0 R^2}\,.$$

Ответ: $T \quad \dfrac{q_0\,q}{8 \;\; ^2 \;\; {}_0 R^2}$.

4. Два разноименных точечных заряда величиной q 16 нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a 2 м. Определите напряженность и потенциал электрического поля в третьей вершине треугольника. Среда вакуум.

Решение

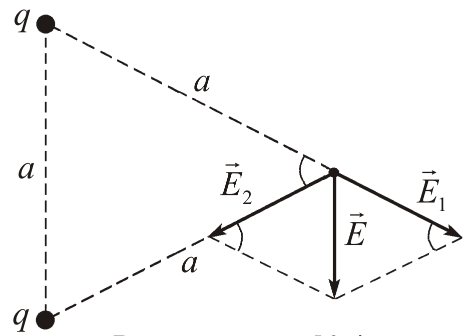


Рис. к задаче №4

Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} \quad \vec{E}_1 \quad \vec{E}_2.$$

Поскольку заряды равны по величине и расстояния от них до третьей вершины треугольника одинаковы, то напряженности полей, создаваемых зарядами,

$$E_1 \quad E_2 \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 a^2}\,.$$

Векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены вдоль прямых, соединяющих заряды (q) с третьей вершиной треугольника. Поскольку заряды разноименные, то вектор $\vec{E}_1$ будет направлен от заряда (q), вектор $\vec{E}_2$ к заряду (q), а вектор $\vec{E}$ будет направлен вдоль диагонали ромба (см. рисунок), причем

$$E \quad \sqrt{E_1^2 \quad E_2^2 \quad 2\,E_1\,E_2 \cos \quad}\,,$$

где 60°. Следовательно,

$$E \quad \sqrt{\left(\frac{q}{4 \quad {}_0 a^2}\right)^2 \quad \left(\frac{q}{4 \quad {}_0 a^2}\right)^2 \quad 2\left(\frac{q}{4 \quad {}_0 a^2}\right)^2 \frac{1}{2}} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 a^2} \quad 36 \text{ В/м.}$$

Потенциал электрического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$${}_1 \quad {}_2.$$

Так как в нашем случае

$${}_1 \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 a}\,; \qquad {}_2 \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 a}\,,$$

то потенциал в третьей вершине треугольника

$$0.$$

Ответ: $E \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0 a^2} \quad 36$ В/м; $\quad 0$.

5. Находящийся в вакууме тонкий стержень длиной l заряжен равномерно с линейной плотностью . Определите величину напряженности и потенциал электрического поля в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии r от одного из его концов.

Решение

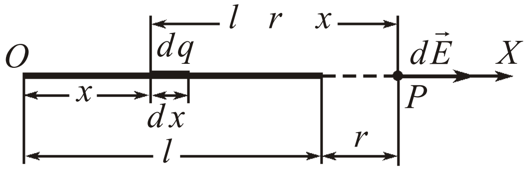


Рис. к задаче №5

Пусть заряд стержня $q \quad 0$.

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dx с элементарными зарядами $dq \qquad dx$, которые будем считать точечными. Такой заряд, расположенный на расстоянии x от начала системы координат, в точке P, находящейся на расстоянии r от конца стержня (см. рисунок), создаст электрическое поле напряженностью

$$dE \qquad \frac{dq}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)^2} \qquad \frac{dx}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)^2},$$

причем вектор $d\vec{E}$ будет направлен вдоль оси стержня.

Поскольку векторы $d\vec{E}$ от всех элементарных зарядов dq в точке P будут направлены по оси OX, то согласно принципу суперпозиции величина напряженности поля, создаваемого всем стержнем,

$$E \qquad dE.$$

Следовательно, при изменении x от 0 до l

$$E \quad \int_0^l \frac{dx}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)^2} \qquad \left.\frac{}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)}\right|_0^l \qquad \frac{}{4 \qquad {}_0 r} \qquad \frac{}{4 \qquad {}_0(l \quad r)} \qquad \frac{l}{4 \qquad {}_0 r\,(l \quad r)}.$$

Потенциал электрического поля элементарного заряда dq в рассматриваемой точке P

$$d \qquad \frac{dq}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)} \qquad \frac{dx}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)},$$

а всего стержня

$$d \qquad \int_0^l \frac{dx}{4 \qquad {}_0(l \quad r \quad x)} \qquad \left.\frac{}{4 \qquad {}_0} \ln(l \quad r \quad x)\right|_0^l \qquad \frac{}{4 \qquad {}_0} \ln\frac{l \quad r}{r}.$$

Ответ: $E \qquad \frac{l}{4 \qquad {}_0 r\,(l \quad r)}; \qquad \frac{}{4 \qquad {}_0} \ln\frac{l \quad r}{r}.$

6. Находящийся в вакууме тонкий стержень длиной l заряжен равномерно с линейной плотностью . Определите величину напряженности и потенциал электрического поля в точке, расположенной на расстоянии a от стержня, направления из которой на концы стержня составляют со стержнем углы $\quad_1$ и $\quad_2$.

Решение

Поместим начало системы координат O в точке, в которой требуется определить характеристики электрического поля; ось OX направим параллельно стержню, а ось OY перпендикулярно к нему (см. рисунок).

Пусть заряд стержня $q \quad 0$.

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dl с элементарными зарядами $dq \qquad dl$, которые будем считать точечными. Такой заряд в точке O, находящейся на расстоянии r от стержня, создаст электрическое поле напряженностью

$$dE \qquad \frac{dq}{4 \qquad {}_0 r^2} \qquad \frac{dl}{4 \qquad {}_0 r^2},$$

причем вектор $d\vec{E}$ и стержень будут расположены в одной плоскости.

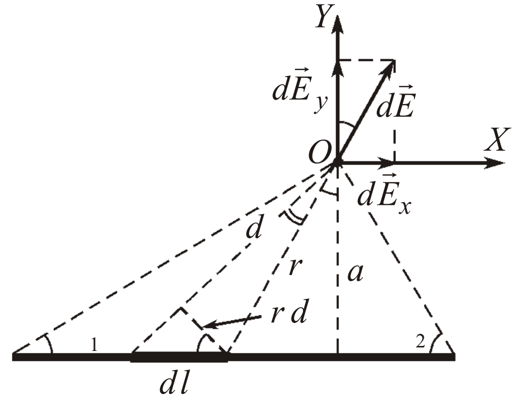


Рис. к задаче №6

Проекции вектора $d\vec{E}$ на оси системы координат:

$$dE_x = dE\sin\alpha = \frac{\tau\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha;$$

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{\tau\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha.$$

Представив расстояние r и длину dl в виде

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}; \quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

получим:

$$dE_x = \frac{\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}d\alpha; \quad dE_y = \frac{\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}d\alpha.$$

Так как угол α меняется от $-(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2)$ до $(\frac{1}{2}\pi - \alpha_1)$, то, интегрируя полученные выражения по всему диапазону изменения угла α, получим:

$$E_x = \int dE_x = \int_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1}\frac{\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}d\alpha = -\frac{\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}\bigg|_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1);$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1}\frac{\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}d\alpha = \frac{\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}\bigg|_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2}. \qquad (1)$$

Отметим, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ выражение (1) дает известную формулу напряженности поля бесконечного прямолинейного проводника:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Потенциал электрического поля элементарного заряда dq в рассматриваемой точке

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha},$$

а всего стержня

$$\varphi = \int_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1}\frac{\tau\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|\Bigg|_{-(\pi/2-\alpha_2)}^{\pi/2-\alpha_1} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(1+\cos\alpha_1)\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1(1-\cos\alpha_2)},$$

где использовано значение табличного интеграла

$$\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\left|\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|.$$

Ответ: $E = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2}$;

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(1+\cos\alpha_1)\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1(1-\cos\alpha_2)}.$$

7. Тонкое полукольцо радиусом R 20 см заряжено равномерно зарядом q 7 10^{-10} Кл. Определите величину напряженности и потенциал электрического поля в центре кривизны полукольца. Среда вакуум.

Решение

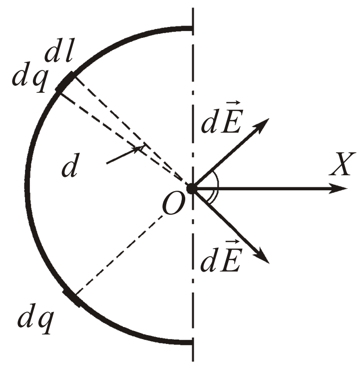


Рис. к задаче №7

Мысленно разобьем полукольцо на бесконечно малые элементы длиной dl с элементарными зарядами dq dl, каждый из которых будем считать точечным. Если длину dl выразить через радиус полукольца R и центральный угол d (см. рисунок)

$$dl \quad R\,d \ ,$$

то заряд dq можно представить в виде $dq \quad R\,d$.

Поскольку линейная плотность заряда

$$\frac{q}{L} \quad \frac{q}{R}$$

(где L R длина полукольца), то каждый элементарный заряд dq в точке O создаст электрическое поле напряженностью

$$dE \quad \frac{dq}{4 \quad {}_0 R^2} \quad \frac{R\,d}{4 \quad {}_0 R^2} \quad \frac{q}{4 \ {}^2 \ {}_0 R^2}\,d \ ,$$

силовые линии которого направлены вдоль радиуса, причем вектор $d\vec{E}$ будет расположен в плоскости полукольца.

Рассмотрим два элементарных заряда dq и dq, расположенных симметрично относительно оси OX. Очевидно, вектор напряженности результирующего поля $d\vec{E} \quad d\vec{E}$, создаваемого этими зарядами, будет направлен вдоль оси OX.

Поскольку для каждого элементарного заряда из верхней полуплоскости существует симметрично расположенный заряд в нижней полуплоскости, то результирующее поле полукольца будет направлено вдоль оси OX:

$$E \qquad dE_x,$$

где

$$dE_x \quad dE\cos \qquad \frac{q}{4 \ {}^2 \ {}_0 R^2}\cos \quad d \ .$$

Угол для всех элементов полукольца изменяется в пределах от (½) до (½). Следовательно,

$$E \qquad dE_x \qquad \int_{/2}^{/2} \frac{q}{4 \ {}^2 \ {}_0 R^2}\cos \quad d \qquad \frac{q}{4 \ {}^2 \ {}_0 R^2}\sin \Big|_{/2}^{/2} \qquad \frac{q}{2 \ {}^2 \ {}_0 R^2} \quad 100 \text{ В/м.}$$

Потенциал электрического поля в центре кривизны полукольца равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из элементарных зарядов в отдельности:

$$d \qquad \int_0^q \frac{dq}{4 \quad {}_0 R} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 R} \quad 31{,}5 \text{ В},$$

где

$$d \qquad \frac{dq}{4 \quad {}_0 R} \ .$$

Ответ: $E \quad \dfrac{q}{2 \ {}^2 \ {}_0 R^2} \quad 100$ В/м; $\quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0 R} \quad 31{,}5$ В.

8. Тонкий диск радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Определите величину напряженности электрического поля на оси диска. Чему равна напряженность поля вблизи центра диска и на очень большом расстоянии от его центра? Среда — вакуум.

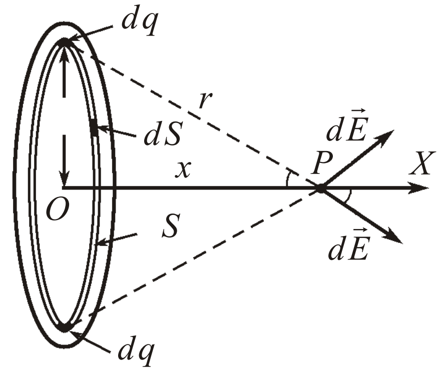


Рис. к задаче №8

Решение

Пусть заряд диска $q > 0$.

Мысленно разобьем диск на бесконечно тонкие кольца площадью ΔS. В свою очередь, кольца разобьем на элементарные площадки dS с зарядами $dq = \sigma dS$, которые будем считать точечными. Каждый элементарный заряд dq в точке P (см. рисунок) создаст электрическое поле напряженностью

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Рассмотрим два таких элементарных заряда dq' и dq'', расположенных симметрично относительно оси OX. Очевидно, вектор напряженности результирующего поля $d\vec{E}' + d\vec{E}''$, создаваемого этими зарядами, будет направлен вдоль оси OX.

Так как для каждого элементарного заряда dq' существует симметрично расположенный относительно оси OX заряд dq'', то результирующее поле $\Delta\vec{E}$ кольца будет направлено вдоль оси OX:

$$\Delta E = \int dE_x,$$

где

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha.$$

Поскольку

$$r = \sqrt{\rho^2 + x^2}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + x^2}},$$

то

$$\Delta E = \int_{\Delta S} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\, dS = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\Delta S = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{3/2}}\Delta S.$$

Для кольца радиусом ρ и шириной $d\rho$ площадь $\Delta S = 2\pi\rho\, d\rho$. Следовательно, величина напряженности поля, создаваемого рассматриваемым кольцом,

$$\Delta E = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi\rho\, d\rho = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{3/2}}\rho\, d\rho,$$

а создаваемая всем диском

$$E = \int \Delta E = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(\rho^2 + x^2)^{3/2}}\rho\, d\rho = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + x^2}}\Bigg|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right). \quad (1)$$

В теоретической части был рассмотрен пример определения величины напряженности электрического поля на оси диска через потенциал. Оставляем за читателем право выбора способа решения подобных задач.

Рассмотрим частные случаи:

а) при $x \to 0$ выражение (1) дает формулу напряженности поля вблизи большой пластины:

$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{R}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad (2)$$

б) при x выражение (1) превращается в формулу напряженности поля точечного заряда:

$$E \quad \frac{}{2 \quad _0} \quad 1 \quad \frac{x}{x\sqrt{(R/x)^2 \quad 1}} \qquad \frac{}{2 \quad _0} \quad 1 \quad \frac{1}{1 \quad \frac{1}{2}(R/x)^2} \qquad \frac{}{2 \quad _0} \frac{\frac{1}{2}(R/x)^2}{1 \quad \frac{1}{2}(R/x)^2} \qquad \frac{R^2}{4 \quad _0 x^2},$$

где использовано приближенное равенство $(1 \quad x) \quad 1 \quad x$ при малых x.

Поскольку произведение $(\quad R^2)$ равно заряду диска, то напряженность поля на очень большом расстоянии от его центра равна

$$E \quad \frac{q}{4 \quad _0 x^2}. \qquad (3)$$

Ответ: $E \quad \frac{}{2 \quad _0} \quad 1 \quad \frac{x}{\sqrt{R^2 \quad x^2}}$; $E(x \quad 0) \quad \frac{}{2 \quad _0}$; $E(x \qquad) \quad \frac{R^2}{4 \quad _0 x^2}$.

9. Определите напряженность и потенциал электрического поля в центре полусферы радиусом R, заряженной равномерно с поверхностной плотностью . Среда вакуум.

Решение

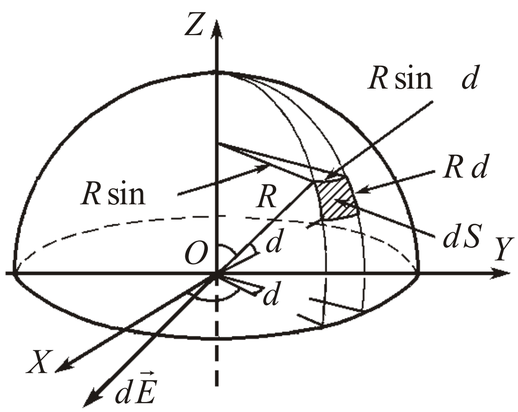


Рис. к задаче №9

Пусть заряд полусферы $q \quad 0$.

Мысленно разобьем поверхность полусферы на бесконечно малые площадки dS с элементарными зарядами $dq \qquad dS$, каждый из которых будем считать точечным.

Введем сферическую систему координат R, , , где – полярный угол; – азимутальный угол. Площадь dS элементарной площадки в сферической системе координат равна $dS \quad R^2 \sin \quad d \quad d$ (см. рисунок).

Каждый элементарный заряд dq в точке O создаст электрическое поле напряженностью

$$dE \quad \frac{dq}{4 \quad _0 R^2} \quad \frac{dS}{4 \quad _0 R^2} \quad \frac{}{4 \quad _0 R^2} R^2 \sin \quad d \quad d ,$$

силовые линии которого направлены вдоль соответствующего радиуса.

Поскольку для каждого элементарного заряда dq существует симметрично расположенный относительно оси OZ заряд dq, то, очевидно, вектор напряженности электрического поля, создаваемого всей полусферой, будет направлен вдоль оси OZ, а его величина

$$E \quad \Big| \quad dE_z \Big|,$$

где

$$dE_z \qquad dE \cos \qquad \frac{}{4 \quad _0 R^2} R^2 \sin \quad \cos \quad d \quad d .$$

Углы и для всех элементов полусферы изменяются в пределах $0 \qquad \frac{1}{2}$, $0 \qquad 2$. Следовательно,

$$E \quad \Big| \quad dE_z \Big| \quad \frac{}{4 \quad _0 R^2} R^2 \int_0^{/2} \sin \quad \cos \quad d \quad \int_0^{2} d \qquad \frac{}{4 \quad _0 R^2} R^2 \, 2 \quad \frac{\sin^2}{2} \Big|_0^{/2} \quad \frac{}{4 \quad _0}.$$

Потенциал электрического поля в центре полусферы равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из элементарных зарядов в отдельности:

$$d \quad ,$$

где

$$d \qquad \frac{dq}{4 \quad {}_0 R}.$$

Следовательно,

$$\int_0^q d \quad \frac{dq}{4 \quad {}_0 R} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 R} \quad \frac{S}{4 \quad {}_0 R} \quad \frac{2 \quad R^2}{4 \quad {}_0 R} \quad \frac{R}{2 \quad {}_0},$$

где $S \quad 2 \quad R^2$ площадь поверхности полусферы.

Ответ: $E \quad \frac{\quad}{4 \quad {}_0}$; $\quad \frac{R}{2 \quad {}_0}$.

10. Потенциал электрического поля зависит от координат (x, y) по закону:

$$(x^2 \quad y^2),$$

где $\quad$ 10 В/м^2. Определите напряженность электрического поля в точке, радиус-вектор которой $\vec{r} \quad 3\vec{i} \quad 4\vec{j}$ [м]. Какую работу совершают силы поля при перемещении точечного заряда $q \quad 10^{-8}$ Кл из точки M_1 {1 м; 2 м} в точку M_2 {3 м; 4 м}? Изобразите примерный вид электрического поля с помощью силовых линий.

Решение

Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

$$\vec{E} \quad \vec{\quad} \quad \mathrm{grad}$$

запишем в виде

$$E_x\vec{i} \quad E_y\vec{j} \quad E_z\vec{k} \qquad \frac{\quad}{x}\vec{i} \quad \frac{\quad}{y}\vec{j} \quad \frac{\quad}{z}\vec{k}.$$

Отсюда находим проекции вектора напряженности электрического поля на оси системы координат

$$E_x \qquad \frac{\quad}{x} \qquad 2 \quad x; \qquad E_y \qquad \frac{\quad}{y} \quad 2 \quad y; \qquad E_z \qquad \frac{\quad}{z} \quad 0, \tag{1}$$

вектор напряженности

$$\vec{E} \quad E_x\vec{i} \quad E_y\vec{j} \quad E_z\vec{k} \qquad 2 \quad x\vec{i} \quad 2 \quad y\vec{j} \tag{2}$$

и его величину

$$E \quad \sqrt{E_x^2 \quad E_y^2 \quad E_z^2} \quad 2 \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \tag{3}$$

в точке, координаты которой $x \quad 3$ м, $y \quad 4$ м заданы радиус-вектором $\vec{r} \quad 3\vec{i} \quad 4\vec{j}$:

$$\vec{E} \qquad 60\vec{i} \quad 80\vec{j} \text{ [В/м]}; \qquad E \quad 100 \text{ В/м}.$$

Поскольку работа сил электрического поля по перемещению точечного заряда не зависит от формы траектории, а определяется лишь его начальным и конечным положениями и равна

$$A_{1\ 2} \quad q(\ {}_1 \qquad {}_2),$$

то при перемещении точечного заряда q из точки M_1 {1 м; 2 м} в точку M_2 {3 м; 4 м} силы электрического поля совершат работу

$$A_{1\ 2} \quad q \quad [(x_1^2 \quad y_1^2) \quad (x_2^2 \quad y_2^2)] \quad 4\ 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Для построения силовых линий поля рассмотрим первый координатный угол.

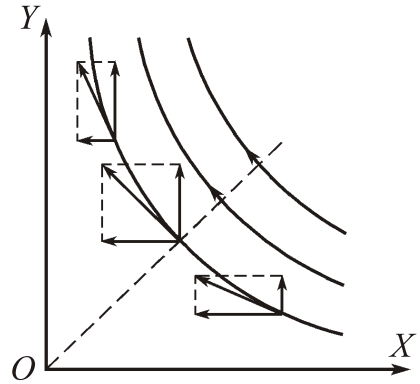


Рис. 1 к задаче №10

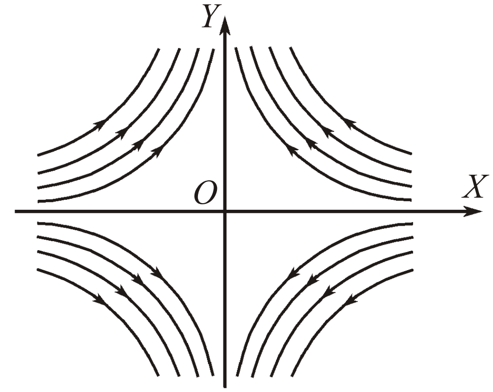


Рис. 2 к задаче №10

Как следует из (1), модули проекций вектора напряженности электрического поля на оси системы координат зависят от координат линейно ($|E_x| \sim x$; $|E_y| \sim y$), причем при $x \quad y$ они будут равны ($|E_x| \quad |E_y|$). Также из (1) следует, что силовая линия будет расположена симметрично относительно биссектрисы координатного угла, а ее асимптотами будут оси системы координат. Поскольку в первом координатном углу $E_x \quad 0$, а $E_y \quad 0$ и силовые линии не могут пересекаться и касаться друг друга, то картина силовых линий будет иметь вид, представленный на рис. 1. Аналогично будут выглядеть силовые линии в остальных координатных углах (рис. 2).

Ответ: $\vec{E} \quad 2 \quad x\vec{i} \quad 2 \quad y\vec{j} \quad 60\vec{i} \quad 80\vec{j}$ [В/м]; $E \quad 2 \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$ 100 В/м;

$A_{1 \ 2} \quad q \quad [(x_1^2 \quad y_1^2) \quad (x_2^2 \quad y_2^2)] \quad 4 \ 10^{-7}$ Дж; см. рис. 2.

Задачи для самостоятельного решения

15.1. С какой силой взаимодействовали бы два медных шарика массой $m \quad 1$ г каждый, находящиеся на расстоянии $r \quad 1$ м друг от друга, если бы суммарный заряд всех электронов в каждом из них отличался на $\quad 1\%$ от суммарного заряда всех ядер? В нейтральном атоме меди содержится $n \quad 29$ электронов. Молярная масса меди $\quad 64 \ 10^{-3}$ кг/моль. Величина элементарного заряда $e \quad 1{,}6 \ 10^{-19}$ Кл. Среда вакуум.

15.2. На непроводящую нить длиной $l \quad 60$ см надеты три маленькие бусинки. Нить связывают так, что она образует замкнутую петлю. Определите силу натяжения нити в положении равновесия бусинок, если им сообщить заряды $q_1 \quad 20$ мкКл, $q_2 \quad \frac{1}{4}q_1$ и $q_3 \quad \frac{1}{9}q_1$. Трением пренебречь. Среда вакуум.

15.3. Тонкое проволочное кольцо имеет электрический заряд q, при этом сила натяжения проволоки, из которой сделано кольцо, равна T. В центр кольца поместили точечный заряд q_0, и сила натяжения увеличилась вдвое. Определите радиус кольца. Среда вакуум.

15.4. Два одинаковых положительных точечных заряда q расположены на расстоянии $l \quad 2a$ друг от друга. Определите максимальное значение величины напряженности электрического поля этой системы зарядов на прямой, перпендикулярной линии, соединяющей заряды и проходящей через ее середину. Чему равен потенциал электрического поля в этой точке? Среда вакуум.

15.5. Находящийся в вакууме тонкий стержень длиной l заряжен равномерно зарядом q. На оси стержня на расстоянии $r \quad l$ от его центра находится точечный заряд q_0. Определите силу взаимодействия стержня с зарядом q_0.

15.6. Находящийся в вакууме тонкий очень длинный стержень заряжен равномерно с линейной плотностью . Определите величину напряженности электрического поля в точке, расположенной на расстоянии a от стержня на прямой, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

15.7. Бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью   и согнута так, как показано на рисунке, где радиус закругления равен R. Определите напряженность электрического поля в точке O, совпадающей с центром закругления. Среда   вакуум.

Рис. к задаче №15.7

15.8. Тонкий диск радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью . Определите потенциал электрического поля на оси диска на расстоянии x от его центра. Среда   вакуум.

15.9. Тонкое кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\quad _0 \cos \quad$, где $_0$ положительная постоянная;   азимутальный угол. Определите величину напряженности электрического поля в центре кольца. Среда   вакуум. *Указание*: при решении задачи следует учесть, что на одной половине кольца заряд положительный, а на другой   отрицательный.

15.10. Потенциал электрического поля зависит от координат (x, y) по закону:

$$x\, y,$$

где   10 В/м^2. Определите напряженность электрического поля в точке, радиус-вектор которой $\vec{r} \quad 4\vec{i} \quad 3\vec{j}$ [м]. Какую работу совершают силы поля при перемещении точечного заряда $q \quad 10^{-8}$ Кл из точки M_1 {1 м; 2 м} в точку M_2 {3 м; 4 м}? Изобразите примерный вид электрического поля с помощью силовых линий.

Тесты

1. Сколько электронов потерял металлический шар, приобретя заряд $q \quad 10^{-6}$ Кл? Величина элементарного заряда $e \quad 1{,}6\ 10^{-19}$ Кл.

А. $N \quad 6{,}25\ 10^{8}$ Б. $N \quad 6{,}25\ 10^{11}$

В. $N \quad 6{,}25\ 10^{12}$ Г. $N \quad 6{,}25\ 10^{14}$

2. Две отрицательно заряженные пылинки находятся в вакууме на расстоянии $r \quad 2$ мм друг от друга и отталкиваются с силой $F \quad 9\ 10^{-5}$ Н. Считая заряды пылинок одинаковыми, определите количество избыточных электронов на каждой пылинке. Величина элементарного заряда $e \quad 1{,}6\ 10^{-19}$ Кл.

А. $N \quad 1{,}25\ 10^{9}$ Б. $N \quad 5{,}52\ 10^{12}$

В. $N \quad 2{,}25\ 10^{16}$ Г. $N \quad 5{,}25\ 10^{21}$

3. В вершинах квадрата со стороной $a \quad 10$ см закреплены одинаковые заряды $q \quad 10^{-6}$ Кл. Какая сила действует на каждый из зарядов со стороны трех остальных? Среда – вакуум.

А. $F \quad 3{,}4$ мкН Б. $F \quad 7{,}2$ мН

В. $F \quad 12{,}3$ Н Г. $F \quad 1{,}7$ Н

4. На концах горизонтальной непроводящей спицы длиной l 1 м закреплены маленькие шарики с зарядами q_1 4 мкКл и q_2 9 мкКл. На спице находится бусинка с зарядом q 2 мкКл. На каком расстоянии от заряда q_1 бусинка будет находиться в равновесии? Трения нет. Среда – вакуум.

Ответ:__________см

5. На тонком кольце радиусом R равномерно распределен заряд q. Определите силу, действующую на точечный заряд q_0, находящийся на оси кольца на расстоянии h от его центра. Среда – вакуум.

А. $F \quad |q\,q_0|/(4 \quad {}_0 h^2)$ Б. $F \quad |q\,q_0|\,h/[4 \quad {}_0(R^2 \quad h^2)^{3/2}]$

В. $F \quad |q\,q_0|/[4 \quad {}_0(R^2 \quad h^2)]$ Г. $F \quad |q\,q_0|\,R/[4 \quad {}_0(R^2 \quad h^2)^{3/2}]$

6. Определите напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами q_1 8 нКл и q_2 6 нКл, расстояние между которыми l 1 м. Среда – вакуум.

А. E 54 В/м Б. E 405 В/м

В. E 504 В/м Г. E 1008 В/м

7. Два точечных заряда q_1 q и q_2 $9\,q$ расположены в вакууме на расстоянии l 90 см друг от друга. На каком расстоянии от заряда q_1 напряженность электрического поля равна нулю?

Ответ:__________см

8. Два точечных заряда q_1 8 нКл и q_2 6 нКл расположены на расстоянии l 12 см друг от друга. Определите величину напряженности электрического поля в точке, находящейся на перпендикуляре к середине отрезка, соединяющего заряды, на расстоянии a 8 см от него. Среда – вакуум.

А. E 4 кВ/м Б. E 6 кВ/м

В. E 8 кВ/м Г. E 10 кВ/м

9. В двух соседних вершинах квадрата со стороной a закреплены положительные заряды (q), а в двух остальных вершинах – отрицательные (q). Определите величину напряженности электрического поля в центре квадрата. Среда – вакуум.

А. E 0 Б. $E \quad q/(4 \quad {}_0 a^2)$

В. $E \quad \sqrt{2}\,q/(4 \quad {}_0 a^2)$ Г. $E \quad \sqrt{2}\,q/(\quad {}_0 a^2)$

10. Тонкое кольцо равномерно заряжено. Если из кольца вырезать и убрать кусок длиной, равной четверти длины кольца, то напряженность электрического поля в центре кольца будет равна E_0. Если вырезать и убрать еще одну четверть кольца, соседнюю с первой вырезанной, то напряженность поля в центре кольца будет равна…

А. $E \quad E_0$ Б. $E \quad \sqrt{2}\,E_0$

В. $E \quad 0{,}5\,E_0$ Г. $E \quad 2\,E_0$

11. Находящийся в вакууме тонкий стержень длиной $2l$ равномерно заряжен с линейной плотностью . Определите напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии l от стержня на прямой, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

А. $E \quad /(4 \quad {}_0 l^2)$ Б. $E \quad /(2 \quad {}_0 l)$

В. $E \quad \sqrt{2} \quad /(4 \quad {}_0 l)$ Г. $E \quad \sqrt{2} \quad /(8 \quad {}_0 l)$

12. Определите потенциал электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами q_1 6 нКл и q_2 8 нКл, расстояние между которыми l 1 м. Среда – вакуум.

А. 12 В Б. 18 В

В. 36 В Г. 12 В

13. Два точечных заряда q_1 6 нКл и q_2 8 нКл расположены в вакууме на расстоянии l 70 см друг от друга. На каком расстоянии от заряда q_1 на прямой, соединяющей заряды, потенциал электрического поля равен нулю?

Ответ:__________см

14. В вершинах квадрата со стороной a закреплены одинаковые точечные заряды q. Определите потенциал электрического поля в геометрическом центре квадрата. Среда – вакуум.

А. $q/(4 \quad _0 a)$ Б. $q/(\quad _0 a)$

В. $\sqrt{2}q/(4 \quad _0 a)$ Г. $\sqrt{2}q/(\quad _0 a)$

15. На тонком кольце радиусом R равномерно распределен заряд q. Определите потенциал электрического поля в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии h от его центра. Среда – вакуум.

А. $q/[4 \quad _0(R^2 \quad h^2)^{1/2}]$ Б. $qh/[4 \quad _0(R^2 \quad h^2)]$

В. $qR/[4 \quad _0(R^2 \quad h^2)]$ Г. $q/(4 \quad _0 h)$

16. В двух соседних вершинах квадрата со стороной a закреплены положительные заряды (q), а в двух остальных вершинах – отрицательные (q). Определите потенциал электрического поля в центре квадрата. Среда – вакуум.

А. 0 Б. $q/(2 \quad _0 a)$

В. $q/(4 \quad _0 a)$ Г. $\sqrt{2}q/(4 \quad _0 a)$

17. Сфера радиусом R заряжена равномерно с поверхностной плотностью . Определите потенциал электрического поля в центре сферы.

А. $/ \ _0$ Б. $R/ \ _0$

В. $/(\ _0 R)$ Г. $/(\ _0 R^2)$

18. На рисунке изображены три эквипотенциальные поверхности ($_1$ const; $_2$ const; $_3$ const) и силовая линия электрического поля. На какой из эквипотенциальных поверхностей потенциал больше?

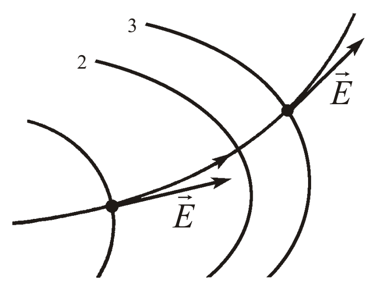


Рис. к тесту №18

А. Б. $_2$

В. $_3$ Г. $_2$ $_3$

19. Потенциал электрического поля зависит от координат (x, y) по закону: $x^2 y$, где 4 В/м^2. Определите величину напряженности электрического поля в точке, радиус-вектор которой $\vec{r}$ $3\vec{i}$ $2\vec{j}$ [м].

Ответ: __________В/м

20. Потенциал электрического поля зависит от координат (x, y) по закону: $x^2 y$, где 2 В/м^3. Определите работу, совершаемую силами поля, при перемещении точечного заряда q 1 мкКл из точки $M_1\{3\text{ м}; 4\text{ м}\}$ в точку $M_2\{1\text{ м}; 2\text{ м}\}$.

Ответ: __________мкДж

§16. Теоремы электростатики

16.1. Векторные поля

1. Поток вектора

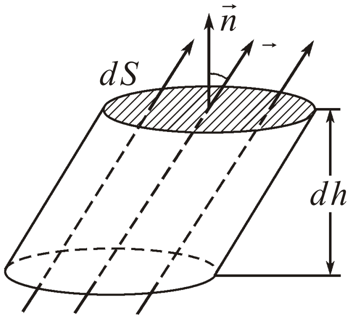


Рис. 16.1

Пусть в каждой точке некоторой области пространства известна скорость течения несжимаемой жидкости $\vec{\ }(x, y, z)$. Тогда говорят, что задано поле вектора $\vec{\ }$.

Объем жидкости, протекающий в единицу времени через поверхность S, называется потоком Φ жидкости через эту поверхность. Разобьем поверхность S на элементарные плоские участки dS. Как видно из рис. 16.1, через участок dS за время dt пройдет объем жидкости $dV \quad dh\, dS \qquad dt \cos \quad dS$. Следовательно, поток жидкости через элементарный участок dS

$$d\Phi \quad \frac{dV}{dt} \qquad \cos \quad dS \quad (\vec{\ }, d\vec{S}) \qquad {}_n\, dS,$$

где $d\vec{S} \quad dS\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ – вектор нормали к участку dS); ${}_n \qquad \cos$ – проекция вектора скорости на нормаль к участку dS.

Просуммировав потоки через все элементарные участки dS, на которые была разбита поверхность S, найдем поток жидкости через эту поверхность:

$$\Phi \quad \underset{S}{\ } d\Phi \quad \underset{S}{\ } (\vec{\ }, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\ } {}_n\, dS.$$

Если поверхность S замкнута, то

$$\Phi \quad \underset{S}{\circ} (\vec{\ }, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\circ} {}_n\, dS.$$

Аналогичные выражения, записанные для произвольного векторного поля $\vec{a}$,

$$\Phi \quad \underset{S}{\ } (\vec{a}, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\ } a_n\, dS; \qquad \Phi \quad \underset{S}{\circ} (\vec{a}, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\circ} a_n\, dS$$

называются соответственно *потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S* и *потоком через замкнутую поверхность S*.

Поток вектора есть алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к участкам dS. В случае замкнутой поверхности принято вычислять поток, «вытекающий» из охватываемой поверхностью области наружу. В этих случаях под $\vec{n}$ подразумевается внешняя нормаль.

2. Дивергенция вектора

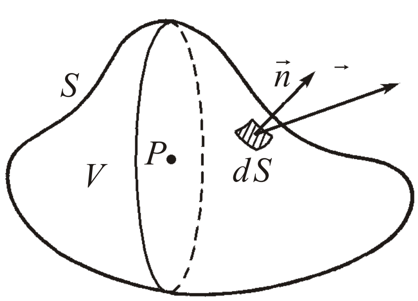


Рис. 16.2

Возьмем в поле вектора $\vec{\ }$ произвольную точку P и окружим ее замкнутой поверхностью S (рис. 16.2). Если в объеме V, ограниченном данной поверхностью, жидкость не возникает и не исчезает, то поток через эту поверхность, будет равен нулю. Отличие потока от нуля будет указывать на то, что внутри поверхности имеются источники или стоки жидкости. Поскольку величина потока определяет объем жидкости, протекающий через поверхность S в единицу времени, то говорят, что поток представляет собой мощность источников или стоков. При преобладании мощности источников величина потока будет положительной, при преобладании мощности стоков – отрицательной.

Отношение потока к величине объема, из которого он вытекает, дает среднюю удельную мощность источников. При стягивании объема V к точке P (при стремлении V к нулю) эта величина дает удельную мощность источников в точке P, которую называют *дивергенцией вектора* $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi}{V}.$$

Аналогично для любого вектора $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S a_n \, dS,$$

где интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности S, окружающей точку P.

С точки зрения математики дивергенция вектора представляет собой скалярное произведение оператора «набла» на данный вектор:

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

3. Теорема Остроградского – Гаусса

Зная дивергенцию вектора в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров.

Для поля вектора $\vec{v}$ произведение $\operatorname{div}\vec{v}$ на dV дает мощность источников жидкости, заключенных в объеме dV. Сумма таких произведений даст мощность всех источников, заключенных в объеме V, по которому производится суммирование. Вследствие несжимаемости жидкости суммарная мощность источников должна равняться потоку жидкости, вытекающему наружу через поверхность S, ограничивающую объем V. Таким образом,

$$\oint_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}\vec{v} \, dV.$$

Аналогичное соотношение справедливо для векторного поля любой природы и выражает *теорему Остроградского – Гаусса*:

$$\oint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}\vec{a} \, dV,$$

где интеграл в левой части берется по произвольной замкнутой поверхности S, а интеграл в правой части – по объему V, ограниченному этой поверхностью. Из данного соотношения следует, что *дивергенция вектора имеет смысл источников поля*.

4. Циркуляция вектора

Возьмем в поле вектора $\vec{v}$ произвольный контур L. Представим, что каким-то способом мы заморозили мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала, включающего в себя контур L (рис. 16.3).

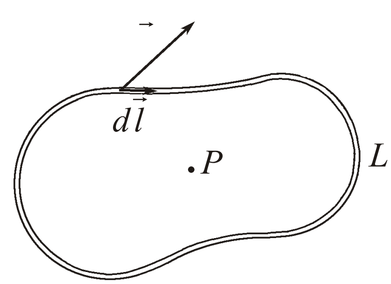


Рис. 16.3

В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале будет либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры такого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура L. Эту величину называют циркуляцией Γ.

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая $\ _l$, касательная к контуру. Если в разных местах канала скорость жидкости различна, то циркуляция во всем канале

$$\Gamma \quad \oint_L \ _l\, dl \quad \oint_L (\vec{\ }, d\vec{l}),$$

где $d\vec{l}$ – элементарный участок канала, направленный вдоль него.

Аналогичное выражение, написанное для произвольного векторного поля $\vec{a}$,

$$\Gamma \quad \oint_L a_l\, dl \quad \oint_L (\vec{a}, d\vec{l})$$

называется *циркуляцией вектора $\vec{a}$ по контуру L*.

5. Ротор вектора

Выберем произвольную поверхность S, опирающуюся на контур L. Чтобы получить характеристику свойств поля в точке P, нужно уменьшать размеры контура, стягивая его в точку P. При этом будет уменьшаться и циркуляция (из-за уменьшения размеров контура), и площадь S, опирающаяся на контур L. Отношение циркуляции к площади S стремится к некоторому пределу, который используется в качестве характеристики поля в точке P.

Вектор, проекция которого на нормаль к поверхности S равна отношению циркуляции по контуру L к площади, охватываемой контуром, при стягивании контура к точке P (при стремлении S к нулю), называется *ротором вектора* $\vec{\ }$:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{\ })_n \quad \lim_{S \quad 0} \frac{\Gamma}{S}.$$

Аналогично для любого вектора $\vec{a}$:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{a})_n \quad \lim_{S \quad 0} \frac{\Gamma}{S} \quad \lim_{S \quad 0} \frac{1}{S} \oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) \quad \lim_{S \quad 0} \frac{1}{S} \oint_L a_l\, dl,$$

где интеграл берется по произвольному контуру L, окружающему точку P.

С точки зрения математики ротор вектора представляет собой векторное произведение оператора «набла» на данный вектор:

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} \quad [\vec{\ }, \vec{a}] \quad \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{}{x} & \frac{}{y} & \frac{}{z} \\ a_x & a_y & a_z \end{array} .$$

6. Теорема Стокса

Зная ротор вектора в каждой точке некоторой поверхности S, можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру, на который опирается поверхность S. Эту связь устанавливает *теорема Стокса*:

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) \qquad {}_S (\mathrm{rot}\ \vec{a}, d\vec{S}),$$

где интеграл в левой части берется по произвольному контуру L, а интеграл в правой части – по поверхности S, опирающейся на контур L.

7. Некоторые математические соотношения

grad ( ) $\vec{\ }$( ) $\vec{\ }$ $\vec{\ }$ grad grad ;

div ($\vec{a}$) ($\vec{\ }$, $\vec{a}$) ($\vec{\ }$, $\vec{a}$) ($\vec{a}$, $\vec{\ }$) div $\vec{a}$ $\vec{a}$ grad ;

div grad ($\vec{\ }$, $\vec{\ }$) ^{2} ;

rot grad [$\vec{\ }$, $\vec{\ }$] 0;

div rot $\vec{a}$ ($\vec{\ }$, [$\vec{\ }$, $\vec{a}$]) 0;

rot rot $\vec{a}$ [$\vec{\ }$, [$\vec{\ }$, $\vec{a}$]] $\vec{\ }$($\vec{\ }$, $\vec{a}$) $\vec{a}$ ($\vec{\ }$, $\vec{\ }$) grad div $\vec{a}$ $\vec{a}$,

где использована формула $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c})$ $\vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$.

16.2. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля

Рассмотрим картину силовых линий электрического поля неподвижного точечного заряда q 0 (рис. 16.4).

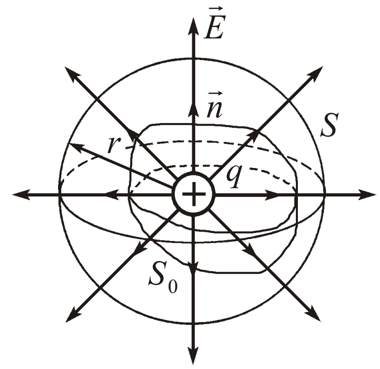


Рис. 16.4

Окружим заряд воображаемой сферой радиусом r с центром в точке расположения заряда. Площадь поверхности сферы S 4 r^2.

Так как векторы напряженности электрического поля во всех точках на поверхности рассматриваемой сферы направлены по радиусу (то есть по нормали к поверхности сферы) и одинаковы по величине, то поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S равен

$$\Phi \quad E_n S \quad E_n 4 \quad r^2.$$

Поскольку в точках на поверхности сферы (см. формулу (15.7))

$$E_n \quad E \quad \frac{q}{4 \quad _0 r^2},$$

то

$$\Phi \quad \frac{q}{\ _0}. \qquad (16.1)$$

Легко видеть, что поток вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы другого радиуса также будет равен $q/\ _0$.

Покажем, что этот результат справедлив для любой замкнутой поверхности S_0 (рис. 16.4) и для произвольного расположения заряда (или зарядов) внутри этой поверхности.

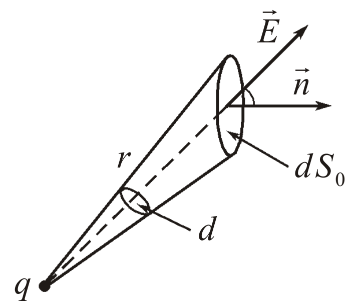


Рис. 16.5

Выделим на поверхности S_0 бесконечно малую площадку dS_0 (рис. 16.5). Поток вектора $\vec{E}$ через площадку dS_0 равен

$$d\Phi \quad (\vec{E}, d\vec{S}_0) \quad E\, dS_0 \cos \quad \frac{q}{4 \quad _0 r^2} dS_0 \cos \quad \frac{q}{4 \quad _0} \frac{dS_0 \cos}{r^2} \quad \frac{q}{4 \quad _0} d \quad ,$$

где d $dS_0 \cos$ $/r^2$ – телесный угол, опирающийся на площадку dS_0. Просуммировав элементарные потоки $d\Phi$ по телесному углу от нуля до 4 , найдем поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S_0:

$$\Phi \quad \oint \frac{q}{4 \quad _0} d \quad \frac{q}{4 \quad _0} 4 \quad \frac{q}{\ _0}.$$

Итак, какова бы ни была форма поверхности, окружающей точечный заряд q, поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность определяется формулой (16.1).

Если внутри замкнутой поверхности находятся N точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), то в силу суперпозиции напряженность $\vec{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей $\vec{E}_i$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поэтому

$$\Phi = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_S \sum_{i=1}^{N} (\vec{E}_i, d\vec{S}) = \sum_{i=1}^{N} \oint_S (\vec{E}_i, d\vec{S}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

Доказанное утверждение носит название **теоремы Гаусса**: *поток вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на* ε_0:

$$\Phi = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_S E_n \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i. \qquad (16.2)$$

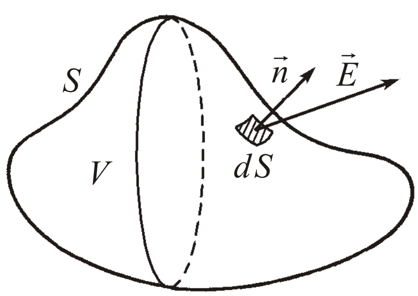


Рис. 16.6

Если заряд q распределен в пространстве непрерывно, то величина, равная отношению заряда dq в физически бесконечно малом объеме dV, в котором заключен этот заряд, к этому объему

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

называется *объемной плотностью заряда*.

Чтобы найти заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S (рис. 16.6), надо вычислить интеграл от ρ по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$q = \int_V \rho \, dV.$$

Таким образом, выражение (16.2) примет вид

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV. \qquad (16.3)$$

Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса, получим:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV; \qquad \int_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0. \qquad (16.4)$$

Соотношение (16.4) должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (16.5)$$

Равенство (16.5) выражает **теорему Гаусса в дифференциальной форме**: *дивергенция вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов в некоторой точке равна объемной плотности заряда в той же точке, деленной на* ε_0. Исходя из смысла дивергенции, говорят, что *заряды являются источниками электрического поля*.

16.3. Теорема о циркуляции напряженности электрического поля

В п. 15.3 мы доказали, что силы, действующие на заряд q в электрическом поле, созданном неподвижными зарядами, являются консервативными и работа этих сил по перемещению точечного заряда не зависит от формы траектории. Следовательно, их работа на любом замкнутом пути L равна нулю:

$$A = \oint_L (\vec{F}, d\vec{l}) = \oint_L (q\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Отсюда получим

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части, представляет собой циркуляцию вектора $\vec{E}$ по контуру L. Таким образом, *циркуляция вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов по произвольному контуру равна нулю*:

$$\Gamma = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0. \qquad (16.6)$$

Это утверждение называется **теоремой о циркуляция напряженности электрического поля**.

Возьмем произвольную поверхность S, опирающуюся на контур L (рис. 16.7), для которого вычислим циркуляцию вектора $\vec{E}$. Согласно теореме Стокса интеграл

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S (\operatorname{rot} \vec{E}, d\vec{S}).$$

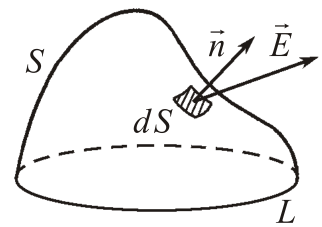


Рис. 16.7

Поскольку интеграл в левой части равен нулю, то

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{E}, d\vec{S}) = 0. \qquad (16.7)$$

Соотношение (16.7) должно выполняться для любой произвольно выбранной поверхности S, опирающейся на контур L. Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \qquad (16.8)$$

Равенство (16.8) выражает **теорему о циркуляции в дифференциальной форме**: *ротор вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов равен нулю*. Исходя из смысла ротора, говорят, что *электрическое поле неподвижных зарядов является безвихревым*.

16.4. Теорема о монотонности потенциала

Допустим, что в некоторой точке P вне заряженного тела потенциал имеет минимум. Окружим точку P произвольной замкнутой поверхностью S. На основании определения потока вектора, теоремы Остроградского – Гаусса и формулы (15.20)

$$\Phi = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \int_V \quad dV,$$

где интеграл берется по объему V, ограниченному поверхностью S. Отсюда следует, что если в точке P потенциал имеет минимум, то вторая производная от потенциала должна быть положительной (0), а поток вектора $\vec{E}$ через выбранную поверхность   отрицательным. Но это противоречит выводу теоремы Гаусса: поскольку внутри поверхности S заряды отсутствуют, то поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность будет равен нулю. Если предположить, что в точке P потенциал имеет максимум, то вторая производная должна быть отрицательной (0), а поток вектора напряженности Φ 0, что также противоречит выводу теоремы Гаусса. Следовательно, в точке P нет ни максимума, ни минимума потенциала.

Таким образом, *потенциал вне заряженного тела и при отсутствии других тел является монотонной функцией и может достигать максимальных и минимальных значений только на границах области* (на поверхности проводника и на бесконечности). Это и есть **теорема о монотонности потенциала**.

16.5. Уравнения Пуассона и Лапласа

Итак, для напряженности поля неподвижных зарядов справедливы соотношения:

$$\operatorname{div}\vec{E} \quad \frac{}{_0}; \qquad \operatorname{rot}\vec{E} \quad 0.$$

Взяв дивергенцию от вектора $\vec{E}$ (см. (15.20)), получим:

$$\operatorname{div}\vec{E} \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} \qquad\qquad \frac{}{_0},$$

или

$$\frac{}{_0}. \tag{16.9}$$

Уравнение (16.9) называется **уравнением Пуассона**, которое при   0 превращается в **уравнение Лапласа**:

$$0. \tag{16.10}$$

Уравнения (16.9) и (16.10) представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных. Решив их при заданном распределении зарядов в пространстве, можно найти потенциалы в каждой точке пространства. Затем, используя связь (15.20) между напряженностью поля и потенциалом, можно найти проекции вектора $\vec{E}$ на оси системы координат.

16.6. Расчет электрического поля с помощью теорем электростатики

1. Метод теоремы Гаусса

Продемонстрируем возможности теоремы Гаусса на нескольких полезных для решения задач примерах. Прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, отметим, что теорему Гаусса можно применять только для систем зарядов, обладающих определенной симметрией (относительно плоскости, оси или точки). В общем случае распределения зарядов выбрать поверхность, через которую надо вычислить поток напряженности электрического поля, оказывается невозможным.

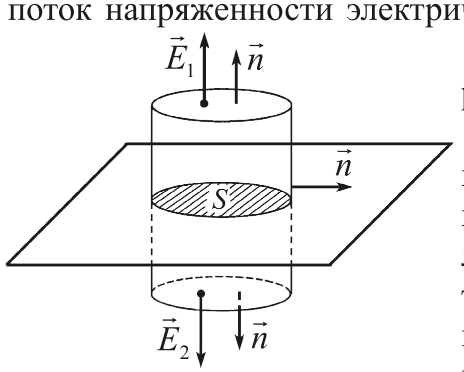


Рис. 16.8

Пример 1. Электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Пусть для определенности поверхностная плотность заряда плоскости   0. Из соображений симметрии вытекает, что векторы напряженности поля в любой точке направлены перпендикулярно плоскости. Также очевидно, что в симметрично удаленных от плоскости точках векторы напряженности одинаковы по величине и противоположны по направлению.

Представим себе цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями площадью S, находящимися на равных расстояниях от плоскости (см. рис. 16.8).

В силу симметрии векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ будут перпендикулярны основаниям цилиндра, а по величине $E_1 \quad E_2 \quad E$. Поскольку векторы напряженности поля параллельны боковой поверхности, то поток вектора напряженности через всю поверхность цилиндра $S_{\text{цил}}$ будет равен потоку через его основания S:

$$\Phi \quad \oint\limits_{S_{\text{цил}}} E_n\, dS \quad \int\limits_{S} E_1\, dS \quad \int\limits_{S} E_2\, dS \quad E_1 S \quad E_2 S \quad 2ES.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi \quad q/\ _0,$$

где q – заряд, заключенный внутри рассматриваемой цилиндрической поверхности:

$$q \qquad S.$$

Следовательно,

$$E \quad \frac{\quad}{2\ _0}. \tag{16.11}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что величина напряженности поля бесконечной заряженной плоскости на любых расстояниях от нее одинакова. Отметим, что формула (16.11) совпадает с (15.31), полученной для тонкого диска при R .

Для плоскости, заряженной отрицательно, результат будет таким же, лишь направление вектора $\vec{E}$ изменится на противоположное.

Пример 2. Электрическое поле равномерно заряженного прямолинейного стержня.

Рассмотрим бесконечно длинный прямолинейный стержень, заряженный с линейной плотностью 0, и найдем напряженность электрического поля на расстоянии x от стержня. Из соображений симметрии вытекает, что векторы напряженности поля в любой точке направлены перпендикулярно стержню и в симметрично удаленных от стержня точках одинаковы по величине.

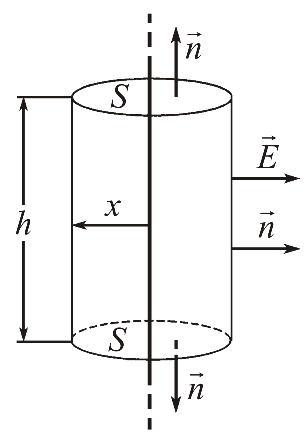


Рис. 16.9

Представим себе цилиндрическую поверхность высотой h с образующими, параллельными оси стержня, и основаниями площадью $S \quad x^2$ (см. рис. 16.9). Поскольку векторы напряженности поля параллельны основаниям, то поток вектора напряженности через всю поверхность цилиндра $S_{\text{цил}}$ будет равен потоку через его боковую поверхность $S_{\text{бок}}$:

$$\Phi \quad \oint\limits_{S_{\text{цил}}} E_n\, dS \quad \int\limits_{S_{\text{бок}}} E_n\, dS \quad \int\limits_{S_{\text{бок}}} E\, dS \quad E S_{\text{бок}} \quad E\, 2 \quad x\, h.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi \quad q/\ _0,$$

где q – заряд, заключенный внутри рассматриваемой цилиндрической поверхности:

$$q \qquad h.$$

Следовательно,

$$E \quad \frac{}{2 \quad {}_0 x}. \tag{16.12}$$

Формула (16.12) совпадает с (15.28), полученной для такого же стержня методом суперпозиции.

Пример 3. Электрическое поле равномерно заряженной сферы.

Рассмотрим сферу радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд $q \quad 0$.

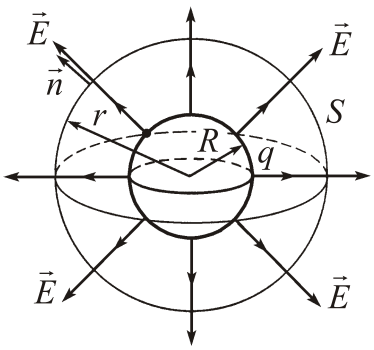


Рис. 16.10

Поле, создаваемое сферической поверхностью, заряженной равномерно, будет центрально-симметричным, то есть в любой точке векторы напряженности поля будут направлены вдоль радиусов сферы.

Вообразим концентрическую с заряженной сферой поверхность радиусом $r \quad R$ (рис. 16.10). Во всех точках этой поверхности величина проекции вектора $\vec{E}$ на нормаль будет одинакова. Поэтому суммарный поток вектора напряженности поля через выбранную поверхность

$$\Phi(r \quad R) \quad \oint_S E_n \, dS \quad E\,4 \quad r^2.$$

С другой стороны, весь заряд сферы находится внутри этой поверхности. Поэтому

$$\Phi(r \quad R) \quad q/ \quad {}_0.$$

Следовательно,

$$E(r \quad R) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^2}, \tag{16.13}$$

то есть электрическое поле вне заряженной сферы тождественно полю точечного заряда, помещенного в центр сферы (см. (15.7)).

Поверхность радиусом $r \quad R$ не будет содержать зарядов. Поэтому внутри заряженной сферы

$$E(r \quad R) \quad 0. \tag{16.14}$$

Очевидно, что для сферы, заряженной отрицательно, формулы (16.13) (16.14) остаются справедливыми, только векторы напряженности будут направлены в противоположные стороны (к центру сферы).

Поскольку поле, создаваемое точечным зарядом, такое же, как поле вне заряженной сферы, то потенциал сферы при $r \quad R$ может быть вычислен по формуле (15.16):

$$(r \quad R) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r}. \tag{16.15}$$

Внутри сферы поле отсутствует, поэтому при перемещении заряда из точки, расположенной на расстоянии $r \quad R$ от центра сферы, на ее поверхность силы поля работы не совершают. Это означает, что работа сил поля при перемещении заряда из этой точки на бесконечность равна работе при его перемещении с поверхности сферы на бесконечность. Поэтому потенциал внутри сферы одинаков и равен потенциалу на ее поверхности:

$$(r \quad R) \qquad (r \quad R) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 R}. \tag{16.16}$$

Пример 4. Электрическое поле равномерно заряженного шара.

Рассмотрим шар радиусом R, по объему которого равномерно распределен заряд $q \quad 0$ с плотностью

$$\frac{q}{\frac{4}{3} \quad R^3}.$$

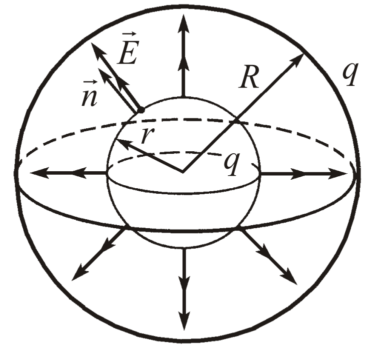


Рис. 16.11

Будем полагать диэлектрическую проницаемость всюду равной единице.

Поле, создаваемое таким шаром, будет центрально-симметричным. Легко понять, что вне шара для поля получится такой же результат, что и для поля вне сферы.

Найдем поле внутри шара.

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность радиусом $r \quad R$ (рис. 16.11). Поток вектора напряженности поля через поверхность этой сферы

$$\Phi(r \quad R) \quad \oint_S E_n \, dS \quad E\, 4 \quad r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(r \quad R) \quad q \,/ \quad _0,$$

где

$$q \qquad \tfrac{4}{3} \quad r^3 \quad \frac{q \, \frac{4}{3} \quad r^3}{\frac{4}{3} \quad R^3} \quad \frac{q\, r^3}{R^3}$$

заряд, заключенный в сфере радиусом r.

Следовательно,

$$E(r \quad R) \quad \frac{q\, r}{4 \quad _0 R^3} \quad \frac{r}{3 \quad _0}. \tag{16.17}$$

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара напряженность поля растет линейно с расстоянием от его центра, а вне шара – убывает по такому же закону, как у поля точечного заряда или сферы.

Поскольку поле, создаваемое точечным зарядом, такое же, как поле вне заряженного шара, то потенциал шара при $r \quad R$ может быть вычислен по формуле (15.16):

$$(r \quad R) \quad \frac{q}{4 \quad _0 r}. \tag{16.18}$$

Поле внутри шара растет с увеличением расстояния от его центра. Найдем работу сил поля при перемещении единичного положительного заряда q из произвольной точки, находящейся внутри шара, на бесконечность. Она будет равна потенциалу в рассматриваемой точке:

$$A \qquad _r (\vec{F}, d\vec{l}) \qquad _r q\, E\, dr \quad q \quad _r E(r \quad R)\, dr \quad q \quad _r E(r \quad R)\, dr;$$

$$A \quad q \int_r^R \frac{q\, r}{4 \quad _0 R^3}\, dr \quad q \quad _R \frac{q}{4 \quad _0 r^2}\, dr \quad q \quad \frac{3q}{8 \quad _0 R} \quad \frac{q\, r^2}{8 \quad _0 R^3} \quad .$$

Следовательно,

$$(r \quad R) \quad \frac{3q}{8 \quad _0 R} \quad \frac{q\, r^2}{8 \quad _0 R^3}. \tag{16.19}$$

2. Метод дифференциальных уравнений

Уравнения Пуассона (16.9) и Лапласа (16.10) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, для решения которых необходимо задать так называемые *граничные условия*.

Рассмотрим частный случай уравнения Пуассона – уравнение Лапласа

$$0 \qquad (16.20)$$

в одномерном случае. Тогда, если (x), то

$$\frac{d^2}{dx^2} \quad 0,$$

и решение уравнения (16.20) имеет вид

$$(x) \quad A\,x \quad B. \qquad (16.21)$$

В случае центральной симметрии (r) уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} \quad 0,$$

а его решение

$$(r) \quad \frac{A}{r} \quad B. \qquad (16.22)$$

Ниже докажем, а пока примем без доказательства, что на границе заряженной поверхности нормальная составляющая $\vec{E}_n$ вектора $\vec{E}$ терпит разрыв, а касательная составляющая $\vec{E}$ – непрерывна, причем $E_{n\,2} \quad E_{n\,1} \quad / \,_0$ и $E \,_2 \quad E \,_1 \quad 0$.

Пример 1. Электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

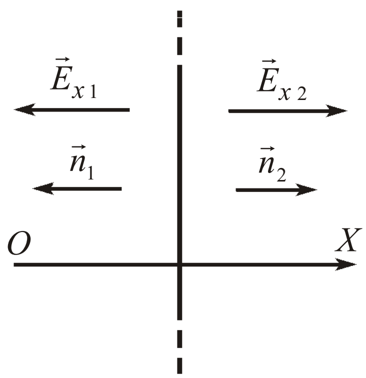


Рис. 16.12

В силу симметрии силовые линии электрического поля будут перпендикулярны плоскости. Если ось *OX* направить перпендикулярно плоскости, то потенциал в любой точке будет зависеть только от координаты x и решение уравнения (16.20) будет иметь вид (16.21). Для областей слева и справа от плоскости (рис. 16.12)

$$_1 \quad A_1\,x \quad B_1; \qquad _2 \quad A_2\,x \quad B_2.$$

Так как $_1(0) \quad _2(0)$, то $B_1 \quad B_2 \quad B$ и

$$_1 \quad A_1\,x \quad B; \qquad _2 \quad A_2\,x \quad B.$$

В силу симметрии $_1(x) \quad _2(\quad x)$. Тогда

$$A_1\,x \quad B \qquad A_2\,x \quad B; \qquad A_1 \qquad A_2;$$

$$_1 \quad A\,x \quad B; \qquad _2 \qquad A\,x \quad B.$$

Отсюда с учетом (15.20) получим:

$$E_{x\,1} \qquad \frac{d \quad _1}{dx} \qquad A; \qquad E_{x\,2} \qquad \frac{d \quad _2}{dx} \quad A; \qquad E_{y\,1} \quad E_{y\,2} \quad 0; \qquad E_{z\,1} \quad E_{z\,2} \quad 0.$$

Так как $E_{x\,2} \quad E_{x\,1} \quad / \,_0$, то $2\,A \quad / \,_0$. Следовательно,

$$E_{x\,1} \qquad \frac{}{2 \,_0}; \qquad E_{x\,2} \quad \frac{}{2 \,_0},$$

что совпадает с формулой (16.11) для поля плоскости, полученной выше.

Пример 2. Электрическое поле равномерно заряженной сферы.

Рассмотрим сферу радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд q 0 (рис. 16.13).

Поле, создаваемое сферической поверхностью, заряженной равномерно, будет центрально-симметричным, то есть (r). В этом случае решение уравнения (16.20) будет иметь вид (16.22).

В областях внутри и вне сферы

$$_1 \qquad \frac{A_1}{r} \quad B_1;$$

$$_2 \qquad \frac{A_2}{r} \quad B_2.$$

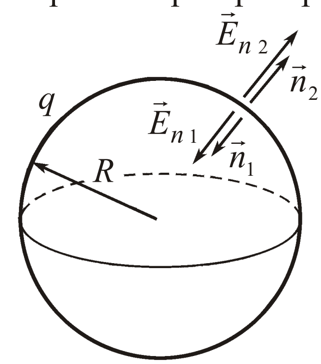


Рис. 16.13

При r 0 потенциал в центре сферы . Следовательно, A_1 0 и $_1$ B_1. Поскольку $E_{n\,2}$ $E_{n\,1}$ / $_0$, то

$$\frac{d\ \ _2}{dr} \quad \frac{d\ \ _1}{dr}\Bigg|_{r\quad R} \qquad \frac{\quad}{_0};$$

$$\frac{A_2}{r^2} \quad 0\ \Bigg|_{r\quad R} \qquad \frac{\quad}{_0}; \quad \frac{A_2}{R^2} \quad \frac{\quad}{_0}; \quad A_2 \quad \frac{\quad R^2}{_0}.$$

Поскольку заряд сферы q 4 R^2, то

$$A_2 \quad \frac{q}{4\quad _0}; \qquad _1 \quad B_1; \qquad _2 \quad \frac{q}{4\quad _0 r} \quad B_2.$$

Отсюда находим:

$$E_{n\,1} \quad E(r \quad R) \qquad \frac{d\ \ _1}{dr} \quad 0; \qquad E_{n\,2} \quad E(r \quad R) \qquad \frac{d\ \ _2}{dr} \quad \frac{q}{4\quad _0 r^2}.$$

Краткие выводы

1. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля: поток вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на $_0$:

$$\Phi \quad \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) \quad \frac{1}{_0}\sum_{i\quad 1}^{N} q_i \quad \frac{1}{_0}\int_V \quad dV.$$

2. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в дифференциальной форме: дивергенция вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов в некоторой точке равна объемной плотности заряда в той же точке, деленной на $_0$:

$$\operatorname{div}\vec{E} \quad \frac{\quad}{_0},$$

то есть *заряды являются источниками электрического поля*.

3. Теорема о циркуляция вектора напряженности электрического поля: циркуляция вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов по произвольному контуру равна нулю:

$$\Gamma \quad \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) \quad 0.$$

4. Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля в дифференциальной форме: ротор вектора напряженности электрического поля неподвижных зарядов равен нулю:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}\quad 0,$$

то есть *электрическое поле неподвижных зарядов является безвихревым.*

5. Уравнения Пуассона и Лапласа:

$$\frac{\quad}{{}_0};\qquad\qquad 0.$$

6. Теорема о монотонности потенциала: потенциал вне заряженного тела и при отсутствии других тел является монотонной функцией и может достигать максимальных и минимальных значений только на границах области.

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Сформулируйте теорему Гаусса для напряженности электрического поля.

2. Что является источниками электрического поля?

3. Чему равен поток напряженности однородного электрического поля через произвольную замкнутую поверхность?

4. Чему равен поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого телом произвольной формы и несущим заряд q, через поверхность сферы радиусом R, охватывающей данное тело? Каков будет поток, если заряженное тело находится вне сферы?

5. В каких случаях поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю? Означает ли это, что внутри данной поверхности заряды отсутствуют?

6. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности электрического поля.

7. Электрическое поле неподвижных зарядов является безвихревым. Что это означает?

8. Что позволяют определить уравнения Пуассона и Лапласа?

9. Сформулируйте теорему о монотонности потенциала.

10. Чему равна работа сил электрического поля по перемещению точечного заряда с центра равномерно заряженной сферы на ее поверхность?

11. Внутри равномерно заряженной сферы потенциал постоянен. Почему говорят, что внутри сферы электрического поля нет?

Задачи

1. Напряженность электрического поля зависит от координат (x, y) по закону:

$$\vec{E}\quad \frac{x}{x^2\quad y^2}\,\vec{i}\quad \frac{y}{x^2\quad y^2}\,\vec{j},$$

где   постоянная. Определите поток вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы радиусом R с центром в начале координат.

Решение

По определению, поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен

$$\Phi \quad \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) \quad \oint_S (\vec{E}, \vec{n}\, dS) \quad \oint_S (\vec{E}, \vec{n})\, dS,$$

где $\vec{n}$ нормаль к элементу dS поверхности S.

Поскольку нормаль к элементу dS поверхности сферы направлена по радиусу, проведенному к рассматриваемому элементу, а по модулю $|\vec{n}|$ 1, то

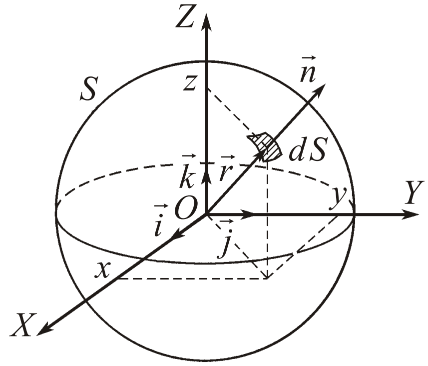


Рис. к задаче №1

$$\vec{n} \quad \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} \quad \frac{x\,\vec{i} \quad y\,\vec{j} \quad z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}},$$

где x, y, z координаты конца радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного к элементу dS и по величине совпадающего с радиусом сферы.

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{E}, \vec{n}) \quad E_x n_x \quad E_y n_y \quad E_z n_z,$$

где E_x, E_y, E_z, n_x, n_y, n_z проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{n}$ на соответствующие оси системы координат:

$$E_x \quad \frac{x}{x^2 \quad y^2}; \qquad E_y \quad \frac{y}{x^2 \quad y^2}; \qquad E_z \quad 0;$$

$$n_x \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}; \qquad n_y \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}; \qquad n_z \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}.$$

Следовательно,

$$(\vec{E}, \vec{n}) \quad \frac{(x^2 \quad y^2)}{(x^2 \quad y^2)\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}} \quad \frac{}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}} \quad \frac{}{R};$$

$$\Phi \quad \oint_S \frac{}{R}\, dS \quad \frac{}{R} S \quad \frac{}{R} 4 \quad R^2 \quad 4 \quad R,$$

где учтено, что площадь поверхности сферы S 4 R^2.

Ответ: Φ 4 R.

2. Определите поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q 0, через поверхность круга радиусом R, центр которого находится на расстоянии l от заряда, а ось проходит через заряд.

Решение

Мысленно разобьем круг на бесконечно тонкие кольца площадью S 2 d, которые разобьем на элементарные площадки dS (рис. 1).

Точечный заряд q, расположенный на расстоянии l от центра круга, на произвольной площадке dS кольца радиусом создаст электрическое поле напряженностью

$$dE \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^2},$$

где r $\sqrt{l^2 \quad {}^2}$. При этом вектор $d\vec{E}$ будет направлен под некоторым углом к оси круга (нормали $\vec{n}$ к его поверхности).

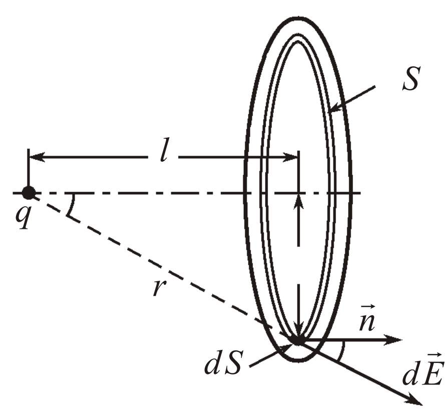


Рис. 1 к задаче №2

Поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого зарядом q, через площадку dS равен

$$d\Phi \quad (\vec{E}, d\vec{S}) \quad E\,dS\cos \qquad \frac{q}{4\quad_0 r^2}\,dS\,\frac{l}{r} \quad \frac{q\,l}{4\quad_0 r^3}\,dS \quad \frac{q\,l}{4\quad_0(l^2\quad{}^2)^{3/2}}\,dS,$$

через поверхность кольца

$$\Phi \quad {}_S \frac{q\,l}{4\quad_0(l^2\quad{}^2)^{3/2}}\,dS \quad \frac{q\,l}{4\quad_0(l^2\quad{}^2)^{3/2}}\quad S \quad \frac{q\,l}{4\quad_0(l^2\quad{}^2)^{3/2}}\,2\quad\quad d\quad,$$

а через поверхность круга

$$\Phi\quad_S \quad \Phi \quad \frac{q\,l}{2\quad_0}\,{}_0^R \frac{d}{(l^2\quad{}^2)^{3/2}} \quad \frac{q\,l}{2\quad_0}\,\frac{1}{(l^2\quad{}^2)^{1/2}}\Bigg|_0^R \quad \frac{q}{2\quad_0}\quad 1 \quad \frac{l}{\sqrt{l^2\quad R^2}}\quad.$$

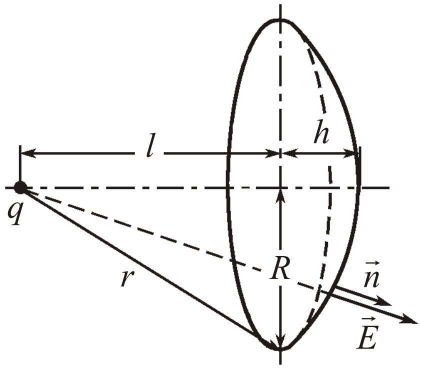


Рис. 2 к задаче №2

Задачу можно решить проще, если учесть, что величина потока вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность пропорциональна количеству пересечений силовых линий с рассматриваемой поверхностью.

Силовые линии поля точечного заряда представляют собой центрально-симметричную систему радиальных прямых, направленных от заряда, если он положительный, и к заряду если он отрицательный. Очевидно, что поток напряженности электрического поля через поверхность круга радиусом R, центр которого находится на расстоянии l от заряда q, будет равен потоку вектора $\vec{E}$ через поверхность сферического сегмента радиусом $r \quad (l^2 \quad R^2)^{1/2}$ и высотой $h \quad r \quad l$, опирающегося на данный круг (рис. 2).

Величина напряженности электрического поля точечного заряда во всех точках рассматриваемого сферического сегмента одинакова и равна

$$E \quad \frac{q}{4\quad_0 r^2}.$$

Поскольку в любой точке на поверхности сферического сегмента направления векторов $\vec{E}$ и нормали $\vec{n}$ совпадают, то поток вектора напряженности электрического поля через поверхность сегмента

$$\Phi \quad {}_S(\vec{E}, d\vec{S}) \quad {}_S E\,dS \quad \frac{q}{4\quad_0 r^2}\,S,$$

где S площадь сегмента:

$$S \quad 2 \quad r\,h \quad 2 \quad r\,(r \quad l).$$

Следовательно,

$$\Phi \quad \frac{q}{4\quad_0 r^2}\,2\quad r\,(r\quad l) \quad \frac{q}{2\quad_0 r}\,(r\quad l) \quad \frac{q}{2\quad_0}\quad 1 \quad \frac{l}{r} \quad\quad \frac{q}{2\quad_0}\quad 1 \quad \frac{l}{\sqrt{l^2\quad R^2}}\quad.$$

Ответ: $\Phi \quad \frac{q}{2\quad_0}\quad 1 \quad \frac{l}{\sqrt{l^2\quad R^2}}\quad.$

3. Две пересекающиеся под углом бесконечные плоскости делят пространство на четыре области (рис. 1). Определите величину напряженности электрического поля в областях *1* и *2*, если поверхностные плотности зарядов плоскостей ( ). Среда вакуум.

Решение

Для решения задачи воспользуемся выражением (16.11) для величины напряженности электрического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E \quad \frac{\ }{2\ {}_0}, \qquad (1)$$

полученным с помощью теоремы Гаусса.

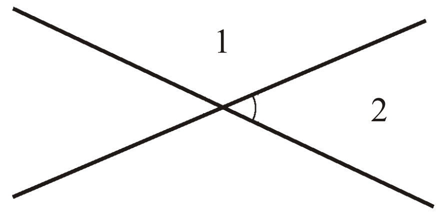


Рис. 1 к задаче №3

Как следует из (1), напряженность поля бесконечной заряженной плоскости на любых расстояниях от нее одинакова. При этом вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости и для положительно заряженной плоскости направлен от нее, а для отрицательно заряженной   к ней (рис. 2).

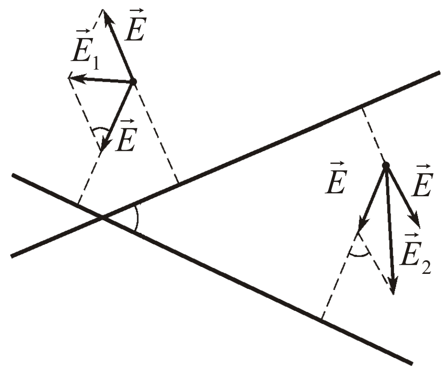


Рис. 2 к задаче №3

Рассмотрим произвольные точки в областях *1* и *2*, указанных в условии задачи.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{E}$ положительно и отрицательно заряженных плоскостей направлены вдоль перпендикуляров к соответствующим плоскостям и одинаковы по величине:

$$E \quad E \quad \frac{\ }{2\ {}_0}.$$

Согласно принципу суперпозиции, напряженность электрического поля, создаваемого обеими плоскостями, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой плоскостью в отдельности:

$$\vec{E}_1 \quad \vec{E} \quad \vec{E}\ ; \qquad \vec{E}_2 \quad \vec{E} \quad \vec{E}\ .$$

Следовательно,

$$E_1 \quad \sqrt{E^2 \quad E^2 \quad 2\,E\ \ E\ \cos\ } \quad \frac{\ }{2\ {}_0}\sqrt{2\,(1 \quad \cos\ )} \quad \frac{\ }{{}_0}\sin(\tfrac{1}{2}\ );$$

$$E_2 \quad \sqrt{E^2 \quad E^2 \quad 2\,E\ \ E\ \cos(\qquad)} \quad \frac{\ }{2\ {}_0}\sqrt{2\,(1 \quad \cos\ )} \quad \frac{\ }{{}_0}\cos(\tfrac{1}{2}\ ).$$

Ответ: $E_1 \quad \frac{\ }{{}_0}\sin(\tfrac{1}{2}\ )$; $E_2 \quad \frac{\ }{{}_0}\cos(\tfrac{1}{2}\ )$.

4. Два длинных параллельных стержня равномерно заряжены с одинаковой линейной плотностью . Расстояние между стержнями равно *a*. Определите максимальную величину напряженности электрического поля этих стержней в плоскости симметрии стержней, расположенной между ними. Среда вакуум.

Решение

Для решения задачи воспользуемся выражением (16.12) для величины напряженности электрического поля равномерно заряженного бесконечного прямолинейного стержня

$$E \quad \frac{\ }{2\ \ {}_0 r}, \qquad (1)$$

полученным с помощью теоремы Гаусса.

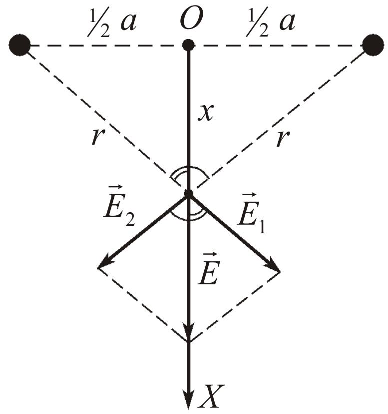


Рис. к задаче №4

Как следует из (1), напряженность поля равномерно заряженного стержня уменьшается с увеличением расстояния r от стержня до рассматриваемой точки поля. При этом вектор $\vec{E}$ в любой точке лежит в одной плоскости со стержнем и перпендикулярен к нему.

Рассмотрим произвольную точку в плоскости симметрии стержней, расположенной между ними.

Векторы напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых стержнями, будут направлены вдоль перпендикуляров к соответствующим стержням и одинаковы по величине:

$$E_1 \quad E_2 \quad \frac{\quad}{2 \quad {}_0 r},$$

где расстояния от стержней до рассматриваемой точки $r \quad \sqrt{(\tfrac{1}{2} a)^2 \quad x^2}$.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность электрического поля, создаваемого обоими стержнями, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждым стержнем в отдельности:

$$\vec{E} \quad \vec{E}_1 \quad \vec{E}_2;$$

$$E \quad \sqrt{E_1^2 \quad E_2^2 \quad 2\, E_1 E_2 \cos(\quad\quad 2\quad)} \quad \frac{\quad}{2 \quad {}_0 r} \sqrt{2\,(1 \quad \cos 2\quad)} \quad \frac{\quad}{{}_0 r} \cos \quad ,$$

где $\cos \quad\quad x/r$. Следовательно,

$$E \quad \frac{x}{{}_0 r^2} \quad \frac{x}{{}_0 (\tfrac{1}{4} a^2 \quad x^2)}. \tag{2}$$

Чтобы найти максимальное значение напряженности поля, исследуем (2) на экстремум:

$$\frac{dE}{dx} \quad \frac{\quad}{{}_0} \quad \frac{\tfrac{1}{4} a^2 \quad x^2 \quad 2x^2}{(\tfrac{1}{4} a^2 \quad x^2)^2} \quad ; \quad x_{\mathrm{m}} \quad \tfrac{1}{2} a.$$

Поскольку в точке O результирующее поле равно нулю (так как здесь векторы напряженностей полей, создаваемых стержнями, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и одинаковы по величине), а на бесконечности ($x \quad\quad$) поле стержней будет стремиться к нулю, то на расстоянии

$$x_{\mathrm{m}} \quad \tfrac{1}{2} a$$

от прямой, соединяющей стержни, напряженность поля достигает максимального значения и будет равна

$$E_{\max} \quad \frac{x_{\mathrm{m}}}{{}_0 (\tfrac{1}{4} a^2 \quad x_{\mathrm{m}}^2)} \quad \frac{\quad}{{}_0 a}.$$

Ответ: $E_{\max} \quad \frac{\quad}{{}_0 a}$.

5. Сфера радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью . На расстоянии от ее поверхности, равном радиусу сферы, находится тонкий стержень, расположенный вдоль продолжения радиуса сферы. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью . Длина стержня равна радиусу сферы. Определите силу взаимодействия сферы и стержня. Среда вакуум.

Решение

Для решения задачи воспользуемся выражением (16.13) для величины напряженности электрического поля вне равномерно заряженной сферы

$$E \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^2}, \qquad (1)$$

полученным с помощью теоремы Гаусса.

Как следует из (1), напряженность поля заряженной сферы уменьшается с увеличением расстояния r от центра сферы до рассматриваемой точки. При этом поле, создаваемое сферой, будет центрально-симметричным.

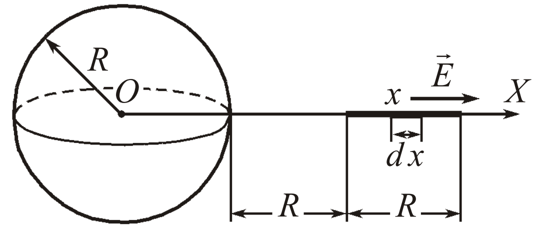


Рис. к задаче №5

Поместим начало системы координат O в центр сферы, а ось OX направим вдоль стержня.

Пусть заряд сферы

$$q \qquad S \qquad 4 \quad R^2 \quad 0,$$

где $S \quad 4 \quad R^2$ площадь поверхности сферы.

Тогда напряженность поля вне сферы на расстоянии x от ее центра

$$E \quad \frac{R^2}{{}_0 x^2},$$

а силовые линии будут направлены вдоль оси OX, то есть вдоль стержня.

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dx с элементарными зарядами $dq \qquad dx$, которые будем считать точечными.

На такой заряд, расположенный на расстоянии x от начала системы координат, со стороны поля сферы будет действовать сила

$$dF \quad dq\,E \qquad dx\,\frac{R^2}{{}_0 x^2}.$$

Поскольку все векторы $d\vec{F}$ будут направлены вдоль стержня в одну сторону, то результирующая сила, действующая на стержень,

$$F \qquad dF \qquad {}_{2R}^{3R} \quad dx\,\frac{R^2}{{}_0 x^2} \qquad \frac{R^2}{{}_0}\,\frac{1}{x}\bigg|_{2R}^{3R} \qquad \frac{R^2}{{}_0} \quad \frac{1}{2R} \quad \frac{1}{3R} \qquad \frac{R}{6 \quad {}_0}.$$

Ответ: $F \qquad \frac{R}{6 \quad {}_0}$.

6. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R имеет заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его оси по закону:

$$r,$$

где положительная постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите величину напряженности электрического поля внутри и вне цилиндра. Постройте график зависимости $E(r)$. Среда вакуум.

Решение

Поле, создаваемое цилиндром, объемная плотность заряда которого зависит только от расстояния до его оси, будет радиально-симметричным относительно оси цилиндра.

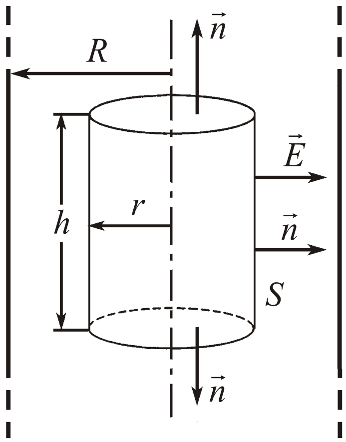


Рис. 1 к задаче №6

Выберем коаксиальную с цилиндром цилиндрическую поверхность S радиусом $r \quad R$ и высотой h.

Поскольку на равных расстояниях r от оси цилиндра напряженность электрического поля одинакова по величине и векторы напряженности направлены перпендикулярно оси, то поток вектора напряженности через всю поверхность S цилиндра будет равен потоку через его боковую поверхность $S_{\text{бок}} \quad 2 \quad r\,h$:

$$\Phi(r \quad R) \quad \oint_S E_n\, dS \qquad \int_{S_{\text{бок}}} E\, dS \quad E\, S_{\text{бок}} \quad E\,2 \quad r\,h.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(r \quad R) \quad q\,/\quad_0,$$

где заряд q, заключенный внутри выбранной поверхности,

$$q \qquad \int_V dV \qquad \int_0^r \quad r\,2 \quad r\,h\,dr \quad 2 \qquad h\,\frac{r^3}{3}\bigg|_0^r \quad \frac{2 \qquad h\,r^3}{3},$$

где $dV \quad 2 \quad r\,h\,dr$ объем цилиндрического слоя радиусом r и толщиной dr.

Следовательно, напряженность электрического поля внутри цилиндра на расстоянии r от его оси

$$E\,2 \quad r\,h \quad \frac{2 \qquad h\,r^3}{3 \quad_0}; \qquad E(r \quad R) \quad \frac{r^2}{3 \quad_0}. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь коаксиальную с цилиндром цилиндрическую поверхность радиусом $r \quad R$ и высотой h. По причинам, изложенным выше, поток вектора напряженности через эту поверхность

$$\Phi(r \quad R) \quad E\,2 \quad r\,h \quad q/\quad_0,$$

где заряд q, заключенный внутри выбранной поверхности,

$$q \qquad \int_V dV \qquad \int_0^R \quad r\,2 \quad r\,h\,dr \quad 2 \qquad h\,\frac{r^3}{3}\bigg|_0^R \quad \frac{2 \qquad h\,R^3}{3}.$$

Следовательно, напряженность электрического поля вне цилиндра

$$E\,2 \quad r\,h \quad \frac{2 \qquad h\,R^3}{3 \quad_0}; \qquad E(r \quad R) \quad \frac{R^3}{3 \quad_0 r}. \tag{2}$$

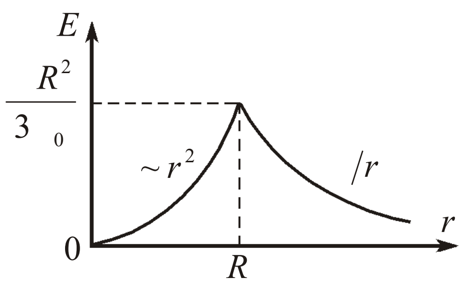


Рис. 2 к задаче №6

Как следует из полученных зависимостей (1) и (2), внутри цилиндра величина напряженности поля возрастает прямо пропорционально r^2 и вблизи поверхности достигает значения

$$E \quad \frac{R^2}{3 \quad_0},$$

а вне цилиндра убывает обратно пропорционально r.

График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 2.

Ответ: $E(r \quad R) \quad \frac{r^2}{3 \quad_0}$; $E(r \quad R) \quad \frac{R^3}{3 \quad_0 r}$; рис. 2.

7. Шар радиусом R имеет заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра по закону:

$$ {}_{0}(1 \quad r/R), $$

где ${}_{0}$ положительная постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите:

1) величину напряженности электрического поля внутри и вне шара;

2) максимальное значение напряженности и соответствующее ему расстояние до центра шара.

Решение

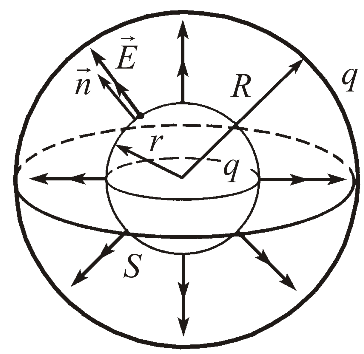


Рис. к задаче №7

Поле, создаваемое шаром, объемная плотность заряда которого зависит только от расстояния до его центра, будет центрально-симметричным.

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность S радиусом $r \quad R$. Поскольку на равных расстояниях r от центра шара напряженность электрического поля одинакова по величине и векторы напряженности направлены вдоль радиусов, то поток вектора напряженности через поверхность этой сферы

$$ \Phi(r \quad R) \quad \oint_S E_n \, dS \quad E\,4 \quad r^2. $$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$ \Phi(r \quad R) \quad q / \ {}_{0}, $$

где заряд q, заключенный внутри выбранной сферы,

$$ q \quad \int_V dV \quad \int_0^r {}_{0}\left(1 \quad \frac{r}{R}\right) 4 \quad r^2 dr \quad 4 \quad {}_{0}\left(\frac{r^3}{3} \quad \frac{r^4}{4R}\right)\Bigg|_0^r \quad {}_{0}\frac{r^3(4R \quad 3r)}{3R}. $$

Здесь $dV \quad 4 \quad r^2 dr$ объем сферического слоя радиусом r и толщиной dr.

Следовательно, напряженность электрического поля внутри шара

$$ E\,4 \quad r^2 \quad {}_{0}\frac{r^3(4R \quad 3r)}{3 \ {}_{0}R}; \qquad E(r \quad R) \quad {}_{0}\frac{(4R \quad 3r)r}{12 \ {}_{0}R}. \tag{1} $$

Рассмотрим теперь концентрическую с шаром сферическую поверхность радиусом $r \quad R$. По причинам, изложенным выше, поток вектора напряженности через поверхность этой сферы

$$ \Phi(r \quad R) \quad E\,4 \quad r^2 \quad q/ \ {}_{0}, $$

где заряд q, заключенный внутри выбранной сферы, равен заряду шара:

$$ q \quad \int_V dV \quad \int_0^R {}_{0}\left(1 \quad \frac{r}{R}\right) 4 \quad r^2 dr \quad 4 \quad {}_{0}\left(\frac{r^3}{3} \quad \frac{r^4}{4R}\right)\Bigg|_0^R \quad {}_{0}\frac{R^3}{3}. $$

Следовательно, напряженность электрического поля вне шара

$$ E(r \quad R) \quad {}_{0}\frac{R^3}{12 \ {}_{0}r^2}. \tag{2} $$

Как видно из (2), величина напряженности поля вне шара уменьшается с увеличением расстояния до центра и максимальна у его поверхности:

$$ E_{\max}(r \quad R) \quad \frac{{}_{0}R}{12 \ {}_{0}}. $$

Чтобы найти максимальное значение напряженности поля внутри шара, исследуем (1) на экстремум:

$$\frac{dE(r \le R)}{dr} = \rho_0 \frac{2R - 3r}{6\varepsilon_0 R} = 0; \quad r_m = \tfrac{2}{3}R; \quad E_{max}(r \le R) = \rho_0 \frac{(4R - 3r_m)\, r_m}{12\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}.$$

Поскольку $E_{max}(r \le R)$ больше $E_{max}(r \ge R)$, то напряженность поля достигает максимального значения внутри шара на расстоянии $r_m = \tfrac{2}{3}R$ до его центра и равна

$$E_{max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}.$$

Ответ: 1) $E(r \le R) = \rho_0 \dfrac{(4R - 3r)\, r}{12\varepsilon_0 R}$; $E(r \ge R) = \rho_0 \dfrac{R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$; 2) $E_{max} = \dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$; $r_m = \tfrac{2}{3}R$.

8. Используя условие задачи №7, постройте график зависимости потенциала электрического поля $\varphi(r)$ от расстояния r до центра шара. Среда — вакуум.

Решение

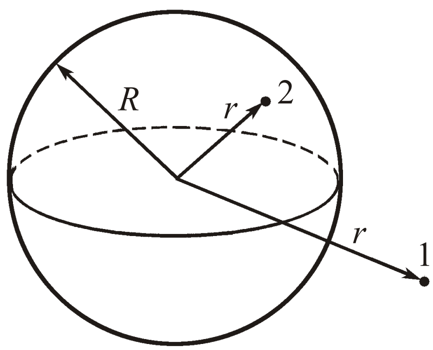


Рис. 1 к задаче №8

Как следует из решения задачи №7, напряженность поля внутри и вне шара изменяется в зависимости от расстояния r до его центра по законам:

$$E(r \le R) = \rho_0 \frac{(4R - 3r)\, r}{12\varepsilon_0 R}; \qquad E(r \ge R) = \rho_0 \frac{R^3}{12\varepsilon_0 r^2}.$$

Потенциал поля будем искать как работу сил поля по перемещению единичного положительного заряда q из произвольной точки на бесконечность:

$$\varphi = A_\infty / q.$$

Начнем с расчета потенциала в точке *1*, находящейся на расстоянии $r \ge R$ от центра шара (рис. 1):

$$A_1 = \int_1^\infty (\vec{F}, d\vec{l}) = q \int_1^\infty (\vec{E}, d\vec{l}). \tag{1}$$

Поскольку работа сил электрического поля не зависит от формы траектории, то для удобства вычисления интеграла (1) будем перемещать заряд q на бесконечность вдоль радиального направления. Так как векторы напряженности также направлены вдоль радиусов шара, то

$$A_1 = q \int_1^\infty (\vec{E}, d\vec{l}) = q \int_1^\infty (\vec{E}, d\vec{r}) = q \int_r^\infty E\, dr.$$

Следовательно,

$$A_1 = q \int_r^\infty E(r \ge R)\, dr = q \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2}\, dr = -q \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Bigg|_r^\infty = q \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi(r \ge R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r},$$

то есть вне шара потенциал убывает обратно пропорционально r.

Поскольку внутри и вне шара напряженность поля изменяется по разным законам, то работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда q из точки *2* на бесконечность

$$A_2 = q \int_r^R E(r \le R)\, dr + q \int_R^\infty E(r \ge R)\, dr.$$

Следовательно, потенциал в точке *2*, находящейся на расстоянии $r \quad R$ от центра шара:

$$(r \quad R) \quad \frac{A_2}{q} \quad \int_r^R \frac{{}_0(4R \quad 3r)r}{12 \quad {}_0 R}\,dr \qquad \int_R \frac{{}_0 R^3}{12 \quad {}_0 r^2}\,dr;$$

$$(r \quad R) \quad \frac{{}_0}{12 \quad {}_0} \quad \int_r^R 4r\,dr \quad \int_r^R \frac{3r^2}{R}\,dr \qquad \int_R \frac{R^3}{r^2}\,dr \qquad \frac{{}_0}{12 \quad {}_0} \quad 2r^2 \quad \frac{r^3}{R}\Bigg|_r^R \quad \frac{R^3}{r}\Bigg|_R \;;$$

$$(r \quad R) \quad \frac{{}_0}{12 \quad {}_0} \quad 2R^2 \quad 2r^2 \quad \frac{r^3}{R} \qquad \frac{{}_0}{12 \quad {}_0 R}(2R^3 \quad 2Rr^2 \quad r^3),$$

то есть внутри шара потенциал убывает от

$$(r \quad 0) \quad \frac{{}_0 R^2}{6 \quad {}_0}$$

до

$$(r \quad R) \quad \frac{{}_0 R^2}{12 \quad {}_0}.$$

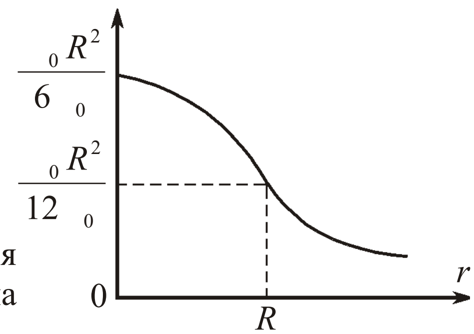


Рис. 2 к задаче №8

График зависимости потенциала от расстояния до центра шара будет иметь вид, представленный на рис. 2.

Ответ: рис. 2.

9. Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью , имеется сферическая полость. Расстояние между центрами шара и полости равно *a*. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите напряженность электрического поля в полости.

Решение

Рассмотрим сплошной шар радиусом *R*, по объему которого равномерно распределен заряд с плотностью (см. рисунок к задаче №7). Поле, создаваемое таким шаром, будет центрально-симметричным.

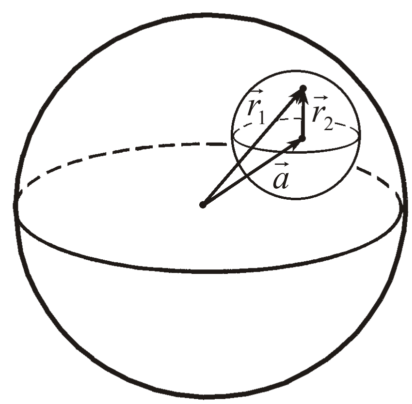


Рис. к задаче №9

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность радиусом $r \quad R$. Поскольку на равных расстояниях *r* от центра шара напряженность электрического поля одинакова по величине и векторы напряженности направлены вдоль радиусов, то поток вектора напряженности через поверхность этой сферы

$$\Phi \quad \oint_S E_n\,dS \quad E\,4 \quad r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi \quad q / \;{}_0,$$

где заряд q, заключенный внутри выбранной сферы,

$$q \qquad {}^4\!/_3 \quad r^3.$$

Следовательно,

$$E \quad \frac{r}{3 \quad {}_0}.$$

Поскольку векторы напряженности электрического поля шара в любой точке направлены вдоль соответствующего радиуса, то

$$\vec{E} \quad \frac{}{3 \quad _0}\vec{r}. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную точку внутри полости, положение которой относительно центра шара зададим вектором $\vec{r}_1$, а относительно центра полости вектором $\vec{r}_2$. Тогда положение центра полости относительно центра шара

$$\vec{a} \quad \vec{r}_1 \quad \vec{r}_2. \tag{2}$$

На основании принципа суперпозиции напряженность электрического поля в рассматриваемой точке можно представить в виде

$$\vec{E} \quad \vec{E}_1 \quad \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ напряженности полей, создаваемых соответственно сплошным шаром и шаром, заряженным с такой же объемной плотностью и размером, равным размеру полости.

На основании выражения (1)

$$\vec{E}_1 \quad \frac{}{3 \quad _0}\vec{r}_1; \qquad \vec{E}_2 \quad \frac{}{3 \quad _0}\vec{r}_2.$$

Следовательно, напряженность электрического поля в полости с учетом (2)

$$\vec{E} \quad \frac{}{3 \quad _0}(\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2) \quad \frac{}{3 \quad _0}\vec{a}.$$

Как видим, поле в полости будет однородным и его силовые линии будут параллельны вектору $\vec{a}$.

Ответ: $\vec{E} \quad \frac{}{3 \quad _0}\vec{a}$; $E \quad \frac{}{3 \quad _0}a$.

10. Потенциал электрического поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния r до его центра по закону:

$$r \qquad r^2 \quad ,$$

где и постоянные. Определите распределение объемного заряда внутри шара.

Решение

Значение потенциала электрического поля зависит от распределения зарядов в пространстве и может быть найдено в любой точке с помощью уравнения Пуассона

$$\frac{}{_0},$$

где оператор Лапласа в декартовых координатах

$$\frac{^2}{^2x} \quad \frac{^2}{^2y} \quad \frac{^2}{^2z}.$$

Поскольку расстояние r до центра шара можно представить в виде

$$r \quad \sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2},$$

то зависимость потенциала внутри шара от координат $(x,\ y,\ z)$ имеет вид

$$(x, y, z) \qquad (x^2 \quad y^2 \quad z^2) \qquad .$$

Следовательно,

$$\frac{}{x}\quad 2\quad x;\quad \frac{}{y}\quad 2\quad y;\quad \frac{}{z}\quad 2\quad z;\quad \frac{^2}{^2x}\quad 2\quad ;\quad \frac{^2}{^2y}\quad 2\quad ;\quad \frac{^2}{^2z}\quad 2\quad ;$$

$$_0\qquad _0\quad \frac{^2}{^2x}\quad \frac{^2}{^2y}\quad \frac{^2}{^2z}\qquad 6\quad _0.$$

Для решения задачи можно также воспользоваться оператором Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{}{r}\quad r^2\frac{}{r}\qquad \frac{1}{r^2\sin}\frac{}{}\quad \sin\quad \frac{}{}\qquad \frac{1}{r^2\sin^2}\frac{^2}{^2}.$$

Поскольку потенциал электрического поля внутри шара зависит только от расстояния r до его центра, то

$$\frac{1}{r^2}\frac{}{r}\quad r^2\frac{}{r}\qquad \frac{1}{r^2}\frac{}{r}\quad r^2\frac{(\quad r^2\quad)}{r}\qquad \frac{1}{r^2}\frac{(2\quad r^3)}{r}\quad 6\quad ;$$

$$_0\qquad 6\quad _0.$$

Ответ: $\quad 6\quad _0.$

<u>**Задачи для самостоятельного решения**</u>

16.1. Напряженность электрического поля зависит от координат (x, y, z) по закону:

$$\vec{E}\qquad x\,\vec{i}\qquad y\,\vec{j}\qquad z\,\vec{k},$$

где постоянная. Определите поток вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы радиусом R с центром в начале координат.

16.2. Равномерно заряженный стержень длиной a, расположенный по оси круга радиусом R, упирается своим концом в его центр. Линейная плотность заряда стержня . Определите поток напряженности электрического поля через площадь круга.

16.3. Две пересекающиеся под прямым углом бесконечные плоскости заряжены с поверхностными плотностями и 2 . Определите напряженность электрического поля, создаваемого этими плоскостями. Среда вакуум.

16.4. Два длинных параллельных стержня равномерно заряжены с одинаковой линейной плотностью . Расстояние между стержнями равно a. Определите величину напряженности электрического поля этих стержней в точке A (см. рисунок; стержни перпендикулярны плоскости рисунка). Расстояние l ½ a. Среда вакуум.

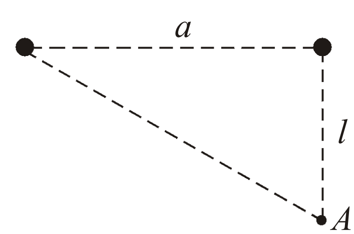


Рис. к задаче №16.4

16.5. Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью . На расстоянии r R от центра шара находится ближний к шару конец тонкого стержня, расположенного вдоль радиуса шара. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью . Длина стержня равна радиусу шара. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите силу взаимодействия шара и стержня. Среда вакуум.

16.6. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R имеет заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его оси по закону:

$$_0(1 \quad r/R),$$

где $_0$ положительная постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите величину напряженности электрического поля внутри и вне цилиндра. Среда вакуум.

16.7. Шар радиусом R имеет заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра по закону:

$$_0 \exp(\quad r^3),$$

где $_0$ и положительные постоянные. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите величину напряженности электрического поля внутри и вне шара. Среда вакуум

16.8. Внутри шара радиусом R, заряженного равномерно с объемной плотностью , имеется сферическая полость радиусом, вдвое меньшим радиуса шара. Центры шара и полости совпадают. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите потенциал в центре шара.

16.9. Внутри бесконечно длинного цилиндра, заряженного равномерно с объемной плотностью , имеется цилиндрическая полость. Расстояние между осями цилиндра и полости равно a. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите величину напряженности электрического поля в полости.

16.10. Потенциал электрического поля в некоторой области пространства зависит только от координаты x по закону:

$$x^3 \quad ,$$

где и постоянные. Определите распределение объемного заряда в пространстве.

Тесты

1. Кубик с длиной ребра a равномерно заряжен с объемной плотностью . Определите поток напряженности электрического поля через поверхность сферы радиусом $R \quad 2a$, центр которой совпадает с геометрическим центром кубика.

А. $\Phi \quad a^3/ \ _0$ Б. $\Phi \quad 4 \quad R^2 \quad a^3/ \ _0$

В. $\Phi \quad 4 \quad R^2 \quad a^3$ Г. $\Phi \quad 4 \quad R^2 \quad a^3 \ _0$

2. Напряженность однородного электрического поля равна $E \quad 10^3$ В/м. Поток напряженности поля через поверхность квадрата со стороной $a \quad 10$ см, плоскость которого расположена под углом 30° к направлению линий напряженности, равен …

Ответ: _________В м

3. Поток напряженности электрического поля через поверхность плоской пластинки, равномерно заряженной с поверхностной плотностью , равен Φ. Сила, действующая на пластинку в направлении, перпендикулярном ее плоскости, равна …

А. $F \quad \Phi$ Б. $F \quad /\Phi$

В. $F \quad \Phi/$ Г. $F \quad \Phi/ \ _0$

4. Две большие тонкие пластины расположены параллельно и заряжены разноименными зарядами с одинаковой поверхностной плотностью . Напряженность электрического поля вне пластин равна …

А. $E \quad 0$ Б. $E \quad / {}_0$

В. $E \quad 2 \; / {}_0$ Г. $E \quad /(2 \; {}_0)$

5. Две большие тонкие пластины расположены параллельно и заряжены разноименными зарядами с одинаковой поверхностной плотностью . Определите силу, действующую на точечный заряд $q \quad 0$, находящийся между пластинами далеко от их краев.

А. $F \quad 0$ Б. $F \quad q \; / {}_0$

В. $F \quad q \; /(2 \; {}_0)$ Г. $F \quad 2q \; / {}_0$

6. Большая тонкая пластина равномерно заряжена с поверхностной плотностью $8{,}85\ 10^{-10}$ Кл/м^2. Разность потенциалов между точками, расположенными по одну сторону от пластины на расстояниях $a \quad 10$ см и $b \quad 20$ см, равна …

Ответ: __________В

7. Сфера радиусом R заряжена. Зависят ли потенциал и напряженность электрического поля в центре сферы от распределения зарядов на ее поверхности?

А. Не зависят Б. Потенциал зависит, напряженность не зависит

В. Зависят Г. Потенциал не зависит, напряженность зависит

8. Сфера радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью . Напряженность поля в точке, удаленной от поверхности сферы на расстояние, равное утроенному радиусу, равна …

А. $E \quad /(16 \; {}_0)$ Б. $E \quad R/(4 \quad {}_0)$

В. $E \quad /(16 \quad {}_0)$ Г. $E \quad /(4 \quad {}_0 R^2)$

9. Сфера равномерно заряжена. Потенциал электрического поля в центре сферы равен ${}_0 \quad 100$ В, а на расстоянии $l \quad 10$ см от ее поверхности – $\quad 50$ В. Радиус сферы равен …

Ответ: __________см

10. Две концентрические сферы радиусами R и $2R$ равномерно заряжены с поверхностной плотностью . Определите напряженность электрического поля на расстоянии $R \quad r \quad 2R$ от их центра.

А. $E \quad 0$ Б. $E \quad R^2/(\; {}_0 r^2)$

В. $E \quad R^2/(2 \quad {}_0 r^2)$ Г. $E \quad R^2/(4 \quad {}_0 r^2)$

11. На рисунке изображено сечение полого шара. Шар равномерно заряжен по объему. В каких областях пространства напряженность электрического поля, создаваемого шаром, равна нулю?

А. Только в 1 Б. Только в 2

В. Только в 3 Г. В 1 и 2

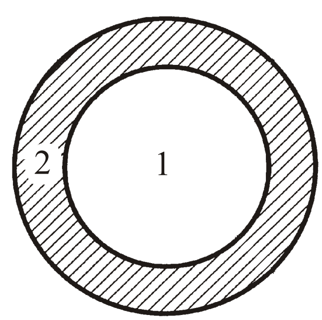


Рис. к тестам №11, №12

12. На рисунке изображено сечение полого шара. Шар равномерно заряжен по объему. В каких областях пространства потенциал электрического поля, создаваемого шаром, равен нулю?

А. Только в 1 Б. Только в 2

В. Только в 3 Г. Ни в одной

13. Капля росы образовалась в результате слияния 216 заряженных капель тумана. Во сколько раз напряженность электрического поля у поверхности капли росы больше напряженности поля у поверхности капли тумана? Капли имеют форму шара.

Ответ: __________

14. Капля росы образовалась в результате слияния 216 заряженных капель тумана. Во сколько раз потенциал электрического поля у поверхности капли росы больше потенциала у поверхности капли тумана? Капли имеют форму шара.

Ответ: __________

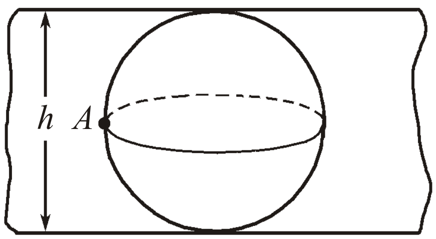


Рис. к тесту №15

15. В равномерно заряженной бесконечной пластинке вырезали сферическую полость так, как показано на рисунке. Толщина пластинки h, объемная плотность заряда . Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите напряженность электрического поля в точке A.

А. $E \quad h/ \ _0$ Б. $E \quad h/(6 \ _0)$

В. $E \quad h/(4 \quad _0)$ Г. $E \quad /(4 \quad _0 h)$

16. Длинный цилиндр радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью . Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите напряженность электрического поля у поверхности цилиндра.

А. $E \quad R/(2 \ _0)$ Б. $E \quad R^2/(2 \ _0)$

В. $E \quad R^2/(4 \quad _0)$ Г. $E \quad /(4 \quad _0 R^2)$

17. Длинный цилиндр радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью . Внутри цилиндра имеется цилиндрическая полость, ось которой совпадает с осью цилиндра. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите напряженность электрического поля в полости.

А. $E \quad R/(2 \ _0)$ Б. $E \quad R^2/ \ _0$

В. $E \quad R^2/(4 \quad _0)$ Г. $E \quad 0$

18. Длинный цилиндр радиусом R 10 см равномерно заряжен с объемной плотностью 8,85 10^{-8} Кл/м^3. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите разность потенциалов электрического поля между осью цилиндра и его поверхностью.

Ответ: __________В

19. Длинная тонкостенная цилиндрическая труба радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью 0. Внутри трубы по ее оси расположен длинный тонкий стержень, равномерно заряженный с линейной плотностью 0. Напряженность электрического поля на расстоянии r R от оси трубы равна …

А. $E \quad (\quad 2 \quad R \quad)/(\quad _0 r)$ Б. $E \quad (\qquad R^2 \quad)/(2 \quad _0 r)$

В. $E \quad (\quad 2 \quad R \quad)/(2 \quad _0 r)$ Г. $E \quad (\qquad R^2 \quad)/(4 \quad _0 r)$

20. Потенциал электрического поля в некоторой области пространства зависит только от координаты x по закону: x^2 x, где , – постоянные. Определите распределение объемного заряда в пространстве.

А. $x/ \ _0$ Б. $/ \ _0$

В. $2 \ _0$ Г. $2 \ x \ _0$

§17. Электрическое поле в диэлектриках

Как известно, атомы и молекулы состоят из положительно заряженных ядер, окруженных электронами. У диэлектриков заряды, входящие в состав молекул, прочно связаны друг с другом и могут быть разделены только при воздействии на них очень сильного электрического поля. Поэтому заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются *связанными*. Под действием электрического поля связанные заряды могут лишь немного смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут. Примерами диэлектриков могут служить стекло, эбонит, различные пластмассы и все газы в нормальных условиях.

Внутри или на поверхности диэлектрика могут находиться заряды, которые не входят в состав его молекул. Такие заряды, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, будем называть *сторонними*.

Всякая молекула диэлектрика представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю. Однако распределение положительного и отрицательного зарядов внутри различных молекул может быть разным. Если центры масс положительных и отрицательных зарядов совпадают, то молекулу называют *неполярной*. В электрическом поле в пределах каждой такой молекулы происходит смещение зарядов (положительных по полю, отрицательных против поля), и их центры масс уже не будут совпадать. При этом молекулу схематически можно представить в виде *электрического диполя* (см. §15; п. 15.5), суммарный заряд которого равен нулю, а положительные и отрицательные заряды смещены друг относительно друга на малое расстояние.

В природе также существуют молекулы, у которых центры масс положительного и отрицательного зарядов не совпадают даже при отсутствии внешнего поля. Такие молекулы называют *полярными*, и они изначально подобны диполям. Внешнее электрическое поле оказывает ориентирующее действие на такие молекулы, пытаясь установить их вдоль линий поля. В самом деле, если диполь поместить в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, то на образующие его заряды (q) и (q) будут действовать равные по величине и противоположные по направлению силы $F_1 \quad F_2 \quad qE$ (рис. 17.1). В общем случае эти силы создадут результирующий момент сил, который стремится развернуть диполь вдоль силовых линий поля. Например, в положении диполя, показанном на рис. 17.1, относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости рисунка, на диполь действует момент сил

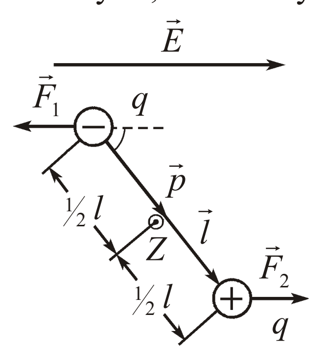


Рис. 17.1

$$M_z \quad F_1 \tfrac{1}{2} l \sin \qquad F_2 \tfrac{1}{2} l \sin \qquad q E l \sin$$

(где l расстояние между зарядами), который при ½ максимален

$$M_{\max} \quad q E l$$

и обращается в нуль при 0 или (в первом случае диполь будет находиться в положении устойчивого равновесия, во втором – в положении неустойчивого равновесия).

Напомним, что величина $p \quad q\, l$ называется *электрическим моментом диполя*, который принято записывать в виде вектора

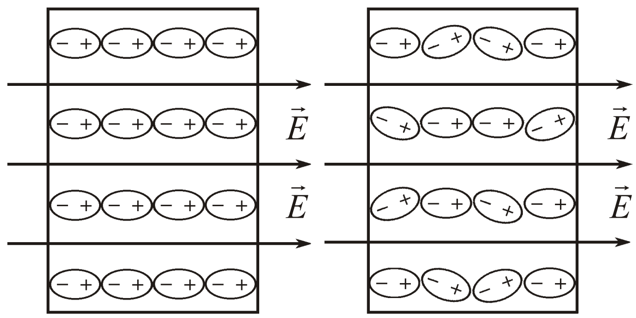
$$\vec{p} \quad q\vec{l}, \qquad (17.1)$$

где $\vec{l}$ – вектор, направленный от заряда (q) диполя к заряду (q).

С учетом (17.1) выражение для момента сил, действующего на диполь в электрическом поле (называемого *механическим моментом*), можно представить в виде

$$\vec{M} \quad [\vec{p}, \vec{E}]; \qquad M_z \quad pE\sin \quad ; \qquad M_{\max} \quad pE. \qquad (17.2)$$

Механический момент стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент $\vec{p}$ установился по направлению поля $\vec{E}$. Ориентирующему действию поля противится тепловое движение, которое стремится разбросать моменты молекул по всем направлениям.



а) *б*)

Рис. 17.2

Таким образом, во внешнем электрическом поле неполярные молекулы приобретают электрический момент и располагаются строго вдоль линий поля (рис. 17.2, *а*), а у полярных диэлектриков устанавливается преимущественная ориентация диполей по направлению поля (рис. 17.2, *б*). Однако и в том и в другом случаях положительные заряды смещаются по полю, а отрицательные – против поля. Этот процесс называется *поляризацией* диэлектрика. За счет поляризации в толще диэлектрика и на его поверхностях возникнут нескомпенсированные заряды, которые называются *связанными* или *поляризационными*.

Также существуют диэлектрические кристаллы (например, кристаллы NaCl), построенные из ионов противоположных знаков. Такие кристаллы состоят из двух кристаллических решеток, как бы вдвинутых одна в другую одна решетка из положительных, а другая из отрицательных ионов. При наложении электрического поля решетки смещаются в противоположные стороны, что также приводит к поляризации диэлектрика.

Итак, под действием внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется, и результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля.

Для характеристики степени поляризации диэлектрика используют дипольный момент единицы объема

$$\vec{P} \quad \frac{\vec{p}}{V}, \qquad (17.3)$$

который называют *поляризованностью* диэлектрика.

Поляризованный диэлектрик становится источником электрического поля $\vec{E}$, которое накладывается на внешнее поле $\vec{E}_0$, и в итоге внутри диэлектрика возникает результирующее поле

$$\vec{E} \quad \vec{E}_0 \quad \vec{E}. \qquad (17.4)$$

Молекулы диэлектрика испытывают действие суммарного поля $\vec{E}$. Поэтому поляризованность диэлектрика определяется не внешним полем $\vec{E}_0$, а результирующим полем $\vec{E}$. Опыт показывает, что поляризованность большинства изотропных диэлектриков любого типа пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\vec{P} \qquad {}_0\vec{E}, \qquad (17.5)$$

где – не зависящая от $\vec{E}$ характеристика диэлектрика, называемая *диэлектрической восприимчивостью*.

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного изотропного диэлектрика (const), находящуюся в однородном электрическом поле. Очевидно, что при этом результирующее поле в диэлектрике также будет однородным, а вектор $\vec{P} \quad {}_0\vec{E}$ const, то есть поляризация диэлектрика будет однородной.

Мысленно выделим в диэлектрике элементарный объем в виде тонкого косого цилиндра с образующими, параллельными вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$ (и вектору $\vec{P}$), и с основаниями S (рис. 17.3). Объем такого цилиндра

$$V \quad l \quad S\cos \quad ,$$

где – угол между вектором $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к положительно заряженному основанию цилиндра.

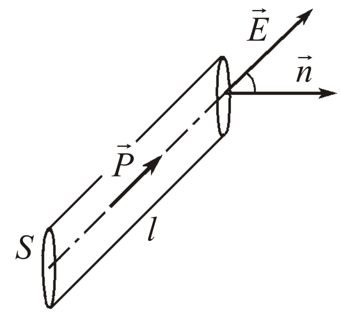


Рис. 17.3

Выбранный объем эквивалентен диполю, образованному зарядами (S) и (S), отстоящими друг от друга на расстояние l. Поэтому

$$p \qquad S\,l,$$

где – поверхностная плотность заряда на основаниях выбранного элементарного цилиндра. Следовательно, модуль поляризованности

$$P \quad \frac{S\,l}{S\,l\cos} \quad \frac{}{\cos}.$$

Отсюда получим

$$P\cos \qquad P_n, \tag{17.6}$$

где P_n – проекция поляризованности на нормаль $\vec{n}$.

Выражение (17.6) позволяет интерпретировать составляющую P_n как величину заряда, перемещаемого через единичную площадку в направлении положительной нормали к ней. Очевидно, что это справедливо и в случае неоднородной поляризации, когда вектор $\vec{P}$ const, то есть меняется от точки к точке. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разделить диэлектрик на малые объемы, в пределах каждого из которых поляризация может считаться однородной.

При поляризации неоднородного диэлектрика заряды могут появиться не только на поверхностях, но и в объеме диэлектрика.

Рассмотрим произвольный объем V внутри диэлектрика, ограниченный поверхностью S (рис. 17.4).

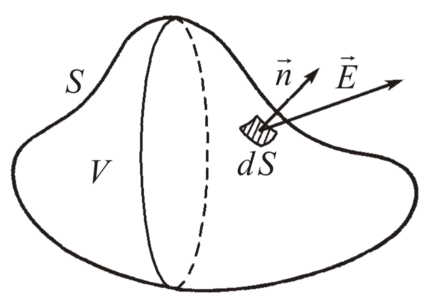


Рис. 17.4

Исходя из смысла составляющей P_n, при поляризации в сторону, противоположную направлению нормали, через элементарную площадку dS перемещается заряд

$$dq \qquad P_n\,dS,$$

а через всю поверхность S внутрь объема поступает поляризационный заряд

$$q \quad \underset{S}{\circ}\, dq \qquad \underset{S}{\circ}\, P_n\, dS \qquad \underset{S}{\circ}\,(\vec{P}, d\vec{S}). \tag{17.7}$$

Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса, получим

$$q \qquad \underset{V}{}\ \operatorname{div}\vec{P}\,dV.$$

С другой стороны,

$$q \qquad {}_{V}\, dV,$$

где – объемная плотность связанных зарядов.

Следовательно,

$$ {}_{V}\, dV \qquad {}_{V}\, \operatorname{div} \vec{P}\, dV.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объема V, что возможно только в случае, если в каждой точке диэлектрика выполняется равенство

$$\operatorname{div} \vec{P}. \tag{17.8}$$

Связанные заряды отличаются от свободных лишь тем, что не могут покинуть пределы молекул, в состав которых они входят. В остальном же их свойства такие же, как и у всех прочих зарядов. В частности, они также служат источниками электрического поля. Поэтому для случая, когда плотность связанных зарядов отлична от нуля, выражение (16.5) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{E} \quad \frac{\quad}{{}_0}. \tag{17.9}$$

Формула (17.9) неудобна для нахождения напряженности электрического поля, так как она определяет искомую величину через неизвестные связанные заряды.

Запишем (17.9) с учетом (17.8):

$$\operatorname{div} \vec{E} \quad \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{{}_0},$$

или

$$\operatorname{div} ({}_0 \vec{E} \quad \vec{P}) \qquad . \tag{17.10}$$

Введем вектор

$$\vec{D} \qquad {}_0 \vec{E} \quad \vec{P}, \tag{17.11}$$

который называется *электрическим смещением* или *электрической индукцией*. Тогда выражение (17.10) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} \qquad . \tag{17.12}$$

Проинтегрируем (17.12) по произвольному объему V:

$${}_{V}\, \operatorname{div} \vec{D}\, dV \qquad {}_{V}\, dV$$

и преобразуем левую часть по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S (\vec{D}, dS) \qquad {}_{V}\, dV. \tag{17.13}$$

Слева в (17.13) стоит поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S, справа – суммарный сторонний заряд, заключенный внутри этой поверхности. Таким образом, (17.13) выражает **теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$**: *поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности*:

$$\Phi \quad \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) \quad \oint_S D_n\, dS \quad {}_{i\ 1}^{N} q_i. \tag{17.14}$$

Равенство (17.12) выражает **теорему Гаусса для диэлектриков в дифференциальной форме**: *дивергенция вектора электрического смещения в некоторой точке равна объемной плотности сторонних зарядов в той же точке*.

Для изотропных диэлектриков вектор электрического смещения

$$\vec{D} \qquad {}_0\vec{E} \qquad {}_0\vec{E} \quad (1 \qquad) \;\; {}_0\vec{E} \qquad {}_0\vec{E}, \tag{17.15}$$

где $\quad 1 \quad$ – *диэлектрическая проницаемость* диэлектрика.

Поле вектора электрического смещения $\vec{D}$, как и всякое векторное поле, можно изобразить графически с помощью линий, которые строятся по правилам построения силовых линий напряженности электрического поля. Однако в отличие от вектора $\vec{E}$, линии которого начинаются и оканчиваются как на сторонних, так и на связанных зарядах, силовые линии вектора $\vec{D}$ начинаются и оканчиваются только на сторонних зарядах. Точки, в которых находятся связанные заряды, линии электрического смещения проходят, не прерываясь.

Электрическое смещение $\vec{D}_0$ электрического поля напряженностью $\vec{E}_0$, создаваемого сторонними зарядами в вакууме, равно

$$\vec{D}_0 \qquad {}_0\vec{E}_0. \tag{17.16}$$

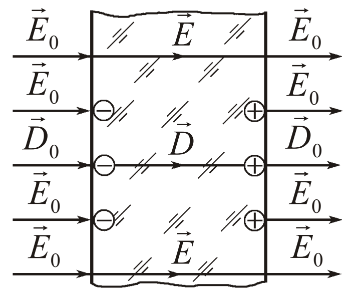


Рис. 17.5

Внесем в это поле плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью так, чтобы силовые линии внешнего электрического поля были перпендикулярны поверхности диэлектрика (рис. 17.5). Поскольку линии смещения начинаются и оканчиваются только на сторонних зарядах, то картина силовых линий вектора $\vec{D}$ будет такая же, как при отсутствии диэлектрика и внутри, и вне диэлектрика электрическое смещение будет равно $\vec{D}_0$:

$$\vec{D} \quad \vec{D}_0. \tag{17.17}$$

Согласно (17.15) (17.16) в этом случае напряженность электрического поля в диэлектрике

$$\vec{E} \quad \vec{E}_0/ \; . \tag{17.18}$$

Следовательно, в рассмотренном случае диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Следует отметить, в случае, когда внешнее поле $\vec{E}_0$ образует с нормалью к поверхности пластины угол, отличный от нуля, направление результирующего поля $\vec{E}$ внутри диэлектрика будет иным, чем $\vec{E}_0$, и связь между $\vec{E}$ и $\vec{E}_0$ другая, чем (17.18).

Можно показать, что выражение (17.18) будет справедливым в любом случае, если однородный изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов (или внешнего поля). Например, напряженность электрического поля в однородном изотропном диэлектрике, окружающем точечный заряд q, на расстоянии r от заряда

$$\vec{E} \quad \frac{q}{4 \qquad {}_0 r^3}\vec{r}; \qquad E \quad \frac{q}{4 \qquad {}_0 r^2}\,. \tag{17.19}$$

Такова же будет напряженность поля в однородном изотропном диэлектрике вне равномерно заряженных сферы или шара.

В заключение выясним, в каких еще случаях (кроме поляризации неоднородного диэлектрика) в объеме диэлектрика могут появиться избыточные поляризационные заряды. Для этого запишем выражение (17.7) с учетом (17.5) в случае однородного диэлектрика ($\quad$ const) в виде

$$q \qquad \oint_S \; {}_0(\vec{E}, d\vec{S}). \tag{17.20}$$

По теореме Гаусса для напряженности электрического поля интеграл в (17.20) равен алгебраической сумме всех зарядов   сторонних и связанных   внутри рассматриваемой поверхности S. Следовательно,

$$q \qquad (q \quad q); \qquad q \qquad \text{——}\; q.$$

Это соотношение справедливо для любого объема внутри диэлектрика, в частности и для физически бесконечно малого. Поэтому

$$\text{——} \quad .$$

Отсюда следует, что поляризационный заряд в объеме диэлектрика может быть отличным от нуля и в случае однородного диэлектрика, но при условии, что внутри него находятся сторонние заряды.

Краткие выводы

1. *Электрический момент диполя*

$$\vec{p} \quad q\vec{l}.$$

2. *Поляризованность диэлектрика* равна суммарному дипольному моменту в единице объема:

$$\vec{P} \quad \frac{\vec{p}}{V}.$$

3. Связь поляризованности с напряженностью электрического поля для изотропных диэлектриков:

$$P \qquad {}_0\vec{E} \quad (\qquad {}_0\vec{E}.$$

4. Связь поверхностной плотности связанного заряда с поляризованностью диэлектрика:

$$P_n.$$

5. Связь объемной плотности связанного заряда с поляризованностью диэлектрика:

$$\operatorname{div}\vec{P}.$$

6. *Вектор электрического смещения* или *электрическая индукция*

$$\vec{D} \qquad {}_0\vec{E} \quad \vec{P}.$$

7. Связь электрического смещения с напряженностью электрического поля для изотропных диэлектриков:

$$\vec{D} \qquad {}_0\vec{E}.$$

8. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения: поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\varPhi \quad \underset{S}{\bigcirc} (\vec{D}, d\vec{S}) \quad \overset{N}{\underset{i \quad 1}{}} q_i \qquad \underset{V}{} \quad dV.$$

9. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения в дифференциальной форме: дивергенция вектора электрического смещения в некоторой точке равна объемной плотности сторонних зарядов в той же точке:

$$\operatorname{div}\vec{D} \qquad .$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что такое поляризация диэлектрика?

2. Чем определяется поляризованность диэлектрика?

3. Какова связь поверхностной плотности связанного заряда с поляризованностью диэлектрика?

4. Какова связь между электрическим смещением и напряженностью электрического поля для изотропных диэлектриков?

5. В некотором диэлектрике поляризованность одинакова во всем его объеме. Чему равна объемная плотность связанного заряда?

6. В каких случаях объемная плотность связанного заряда в диэлектрике, находящемся в электрическом поле, может быть отличной от нуля?

7. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью электрическое смещение имеет значение $\vec{D}$. Чему равна поляризованность диэлектрика в этой точке?

8. В каких случаях диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется электрическое поле в диэлектрике?

9. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора электрического смещения.

10. В чем отличие линий вектора электрического смещения от линий напряженности электрического поля?

Задачи

1. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью перпендикулярно силовым линиям поля. Определите:
1) напряженность поля в пластине;
2) электрическое смещение в пластине.

Решение

Прежде чем приступить к решению задачи, рассмотрим два однородных изотропных диэлектрика, имеющих плоскую границу соприкосновения.

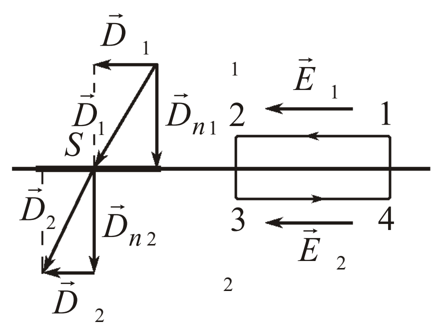


Рис. к задаче №1

Пусть в первой среде с проницаемостью $_1$ напряженность электрического поля равна $\vec{E}_1$, а во второй среде с проницаемостью $_2$ напряженность поля $\vec{E}_2$. Поскольку среды изотропны, из соображений симметрии следует, что векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ лежат в одной плоскости. То же самое справедливо и для векторов электрического смещения $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$.

Линии смещения начинаются и оканчиваются только на сторонних зарядах. Поскольку на границе раздела диэлектриков сторонних зарядов нет, то линии электрического смещения $\vec{D}$ проходят через границу раздела, не прерываясь. Поэтому потоки векторов $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ через произвольную площадку S, расположенную на границе раздела диэлектриков (см. рисунок), будут одинаковы:

$$D_{n1} \quad S \quad D_{n2} \quad S,$$

где D_{n1}, D_{n2} нормальные составляющие векторов $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$.

Следовательно,

$$D_{n1} \quad D_{n2}. \tag{1}$$

Рассмотрим воображаемый прямоугольный контур 1 2 3 4 1 на границе раздела диэлектриков. На основании теоремы о циркуляции напряженности электрического поля

$$\oint\limits_{1\,2\,3\,4\,1} (\vec{E}, d\vec{l}) \quad \int\limits_{1\,2} (\vec{E}, d\vec{l}_{1\,2}) \quad \int\limits_{2\,3} (\vec{E}, d\vec{l}_{2\,3}) \quad \int\limits_{3\,4} (\vec{E}, d\vec{l}_{3\,4}) \quad \int\limits_{4\,1} (\vec{E}, d\vec{l}_{4\,1}) \quad 0.$$

Ширину контура возьмем настолько малой, чтобы вкладом в циркуляцию сторон 2 3 и 4 1 контура, перпендикулярных к границе раздела, можно было пренебречь. Тогда

$$\int\limits_{1\,2} E_{\ 1}\, dl_{1\,2} \quad \int\limits_{3\,4} E_{\ 2}\, dl_{3\,4} \quad (E_{\ 1} \quad E_{\ 2})\, a \quad 0,$$

где a длины сторон контура, параллельных границе раздела диэлектриков; $E_{\ 1}$, $E_{\ 2}$ касательные составляющие векторов напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Следовательно,

$$E_{\ 1} \quad E_{\ 2}. \tag{2}$$

Поскольку в изотропных диэлектриках напряженность электрического поля и электрическое смещение связаны выражением

$$\vec{D} \qquad {}_0\vec{E}, \tag{3}$$

то из (1) и (2) следует:

$$_1E_{n1} \quad {}_2E_{n2}; \quad D_{\ 1}/_{\ 1} \quad D_{\ 2}/_{\ 2}. \tag{4}$$

Вернемся к нашей задаче.

Полагая диэлектрическую проницаемость воздуха равной единице, на основании (1)   (4) получим:

$$D_{n0} \quad D_n; \quad E_{n0} \qquad E_n; \quad E_{\ 0} \quad E_{\ }; \quad D_{\ 0} \quad D_{\ }/\ ,$$

где индекс «0» относится к воздуху. Таким образом,

$$E \quad \sqrt{E_n^2 \quad E^2} \quad \sqrt{E_{n0}^2/\ ^2 \quad E^2_{\ 0}} \quad E_0/\ ; \quad D \qquad {}_0E \qquad {}_0E_0,$$

где учтено, что пластина расположена перпендикулярно силовым линиям поля (E_{n0} E_0; $E_{\ 0}$ 0). Следовательно, в данном случае диэлектрическая проницаемость   показывает, во сколько раз ослабляется электрическое поле в диэлектрике.

Ответ: 1) $E \quad E_0/\ $; 2) $D \qquad {}_0E_0$.

2. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью   перпендикулярно силовым линиям поля. Площадь пластины S. Определите связанные заряды на каждой стороне пластины.

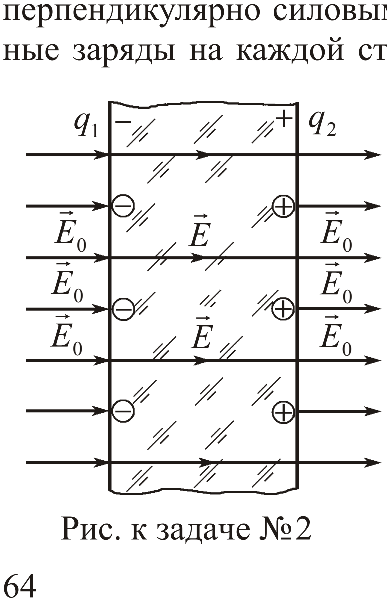


Рис. к задаче №2

Решение

Если пластину из диэлектрика поместить во внешнее электрическое поле, то под действием поля диэлектрик поляризуется и на поверхностях пластины появятся связанные заряды q_1 и q_2. При этом часть линий напряженности поля $\vec{E}_0$ будет обрываться на одной поверхности пластины (оканчиваться на отрицательных зарядах q_1) и затем возобновляться на другой поверхности (начинаться на положительных зарядах q_2). Отсюда следует, что $q_2 \quad q_1$, а напряженность поля $\vec{E}$ внутри диэлектрика будет отличаться от $\vec{E}_0$.

Для решения задачи воспользуемся промежуточными результатами, полученными при решении задачи №1: нормальные и касательные составляющие напряженности электрического поля на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков с проницаемостями $_1$ и $_2$ связаны соотношениями:

$$_1 E_{n1} \quad _2 E_{n2}; \qquad E_{\ 1} \quad E_{\ 2}.$$

Полагая диэлектрическую проницаемость воздуха равной единице, получим:

$$E_{n0} \qquad E_n; \qquad E_{\ 0} \quad E \ ,$$

где индекс «0» относится к воздуху. При этом $E_{n0} \quad E_0$, $E_{\ 0} \quad 0$.

Поверхностная плотность связанных зарядов равна проекции поляризованности диэлектрика $\vec{P}$ на нормаль к его поверхности:

$$P_n.$$

Поскольку в изотропных диэлектриках поляризованность пропорциональна напряженности электрического поля

$$\vec{P} \qquad _0 \vec{E},$$

где диэлектрическая восприимчивость диэлектрика $\quad 1$, то

$$P_n \quad (\quad 1) \ _0 E_n \quad (\quad 1) \ _0 \frac{E_{n0}}{} \quad \frac{1}{} \ _0 E_0; \qquad \frac{1}{} \ _0 E_0.$$

Следовательно, связанные заряды на каждой стороне пластины

$$q_1 \qquad S \qquad \frac{1}{} \ _0 E_0 S; \quad q_2 \qquad q_1 \quad \frac{1}{} \ _0 E_0 S.$$

Ответ: $q_1 \qquad \frac{1}{} \ _0 E_0 S$; $q_2 \quad \frac{1}{} \ _0 E_0 S$.

3. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\ $, причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол $\ $ с нормалью к поверхности пластины. Определите напряженность электрического поля в пластине.

Решение

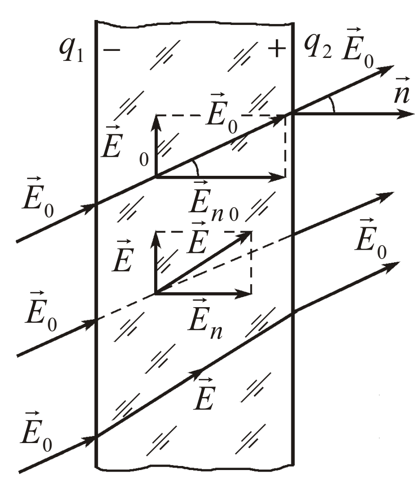


Рис. к задаче №3

Под действием внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется, и на поверхностях пластины появятся связанные заряды q_1 и q_2, причем $q_2 \quad q_1$ (см. решение задачи №2).

Разложим вектор $\vec{E}_0$ на две составляющие: нормальную $\vec{E}_{n0}$, направленную перпендикулярно пластине, и касательную $\vec{E}_{\ 0}$, направленную параллельно поверхностям пластины.

Поле связанных зарядов ослабит составляющую $\vec{E}_{n0}$ в $\ $ раз (см. решение задачи №1). Поэтому нормальная составляющая поля в пластине станет равной

$$\vec{E}_n \quad \vec{E}_{n0} / \ ,$$

а касательная составляющая не изменится:

$$\vec{E} \quad \vec{E}_{\ 0}.$$

В итоге напряженность поля в диэлектрике

$$\vec{E} \quad \vec{E}_n \quad \vec{E} \quad \vec{E}_{n0} / \quad \vec{E}_{\ 0}$$

не будет совпадать с $\vec{E}_0$ ни по величине, ни по направлению.

Поскольку

$$E_{\ 0} \quad E_0 \sin \quad ; \qquad E_{n0} \quad E_0 \cos \quad ,$$

то

$$E \quad \sqrt{E_n^2 \quad E^2} \quad \sqrt{E_0^2 \cos^2 \quad / \ ^2 \quad E_0^2 \sin^2} \quad \frac{E_0}{\ } \sqrt{\cos^2 \qquad ^2 \sin^2 \quad }. \qquad (1)$$

Как видим, если силовые линии внешнего электрического поля не перпендикулярны поверхности диэлектрика, то электрическое поле внутри диэлектрика ослабляется менее чем в раз.

Выражение (1) при 0 совпадает с напряженностью поля в диэлектрической пластине, если пластина расположена перпендикулярно внешнему полю (см. решение задачи №1).

Ответ: $E \quad \frac{E_0}{\ } \sqrt{\cos^2 \qquad ^2 \sin^2 \quad }$.

4. Бесконечно большая плоская пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью заряжена равномерно с объемной плотностью заряда 0. Толщина пластины $2d$. Определите:

1) модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния l от середины пластины;

2) поверхностную и объемную плотность связанных зарядов.

Решение

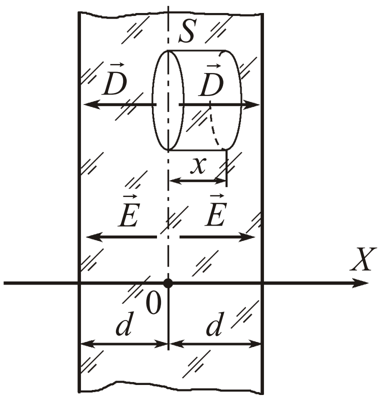


Рис. к задаче №4

Поскольку пластина заряжена равномерно, то напряженность электрического поля и электрическое смещение в любой точке на плоскости симметрии пластины будут равны нулю.

Рассмотрим воображаемую цилиндрическую поверхность S с основаниями, параллельными пластине, одно из которых находится на плоскости симметрии, а второе на расстоянии $x \quad d$ от нее.

Поскольку диэлектрик изотропный, то электрическое смещение будет направлено перпендикулярно поверхностям пластины в противоположные стороны относительно ее плоскости симметрии. Поэтому поток электрического смещения через поверхность цилиндра будет равен потоку через его основания:

$$\Phi(x \quad d) \quad \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) \qquad \int_{S_{\text{осн}}} D_n\, dS \quad D_n S_{\text{осн}} \quad D_x S_{\text{осн}},$$

где учтено, что пластина заряжена равномерно и на равных расстояниях от ее плоскости симметрии величина электрического смещения одинакова; $D_n \quad D_x$ нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ у основания цилиндра, расположенного на расстоянии x от плоскости симметрии пластины.

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(x \quad d) \quad q_{\text{внутри}},$$

где сторонний заряд, заключенный внутри выбранного цилиндра,

$$q_{\text{внутри}} \qquad V_{\text{внутри}} \qquad x\, S_{\text{осн}}.$$

Следовательно,

$$D_x(x \quad d) \qquad x.$$

Аналогично, для цилиндрической поверхности, одно из оснований которой находится на плоскости симметрии, а второе   вне пластины (на расстоянии $x \quad d$):

$$\Phi(x \quad d) \quad D_x S_{\text{осн}} \quad q_{\text{вне}}; \qquad q_{\text{вне}} \qquad V_{\text{вне}} \qquad d\, S_{\text{осн}}; \qquad D_x(x \quad d) \qquad d.$$

Поскольку в изотропных диэлектриках напряженность электрического поля

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{D}}{\quad_0},$$

то на расстоянии l от середины пластины модуль напряженности

$$E(l \quad d) \quad \frac{D_x(x \quad l \quad d)}{\quad_0} \quad \frac{\quad l}{\quad_0}; \qquad E(l \quad d) \quad \frac{D_x(x \quad l \quad d)}{\quad_0} \quad \frac{\quad d}{\quad_0},$$

где учтено, что вне пластины   1.

Так как пластина заряжена (в объеме диэлектрика находятся сторонние заряды), то поляризационный заряд может быть отличным от нуля как на ее поверхности, так и внутри пластины.

Поляризованность изотропного диэлектрика

$$\vec{P} \qquad _0\vec{E} \quad (\qquad _0\vec{E} \quad \frac{\quad}{\quad}\vec{D}; \quad P_x \quad \frac{\quad}{\quad} D_x$$

связана с поверхностной и объемной плотностью связанных зарядов:

$$P_n; \qquad \operatorname{div}\vec{P}.$$

Следовательно,

$$P_x \quad \frac{\quad 1}{\quad} \quad x; \qquad P_n\big|_{x \quad d} \quad P_x\big|_{x \quad d} \quad \frac{\quad 1}{\quad} \quad d; \qquad \frac{\quad P}{\quad x} \quad \frac{dP_x}{dx} \qquad \frac{\quad 1}{\quad}.$$

Таким образом, на обеих поверхностях пластины появятся поляризационные заряды такого же знака, как и у стороннего заряда, а объемный связанный заряд будет иметь знак, противоположный знаку стороннего заряда.

Ответ: 1) $E(l \quad d) \quad \frac{\quad l}{\quad_0}$; $E(l \quad d) \quad \frac{\quad d}{\quad_0}$; 2) $\quad \frac{\quad 1}{\quad} \quad d; \qquad \frac{\quad 1}{\quad}$.

5. Шар радиусом R равномерно заряжен положительным зарядом q и помещен в центр шарового слоя из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Внутренний радиус слоя равен $2R$, внешний $3R$. Определите напряженность электрического поля и электрическое смещение в диэлектрике. Постройте график зависимости напряженности поля E от расстояния r от центра шара.

Решение

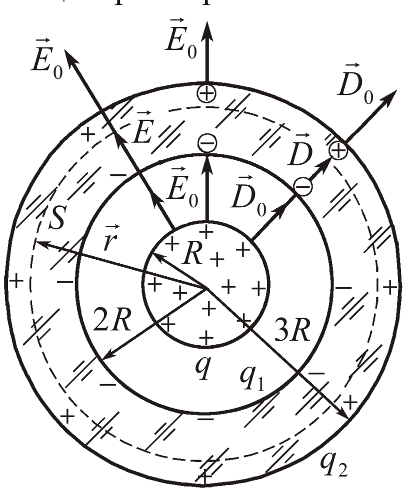


Рис. 1 к задаче №5

Равномерно заряженный шар, находящийся в вакууме, создаст вокруг себя радиально-симметричное электрическое поле (рис. 1). Напряженность поля на расстоянии r от центра шара

$$\vec{E}_0 \quad \frac{q}{4 \quad _0 r^3}\vec{r}.$$

Если шар поместить в центр шарового слоя из диэлектрика, то под действием поля диэлектрик поляризуется и на внутренней и внешней поверхностях слоя появятся связанные заряды: на внутренней   отрицательный заряд q_1, а на внешней   положительный заряд q_2. При этом часть линий напряженности поля $\vec{E}_0$, начавшихся на поверхности шара, обрывается на внутренней поверхности слоя (оканчивается на зарядах q_1) и затем возобновляется на внешней поверхности слоя (начинается на зарядах q_2). Отсюда следует, что заряды q_1 и q_2 равны по модулю.

Поскольку шар заряжен равномерно, то диэлектрик полностью заполнит объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля, создаваемого шаром. Поэтому следует ожидать, что напряженность электрического поля в слое (по сравнению с вакуумом) будет ослаблена в ε раз.

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность S радиусом r ($2R \le r \le 3R$). В силу симметрии электрическое смещение на равных расстояниях r от центра шара будет одинаковым по величине, а векторы смещения будут направлены вдоль радиусов. Поэтому поток электрического смещения через поверхность сферы

$$\Phi = \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \oint_S D\,dS = D\,S = D\,4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса этот поток равен стороннему заряду, заключенному внутри выбранной сферы, то есть заряду шара. Следовательно, электрическое смещение в диэлектрическом слое

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\,\vec{r}, \tag{1}$$

а напряженность электрического поля

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}; \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}. \tag{2}$$

Как видим, напряженность электрического поля в диэлектрическом слое действительно будет ослаблена в ε раз.

Положив внутренний радиус слоя равным радиусу заряженного шара, а внешний радиус — равным бесконечности, придем к случаю заряженного шара, погруженного в безграничный диэлектрик, электрическое смещение и напряженность поля в котором будут определяться формулами (1) и (2). Такими же будут электрическое смещение и напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом.

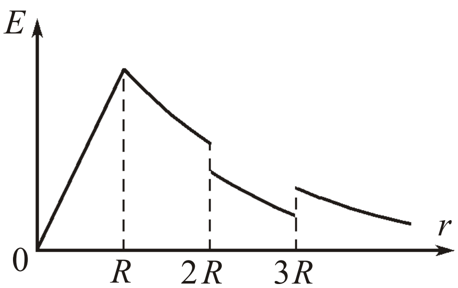


Рис. 2 к задаче №5

График зависимости напряженности поля от расстояния r от центра шара представлен на рис. 2. При построении графика использованы выражения для напряженности поля внутри и вне равномерно заряженного шара, полученные в §16:

$$E(r \le R) = \frac{q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}; \quad E(R \le r \le 2R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Ответ: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$; $D = \dfrac{q}{4\pi r^2}$; см. рис. 2.

6. Однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью ε имеет вид сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним — R_2. Изобразите графики зависимости напряженности и потенциала электрического поля как функции расстояния r от центра слоя, если диэлектрик имеет положительный сторонний заряд q, распределенный равномерно по объему слоя.

Решение

Выберем концентрическую со слоем сферическую поверхность S радиусом r $(R_1 \quad r \quad R_2)$ (рис. 1). В силу симметрии поток электрического смещения через поверхность этой сферы

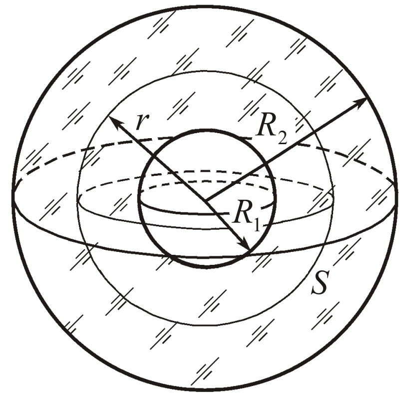


Рис. 1 к задаче №6

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \underset{S}{\bigcirc}(\vec{D}, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\bigcirc} D\,dS \quad D\,S \quad D\,4 \quad r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad q_{\text{внутри}},$$

где сторонний заряд $q_{\text{внутри}}$, заключенный внутри выбранной сферы,

$$q_{\text{внутри}} \quad \underset{V}{} dV \quad \overset{r}{\underset{R_1}{}} 4 \quad r^2 dr.$$

Здесь $\quad q/\tfrac{4}{3} \quad (R_2^3 \quad R_1^3)$ объемная плотность заряда. Следовательно,

$$q_{\text{внутри}} \quad \frac{q}{\tfrac{4}{3} \quad (R_2^3 \quad R_1^3)}\,4 \quad \left.\frac{r^3}{3}\right|_{R_1}^{r} \quad \frac{q\,(r^3 \quad R_1^3)}{R_2^3 \quad R_1^3}; \qquad D(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \frac{q\,(r^3 \quad R_1^3)}{4 \quad r^2(R_2^3 \quad R_1^3)}.$$

Поскольку в однородных изотропных диэлектриках напряженность поля

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{D}}{\quad_0},$$

то

$$E(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \frac{q\,(r^3 \quad R_1^3)}{4 \quad _0 r^2(R_2^3 \quad R_1^3)}.$$

Так как заряд q равномерно распределен по объему слоя, то поле вне слоя аналогично полю равномерно заряженной сферы (см. §16):

$$E(r \quad R_1) \quad 0; \qquad E(r \quad R_2) \quad \frac{q}{4 \quad _0 r^2}.$$

Потенциалы поля в различных точках пространства найдем как работу сил поля по перемещению единичного положительного заряда q_0 из данной точки на бесконечность. Учитывая, что электрическое поле, создаваемое слоем, будет радиально-симметричным, получим:

$$(r \quad R_1) \quad \frac{A}{q_0} \quad \underset{r}{}(\vec{E}, d\vec{r}) \quad \overset{R_1}{\underset{r}{}} E(r \quad R_1)\,dr \quad \overset{R_2}{\underset{R_1}{}} E(R_2 \quad r \quad R_1)\,dr \quad \underset{R_2}{} E(r \quad R_2)\,dr$$

$$\frac{q}{4 \quad _0} \quad \overset{R_2}{\underset{R_1}{}} \frac{r^3 \quad R_1^3}{r^2(R_2^3 \quad R_1^3)}\,dr \quad \underset{R_2}{} \frac{1}{r^2}\,dr \quad \frac{q}{4 \quad _0} \quad \frac{R_2^2 \quad R_1^2}{2 \quad (R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{R_1^2(R_2 \quad R_1)}{R_2(R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{1}{R_2};$$

$$(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \overset{R_2}{\underset{r}{}} E(R_2 \quad r \quad R_1)\,dr \quad \underset{R_2}{} E(r \quad R_2)\,dr$$

$$\frac{q}{4 \quad _0} \quad \overset{R_2}{\underset{r}{}} \frac{r^3 \quad R_1^3}{r^2(R_2^3 \quad R_1^3)}\,dr \quad \underset{R_2}{} \frac{1}{r^2}\,dr \quad \frac{q}{4 \quad _0} \quad \frac{R_2^2 \quad r^2}{2 \quad (R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{R_1^3(R_2 \quad r)}{r\,R_2(R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{1}{R_2};$$

$$(r \quad R_2) \quad \underset{r}{} E(r \quad R_2)\,dr \quad \underset{r}{} \frac{q}{4 \quad _0 r^2}\,dr \quad \frac{q}{4 \quad _0 r}.$$

На границах слоя:

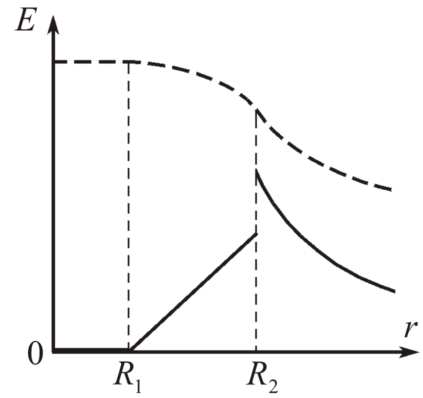


Рис. 2 к задаче №6

$$E(r \quad R_1) \quad 0; \qquad E(r \quad R_2) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 R_2^2};$$

$$(r \quad R_1) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0} \quad \frac{R_2^2 \quad R_1^2}{2 \quad (R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{R_1^2(R_2 \quad R_1)}{R_2(R_2^3 \quad R_1^3)} \quad \frac{1}{R_2};$$

$$(r \quad R_2) \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 R_2}.$$

Примерные графики зависимости напряженности и потенциала электрического поля как функции расстояния от центра слоя представлены на рис. 2, где зависимость $E(r)$ изображена сплошной линией, а (r) штриховой.

Ответ: см. рис. 2.

7. Длинный диэлектрический цилиндр радиусом R поляризован так, что поляризованность диэлектрика зависит только от расстояния r от оси цилиндра по закону: $\vec{P} \quad \vec{r}$, где положительная постоянная. Определите поверхностную и объемную плотность связанных зарядов.

Решение

Так как диэлектрик поляризован неоднородно ($\vec{P}$ const), то кроме поляризационных зарядов на поверхности цилиндра могут возникнуть нескомпенсированные связанные заряды и в объеме диэлектрика.

Поляризованность диэлектрика связана с поверхностной и объемной плотностью связанных зарядов соотношениями:

$$P_n; \qquad \operatorname{div} \vec{P}.$$

Поскольку поляризованность в данном случае зависит только от расстояния r от оси цилиндра по закону $\vec{P} \quad \vec{r}$, то

$$P_n\big|_{r \quad R} \quad P_r\big|_{r \quad R} \quad R; \qquad \frac{1}{r}\frac{}{r}(r\,P_r) \quad \frac{1}{r}\frac{}{r}(\quad r^2) \quad 2 \quad ,$$

где использовано выражение для дивергенции в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{P} \quad \frac{1}{r}\frac{}{r}(r\,P_r) \quad \frac{1}{r}\frac{}{}P \quad \frac{}{z}P_z.$$

Ответ: R; 2 .

8. Точечный заряд q находится в центре шара радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Определите:

1) связанный заряд внутри сферы радиусом $r \quad R$;
2) объемную плотность связанных зарядов.

Решение

Точечный заряд q, находящийся в вакууме, создаст вокруг себя радиально-симметричное электрическое поле, напряженность которого на расстоянии r от заряда

$$\vec{E}_0 \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}.$$

Если заряд поместить в однородный изотропный диэлектрик, то электрическое поле заряда q приведет к поляризации диэлектрика и напряженность поля в рассматриваемой точке уменьшится в раз (см. решение задачи №5):

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{E}_0}{} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^3}\vec{r}.$$

В изотропных диэлектриках поляризованность

$$\vec{P} \quad {}_0\vec{E} \quad (\quad 1) \; {}_0\vec{E}.$$

Следовательно,

$$\vec{P} \quad \frac{1}{} \frac{q}{4 \quad r^3}\vec{r}; \qquad P_r \quad \frac{1}{} \frac{q}{4 \quad r^2}.$$

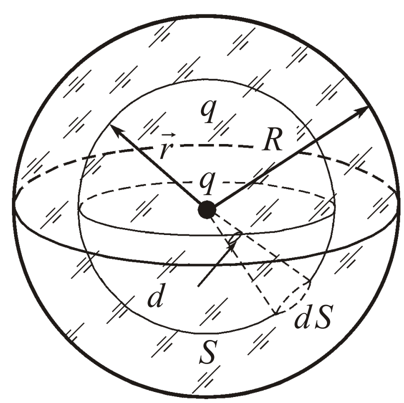


Рис. к задаче №8

Как видим, поляризованность шара на разных расстояниях от его центра различна ($\vec{P}$ const), то есть диэлектрик будет поляризован неоднородно. Поэтому кроме поляризационных зарядов на поверхности шара могут возникнуть нескомпенсированные заряды и в объеме диэлектрика (см. задачу №7).

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность S радиусом $r \quad R$. Поляризационный заряд q, заключенный в этой сфере,

$$q \quad \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Так как поляризованность в любой точке на поверхности рассматриваемой сферы направлена вдоль ее радиуса, то

$$q \quad \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) \quad \oint_S P\,dS \quad \oint_S \frac{1}{} \frac{q}{4 \quad r^2} dS \quad \frac{1}{} \frac{q}{4} \oint_S \frac{dS}{r^2} \quad \frac{1}{} \frac{q}{4} \oint_S d \quad ,$$

где $d \quad dS/r^2$ телесный угол, опирающийся на площадку dS (см. рисунок). Следовательно,

$$q \quad \frac{1}{} \frac{q}{4} 4 \quad \frac{1}{} q.$$

Теперь найдем плотность связанных зарядов в объеме диэлектрика.

Поскольку

$$\operatorname{div}\vec{P},$$

а в нашем случае поляризованность зависит только от расстояния r от центра шара, то

$$\frac{1}{r^2}\frac{}{r}(r^2 P_r) \quad \frac{1}{r^2}\frac{}{r} \quad r^2 \frac{1}{} \frac{q}{4 \quad r^2} \quad \frac{1}{r^2}\frac{}{r} \quad \frac{1}{} \frac{q}{4} \quad 0,$$

где использовано выражение для дивергенции в сферических координатах:

$$\operatorname{div}\vec{P} \quad \frac{1}{r^2}\frac{}{r}(r^2 P_r) \quad \frac{1}{r\sin} \frac{}{} P \quad \frac{1}{r\sin} \frac{}{} P \; .$$

Как видим, в случае неоднородной поляризации однородного диэлектрика объемная плотность связанного заряда внутри него может быть равной нулю.

Ответ: 1) $q \quad \frac{1}{} q$; 2) 0.

9. Точечный заряд q находится в центре сферического слоя из неоднородного изотропного диэлектрика, проницаемость которого изменяется в радиальном направлении по закону: $/r$, где положительная постоянная; r расстояние от заряда. Определите объемную плотность связанных зарядов внутри слоя как функцию расстояния r.

Решение

Данная задача отличается от предыдущей только тем, что диэлектрик неоднороден. Поэтому воспользуемся промежуточным результатом решения задачи №8: зависимость поляризованности от расстояния r от центра системы

$$\vec{P} \qquad \frac{\quad 1}{\ }\,\frac{q}{4\quad r^3}\,\vec{r} \qquad \frac{\quad 1}{\ }\,\frac{q}{4\quad r^3}\,\vec{r} \qquad 1 \quad \frac{r}{\ } \quad \frac{q}{4\quad r^3}\,\vec{r}; \qquad P_r \quad 1 \quad \frac{r}{\ } \quad \frac{q}{4\quad r^2},$$

где учтено, что   зависит от расстояния r по закону $/r$.

Следовательно, плотность связанных зарядов   в объеме диэлектрика

$$\mathrm{div}\,\vec{P}; \qquad \frac{1}{r^2}\,\frac{\ }{r}\,(r^2 P_r) \qquad \frac{2}{r}\,P_r \quad \frac{P_r}{r};$$

$$\frac{2}{r} \quad 1 \quad \frac{r}{\ } \quad \frac{q}{4\quad r^2} \qquad \frac{\ }{r} \quad 1 \quad \frac{r}{\ } \quad \frac{q}{4\quad r^2} \qquad \frac{q}{4\qquad r^2},$$

где использовано выражение для дивергенции в сферических координатах (см. решение задачи №8).

Ответ: $\quad \frac{q}{4\qquad r^2}$.

10. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью   по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Определите:

1) величину электрического смещения как функцию расстояния r от центра шара;

2) объемную плотность связанных зарядов.

Решение

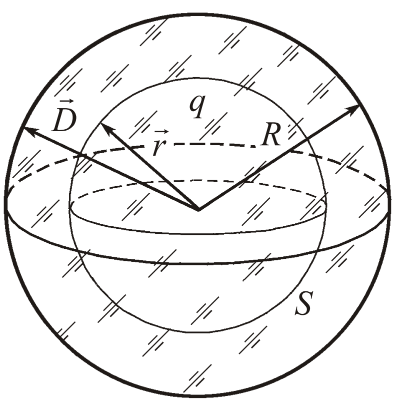


Рис. к задаче №10

Выберем концентрическую с шаром сферическую поверхность S радиусом $r \quad R$. В силу симметрии электрическое смещение на равных расстояниях r от центра шара будет одинаковым по величине, а векторы смещения будут направлены вдоль радиусов (вдоль нормали к поверхности). Поэтому поток электрического смещения через поверхность этой сферы

$$\Phi(r \quad R) \quad \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) \quad \oint_S D\,dS \quad D\,S \quad D\,4 \quad r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(r \quad R) \quad q_{\text{внутри}},$$

где сторонний заряд $q_{\text{внутри}}$, заключенный внутри выбранной сферы,

$$q_{\text{внутри}} \qquad \underset{V}{\ } dV \qquad \underset{V}{\ } dV \quad \tfrac{4}{3} \quad r^3.$$

Следовательно, электрическое смещение внутри шара

$$D\,4 \quad r^2 \quad \tfrac{4}{3} \quad r^3; \qquad D(r \quad R) \quad \tfrac{1}{3} \quad r.$$

Рассмотрим теперь концентрическую с шаром сферическую поверхность радиусом $r \quad R$. По причинам, изложенным выше, поток электрического смещения через поверхность этой сферы

$$\Phi(r \quad R) \quad D\,4 \quad r^2 \quad q,$$

где сторонный заряд, заключенный внутри выбранной сферы, равен заряду шара:

$$q \quad {}^{4}\!/_{3} \quad R^3.$$

Следовательно, электрическое смещение вне шара

$$D(r \quad R) \quad \frac{R^3}{3r^2}.$$

Используя связь напряженности поля в изотропных диэлектриках с электрическим смещением и поляризованностью диэлектрика

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{D}}{\quad_0}; \quad \vec{P} \qquad _0\vec{E} \quad (\quad 1) \; _0\vec{E},$$

получим:

$$\vec{E}(r \quad R) \quad \frac{}{3 \quad_0}\vec{r}; \quad \vec{P} \quad (\quad 1) \; _0\frac{}{3 \quad_0}\vec{r} \quad \frac{1}{}\frac{}{3}\vec{r}; \quad P_r \quad \frac{1}{}\frac{}{3}r.$$

Поляризованность в изотропном диэлектрике связана с объемной плотностью связанных зарядов соотношением

$$\operatorname{div}\vec{P}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r^2}\frac{}{r}(r^2 P_r) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{}{r} \quad r^2\frac{1}{}\frac{}{3}r \qquad \frac{1}{} \quad ,$$

где использовано выражение для дивергенции в сферических координатах (см. решение задачи №8).

Ответ: 1) $D(r \quad R) \quad \frac{r}{3}$; $D(r \quad R) \quad \frac{R^3}{3r^2}$; 2) $\qquad \frac{1}{} \quad .$

__Задачи для самостоятельного решения__

17.1. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью перпендикулярно силовым линиям поля. Определите поверхностные плотности связанных зарядов на сторонах пластины.

17.2. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью , причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол с нормалью к поверхности пластины. Определите поверхностные плотности связанных зарядов на сторонах пластины.

17.3. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 поместили большую плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью , причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол с нормалью к поверхности пластины. Определите угол, который составляет вектор напряженности электрического поля в пластине с нормалью к ее поверхности.

17.4. Бесконечно большая плоская пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью заряжена равномерно с объемной плотностью заряда . Толщина пластины $2d$. Определите потенциал электрического поля как функцию расстояния l от середины пластины, положив потенциал в плоскости симметрии пластины равным нулю.

17.5. Заряд q равномерно распределен по поверхности сферы. Сфера помещена в центр сферического слоя из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Внутренний радиус слоя R_1, внешний R_2. Определите напряженность и потенциал электрического поля на расстоянии $R_1 \quad r \quad R_2$ от центра сферы.

17.6. Однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью   имеет вид сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2. Изобразите графики зависимости напряженности и потенциала электрического поля как функции расстояния от центра слоя, если диэлектрик имеет некоторый положительный сторонний заряд q, распределенный равномерно по внутренней поверхности слоя.

17.7. Длинный диэлектрический цилиндр радиусом R поляризован так, что поляризованность диэлектрика зависит только от расстояния r от оси цилиндра по закону: $\vec{P} \quad P_0\, \vec{r}/R^2$, где $\vec{P}_0$ вектор, перпендикулярный оси цилиндра. Определите поверхностный поляризационный заряд на единице длины цилиндра и объемную плотность связанных зарядов.

17.8. Шар равномерно заряжен зарядом q. Поверхность шара покрыта слоем однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Определите поляризационные заряды, наведенные на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.

17.9. Точечный заряд q находится в центре сферического слоя из неоднородного изотропного диэлектрика, проницаемость которого изменяется в радиальном направлении по закону: r, где положительная постоянная; r расстояние от заряда. Определите объемную плотность связанных зарядов внутри слоя как функцию расстояния r.

17.10. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Определите поверхностную плотность связанных зарядов.

<u>Тесты</u>

1. Линии электрического смещения начинаются и оканчиваются …

А. Только на сторонних зарядах

Б. Только на связанных зарядах

В. На сторонних и на связанных зарядах

Г. Замкнуты

2. Большая пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью 4 помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 100 В/м перпендикулярно к его силовым линиям. Напряженность электрического поля в пластине равна …

Ответ: __________В/м

3. Пластины из текстолита и слюды, вплотную прижатые друг к другу, помещены в однородное электрическое поле перпендикулярно к его силовым линиям. Диэлектрическая проницаемость текстолита $_1$, слюды $_2$. Напряженность электрического поля в текстолите E_1, напряженность поля в слюде равна …

А. $E_2 \quad {}_2 E_1 / {}_1$ Б. $E_2 \quad {}_1 \; {}_2 E_1$

В. $E_2 \quad {}_1 E_1 / {}_2$ Г. $E_2 \quad E_1 / {}_1 \; {}_2$

4. Большая пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 перпендикулярно силовым линиям поля. Электрическое смещение внутри пластины равно …

А. $D \quad E_0$ Б. $D \quad E_0$

В. $D \quad {}_0 E_0$ Г. $D \quad {}_0 E_0$

5. Большая пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 перпендикулярно силовым линиям поля. Поляризованность диэлектрика равна …

А. $P \quad (\quad 1) \; _0 E_0/$ Б. $P \quad _0 E_0$

В. $P \quad (\quad 1) E_0/$ Г. $P \quad E_0$

6. Большая пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 перпендикулярно силовым линиям поля. Поверхностные плотности связанных зарядов, возникающих на каждой из сторон пластины, равны …

А. $(\quad 1) \; _0 E_0/$ Б. $_0 E_0$

В. $(\quad 1) E_0/$ Г. E_0

7. Точечный заряд q 4 нКл находится в однородном изотропном диэлектрике. Определите диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если на расстоянии r 30 см от заряда потенциал электрического поля равен 20 В.

Ответ: __________

8. Точечный заряд q находится в однородном изотропном диэлектрике с проницаемостью . Поляризационный заряд, возникающий вблизи точечного заряда, равен …

А. $q \quad q(\quad 1)/$ Б. $q \quad q/$

В. $q \quad q(\quad 1)/$ Г. $q \quad q/$

9. Бесконечная тонкая пластина равномерно заряжена с поверхностной плотностью и помещена в однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью . Определите поверхностные плотности связанных зарядов, возникающих у каждой из сторон пластины.

А. $(\quad 1)/$ Б. $(\quad 1)/ \quad)$

В. $(\quad 1)/$ Г. $(\quad 1)/ \quad)$

10. На рисунке изображено сечение уединенного полого шара из диэлектрика. Шар равномерно заряжен по объему. В каких областях пространства электрическое смещение равно нулю?

А. Только в 1

Б. Только в 2

В. Только в 3

Г. В 1 и 2

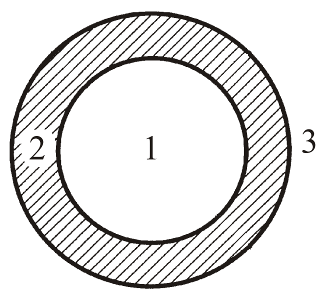


Рис. к тесту №10

11. Заряженная сфера окружена плотно прилегающей сферической оболочкой из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью 4. Определите величину связанного заряда у внешней поверхности оболочки. Заряд сферы q 20 мкКл.

Ответ: __________мкКл

12. Заряженная сфера радиусом R окружена плотно прилегающей сферической оболочкой из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Заряд сферы q. Объемная плотность связанного заряда в диэлектрике равна …

А. 0 Б. $3q(\quad 1)/(4 \quad _0 R^3)$

В. $3q \quad /(4 \quad _0 R^3)$ Г. $3q/(4 \quad _0 R^3)$

13. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика. Определите электрическое смещение на расстоянии r R от центра шара.

А. D $R^3/(3 \; _0 r^2)$ Б. D $\frac{1}{3}$ r

В. D 4 $R^3/(3 \; _0 r^2)$ Г. D $R^3/(3 r^2)$

14. Сторонние заряды равномерно распределены по объему шара радиусом R с плотностью . Шар изготовлен из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Разность потенциалов между центром шара его поверхностью равна …

А. $R^2/(3 \; _0)$ Б. $R^2/(4 \; _0)$

В. $R^2/(6 \; _0)$ Г. $R^2/(12 \; _0)$

15. Сторонние заряды равномерно распределены с плотностью по объему сферического слоя из диэлектрика с проницаемостью . Внутренний радиус слоя R, внешний $2R$. Разность потенциалов между поверхностями слоя равна …

А. $R^2/(\; _0)$ Б. $R^2/(3 \; _0)$

В. $R^2/(4 \; _0)$ Г. $R^2/(8 \; _0)$

16. Сторонние заряды распределены по объему шара с плотностью, зависящей только от расстояния r до центра шара по закону: r, где постоянная. Шар изготовлен из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Напряженность электрического поля в диэлектрике на расстоянии r от центра шара равна …

А. E $r^2/(4 \; _0)$ Б. E $r^2/(12 \; _0)$

В. E $r/(4 \; _0)$ Г. E $r/(\; _0)$

17. Сторонние заряды равномерно распределены по объему длинного цилиндра с плотностью 10 мКл/м^3. Цилиндр изготовлен из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью 2. Определите величину электрического смещения в диэлектрике на расстоянии r 4 см от оси цилиндра.

Ответ: __________мкКл/м^2

18. Сторонние заряды равномерно распределены по объему длинного цилиндра радиусом R с плотностью . Цилиндр изготовлен из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Разность потенциалов между осью цилиндра и его поверхностью равна …

А. $R^2/(2 \; _0)$ Б. $R^2/(4 \; _0)$

В. $R^2/(6 \; _0)$ Г. $R^2/(12 \; _0)$

19. Диэлектрический шар радиусом R поляризован так, что поляризованность диэлектрика зависит только от расстояния r от центра шара по закону: P r^2, где – постоянная. Определите поверхностную плотность связанных зарядов.

А. 0 Б. 2

В. 2 R Г. R^2

20. Диэлектрический шар поляризован так, что поляризованность диэлектрика зависит только от расстояния r от центра шара по закону: P r, где – постоянная. Определите объемную плотность связанных зарядов как функцию расстояния r от центра шара.

А. 0 Б.

В. 3 Г. r

§18. Проводники в электрическом поле

18.1. Равновесие зарядов в проводнике

В отличие от диэлектриков в проводниках имеется большая доля зарядов, которые могут свободно перемещаться внутри вещества. К проводникам относятся все металлы в жидком и твердом состояниях, водные растворы солей и кислот и многие другие вещества. Здесь мы под проводником будем понимать твердое металлическое тело.

Рассмотрим проводник во внешнем электрическом поле (на рис. 18.1 его силовые линии показаны пунктиром). Под действием поля свободные заряды в проводнике придут в движение. В результате у границ проводника возникнут заряды противоположных знаков, называемые *индуцированными*. Электрическое поле этих зарядов направлено противоположно внешнему. Следовательно, появление индуцированных зарядов приводит к ослаблению поля в проводнике. За ничтожно малое время свободные заряды перераспределятся так, что *напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю* (в противном случае свободные заряды продолжали бы двигаться), а *силовые линии вне проводника вблизи его поверхности будут направлены перпендикулярно к ней* (на рис. 18.1 они показаны сплошными линиями). Действительно, если бы существовала касательная составляющая поля, то заряды перемещались бы вдоль поверхности проводника, что противоречит опыту.

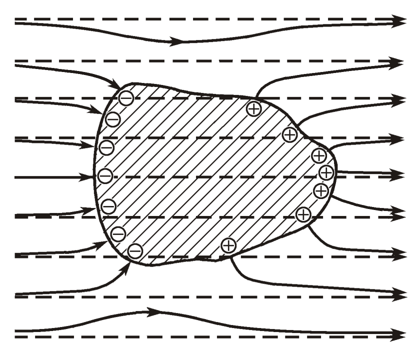


Рис. 18.1

Таким образом, незаряженный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности – они оканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Если проводнику сообщить некоторый избыточный заряд q, то в нем возникнет электрическое поле, заряды придут в движение и будут перемещаться до тех пор, пока электрическое поле внутри проводника не станет равным нулю. При этом поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность внутри проводника будет равен нулю. Это может означать только одно – избыточных зарядов внутри этой поверхности нет, то есть *избыточные заряды внутри проводника отсутствуют и распределяются по его поверхности*.

Отмеченные условия означают, что потенциалы во всех точках поверхности проводника (и внутри него) одинаковы, то есть *поверхность проводника эквипотенциальна*. Поэтому соединение заряженного проводника с другим проводником приведет к тому, что заряды между проводниками перераспределятся так, чтобы потенциалы тел уравнялись. В этом состоит принцип «заземления», то есть соединения проводника с Землей: потенциал заземленного проводника будет равен потенциалу Земли.

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормалями к поверхности проводника и основаниями $S_{\text{осн}}$, одно из которых расположено внутри, а другое вне проводника (рис. 18.2).

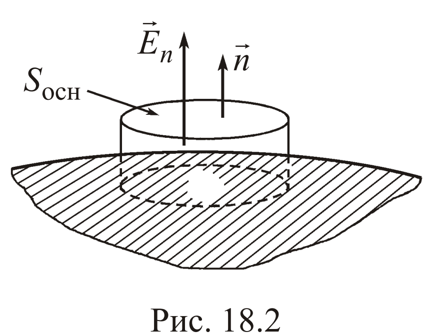


Рис. 18.2

По теореме Гаусса

$$\oint_S E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q,$$

где q – заряд внутри выбранной цилиндрической поверхности.

Поскольку силовые линии вне проводника вблизи его поверхности будут направлены перпендикулярно к ней, а внутри проводника поле отсутствует, то

$$\oint_S E_n\, dS = \int_{S_{\text{осн}}} E_n\, dS = E_n S_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon_0},$$

где σ – локальная плотность заряда. Следовательно, вблизи поверхности заряженного проводника напряженность электрического поля

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (18.1)$$

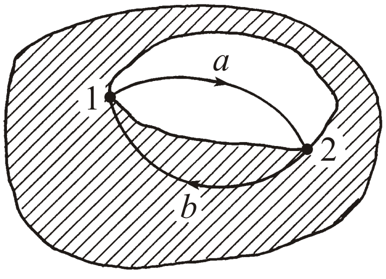


Рис. 18.3

Рассмотрим теперь проводник, внутри которого имеется полость (рис. 18.3). Сообщим ему некоторый заряд и поместим во внешнее электрическое поле.

Вычислим работу сил электрического поля, совершаемую ими при перемещении некоторого точечного заряда q по замкнутой траектории $1 \to a \to 2 \to b \to 1$, часть которой проходит через полость, а часть – через проводник.

Поскольку электрическое поле консервативно, то работа сил поля по замкнутой траектории $A_{1\to a\to 2\to b\to 1} = 0$. С другой стороны, $A_{1\to a\to 2\to b\to 1} = A_{1\to a\to 2} + A_{2\to b\to 1}$. Так как поле внутри проводника отсутствует, то $A_{2\to b\to 1} = 0$. Следовательно, $A_{1\to a\to 2} = 0$. Таким образом, независимо от траектории перемещения заряда внутри полости, работа сил поля будет равна нулю. Это может быть только в случае, если *поле внутри полости отсутствует*. К такому же выводу легко прийти, воспользовавшись теоремой о монотонности потенциала.

Если полый проводник находится во внешнем электрическом поле, то на нем появятся индуцированные заряды. Эти заряды будут сосредоточены на поверхности проводника, а электрическое поле внутри проводника и в полости будет равно нулю. Поэтому полый проводник экранирует электрическое поле всех внешних зарядов. На этом свойстве основана электростатическая защита: для того чтобы оградить чувствительные электрические приборы от воздействия внешних электрических полей, их заключают в замкнутые металлические оболочки. При этом поля по обе стороны оболочки полностью не зависят друг от друга.

Отметим, что полый проводник экранирует только поле внешних зарядов. Если электрические заряды находятся внутри полости, индуцированные заряды возникнут и на внешней, и на внутренней поверхности проводника. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность, окружающую полость и целиком проходящую в проводнике. Так как напряженность электрического поля в любой точке этой поверхности равна нулю, то нулю будет равен и полный заряд, окруженный этой поверхностью. Таким образом, суммарный индуцированный заряд на внутренней поверхности проводника равен и противоположен по знаку заряду, находящемуся в полости. Очевидно, что при этом заряд, индуцированный на внешней поверхности проводника, будет равен и по знаку, и по величине заряду внутри полости.

18.2. Точечный заряд вблизи проводящих тел

Теперь представим себе, что вблизи некоторого проводника расположен точечный заряд. То, как индуцированный заряд распределится по поверхности проводника, чтобы поле в его толще было равным нулю и поверхность эквипотенциальна в общем случае выяснить чрезвычайно сложно. Не менее сложно вычислить силу, с которой будет действовать поле индуцированных зарядов на точечный заряд, и наоборот.

Рассмотрим картину поля двух разноименных точечных зарядов (q). Построим для них систему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (рис. 18.4, *а*). Рассмотрим некоторую эквипотенциальную поверхность *A* с потенциалом ${}_{A}$. Предположим, что мы изогнули тонкий

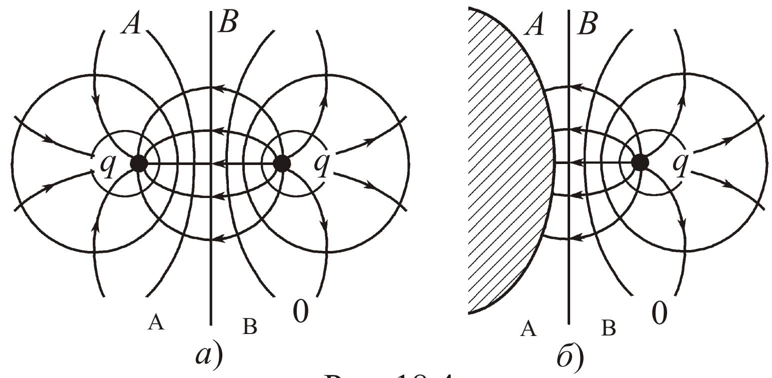


Рис. 18.4

металлический лист так, что он в точности совпал с частью поверхности *A*. Если на нем к тому же установить потенциал ${}_{A}$, то от появления листа в картине поля ничего не изменится. Если этот же лист замкнуть по всей поверхности *A*, то он разделит пространство на две части: одна будет внутри, другая – снаружи листа. Как указывалось выше, поля (потенциалы) в этих областях не зависят друг от друга. Поэтому независимо от того, какое поле внутри замкнутого проводника, снаружи поле всегда одно и то же (конечно, при условии, что на поверхности проводника поддерживается потенциал ${}_{A}$). Можно даже заполнить внутреннюю область металлом (рис. 18.4, *б*). Следовательно, картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей точечного заряда (q) и проводника будет такой же, как у заряда (q) и у заряда (q), расположенного в определенном месте пространства. При этом заряд (q) называют *зарядом-изображением*.

Теперь рассмотрим задачу о точечном заряде, расположенном вблизи безграничной проводящей плоскости. Для расчета поля между плоскостью и зарядом следует решить уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями и, используя связь между $\vec{E}$ и , найти проекции вектора напряженности на оси системы координат.

Вернемся к предыдущему примеру поля двух разноименных точечных зарядов (q). Очевидно, если на месте эквипотенциальной поверхности *B*, расположенной на половине расстояния между зарядами (q) и (q), поместить бесконечную или заземленную проводящую пластину, то картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей не изменится. Таким образом, задача о точечном заряде вблизи проводящей безграничной (или заземленной) плоскости формально сводится к задаче расчета полей двух точечных зарядов.

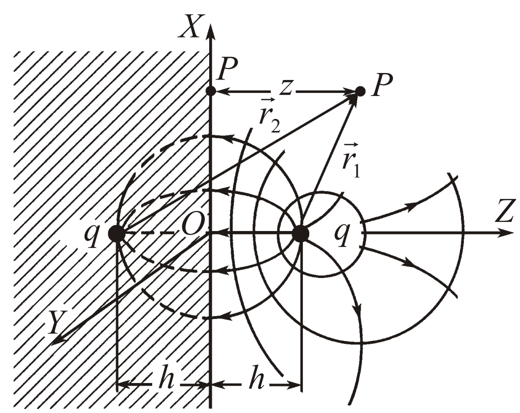


Рис. 18.5

Найдем распределение индуцированных зарядов на плоскости.

Рассмотрим произвольную точку P, лежащую вне плоскости (рис. 18.5).

Найдем потенциал и напряженность электрического поля заряда ($+q$) и заряда-изображения ($-q$) в точке $P(x, y, z)$, расстояния до которой от зарядов равны

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} \text{ и } r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}$$

соответственно:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}\right);$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}\right);$$

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z-h}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{z+h}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}\right),$$

или

$$E_x(x, y, z) = \frac{q\,x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right); \quad E_y(x, y, z) = \frac{q\,y}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right);$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z-h}{r_1^3} - \frac{z+h}{r_2^3}\right),$$

где h — расстояние от зарядов до плоскости.

Устремив $z \to 0$, найдем напряженность поля в точке P, то есть вблизи плоскости:

$$E_x(x, y, 0) = 0; \quad E_y(x, y, 0) = 0; \quad E_z(x, y, 0) = -\frac{q\,h}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (18.2)$$

Таким образом, вблизи плоскости силовые линии поля направлены перпендикулярно к ее поверхности. В п. 18.1 было показано, что напряженность поля вблизи проводящей поверхности

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно, поверхностная плотность индуцированного заряда в произвольной точке на плоскости

$$\sigma(x, y, 0) = -\frac{q\,h}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}; \qquad \sigma(\rho) = -\frac{q\,h}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}}, \qquad (18.3)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Найдем теперь величину индуцированного заряда.

Мысленно разобьем поверхность плоскости на бесконечно тонкие кольца радиусом ρ, шириной $d\rho$ и площадью $dS = 2\pi\rho\,d\rho$ с центром в точке O. Заряд такого кольца

$$dQ = \sigma\,dS = \sigma\,2\pi\rho\,d\rho = -\frac{q\,h}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}}2\pi\rho\,d\rho = -\frac{q\,h}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}\rho\,d\rho,$$

а весь индуцированный заряд

$$Q = \int dQ = -q\,h\int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}d\rho = -\frac{q\,h}{2}\int_0^\infty \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = q\,h\left.\frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}}\right|_0^\infty = -q.$$

Очевидно, что сила взаимодействия точечного заряда q с зарядом Q, индуцированным на пластине, будет равна силе взаимодействия двух разноименных точечных зарядов (q), расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга:

$$F \quad \frac{q^2}{4 \quad {}_0 (2h)^2}. \tag{18.4}$$

Рассмотрим проводящую заземленную сферу радиусом R и точечный заряд q, расположенный на расстоянии $b \quad R$ от ее центра (рис. 18.6). Очевидно, что индуцированный заряд распределится по поверхности сферы неравномерно, и применять известные формулы для поля сферы нельзя. Воспользуемся методом, который применялся для расчета поля вблизи проводящей плоскости.

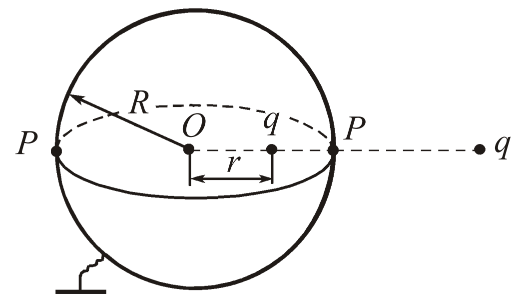


Рис. 18.6

Очевидно, что заряд-изображение q должен находиться на линии, соединяющей центр сферы O с зарядом q. Чтобы потенциал зарядов q и q в точке P был равен нулю, заряды q и q должны иметь разные знаки, а отношение величин зарядов должно быть пропорционально отношению расстояний от зарядов до точки P. Действительно, чтобы потенциал зарядов q и q в точке P

$$\frac{q}{4 \quad {}_0 (R \quad r)} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 (b \quad R)}$$

был равен нулю, отношение зарядов должно быть равно

$$\frac{q}{q} \quad \frac{R \quad r}{b \quad R}.$$

Аналогично для точки P:

$$\frac{q}{4 \quad {}_0 (R \quad r)} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 (b \quad R)} \quad 0; \quad \frac{q}{q} \quad \frac{R \quad r}{b \quad R}.$$

Следовательно,

$$\frac{R \quad r}{b \quad R} \quad \frac{R \quad r}{b \quad R}; \quad r \quad \frac{R^2}{b}; \quad \frac{q}{q} \quad \frac{R \quad R^2/b}{b \quad R} \quad \frac{R}{b}; \quad q \quad q\frac{R}{b}.$$

Легко показать, что если на линии, соединяющей центр сферы с зарядом q, на расстоянии $r \quad R^2/b$ от центра сферы поместить заряд $q \quad qR/b$, то сфера будет эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $\quad 0$. При этом поле заземленной сферы и точечного заряда, расположенного на расстоянии b от ее центра, тождественно полю двух точечных зарядов q и q. Легко понять, что если сфера не заземлена, то, кроме заряда q, в ее центре надо поместить заряд $q \quad q$. Тогда потенциал поверхности сферы будет одинаковым (уже не равным нулю), а суммарный заряд сферы $q \quad q \quad 0$.

18.3. Электроемкость. Конденсаторы

Напомним, что сообщенный уединенному проводнику заряд распределится по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. При этом проводник приобретет некоторый потенциал . Если проводнику сообщить дополнительный заряд, то он также перераспределится по его поверхности и потенциал проводника изменится. Опыт показывает, что потенциал проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:

$$q \quad C \quad , \tag{18.5}$$

где коэффициент пропорциональности C называют *электроемкостью* (или просто *емкостью*) проводника.

Например, емкость уединенной заряженной сферы можно найти, вычислив потенциал на ее поверхности по формуле (16.16):

$$C \quad q/ \quad 4 \quad {}_0 R. \tag{18.6}$$

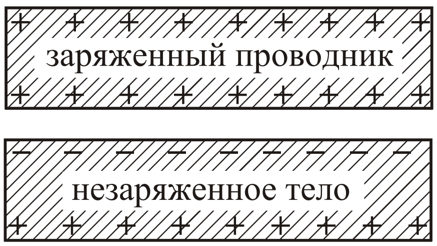


Рис. 18.7

Если к заряженному проводнику поднести какое-либо проводящее незаряженное тело (рис. 18.7), то на этом теле появятся индуцированные заряды; причем, заряды, противоположные по знаку заряду проводника, расположатся ближе к проводнику, чем одноименные с ним. При этом, очевидно, потенциал заряженного проводника уменьшится. Согласно (18.5), это означает увеличение емкости проводника. Поэтому при изготовлении систем, обладающих большой емкостью, используют два проводника, расположенных близко друг от друга. Такие системы называют *конденсаторами*, проводники – его *обкладками*, расстояние между ними – *зазором*.

Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое зарядами обкладок, было сосредоточено между ними. Наиболее простая система, удовлетворяющая этим условиям, представляет собой две параллельные металлические пластины, расположенные на малом расстоянии друг от друга, на которых находятся разноименные, равные по величине заряды. Такой конденсатор называют *плоским*.

Основной характеристикой конденсатора является его *емкость*, под которой понимают величину, пропорциональную модулю заряда на одной из обкладок и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C \quad \frac{q}{\quad}, \tag{18.7}$$

при этом разность потенциалов обычно называют *напряжением* U.

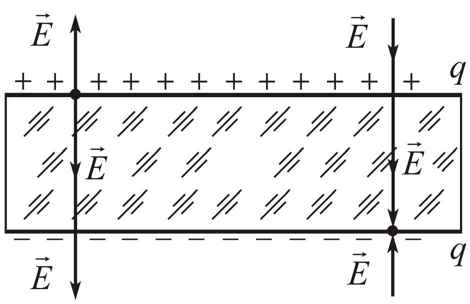


Рис. 18.8

Рассмотрим *плоский конденсатор* с пластинами площадью S каждая и толщиной зазора d, полностью заполненного изотропным диэлектриком с проницаемостью . Поместим на обкладки заряды (q). Заряды обкладок создадут в окружающем пространстве электрическое поле (если зазор между обкладками по сравнению с их размерами мал, то вблизи пластин поле приближенно можно считать однородным): силовые линии положительно заряженной обкладки будут направлены от нее перпендикулярно поверхности пластины (рис. 18.8), а отрицательно заряженной – к пластине, причем по величине

$$E \quad E \quad \frac{\quad}{2 \quad {}_0},$$

где q/S – поверхностная плотность зарядов на пластинах.

Очевидно, вне зазора конденсатора напряженность поля будет равна нулю, а между обкладками

$$E = \frac{E_{+} + E_{-}}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

где учтено, что в диэлектрике поле ослаблено в ε раз.

Используя связь напряженности поля с потенциалом (15.23), найдем разность потенциалов между обкладками конденсатора в случае однородного поля

$$\Delta\varphi = E\, d = \frac{q\, d}{\varepsilon \varepsilon_0 S}$$

и емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \qquad (18.8)$$

Сферический конденсатор представляет собой две концентрические сферы радиусами R_1 и $R_2 > R_1$, пространство между которыми заполнено изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. Если внутренней сфере сообщить заряд $(+q)$, а внешней – заряд $(-q)$, то напряженность электрического поля вне сфер будет равна нулю, а между сферами (см. формулу (16.13))

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2},$$

где учтено, что в диэлектрике поле ослаблено в ε раз; r – расстояние от центра сфер.

Поскольку напряженность поля зависит только от расстояния r, то разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2}\, dr = -\frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

где учтено, что силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала.

Следовательно, емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (18.9)$$

Краткие выводы

1. *Условия равновесия зарядов в проводнике*:

а) избыточные заряды внутри проводника отсутствуют;

б) напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю;

в) силовые линии электрического поля вне проводника вблизи его поверхности направлены перпендикулярно к ней;

г) потенциал внутри проводника постоянен;

д) поверхность проводника эквипотенциальна.

2. *Электроемкость заряженного проводника*

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

3. *Электроемкость конденсатора*

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}.$$

4. *Электроемкость плоского конденсатора*

$$C \quad \frac{{}_0 S}{d}.$$

5. *Электроемкость сферического конденсатора*

$$C \quad \frac{4 \quad {}_0 R_1 R_2}{R_2 \quad R_1}.$$

<u>Вопросы для самоконтроля и повторения</u>

1. При соблюдении каких условий заряды на проводнике будут находиться в равновесии?

2. Как направлены силовые линии электрического поля вблизи поверхности проводника?

3. Как распределяются избыточные заряды в проводнике?

4. Чему равна напряженность электрического поля в полости незаряженного проводника, находящегося во внешнем электрическом поле? заряженного?

5. Отношение напряженностей поля в двух точках в непосредственной близости к поверхности заряженного проводника равно двум. Что можно сказать о локальной плотности заряда вблизи этих точек?

6. Что такое электростатическая защита?

7. Что такое заряд-изображение?

8. Какова величина индуцированного заряда на поверхности большой проводящей пластины при наличии точечного заряда q вблизи пластины?

9. Чем определяется емкость проводника? конденсатора?

10. Чему равна напряженность электрического поля внутри и вне заряженного плоского конденсатора? сферического конденсатора?

<u>Задачи</u>

1. Два металлических шара находятся в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Радиус одного шара R_1, его заряд q_1, радиус другого шара R_2, заряд q_2. Шары соединяют длинным тонким проводником. Определите величину заряда, который прошел по проводнику.

Решение

Так как по условию задачи шары находятся далеко друг от друга, то будем полагать, что они не взаимодействуют, то есть электрическое поле, создаваемое одним шаром, не влияет на распределение зарядов другого шара. Поэтому заряды шаров будут распределены по их поверхностям равномерно.

До соединения шары имели разные потенциалы:

$$_1 \quad \frac{q_1}{4 \quad {}_0 R_1}; \qquad _2 \quad \frac{q_2}{4 \quad {}_0 R_2}.$$

После соединения проводником оба шара становятся как бы одним телом. Заряды, находящиеся на шарах, придут в движение и перераспределятся таким образом, чтобы потенциалы шаров стали одинаковыми:

$$_1 \quad \frac{q_1}{4 \quad {}_0 R_1}; \qquad _2 \quad \frac{q_2}{4 \quad {}_0 R_2}; \qquad _1 \quad _2, \tag{1}$$

где q_1, q_2 заряды, которые будут находиться на шарах после их соединения.

На основании закона сохранения заряда

$$q_1 \quad q_2 \quad q_1 \quad q_2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) (2) получим:

$$q_2 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_1; \qquad \frac{q_1}{4 \quad {}_0 R_1} \quad \frac{(q_1 \quad q_2 \quad q_1)}{4 \quad {}_0 R_2}; \qquad q_1 \quad \frac{(q_1 \quad q_2) R_1}{R_1 \quad R_2}. \qquad (3)$$

Следовательно, если первоначально на шаре радиусом R_1 был заряд q_1, а стал q_1, то это означает, что по проводнику переместился заряд

$$q \quad |q_1 \quad q_1| \quad q_1 \quad \frac{(q_1 \quad q_2) R_1}{R_1 \quad R_2} \quad \frac{q_1 R_2 \quad q_2 R_1}{R_1 \quad R_2}.$$

Отметим, что у одинаковых шаров ($R_1 \quad R_2$) после их соединения суммарный заряд перераспределится между шарами поровну (см. выражение (3) для q_1).

Ответ: $q \quad \frac{q_1 R_2 \quad q_2 R_1}{R_1 \quad R_2}$.

2. Две одинаковые металлические пластины небольшой толщины расположены параллельно и находятся на расстоянии, много меньшем их линейных размеров. Заряды пластин q_1 и q_2. Определите заряды каждой поверхности обеих пластин. Среда вакуум.

Решение

Заряженные пластины будут создавать электрические поля, при этом каждая из пластин будет находиться в электрическом поле другой пластины. Под действием электрического поля заряды (свободные электроны и нескомпенсированные заряды пластин) начнут перемещаться до тех пор, пока электрическое поле внутри пластин не станет равным нулю.

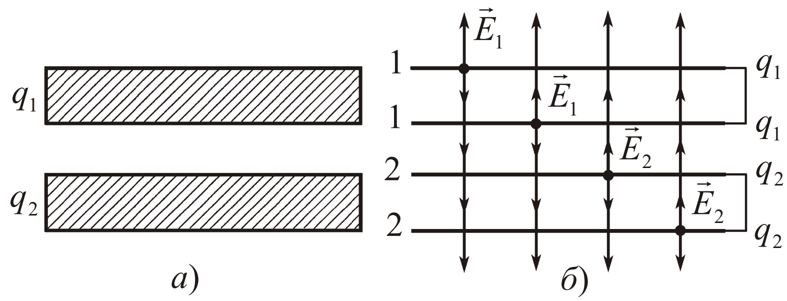


Рис. к задаче №2

Обозначим заряды внешних и внутренних поверхностей пластин q_1, q_1, q_2, q_2 (для определенности будем считать их положительными) и заменим наши две пластины четырьмя тонкими проводящими заряженными пластинами (см. рис. *б*). Поля, создаваемые зарядами пластин, обозначим соответственно $\vec{E}_1$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_2$. Поскольку пластины тонкие, а расстояние между ними много меньше линейных размеров пластин, то поля $\vec{E}_1$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_2$ можно считать однородными и вычислять напряженность поля пластин по известной формуле:

$$E \quad \frac{q}{2 S \quad {}_0}.$$

Так как напряженность электрического поля между пластинами 1 1 и 2 2 равна нулю, то

$$E_1 \quad E_1 \quad E_2 \quad E_2 \quad \frac{q_1}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_1}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_2}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_2}{2 S \quad {}_0} \quad 0;$$

$$E_1 \quad E_1 \quad E_2 \quad E_2 \quad \frac{q_1}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_1}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_2}{2 S \quad {}_0} \quad \frac{q_2}{2 S \quad {}_0} \quad 0,$$

где S площадь каждой из пластин.

Складывая и вычитая эти равенства, получим:

$$q_1 \quad q_2 \quad 0; \qquad q_1 \quad q_2 \quad 0. \tag{1}$$

Записав закон сохранения заряда на каждой из пластин в виде

$$q_1 \quad q_1 \quad q_1\,; \qquad q_2 \quad q_2 \quad q_2 \tag{2}$$

и решив систему уравнений (1) (2) относительно зарядов q_1, q_1, q_2, q_2, находим:

$$q_1 \quad q_2 \quad ½(q_1 \quad q_2); \qquad q_1 \qquad q_2 \quad ½(q_1 \quad q_2).$$

Ответ: $q_1 \quad q_2 \quad ½(q_1 \quad q_2)$; $q_1 \qquad q_2 \quad ½(q_1 \quad q_2)$.

3. Три тонкие одинаковые металлические пластины расположены параллельно и находятся на расстояниях, много меньших их линейных размеров. Средняя пластина делит расстояние между крайними пластинами в отношении 1:3 и имеет заряд *q*. Внешние пластины соединяют проводником. Определите величину заряда, который прошел по проводнику. Среда вакуум.

Решение

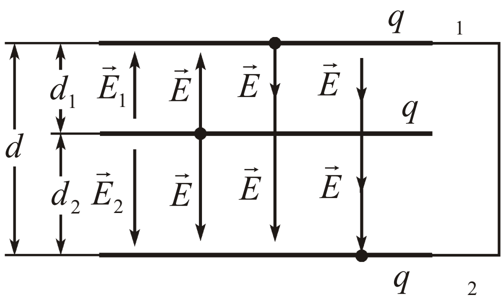


Рис. к задаче №3

Поскольку расстояния между пластинами много меньше их линейных размеров, то электрические поля, создаваемые пластинами, можно считать однородными.

Пластина с зарядом q создаст по обе стороны от себя электрическое поле напряженностью

$$E \quad \frac{q}{2S \quad _0},$$

где S площадь пластины.

Если потенциал одной из внешних пластин обозначить через $_1$, а другой через $_2$, то разности потенциалов между каждой из них и средней пластиной будут равны соответственно

$$_1 \quad E\,d_1 \quad \frac{q}{2S \quad _0}\,\frac{d}{4}; \qquad\qquad _2 \quad E\,d_2 \quad \frac{q}{2S \quad _0}\,\frac{3d}{4}, \tag{1}$$

где потенциал средней пластины; $d_1 \quad ¼\,d$, $d_2 \quad ¾\,d$ расстояния между средней пластиной и внешними пластинами (d расстояние между внешними пластинами).

Вычитая друг из друга соотношения (1), получим

$$_1 \qquad _2 \quad \frac{q\,d}{4S \quad _0} \quad 0.$$

Если внешние пластины соединить проводником, то свободные заряды с одной из них будут перемещаться на другую до тех пор, пока потенциалы этих пластин не станут одинаковыми. В результате на внешних пластинах возникнут заряды q и q (причем $q \quad q \quad 0$), которые создадут электрические поля напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{E}$.

Пусть для определенности $q \quad 0$, а $q \quad 0$. Тогда силовые линии напряженности электрического поля $\vec{E}$, создаваемого зарядами средней пластины, линии напряженности поля $\vec{E}$, создаваемого пластиной с зарядом q, и силовые линии поля $\vec{E}$ пластины с зарядом q будут направлены перпендикулярно пластинам, как показано на рисунке. Следовательно, напряженности электрического поля между средней пластиной и крайними

$$E_1 \quad E \quad E \quad E\,; \qquad E_2 \quad E \quad E \quad E\,,$$

или

$$E_1 \quad \frac{q}{2S\quad_0} \quad \frac{q}{2S\quad_0} \quad \frac{|q\,|}{2S\quad_0} \quad \frac{q\quad 2q}{2S\quad_0}; \qquad E_2 \quad \frac{q}{2S\quad_0} \quad \frac{q}{2S\quad_0} \quad \frac{|q\,|}{2S\quad_0} \quad \frac{q\quad 2q}{2S\quad_0}$$

(где учтено, что $q \qquad q$), а новые разности потенциалов между рассматриваемыми пластинами:

$$_1 \quad E_1 d_1 \quad \frac{q\quad 2q}{2S\quad_0}\frac{d}{4} \quad \frac{(q\quad 2q)\,d}{8S\quad_0}; \qquad\qquad _2 \quad E_2 d_2 \quad \frac{q\quad 2q}{2S\quad_0}\frac{3d}{4} \quad \frac{3(q\quad 2q)\,d}{8S\quad_0},$$

где $_1$, $_2$, потенциалы крайних пластин и средней пластины соответственно.

Так как внешние пластины соединены проводником, то $_1 \qquad _2$. Следовательно,

$$\frac{(q\quad 2q)\,d}{8S\quad_0} \quad \frac{3(q\quad 2q)\,d}{8S\quad_0}; \quad q \quad 2q \quad 3(q \quad 2q); \quad q \qquad \tfrac{1}{4}q.$$

Если первоначально на внешних пластинах заряда не было, а после их соединения проводником на каждой из них возникли разноименные заряды (q), то это означает, что заряд, равный модулю q , перетек по проводнику с одной пластины на другую.

Ответ: $q \quad \tfrac{1}{4}q$.

4. Вблизи незаряженной металлической сферы радиусом R на расстоянии $l \quad 2R$ от ее центра находится положительный точечный заряд q. Определите потенциал электрического поля в центре сферы. Среда вакуум.

Решение

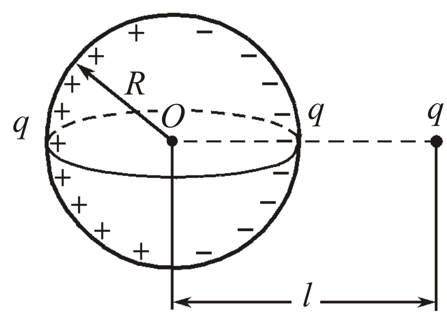


Рис. к задаче №4

Заряд q создаст в окружающем пространстве электрическое поле. Под действием поля свободные электроны на сфере придут в движение. В результате на противоположных поверхностях сферы возникнут заряды q и q разных знаков, причем $q \quad q \quad 0$.

Поскольку индуцированные заряды распределятся по поверхности сферы неравномерно (см. рисунок), то применять известные формулы для потенциала сферы нельзя.

Разобьем поверхность сферы на элементы, которые будут иметь заряды dq и dq , рассматриваемые как точечные. Такие заряды будут создавать в центре сферы потенциалы

$$d \qquad \frac{dq}{4\quad_0 R}; \quad d \qquad \frac{dq}{4\quad_0 R},$$

а потенциал, создаваемый в данной точке всем индуцированным зарядом,

$$d \qquad d \qquad \frac{dq}{4\quad_0 R} \quad \frac{dq}{4\quad_0 R} \quad \frac{q}{4\quad_0 R} \quad \frac{q}{4\quad_0 R} \quad \frac{q\quad q}{4\quad_0 R} \quad 0.$$

Следовательно, потенциал электрического поля в центре сферы будет равен потенциалу, создаваемому только точечным зарядом q:

$$_0 \quad \frac{q}{4\quad_0 l} \quad \frac{q}{8\quad_0 R}.$$

Ответ: $_0 \quad \dfrac{q}{8\quad_0 R}$.

5. Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра незаряженного сферического слоя проводника, внутренний и внешний радиус которого равны соответственно R_1 и R_2. Определите потенциал в центре слоя, если $r \quad R_1$.

Решение

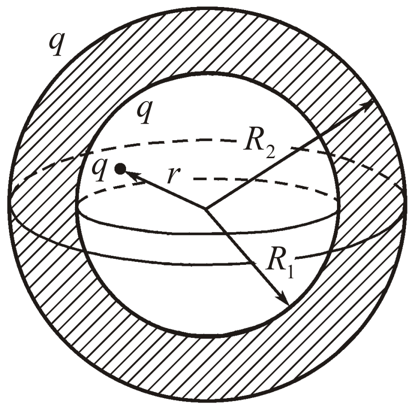


Рис. к задаче №5

Под действием электрического поля заряда q на внутренней поверхности слоя индуцируется заряд q, а на внешней заряд $q \qquad q$. Причем заряды q и q будут распределены по поверхностям слоя неравномерно, и применять известные формулы для поля сферы нельзя.

Поскольку внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю, то поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность S, проходящую внутри слоя, будет равен нулю:

$$\varPhi \quad \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) \quad 0.$$

По теореме Гаусса,

$$\varPhi \quad \frac{q \quad q}{\quad_0}.$$

Следовательно,

$$q \qquad q; \qquad q \qquad q.$$

Мысленно разобьем внутреннюю поверхность слоя на бесконечно малые площадки площадью dS с элементарными зарядами dq, каждый из которых будем считать точечным. Каждый элементарный заряд dq в центре слоя создаст потенциал

$$d \qquad \frac{dq}{4 \quad_0 R_1}.$$

Аналогично, для заряда q:

$$d \qquad \frac{dq}{4 \quad_0 R_2}.$$

Так как потенциал электрического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности, то потенциал в центре слоя

$$_0 \qquad\qquad ,$$

где , , потенциалы точечного заряда q, зарядов q и q соответственно:

$$\frac{q}{4 \quad_0 r}; \qquad d \qquad \frac{dq}{4 \quad_0 R_1} \quad \frac{q}{4 \quad_0 R_1} \qquad \frac{q}{4 \quad_0 R_1};$$

$$d \qquad \frac{dq}{4 \quad_0 R_2} \quad \frac{q}{4 \quad_0 R_2} \quad \frac{q}{4 \quad_0 R_2}.$$

Следовательно,

$$_0 \quad \frac{q}{4 \quad_0 r} \quad \frac{q}{4 \quad_0 R_1} \quad \frac{q}{4 \quad_0 R_2} \quad \frac{q}{4 \quad_0} \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad .$$

Ответ: $_0 \quad \frac{q}{4 \quad_0} \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad .$

6. Точечный положительный заряд q находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями. Расстояние от заряда до каждой полуплоскости равно l. Определите величину силы, действующей на заряд.

Решение

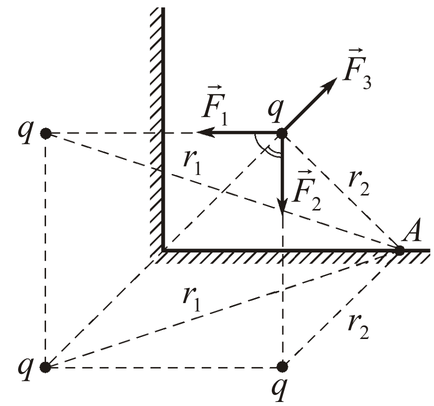


Рис. к задаче №6

Для решения данной задачи воспользуемся методом зарядов-изображений, поместив два заряда (q) зеркально заряду q относительно полуплоскостей и заряд (q) зеркально зарядам-изображениям (q). При этом картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей точечного заряда q и проводящих полуплоскостей будет такой же, как у заряда q и у зарядов-изображений (см. рисунок). Действительно, потенциалы разноименных зарядов (q) на одинаковых расстояниях от них будут равными по величине и разными по знаку. Поэтому потенциал поля, создаваемого системой четырех зарядов в произвольной точке A на полуплоскостях, будет одинаков и равен нулю, то есть равен потенциалу полуплоскостей:

$$\frac{q}{4 \quad _0 r_1} \quad \frac{q}{4 \quad _0 r_1} \quad \frac{q}{4 \quad _0 r_2} \quad \frac{q}{4 \quad _0 r_2} \quad 0.$$

На заряд q со стороны зарядов (q) будут действовать равные по величине силы

$$F_1 \quad F_2 \quad \frac{q^2}{4 \quad _0 (2l)^2},$$

направленные перпендикулярно полуплоскостям, а со стороны заряда-изображения q сила

$$F_3 \quad \frac{q^2}{4 \quad _0 (\sqrt{8}\, l)^2},$$

направленная вдоль биссектрисы прямого угла между силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Следовательно, результирующая сила, действующая на заряд q,

$$F \quad F_1 \cos \quad F_2 \cos \quad F_3 \quad 2\frac{q^2}{4 \quad _0 (2l)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{q^2}{4 \quad _0 (\sqrt{8}\, l)^2} \quad \frac{2\sqrt{2} \quad 1}{2}\frac{q^2}{16 \quad _0 l^2},$$

где $\quad 45^0$.

Ответ: $F \quad \dfrac{2\sqrt{2} \quad 1}{2}\dfrac{q^2}{16 \quad _0 l^2}$.

7. Очень длинный тонкий стержень ориентирован перпендикулярно к безграничной проводящей плоскости и не доходит до этой плоскости на расстояние l. Стержень заряжен равномерно с линейной плотностью . Определите распределение индуцированного заряда на плоскости (r), где r расстояние от следа стержня на плоскости.

Решение

Для решения задачи воспользуемся методом зарядов-изображений, поместив стержень-изображение, заряженный с линейной плотностью ( ), зеркально нашему стержню.

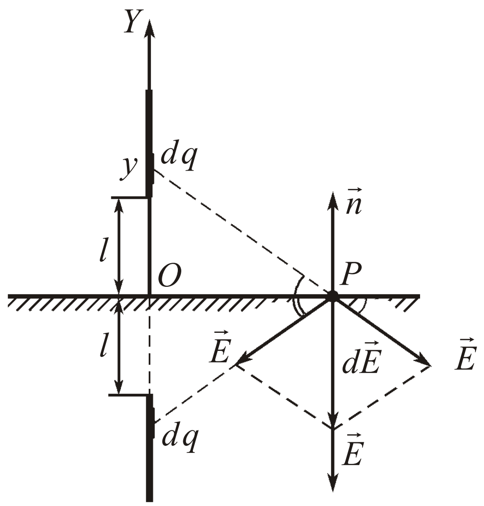


Рис. к задаче №7

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dy с элементарными зарядами $dq \quad dy$, которые будем считать точечными. Такой заряд, находящийся на расстоянии y от плоскости, создаст в точке P электрическое поле напряженностью

$$E \quad \frac{dq}{4 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)} \quad \frac{dy}{4 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)}$$

(где r расстояние от точки P до начала системы координат), направленное под некоторым углом к плоскости.

Симметрично расположенный на стержне-изображении заряд dq в точке P создаст электрическое поле напряженностью

$$E \quad \frac{dq}{4 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)} \quad \frac{dy}{4 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)} \quad dE,$$

которое также будет направлено под углом к плоскости. Очевидно, что результирующее поле $d\vec{E} \quad \vec{E} \quad \vec{E}$ зарядов dq и dq будет направлено перпендикулярно плоскости. При этом

$$dE \quad E\sin \quad E\sin \quad \frac{dy}{2 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)}\frac{y}{\sqrt{y^2 \quad r^2}} \quad \frac{y\,dy}{2 \quad {}_0(y^2 \quad r^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, напряженность электрического поля в точке P

$$E \quad dE \quad \frac{}{2 \quad {}_0} {}_l \frac{y\,dy}{(y^2 \quad r^2)^{3/2}} \quad \frac{}{4 \quad {}_0}\frac{2}{\sqrt{y^2 \quad r^2}}\Bigg|_l \quad \frac{}{2 \quad {}_0\sqrt{l^2 \quad r^2}}.$$

Поскольку вблизи поверхности заряженного проводника проекция напряженности электрического поля на нормаль

$$E_n \quad \frac{}{{}_0},$$

то поверхностная плотность индуцированного заряда на плоскости

$$(r) \quad {}_0E_n \quad {}_0E \quad \frac{}{2 \quad \sqrt{l^2 \quad r^2}},$$

где r расстояние от точки, соответствующей проекции стержня на плоскость, до рассматриваемой точки на плоскости.

Ответ: $(r) \quad \frac{}{2 \quad \sqrt{l^2 \quad r^2}}$.

8. Половина пространства между обкладками плоского конденсатора заполнена однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью , как показано на рисунке. Площади обкладок S, расстояние между ними d. Определите емкость такого конденсатора.

Решение

Поместим на обкладки конденсатора равные по величине разноименные заряды (q).

Под действием электрического поля, создаваемого обкладками конденсатора, диэлектрик поляризуется и на его поверхностях появятся связанные заряды. Это приведет к перераспределению зарядов на обкладках.

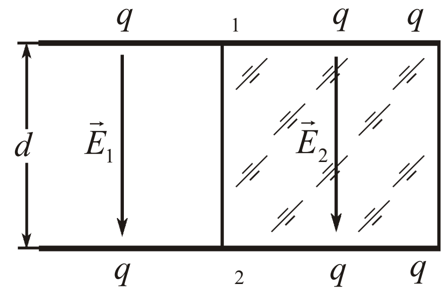


Рис. к задаче №8

Пусть на частях обкладок, между которыми находится воздух, будут находиться заряды (q), а на частях, граничащих с диэлектриком, заряды (q), причем

$$q \quad q \quad q.$$

Тогда заряды (q) создадут однородное электрическое поле напряженностью

$$E_1 \quad \frac{}{_0} \quad \frac{q}{_0 \tfrac{1}{2} S} \quad \frac{2q}{_0 S},$$

а заряды (q) поле

$$E_2 \quad \frac{}{_0} \quad \frac{q}{_0 \tfrac{1}{2} S} \quad \frac{2q}{_0 S},$$

где учтено, что изотропный диэлектрик ослабляет поле в раз.

Поскольку разности потенциалов между обкладками конденсатора одинаковы, то

$$_1 \quad _2 \quad E_1 d \quad \frac{2q}{_0 S} d; \qquad _1 \quad _2 \quad E_2 d \quad \frac{2q}{_0 S} d.$$

Следовательно, заряды на соответствующих частях обкладок конденсатора:

$$q \quad q; \quad q \quad q \quad q; \quad q \quad \frac{q}{1}; \quad q \quad \frac{q}{1}.$$

Таким образом, напряженность поля между обкладками и разность потенциалов между ними

$$E_1 \quad E_2 \quad \frac{2q}{(1 \quad)\, _0 S}; \qquad \frac{2q}{(1 \quad)\, _0 S} d,$$

а емкость конденсатора

$$C \quad \frac{q}{} \quad \frac{(1 \quad)\, _0 S}{2d}.$$

Отметим, что данный конденсатор можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора с площадями обкладок $\tfrac{1}{2} S$, причем один воздушный, второй заполненный диэлектриком с проницаемостью . Емкости этих конденсаторов

$$C_1 \quad \frac{_0 S}{2d}; \qquad C_2 \quad \frac{_0 S}{2d},$$

а емкость соединения

$$C \quad C_1 \quad C_2 \quad \frac{_0 S}{2d} \quad \frac{_0 S}{2d} \quad \frac{(\qquad _0 S}{2d},$$

что совпадает с результатом, полученным выше.

Ответ: $C \quad \dfrac{(1 \quad)\, _0 S}{2d}.$

9. Определите емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и $R_2 \quad R_1$, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: $/r$, где положительная постоянная; r расстояние от центра конденсатора.

Решение

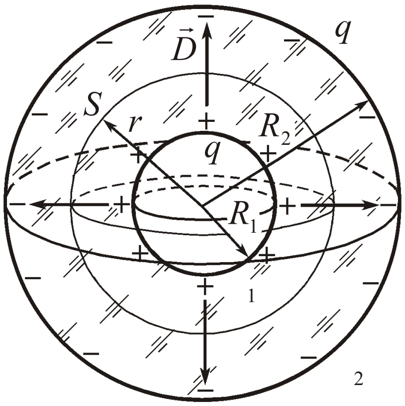


Рис. к задаче №9

Поместим на обкладки конденсатора равные по величине разноименные заряды (q). Поскольку заряженные сферические поверхности создают электрические поля только снаружи, то между обкладками будет поле, создаваемое только сферой радиусом R_1.

Рассмотрим концентрическую с обкладками конденсатора сферическую поверхность S радиусом r ($R_1 \quad r \quad R_2$). Так как поле, создаваемое равномерно заряженной сферой, будет центрально-симметричным, то поток электрического смещения через поверхность этой сферы

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \underset{S}{\circ}(\vec{D}, d\vec{S}) \quad \underset{S}{\circ} D_n\, dS \quad D\, 4 \quad r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad q\,,$$

где сторонний заряд q, заключенный внутри выбранной сферы,

$$q \quad q.$$

Следовательно,

$$D\, 4 \quad r^2 \quad q; \qquad D \quad \frac{q}{4 \quad r^2}\,.$$

Поскольку в изотропных диэлектриках напряженность поля связана с электрическим смещением выражением

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{D}}{\quad_0}\,,$$

то с учетом условия задачи ($\quad /r$)

$$E \quad \frac{q}{4 \quad _0 r^2} \quad \frac{q}{4 \quad _0 r}\,.$$

Так как напряженность поля между обкладками конденсатора в данном случае зависит только от расстояния r от центра конденсатора, то связь между напряженностью поля и потенциалом

$$\vec{E} \quad \mathrm{grad}$$

можно записать в виде

$$E \quad \frac{\quad}{r} \quad \frac{d}{dr}\,.$$

Поскольку силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала, то разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\int_{R_1}^{R_2} E\, dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4 \quad _0 r}\, dr \quad \frac{q}{4 \quad _0} \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} \quad \frac{q}{4 \quad _0} \ln \frac{R_2}{R_1}\,,$$

а его емкость

$$C \quad \frac{q}{\quad} \quad \frac{4 \quad _0}{\ln (R_2/R_1)}\,.$$

Ответ: $C \quad \dfrac{4 \quad _0}{\ln (R_2/R_1)}\,.$

10. Определите емкость цилиндрического конденсатора длиной L с радиусами обкладок R_1 и $R_2 \quad R_1$, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: $\quad r^2$, где положительная постоянная; r расстояние от оси конденсатора. Длина конденсатора много больше зазора между его обкладками.

Решение

Поместим на обкладки конденсатора равные по величине разноименные заряды (q). Так как длина конденсатора L много больше зазора между его обкладками $d \quad R_2 \quad R_1$, то рассеянием поля вблизи краев обкладок можно пренебречь и вычислять поле в зазоре по формулам бесконечно длинного цилиндра.

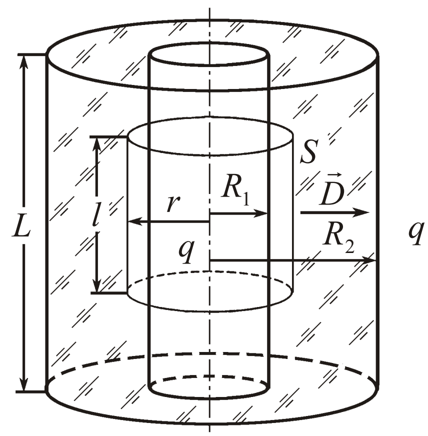


Рис. к задаче №10

Поскольку заряженные цилиндрические поверхности создают электрические поля только снаружи, то между обкладками будет поле, создаваемое только цилиндром радиусом R_1.

Рассмотрим коаксиальную с обкладками конденсатора цилиндрическую поверхность S радиусом r ($R_1 \quad r \quad R_2$) и длиной l. Так как поле, создаваемое равномерно заряженным цилиндром, будет радиально-симметричным, то поток электрического смещения через всю поверхность S цилиндра будет равен потоку через его боковую поверхность $S_{\text{бок}} \quad 2 \quad r\,l$:

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \oint_S D_n\,dS \quad \oint_{S_{\text{бок}}} D\,dS \quad D\,S_{\text{бок}} \quad D\,2 \quad r\,l.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi(R_1 \quad r \quad R_2) \quad q\,.$$

Сторонний заряд q, заключенный внутри выбранного цилиндра,

$$q \qquad 2 \quad R_1\,l,$$

где поверхностная плотность заряда на внутренней обкладке конденсатора

$$\frac{q}{2 \quad R_1 L}\,.$$

Следовательно,

$$D\,2 \quad r\,l \quad \frac{q}{2 \quad R_1 L}\,2 \quad R_1\,l; \qquad D \quad \frac{q}{2 \quad r\,L}\,.$$

Поскольку в изотропных диэлектриках напряженность поля связана с электрическим смещением выражением

$$\vec{E} \quad \frac{\vec{D}}{\quad_0}\,,$$

то с учетом условия задачи ($\quad r^2$)

$$E \quad \frac{q}{2 \qquad _0 r\,L} \quad \frac{q}{2 \qquad _0 r^3 L}\,.$$

Так как напряженность поля между обкладками конденсатора в данном случае зависит только от расстояния r от оси конденсатора, то связь между напряженностью поля и потенциалом

$$\vec{E} \qquad \text{grad}$$

можно записать в виде

$$E \quad \frac{}{r} \quad \frac{d}{dr}.$$

Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\int_{R_1}^{R_2} E\,dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2 \quad {}_0 r^3 L}\,dr \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 L} \frac{1}{r^2}\bigg|_{R_1}^{R_2} \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 L} \frac{R_2^2 \quad R_1^2}{R_1^2 R_2^2},$$

а его емкость

$$C \quad \frac{q}{} \quad 4 \quad {}_0 L \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 \quad R_1^2}.$$

Ответ: $C \quad 4 \quad {}_0 L \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 \quad R_1^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

18.1. Проводящий шар радиусом R_1, заряженный до потенциала , соединяют с незаряженным проводящим шаром длинным проводником. После соединения потенциалы шаров стали равны $_0$. Определите радиус второго шара.

18.2. Две параллельные металлические пластины расположены в вакууме на небольшом расстоянии друг от друга. Обе пластины заряжены положительно: заряд одной пластины q, другой $3q$. Определите заряды обеих поверхностей каждой из пластин.

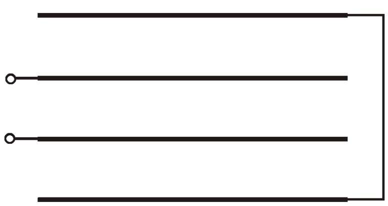


Рис. к задаче №18.3

18.3. Четыре тонкие одинаковые металлические пластины расположены параллельно и находятся в вакууме на одинаковых расстояниях d друг от друга. Крайние пластины соединены проводником, а на внутренние пластины подана разность потенциалов . Определите поверхностные плотности зарядов на крайних пластинах. Поля, создаваемые пластинами, считать однородными.

18.4. Точечный заряд q находится на расстоянии l от поверхности заземленной металлической сферы радиусом R. Определите заряд сферы. Среда вакуум.

18.5. Система состоит из двух концентрических проводящих сфер радиусами R_1 и $R_2 \quad R_1$. На внутренней сфере находится положительный заряд q. Какой заряд следует поместить на внешнюю сферу, чтобы потенциал внутренней сферы был равен нулю?

18.6. Два точечных заряда (q) и (q) расположены на расстоянии l друг от друга и на одинаковых расстояниях $\frac{1}{2}l$ от безграничной проводящей плоскости. Определите:

1) величину силы, действующей на каждый заряд;

2) напряженность электрического поля в точке, расположенной на середине между зарядами.

18.7. Бесконечно длинный тонкий стержень расположен параллельно безграничной проводящей плоскости на расстоянии l от нее. Стержень заряжен равномерно с линейной плотностью . Определите распределение поверхностной плотности индуцированного заряда на плоскости (x), где x расстояние от плоскости, перпендикулярной проводящей плоскости и проходящей через стержень.

18.8. Половина пространства между обкладками плоского конденсатора заполнена однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью , как показано на рисунке. Площади обкладок S, расстояние между ними d. Определите емкость такого конденсатора.

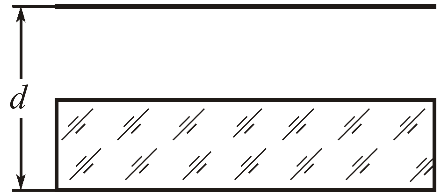


Рис. к задаче №18.8

18.9. Определите емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и R_2 R_1, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: r, где положительная постоянная; r расстояние от центра конденсатора.

18.10. Определите емкость цилиндрического конденсатора длиной L с радиусами обкладок R_1 и R_2 R_1, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: $/r$, где положительная постоянная; r расстояние от оси симметрии конденсатора. Длина конденсатора много больше зазора между его обкладками.

Тесты

1. Металлический шар, заряженный до потенциала 1000 В, соединяют длинным проводником с таким же незаряженным шаром. Определите потенциалы шаров после соединения.

Ответ: __________В

2. Два одинаковых металлических шарика находятся в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Заряд одного шарика q_1 0, другого q_2 0. После их соединения проводником с одного шарика на другой перетек заряд …

А. q 0 Б. q $|q_1$ $q_2|$

В. q ½$|q_1$ $q_2|$ Г. q ½$|q_1$ $q_2|$

3. В однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ внесли незаряженную металлическую пластину, которую затем разрезали по штриховой линии, как показано на рисунке. Какими зарядами будут обладать части пластины после разделения?

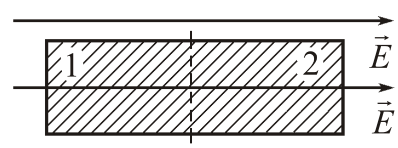


Рис. к тесту №3

А. Часть 1 положительным, часть 2 отрицательным

Б. Часть 1 отрицательным, часть 2 положительным

В. Обе части останутся нейтральными

Г. Обе части положительными

4. В однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ поместили металлическую пластину небольшой толщины перпендикулярно линиям поля. Поверхностные плотности зарядов, индуцированных на поверхностях пластины, …

А. 0 Б. $_0 E$

В. $E/ _0$ Г. $2 _0 E$

5. Две параллельные металлические пластины расположены на небольшом расстоянии друг от друга. Какие по величине заряды будут индуцированы на каждой из сторон одной пластины, если другой пластине сообщить заряд q 10 мкКл?

Ответ: __________мкКл

6. Две одинаковые параллельно расположенные пластины находятся во внешнем электрическом поле напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярном пластинам. Площадь каждой пластины S. Пластины соединили проводником. На каждой из пластин окажется заряд величиной …

А. $q \quad 0$ Б. $q \quad {}_0 E S$

В. $q \quad E S / \ {}_0$ Г. $q \quad 2 \ {}_0 E S$

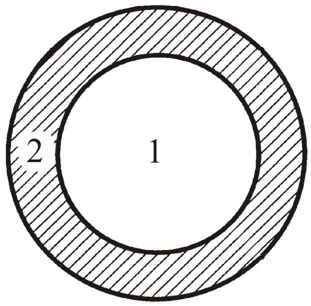


Рис. к тестам №7, №8

7. На рисунке изображено сечение уединенного полого металлического шара. Шар заряжен. В каких областях пространства напряженность электрического поля, создаваемого шаром, равна нулю?

А. Ни в одной Б. Только в 1-й

В. Только во 2-й Г. В 1-й и 2-й

8. На рисунке изображено сечение уединенного полого металлического шара. Шар заряжен. В каких областях пространства потенциал электрического поля, создаваемого шаром, постоянен?

А. Ни в одной Б. Только в 1-й

В. Только во 2-й Г. В 1-й и 2-й

9. Металлический шар радиусом R находится в однородном электрическом поле напряженностью E. Точки A и B находятся внутри шара на диаметре, параллельном линиям напряженности этого поля. Напряженность поля и потенциалы в этих точках …

А. $E_{\text{А}} \quad E_{\text{В}} \quad 0; \quad {}_{\text{А}} \quad {}_{\text{В}}$ Б. $E_{\text{А}} \quad E_{\text{В}} \quad 0; \quad {}_{\text{А}} \quad {}_{\text{В}}$

В. $E_{\text{А}} \quad E_{\text{В}} \quad 0; \quad {}_{\text{А}} \quad {}_{\text{В}}$ Г. $E_{\text{А}} \quad E_{\text{В}} \quad 0; \quad {}_{\text{А}} \quad {}_{\text{В}}$

10. Точечный заряд q находится внутри незаряженной проводящей сферы на расстоянии r от ее центра. Радиус сферы R. Определите потенциал в центре сферы.

А. 0 Б. $q/(4 \quad {}_0 R)$

В. $q/(4 \quad {}_0 r)$ Г. $q/[4 \quad {}_0 (R \quad r)]$

11. Точечный заряд q находится на расстоянии l от центра незаряженного металлического шара радиусом $R \quad l$. Определите потенциал шара.

А. 0 Б. $q/(4 \quad {}_0 R)$

В. $q/(4 \quad {}_0 l)$ Г. $q/[4 \quad {}_0 (R \quad l)]$

12. Точечный заряд q 6 мкКл находится на расстоянии l 10 см от поверхности заземленного металлического шара радиусом R 20 см. Определите заряд шара.

Ответ: __________мкКл

13. Заряженная проводящая сфера радиусом R 10 см находится в поле точечного заряда q 10^{-9} Кл, расположенного на расстоянии l 50 см от центра сферы. Определите потенциал в центре сферы, если ее заряд равен q_0 10^{-10} Кл.

Ответ: __________В

14. Металлический шар радиусом r укреплен на изолирующей подставке и имеет заряд q. Каким станет потенциал шара, если его окружить заземленной сферической оболочкой радиусом R?

А. $q/(4 \quad {}_0 R)$ Б. $q/(4 \quad {}_0 r)$

В. $q/[4 \quad {}_0 (R \quad r)]$ Г. $q(R \quad r)/(4 \quad {}_0 r R)$

15. Напряженность электрического поля между обкладками плоского воздушного конденсатора равна *E*. Емкость конденсатора *C*, расстояние между обкладками *d*. Заряд на обкладках конденсатора равен …

А. $q \quad E C d$ Б. $q \quad \frac{1}{2} E C d$

В. $q \quad E^2 C d$ Г. $q \quad \frac{1}{2} E^2 C d$

16. Напряженность электрического поля между обкладками плоского воздушного конденсатора равна *E*. Емкость конденсатора *C*, расстояние между обкладками *d*. Обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой …

А. $F \quad C E d$ Б. $F \quad \frac{1}{2} C E d$

В. $F \quad C E^2 d$ Г. $F \quad \frac{1}{2} C E^2 d$

17. Между обкладками плоского воздушного конденсатора параллельно его пластинам помещена металлическая пластина толщиной *a*. Размеры пластины совпадают с размерами обкладок, площадь каждой из которых *S*, а расстояние между ними *d*. Емкость получившегося конденсатора …

А. $C \quad {}_0 S/d$ Б. $C \quad {}_0 S/(d \quad a)$

В. $C \quad {}_0 S/a$ Г. $C \quad {}_0 S(d \quad a)/(d\,a)$

18. Между обкладками плоского воздушного конденсатора параллельно его пластинам помещена пластина из изотропного диэлектрика толщиной *a* и проницаемостью . Размеры пластины совпадают с размерами обкладок, площадь каждой из которых равна *S*, а расстояние между ними *d*. Емкость получившегося конденсатора …

А. $C \quad {}_0 S/(d \quad a)$

Б. $C \quad {}_0 S/(\quad d \quad a)$

В. $C \quad {}_0 S/(d \quad a)$

Г. $C \quad {}_0 S/[\quad (d \quad a) \quad a]$

19. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен двумя слоями изотропных диэлектриков равных объемов с проницаемостями $_1$ и $_2$, как показано на рисунке. Площадь каждой обкладки конденсатора *S*, расстояние между ними *d*. Емкость конденсатора равна …

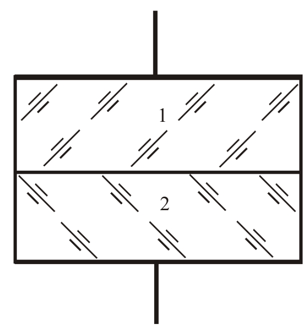


Рис. к тесту №19

А. $C \quad {}_0 \, {}_1 \, {}_2 S/d$

Б. $C \quad {}_0 ({}_1 \quad {}_2) S/(2\,d)$

В. $C \quad {}_0 \, {}_1 \, {}_2 S/[2\,d({}_1 \quad {}_2)]$

Г. $C \quad 2 \, {}_0 \, {}_1 \, {}_2 S/[d({}_1 \quad {}_2)]$

20. Зазор между обкладками плоского воздушного конденсатора емкостью *C* заполнили двумя слоями изотропных диэлектриков равных объемов с проницаемостями $_1 \quad 2$ и $_2 \quad 4$, как показано на рисунке. Во сколько раз изменилась емкость конденсатора?

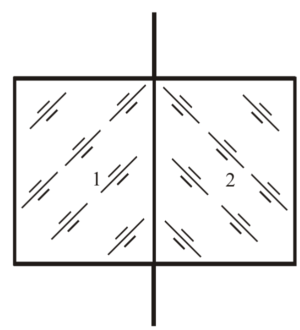


Рис. к тесту №20

Ответ: __________

§19. Энергия электрического поля

Энергия взаимодействия точечных зарядов

Полученное в §15 выражение (15.14) можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию двух точечных зарядов, находящихся в вакууме. Очевидно, если заряды q_1 и q_2 находятся в изотропном диэлектрике с проницаемостью на расстоянии $r_{1,2}$ друг от друга, энергия их взаимодействия

$$W_{1,2} \quad \frac{q_1\, q_2}{4 \qquad {}_0\, r_{1,2}}. \tag{19.1}$$

Если воспользоваться выражением (15.16) для потенциала точечного заряда, то формулу (19.1) можно переписать по-другому:

$$W_{1,2} \quad q_1 \quad {}_1 \quad q_2 \quad {}_2 \quad {}^1\!/_2 \;{}_{i\quad 1}^{\;\;2}\, q_i \quad {}_i, \tag{19.2}$$

где ${}_1$ – потенциал поля в точке расположения заряда q_1; ${}_2$ – потенциал в точке расположения заряда q_2.

Рассмотрим систему, состоящую из N точечных зарядов q_i (i 1, 2, 3, …, N), расстояние между любой парой которых равно $r_{i,j}$. Энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W \quad W_{1,2} \quad W_{1,3} \quad \ldots \quad W_{1,N} \quad W_{2,3} \quad W_{2,4} \quad \ldots \quad W_{2,N} \quad \ldots \quad {}^1\!/_2 \;{}_{i\quad 1}^{\;\;N}\;{}_{\substack{j \quad 1\\ j \quad i}}^{\;\;N} W_{i,j}. \tag{19.3}$$

В формуле (19.3) суммирование производится по индексам i и j; при этом оба индекса «пробегают» все значения от 1 до N, причем слагаемые, которым соответствуют одинаковые значения индексов i и j, не учитываются.

С учетом (19.2) выражению (19.3) можно придать вид

$$W \quad {}^1\!/_2 \;{}_{i\quad 1}^{\;\;N}\, q_i \quad {}_i, \tag{19.4}$$

где ${}_i$ – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в точке, где расположен этот заряд.

Энергия проводника

Избыточные заряды распределяются по поверхности проводника, а внутри отсутствуют (см. §18). Поэтому заряд q, находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов q_i, энергия взаимодействия которых

$$W \quad {}^1\!/_2 \;{}_{i\quad 1}^{\;\;N} \quad q_i \quad {}_i,$$

где ${}_i$ – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в точке на поверхности проводника, где расположен этот заряд. Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна, то

$$W \quad {}^1\!/_2 \quad {}_{i\quad 1}^{\;\;N} \quad q_i \quad {}^1\!/_2\, q \quad ,$$

или с учетом (18.5)

$$W \quad \frac{q}{2} \quad \frac{q^2}{2\,C} \quad \frac{C \quad ^2}{2}, \tag{19.5}$$

где – потенциал проводника.

Энергия конденсатора

Каждая из обкладок конденсатора представляет собой заряженный проводник. Если заряд (q) находится на обкладке с потенциалом ${}_1$, а заряд (q) – на обкладке с потенциалом ${}_2$, то энергия такой системы

$$W = \tfrac{1}{2}(+q)\varphi_1 + \tfrac{1}{2}(-q)\varphi_2 = \tfrac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

или с учетом (18.7)

$$W = \frac{q\,\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\,\Delta\varphi^2}{2}. \qquad (19.6)$$

Энергия электрического поля

Применим формулу (19.6) к расчету энергии плоского конденсатора, обкладки которого имеют площадь S, а зазор шириной d полностью заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью ε:

$$W = \frac{C\,\Delta\varphi^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}E^2 d^2, \qquad (19.7)$$

где использовано выражение для емкости конденсатора (18.8), а разность потенциалов представлена в виде

$$\Delta\varphi = E\,d.$$

Запишем соотношение (19.7) по-другому:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}S\,d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V = w\,V, \qquad (19.8)$$

где $V = S\,d$ – объем, занимаемый электрическим полем (напомним, что у конденсатора поле сосредоточено только между обкладками).

Величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad (19.9)$$

равная энергии поля, сосредоточенной в единице объема, называется *объемной плотностью энергии электрического поля*.

В общем случае неоднородного поля выражение для объемной плотности энергии электрического поля совпадает с (19.9). Энергию, заключенную в некотором объеме V, можно найти, вычислив интеграл

$$W = \int_V w\,dV. \qquad (19.10)$$

В качестве примера найдем энергию поля заряженной сферы радиусом R, помещенной в безграничный изотропный диэлектрик с проницаемостью ε.

Разобьем окружающее сферу пространство на концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. В нем заключена энергия

$$dW = w\,dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr,$$

где

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

– напряженность поля в диэлектрике.

Энергия электрического поля во всем объеме диэлектрика

$$W = \int dW = \int_R^\infty \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

или с учетом (18.6)

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Краткие выводы

1. Энергия взаимодействия

а) двух точечных зарядов:

$$W_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{1,2}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i \varphi_i;$$

б) N точечных зарядов:

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} W_{i,j} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{i,j}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в точке, где расположен этот заряд.

2. Энергия проводника

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

3. Энергия конденсатора

$$W = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$

4. Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

5. Энергия электрического поля, заключенная в объеме V,

$$W = \int_V w\, dV.$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Имеется система точечных зарядов. Что произойдет с энергией системы, если изменить знаки всех зарядов на противоположные?

2. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы разноименные точечные заряды q_1 и q_2, расположенные первоначально на расстоянии r, разнести на бесконечное расстояние друг от друга?

3. Конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено жидким диэлектриком с проницаемостью ε, заряжен и отключен от источника. Во сколько раз изменится энергия конденсатора, если из него вытечет диэлектрик?

4. Конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено жидким диэлектриком с проницаемостью ε, подключен к источнику постоянного напряжения. Во сколько раз изменится энергия конденсатора, если из него вытечет диэлектрик?

5. Заряженный плоский конденсатор подключили параллельно к такому же, незаряженному. Во сколько раз изменилась энергия первого конденсатора?

6. В однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$ расположена незаряженная металлическая пластина толщиной h и площадью S. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить пластину из поля?

7. Получите выражение для объемной плотности энергии в изотропном однородном диэлектрике через электрическое смещение.

<u>Задачи</u>

1. В вершинах квадрата со стороной a закреплены четыре одинаковых точечных заряда. Во сколько раз изменится энергия взаимодействия зарядов, если эти заряды расположить в вершинах правильного тетраэдра с длиной ребра, равной a? Среда вакуум.

Решение

Энергия системы N неподвижных точечных зарядов может быть вычислена как сумма энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W \quad \tfrac{1}{2} \overset{N}{\underset{i\ \ 1}{\ }} \overset{N}{\underset{\substack{j\ \ 1\\ j\ \ i}}{\ }} W_{i,j}, \tag{1}$$

где

$$W_{i,j} \quad \frac{q_i\, q_j}{4 \quad {}_0\, r_{i,j}}, \tag{2}$$

или по формуле

$$W \quad \tfrac{1}{2} \overset{N}{\underset{i\ \ 1}{\ }} q_i \quad {}_i, \tag{3}$$

где $\ {}_i$ – потенциал электрического поля в точке, где расположен заряд q_i, создаваемый всеми (N 1) зарядами, за исключением заряда q_i.

Вычислим энергию взаимодействия зарядов, расположенных в вершинах квадрата, например по формулам (1) (2), а в вершинах тетраэдра по формуле (3).

В первом случае (рис. 1) энергия взаимодействия соседних зарядов

$$W_1 \quad \frac{q^2}{4 \quad {}_0\, a},$$

а зарядов, расположенных на концах диагоналей квадрата,

$$W_1 \quad \frac{q^2}{4 \quad {}_0 \sqrt{2}\, a}.$$

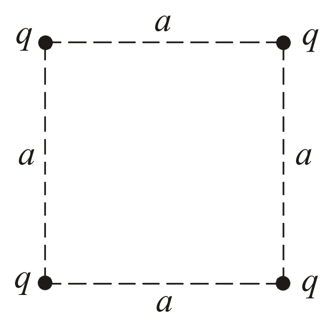


Рис. 1 к задаче №1

Следовательно, энергия взаимодействия зарядов, расположенных в вершинах квадрата,

$$W_1 \quad \tfrac{1}{2}(8\,W_1 \quad 4\,W_1) \quad 4\frac{q^2}{4 \quad {}_0\, a} \quad 2\frac{q^2}{4 \quad {}_0 \sqrt{2}\, a} \quad (4 \quad \sqrt{2})\frac{q^2}{4 \quad {}_0\, a}.$$

Рассмотрим теперь систему зарядов, расположенных в вершинах тетраэдра (рис. 2).

Поскольку все заряды одинаковы и расстояния между любой парой из них также одинаковы, то потенциалы в точках расположения любого из зарядов равны:

$$3\frac{q}{4 \quad {}_0\, a}.$$

Следовательно, энергия системы зарядов

$$W_2 \quad \tfrac{1}{2} \overset{4}{\underset{i\ \ 1}{\ }} q \quad 2q \quad 6\frac{q^2}{4 \quad {}_0\, a}.$$

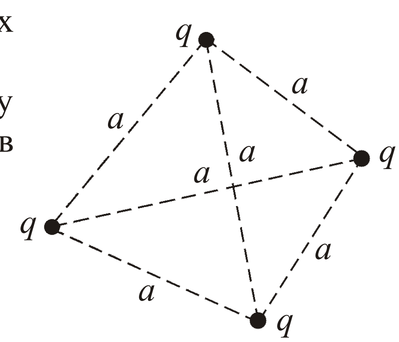


Рис. 2 к задаче №1

Поскольку $W_2 \quad W_1$, то энергия взаимодействия системы зарядов, расположенных в вершинах правильного тетраэдра, в

$$\frac{W_2}{W_1} \quad \frac{6}{4 \quad \sqrt{2}} \quad 1{,}11$$

раз больше энергия взаимодействия этих зарядов, расположенных в вершинах квадрата.

Ответ: увеличится в 1,11 раза.

2. Заряд Q равномерно распределен по поверхности сферы радиусом R. На расстоянии $l \quad R$ от центра сферы находится конец тонкого стержня длиной L, расположенного вдоль продолжения радиуса сферы. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью . Определите взаимную потенциальную энергию сферы и стержня. Среда вакуум.

Решение

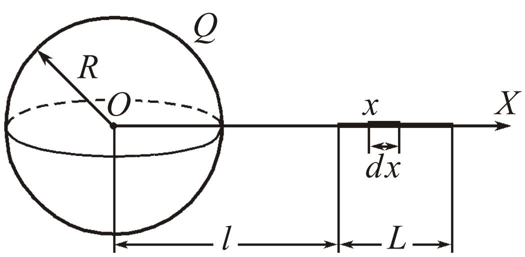


Рис. к задаче №2

Из определения потенциала электрического поля

$$\frac{W}{q}$$

следует, что заряд q, находящийся в электрическом поле, потенциал которого в точке расположения заряда равен , обладает энергией

$$W \quad q \quad .$$

Мысленно разобьем стержень на бесконечно малые элементы длиной dx с элементарными зарядами $dq \qquad dx$, которые будем считать точечными.

Каждый такой заряд dq будет находиться в электрическом поле, создаваемом сферой. Поскольку потенциал электрического поля заряженной сферы на расстоянии x от ее центра равен

$$\frac{Q}{4 \quad {}_0 x},$$

то энергия заряда dq

$$dW \quad dq \qquad dx \frac{Q}{4 \quad {}_0 x}.$$

Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия сферы и стержня

$$W \qquad dW \quad \int_l^{l \quad L} \frac{Q}{4 \quad {}_0 x} dx \quad \frac{Q}{4 \quad {}_0} \ln x \Big|_l^{l \quad L} \quad \frac{Q}{4 \quad {}_0} \ln \frac{l \quad L}{l} \quad .$$

Ответ: $W \quad \frac{Q}{4 \quad {}_0} \ln \frac{l \quad L}{l} \quad .$

3. Тонкий стержень длиной L ориентирован перпендикулярно к безграничной проводящей плоскости и не доходит до этой плоскости на расстояние l. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью . Определите энергию взаимодействия этого стержня с зарядами, индуцированными на плоскости.

Решение

Для решения задачи воспользуемся методом зарядов-изображений, поместив стержень-изображение, заряженный с линейной плотностью ( ), зеркально нашему стержню (см. §18; задача №7).

Мысленно разобьем стержень-изображение на бесконечно малые элементы длиной dx с элементарными зарядами $dq = -\lambda\, dx$, которые будем считать точечными. Каждый такой заряд dq будет находиться в электрическом поле, создаваемом стержнем.

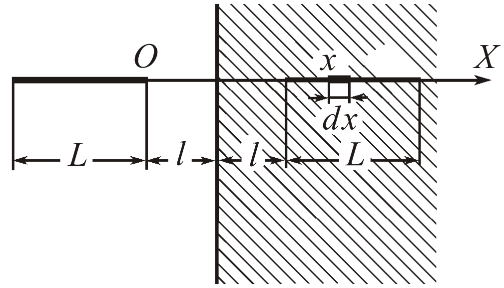


Рис. к задаче №3

Потенциал электрического поля на оси равномерно заряженного стержня на расстоянии x от его конца равен (см. §15; задача №5)

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{L + x}{x}.$$

Следовательно, энергия заряда dq (см. решение задачи №2)

$$dW = dq\,\varphi = -\lambda\, dx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{L + x}{x},$$

а энергия взаимодействия стержня и стержня-изображения

$$W = \int dW = -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{2l}^{2l+L} \ln \frac{L + x}{x}\, dx = -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{2l}^{2l+L} [\ln (L + x) - \ln x]\, dx;$$

$$W = -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0} \left[(L + l) \ln \frac{2(L + l)}{L + 2l} - l \ln \frac{L + 2l}{2l} \right],$$

где использовано значение табличного интеграла

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x.$$

Отметим, что решение задачи через работу сил электрического поля по переносу стержня из начального положения на бесконечность $W = W_\infty - A$ (где $W_\infty = 0$) приводит к неверному результату. Это связано с тем, что из-за перемещения стержня происходит изменение распределения индуцированных зарядов и изменение энергии их взаимодействия. Следует также помнить, что электрическое поле этих зарядов не консервативно, так как будет зависеть от времени.

Ответ: $W = -\dfrac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0} \left[(L + l) \ln \dfrac{2(L + l)}{L + 2l} - l \ln \dfrac{L + 2l}{2l} \right].$

4. Конденсатор емкостью C_1, заряженный до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$, и конденсатор емкостью C_2, заряженный до разности потенциалов $\Delta\varphi_2$, соединили одноименно заряженными обкладками. Определите изменение энергии этой системы к моменту установления равновесия.

Решение

После соединения конденсаторов разности потенциалов между их обкладками станут одинаковыми. При этом часть заряда с обкладок одного конденсатора перетечет на обкладки другого.

Энергии конденсаторов до соединения были равны соответственно

$$W_1 = \frac{C_1 \Delta\varphi_1^2}{2}; \quad W_2 = \frac{C_2 \Delta\varphi_2^2}{2},$$

а после соединения

$$W_1 \quad \frac{C_1 \qquad ^2}{2}; \qquad W_2 \quad \frac{C_2 \qquad ^2}{2},$$

где установившаяся разность потенциалов между обкладками конденсаторов.

На конденсаторах до их соединения находились заряды

$$q_1 \quad C_1 \quad _1; \qquad q_2 \quad C_2 \quad _2, \tag{1}$$

а после соединения

$$q_1 \quad C_1 \quad ; \qquad q_2 \quad C_2 \quad . \tag{2}$$

Поскольку конденсаторы соединили одноименно заряженными обкладками, то на основании закона сохранения заряда

$$q_1 \quad q_2 \quad q_1 \quad q_2.$$

Отсюда с учетом (1) (2) получим:

$$C_1 \qquad C_2 \qquad C_1 \quad _1 \quad C_2 \quad _2; \qquad \frac{C_1 \quad _1 \quad C_2 \quad _2}{C_1 \quad C_2}.$$

Следовательно, к моменту установления равновесия энергии конденсаторов стали равны

$$W_1 \quad \frac{C_1\,(C_1 \quad _1 \quad C_2 \quad _2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)^2}; \qquad W_2 \quad \frac{C_2\,(C_1 \quad _1 \quad C_2 \quad _2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)^2},$$

а энергия системы изменилась на

$$W \quad (W_1 \quad W_2) \quad (W_1 \quad W_2) \quad \frac{(C_1 \quad _1 \quad C_2 \quad _2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)} \quad \frac{C_1 \quad _1^2 \quad C_2 \quad _2^2}{2} \qquad \frac{C_1\,C_2\,(\quad _1 \qquad _2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)}.$$

Ответ: $W \qquad \dfrac{C_1\,C_2\,(\quad _1 \qquad _2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)}.$

5. Площадь каждой из пластин плоского воздушного конденсатора равна S. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между обкладками конденсатора от d_1 до d_2, если при этом поддерживать неизменным:

1) заряд конденсатора, равный q;

2) напряжение на конденсаторе, равное U?

Решение

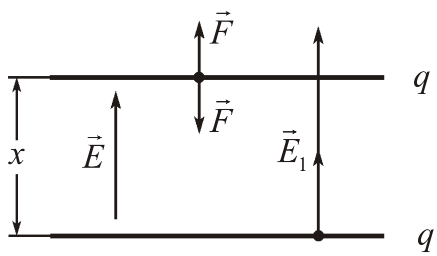


Рис. к задаче №5

При увеличении расстояния между обкладками конденсатора от d_1 до d_2 его емкость уменьшится от

$$C \quad \frac{_0 S}{d_1}$$

до

$$C \quad \frac{_0 S}{d_2}.$$

В первом случае (при неизменном заряде конденсатора) изменение энергии конденсатора

$$W_1 \quad \frac{q^2}{2\,C} \quad \frac{q^2}{2\,C} \quad \frac{q^2 d_2}{2 \quad _0 S} \quad \frac{q^2 d_1}{2 \quad _0 S} \quad \frac{q^2 (d_2 \quad d_1)}{2 \quad _0 S} \qquad 0$$

равно работе внешних сил по увеличению расстояния между его обкладками:

$$A_1 \qquad W_1 \quad \frac{q^2 (d_2 \quad d_1)}{2 \quad _0 S}.$$

Во втором случае (при неизменном напряжении на конденсаторе) изменение энергии конденсатора

$$W_2 \quad \frac{C\,U^2}{2} \quad \frac{C\,U^2}{2} \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2\,d_2} \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2\,d_1} \qquad \frac{{}_0 S\,U^2(d_2 \quad d_1)}{2\,d_1\,d_2} \quad 0$$

равно сумме работ внешних сил и сторонних сил источника, поддерживающего постоянное напряжение на конденсаторе:

$$A_2 \quad A_{\text{ист}} \qquad W_2 \qquad \frac{{}_0 S\,U^2(d_2 \quad d_1)}{2\,d_1\,d_2}.$$

Поскольку работа источника будет рассматриваться в следующем параграфе, то здесь работу внешних сил по увеличению расстояния между обкладками конденсатора будем искать непосредственно по определению работы силы.

При расстоянии между обкладками конденсатора, равном x, емкость конденсатора, напряженность электрического поля между его обкладками и заряд конденсатора будут равны соответственно

$$C_x \quad \frac{{}_0 S}{x}; \qquad E \quad \frac{U}{x}; \qquad q \quad C_x U \quad \frac{{}_0 S}{x}U.$$

Так как напряженность поля, создаваемого одной обкладкой,

$$E_1 \quad \tfrac{1}{2}E,$$

то со стороны одной обкладки на другую будет действовать сила

$$F \quad |q|\,E_1 \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2\,x^2}.$$

Следовательно, работа A_2 внешней силы $\vec{F} \qquad \vec{F}$ по увеличению расстояния между обкладками конденсатора от d_1 до d_2

$$A_2 \quad \int_{d_1}^{d_2} F\,dx \quad \int_{d_1}^{d_2} \frac{{}_0 S\,U^2}{2\,x^2}\,dx \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2}\int_{d_1}^{d_2}\frac{dx}{x^2} \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2} \quad \frac{1}{x}\Bigg|_{d_1}^{d_2} \quad \frac{{}_0 S\,U^2}{2}\,\frac{d_2 \quad d_1}{d_1\,d_2}.$$

Ответ: 1) $A_1 \quad \dfrac{q^2(d_2 \quad d_1)}{2 \quad {}_0 S}$; 2) $A_2 \quad \dfrac{{}_0 S\,U^2}{2}\,\dfrac{d_2 \quad d_1}{d_1\,d_2}$.

6. Емкость плоского воздушного конденсатора равна C. Внутрь конденсатора параллельно обкладкам поместили пластину из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью , толщина которой в два раза меньше ширины зазора между обкладками. Затем конденсатор зарядили до напряжения U, отключили от источника и медленно извлекли пластину из зазора. Определите работу, затраченную на извлечение пластины.

Решение

Рассмотрим конденсатор, между обкладками которого находится пластина из диэлектрика с проницаемостью .

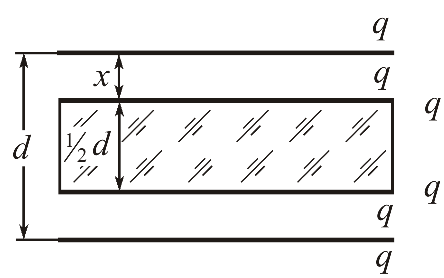


Рис. к задаче №6

Поместим на обкладки конденсатора равные по величине разноименные заряды (q), а на поверхности диэлектрической пластины тонкие металлические листы такой же площади, что и пластина. Под действием электрического поля зарядов обкладок на поверхностях металлических листов будут индуцированы такие же по величине разноименные заряды. При этом обкладка с зарядом (q) и ближняя к ней поверхность металлического листа будут представлять собой конденсатор емкостью

$$C_1 \quad \frac{{}_0 S}{x}$$

(где x расстояние между данной обкладкой и диэлектрической пластиной); вторая поверхность первого листа и ближняя к ней поверхность второго листа конденсатор емкостью

$$C_2 \quad \frac{{}_0 S}{\tfrac{1}{2} d},$$

а обкладка с зарядом (q) и оставшаяся поверхность второго листа конденсатор емкостью

$$C_3 \quad \frac{{}_0 S}{d \quad \tfrac{1}{2} d \quad x} \quad \frac{{}_0 S}{\tfrac{1}{2} d \quad x}.$$

При этом конденсаторы C_1, C_2 и C_3 будут соединены последовательно. Емкость такого соединения

$$\frac{1}{C} \quad \frac{1}{C_1} \quad \frac{1}{C_2} \quad \frac{1}{C_3} \quad \frac{x}{{}_0 S} \quad \frac{d}{2 \quad {}_0 S} \quad \frac{d \quad 2x}{2 \ {}_0 S} \quad \frac{d(\quad 1)}{2 \quad {}_0 S}; \quad C \quad \frac{2 \quad {}_0 S}{d(\quad 1)} \quad \frac{2}{\quad 1} C,$$

где

$$C \quad \frac{{}_0 S}{d}$$

емкость конденсатора без диэлектрической пластины.

Поскольку конденсатор емкостью C был заряжен и отключен от источника, то заряд на его обкладках

$$q \quad C U$$

после извлечения диэлектрика не изменится.

Следовательно, энергия конденсатора емкостью C (начальная энергия)

$$W \quad \frac{q^2}{2C} \quad \frac{C U^2}{2} \quad \frac{\quad}{\quad 1} C U^2,$$

а конденсатора емкостью C (конечная энергия)

$$W \quad \frac{q^2}{2C} \quad \frac{C^{2} U^2}{2C} \quad \frac{2 \quad ^2}{(\quad 1)^2} C U^2.$$

На основании теоремы об изменении энергии работа, затраченная на извлечение пластины,

$$A \quad W \quad W \quad \frac{2 \quad ^2}{(\quad 1)^2} C U^2 \quad \frac{\quad}{\quad 1} C U^2 \quad \frac{\quad}{(\quad 1)^2} C U^2.$$

Ответ: $A \quad \frac{\quad}{(\quad 1)^2} C U^2.$

7. Две концентрические тонкие металлические оболочки радиусами R_1 и $R_2 \quad R_1$ расположены в вакууме. Заряд внутренней оболочки q_1, внешней q_2. Определите:

1) собственную энергию каждой оболочки;
2) энергию взаимодействия оболочек;
3) полную энергию системы.

Решение

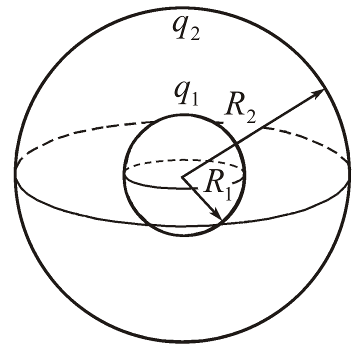


Рис. к задаче №7

Рассмотрим проводящую сферу радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд q. Энергию такой сферы можно найти, воспользовавшись одной из формул:

$$W \quad \frac{q}{2} \quad \frac{q^2}{2C} \quad \frac{C \quad ^2}{2},$$

где

$$\frac{q}{4 \quad _0 R}$$

потенциал на поверхности сферы (то есть во всех точках, где имеется заряд);

$$C \quad 4 \quad _0 R$$

электроемкость уединенной сферы (см. (18.6)).

Таким образом, собственная энергия каждой отдельно взятой оболочки

$$W_1 \quad \frac{q_1^2}{8 \quad _0 R_1}; \qquad W_2 \quad \frac{q_2^2}{8 \quad _0 R_2}.$$

Энергия взаимодействия оболочек будет равна энергии любой из оболочек в поле другой оболочки:

$$W_{1,2} \quad q_1 \quad _{2,1} \quad q_2 \quad _{1,2},$$

где $_{2,1}$, $_{1,2}$ – потенциалы электрического поля, создаваемые соответственно внешней и внутренней оболочками, в точках, где расположены заряды q_1 и q_2:

$$_{2,1} \quad \frac{q_2}{4 \quad _0 R_2}; \qquad _{1,2} \quad \frac{q_1}{4 \quad _0 R_2}.$$

Следовательно,

$$W_{1,2} \quad \frac{q_1 q_2}{4 \quad _0 R_2}.$$

Наконец, полная энергия системы

$$W \quad \tfrac{1}{2} \sum_{i \quad 1}^{2} q_i \quad _i \quad \tfrac{1}{2}(q_1 \quad _1 \quad q_2 \quad _2),$$

где $_1$, $_2$ – потенциалы в точках, где расположены заряды q_1 и q_2:

$$_1 \quad \frac{q_1}{4 \quad _0 R_1} \quad \frac{q_2}{4 \quad _0 R_2}; \qquad _2 \quad \frac{q_1}{4 \quad _0 R_2} \quad \frac{q_2}{4 \quad _0 R_2}.$$

Следовательно,

$$W \quad \frac{q_1}{2} \quad \frac{q_1}{4 \quad _0 R_1} \quad \frac{q_2}{4 \quad _0 R_2} \quad \frac{q_2}{2} \quad \frac{q_1}{4 \quad _0 R_2} \quad \frac{q_2}{4 \quad _0 R_2} \quad \frac{1}{8 \quad _0} \quad \frac{q_1^2}{R_1} \quad \frac{2 q_1 q_2}{R_2} \quad \frac{q_2^2}{R_2}.$$

Очевидно, что полная энергия системы равна сумме энергий оболочек и энергии их взаимодействия:

$$W \quad W_1 \quad W_2 \quad W_{1,2} \quad \frac{1}{8 \quad _0} \quad \frac{q_1^2}{R_1} \quad \frac{2 q_1 q_2}{R_2} \quad \frac{q_2^2}{R_2}.$$

Ответ: 1) $W_1 \quad \frac{q_1^2}{8 \quad _0 R_1}$; $W_2 \quad \frac{q_2^2}{8 \quad _0 R_2}$; 2) $W_{1,2} \quad \frac{q_1 q_2}{4 \quad _0 R_2}$;

3) $W \quad \frac{1}{8 \quad _0} \quad \frac{q_1^2}{R_1} \quad \frac{2 q_1 q_2}{R_2} \quad \frac{q_2^2}{R_2}$.

8. Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите:
1) энергию электрического поля, запасенную внутри шара;
2) энергию электрического поля во внешнем пространстве.

Решение

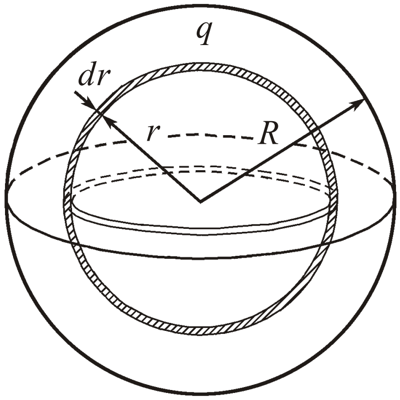


Рис. к задаче №8

Мысленно разобьем внутренний объем шара на бесконечно тонкие концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$.

Напряженность электрического поля на расстоянии $r \le R$ от центра равномерно заряженного шара (см. формулу (16.17))

$$E_1 = \frac{q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

В шаровом слое объемом dV запасена энергия электрического поля

$$dW_1 = w_1\,dV,$$

где

$$w_1 = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}$$

– объемная плотность энергии. Следовательно,

$$dW_1 = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6} r^4 dr.$$

Энергия электрического поля, запасенная внутри шара,

$$W_1 = \int dW_1 = \int_0^R \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6} r^4 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}.$$

На расстоянии $r \ge R$ от центра равномерно заряженного шара напряженность электрического поля

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Следовательно, энергия, запасенная в шаровом слое объемом $dV = 4\pi r^2 dr$, находящемся вне шара,

$$dW_2 = w_2\,dV = \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr,$$

а энергия электрического поля во всем внешнем пространстве

$$W_2 = \int dW_2 = \int_R^\infty \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\left.\frac{1}{r}\right|_R^\infty\right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ответ: 1) $W_1 = \dfrac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$; 2) $W_2 = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

9. Точечный заряд q находится в центре шарового слоя из неоднородного изотропного диэлектрика с проницаемостью, изменяющейся по закону: $\varepsilon = \alpha/r$, где α – положительная постоянная; r – расстояние от центра слоя. Внутренний радиус слоя R_1, внешний – R_2. Определите энергию электрического поля, заключенную в слое.

Решение

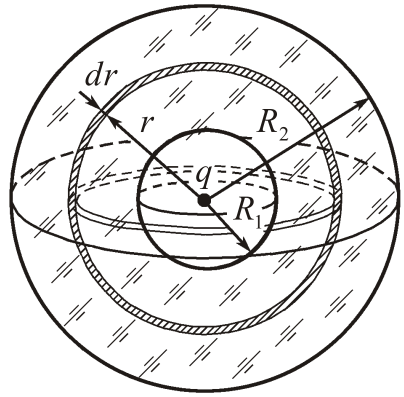


Рис. к задаче №9

Мысленно разобьем диэлектрический слой на бесконечно тонкие концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $dV \quad 4 \quad r^2 dr$.

Поскольку поле точечного заряда будет радиально-симметричным, то однородный изотропный диэлектрик ослабит поле в раз (см. §17; задача №5), и напряженность электрического поля на расстоянии r ($R_1 \quad r \quad R_2$) от заряда q будет равна

$$E \quad \frac{q}{4 \qquad {}_0 r^2}.$$

В шаровом слое объемом dV запасена энергия электрического поля

$$dW \quad w\,dV,$$

где

$$w \quad \frac{{}_0 E^2}{2}$$

объемная плотность энергии. Следовательно,

$$dW \quad \frac{{}_0 E^2}{2} 4 \quad r^2 dr \quad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0 r^2} dr,$$

или с учетом условия задачи ($/r$)

$$dW \quad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0 r} dr.$$

Энергия электрического поля, запасенная внутри всего диэлектрического слоя,

$$W \qquad dW \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{8 \qquad {}_0 r} dr \quad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \quad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0} \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} \quad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ответ: $W \quad \dfrac{q^2}{8 \qquad {}_0} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$.

10. Определите энергию сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и $R_2 \quad R_1$, который заполнен неоднородным изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: $/r$, где положительная постоянная; r расстояние от центра конденсатора. Заряд конденсатора равен q.

Решение

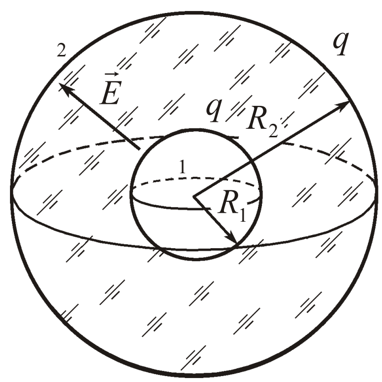


Рис. к задаче №10

Поскольку заряженные сферические поверхности создают электрические поля только снаружи, то между обкладками конденсатора будет поле, создаваемое только сферой радиусом R_1.

Равномерно заряженная сфера создаст вокруг себя радиально-симметричное электрическое поле. Так как при этом однородный изотропный диэлектрик ослабляет поле в раз (см. §17; задача №5), то величина напряженности электрического поля на расстоянии r ($R_1 \quad r \quad R_2$) от геометрического центра конденсатора равна

$$E \qquad \frac{q}{4 \qquad {}_0\, r^2},$$

или с учетом условия задачи ($\quad /r$)

$$E \qquad \frac{q}{4 \qquad {}_0\, r}.$$

Поскольку напряженность поля между обкладками конденсатора в данном случае зависит только от расстояния r от центра конденсатора, то разность потенциалов между обкладками конденсатора (см. §18; задача №9)

$$\quad{}_{R_1}^{R_2} E\,dr \qquad {}_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4 \qquad {}_0\, r}\,dr \qquad \frac{q}{4 \qquad {}_0} \ln r\Big|_{R_1}^{R_2} \qquad \frac{q}{4 \qquad {}_0} \ln\frac{R_2}{R_1},$$

его емкость

$$C \qquad \frac{q}{\quad} \qquad \frac{4 \qquad {}_0}{\ln(R_2/R_1)},$$

а энергия

$$W \qquad \frac{q^2}{2\,C} \qquad \frac{q^2}{8 \qquad {}_0} \ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Ответ: $W \qquad \dfrac{q^2}{8 \qquad {}_0} \ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

Задачи для самостоятельного решения

19.1. В вершинах куба закреплены одинаковые точечные заряды величиной q каждый. Длина ребра куба a. Определите энергию взаимодействия этих зарядов в вакууме.

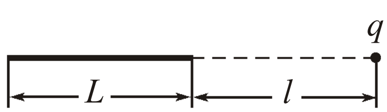


Рис. к задаче №19.2

19.2. Точечный заряд q расположен на оси стержня на расстоянии l от одного из его концов. Определите взаимную потенциальную энергию этого заряда и стержня, если длина стержня $L \quad l$ и он равномерно заряжен с линейной плотностью . Среда вакуум.

19.3. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Определите:
1) энергию взаимодействия заряда q с зарядами, индуцированными на плоскости;
2) минимальную работу сил поля, действующих на заряд q при его удалении на очень большое расстояние от плоскости.

19.4. Конденсатор емкостью C_1 с зарядом q_1 и конденсатор емкостью C_2 с зарядом q_2 соединили разноименно заряженными обкладками. Определите суммарную энергию конденсаторов к моменту установления равновесия.

19.5. Пространство между обкладками конденсатора емкостью C полностью занимает пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Какую минимальную работу надо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора, если при этом поддерживать неизменным:
1) заряд конденсатора, равный q;
2) напряжение на конденсаторе, равное U?

19.6. Емкость плоского воздушного конденсатора равна C. Внутрь конденсатора параллельно обкладкам поместили металлическую пластину, толщина которой в два раза меньше ширины зазора между обкладками. Затем конденсатор зарядили до напряжения U, отключили от источника и медленно извлекли пластину из зазора. Определите работу, затраченную на извлечение пластины.

19.7. Заряд q равномерно распределен по поверхности сферической оболочки радиусом R_1. Оболочку расширили до радиуса R_2. Определите работу, совершенную при этом силами электрического поля.

19.8. Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью . Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, определите энергию электрического поля во всем пространстве.

19.9. Проводящая сфера радиусом R_1 покрыта слоем однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью . Внешний радиус слоя R_2. Сфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью . Определите энергию электрического поля во всем пространстве.

19.10. Определите энергию цилиндрического конденсатора длиной L с радиусами обкладок R_1 и R_2 R_1, который заполнен неоднородным изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону: $/r$, где   положительная постоянная; r расстояние от оси симметрии конденсатора. Длина конденсатора много больше зазора между его обкладками. Заряд конденсатора равен q.

<u>Тесты</u>

1. Два точечных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять заряды местами?

А. $A_{\min}\quad 0$ Б. $A_{\min}\quad q_1 q_2/(4\quad {}_0 r)$

В. $A_{\min}\quad\quad q_1 q_2/(4\quad {}_0 r)$ Г. $A_{\min}\quad q_1 q_2/(4\quad {}_0 r^2)$

2. Одинаковые точечные заряды q закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной a. Энергия взаимодействия зарядов равна …

А. $W\quad q^2/(4\quad {}_0 a^2)$ Б. $W\quad q^2/(4\quad {}_0 a)$

В. $W\quad 3q^2/(4\quad {}_0 a)$ Г. $W\quad 3q^2/(4\quad {}_0 a^2)$

3. Три одинаковых заряда расположены вдоль одной прямой на расстояниях a друг от друга. Во сколько раз изменится энергия системы, если эти заряды расположить в вершинах правильного треугольника со стороной a?

А. Увеличится в 1,2 раза Б. Уменьшится в 1,2 раза

В. Увеличится в 3 раза Г. Уменьшится в 3 раза

4. В вершинах квадрата закреплены четыре одинаковых точечных заряда. Во сколько раз уменьшится энергия системы, если один из зарядов удалить на бесконечность?

Ответ: __________

5. Металлический шар радиусом R имеет заряд q. Энергия электрического поля этого шара равна …

А. $W\quad q^2/(4\quad {}_0 R)$ Б. $W\quad q^2/(8\quad {}_0 R)$

В. $W\quad q^2/(4\quad {}_0 R^2)$ Г. $W\quad q^2/(8\quad {}_0 R^2)$

6. Проводящая сфера радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью . Энергия взаимодействия зарядов, находящихся на поверхности сферы, равна …

А. $W \quad 2 \quad {}^{2}R^{3}/ \;{}_{0}$ Б. $W \quad 4 \quad {}^{2}R^{3}/ \;{}_{0}$

В. $W \quad 8 \quad {}^{2}R^{3}/ \;{}_{0}$ Г. $W \quad 16 \quad {}^{2}R^{3}/ \;{}_{0}$

7. Во сколько раз изменится энергия равномерно заряженной сферы, если ее радиус уменьшить в два раза?

А. Увеличится в 2 раза Б. Уменьшится в 2 раза

В. Увеличится в 4 раза Г. Уменьшится в 4 раза

8. Какую минимальную работу против сил электрического поля нужно совершить, чтобы собрать каплю ртути радиусом R и зарядом q из N одинаковых капель?

А. $A_{\min} \quad N q^{2}/(4 \quad {}_{0}R)$ Б. $A_{\min} \quad N^{\;1/3} q^{2}/(8 \quad {}_{0}R)$

В. $A_{\min} \quad N^{2/3} q^{2}/(4 \quad {}_{0}R)$ Г. $A_{\min} \quad (1 \quad N^{\;2/3})\, q^{2}/(8 \quad {}_{0}R)$

9. Заряженный и отключенный от источника плоский воздушный конденсатор емкостью $C \quad 10^{-9}$ Ф имеет на обкладках заряд $q \quad 10^{-6}$ Кл. Какое количество теплоты выделится, если обкладки конденсатора соединить проводником?

Ответ: __________мкДж

10. Между обкладок заряженного и отключенного от источника плоского воздушного конденсатора поместили диэлектрическую пластину с проницаемостью , которая полностью заполнила весь зазор. Во сколько раз изменилась энергия конденсатора?

А. Не изменилась Б. Уменьшилась в раз

В. Увеличилась в раз Г. Увеличилась в ^{2} раз

11. Между обкладок плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, поместили диэлектрическую пластину с проницаемостью , которая полностью заполнила весь зазор. Во сколько раз изменилась энергия конденсатора?

А. Не изменилась Б. Уменьшилась в раз

В. Увеличилась в раз Г. Увеличилась в ^{2} раз

12. Плоский конденсатор заряжен и отключен от источника. Пространство между обкладками конденсатора заполнено твердым диэлектриком с проницаемостью 3. Во сколько раз изменится энергия конденсатора, если расстояние между его обкладками увеличить в два раза?

А. Уменьшится в 2 раза Б. Увеличится в 2 раза

В. Уменьшится в 4 раза Г. Увеличится в 4 раза

13. Плоский конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения. Пространство между обкладками конденсатора заполнено твердым диэлектриком с проницаемостью 3. Во сколько раз изменится энергия конденсатора, если расстояние между его обкладками увеличить в два раза?

А. Уменьшится в 2 раза Б. Увеличится в 2 раза

В. Уменьшится в 4 раза Г. Увеличится в 4 раза

14. К заряженному плоскому конденсатору подключили параллельно второй такой же, но незаряженный конденсатор. Энергия первого конденсатора до его соединения со вторым была равна W 4 Дж. Чему равна энергия первого конденсатора после соединения со вторым?

Ответ: __________Дж

15. Пространство между обкладками плоского конденсатора емкостью C полностью занимает пластина из диэлектрика проницаемостью . Конденсатор заряжен до напряжения U и отключен от источника. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора?

А. $A_{\min}$ ½ $C U^2$ Б. $A_{\min}$ ½ ($C U^2$

В. $A_{\min}$ ½ ($C U^2$ Г. $A_{\min}$ ½ ($C U^2$

16. Плоский конденсатор емкостью C подключен к источнику постоянного напряжения U. Пространство между обкладками заполнено диэлектриком с проницаемостью . Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора?

А. $A_{\min}$ (1 $C U^2/2$ Б. $A_{\min}$ (1 $C U^2/(2$)

В. $A_{\min}$ (1 $C U^2/2$ Г. $A_{\min}$ (1 $C U^2/(2$)

17. Плоский воздушный конденсатор заряжен и отключен от источника. Заряд на обкладках конденсатора q, площадь каждой из обкладок S. Пространство между обкладками заполнено диэлектриком с проницаемостью . Объемная плотность энергии поля между обкладками конденсатора равна …

А. w $q^2S^2/(2 \quad _0)$ Б. w $q^2S/(2 \quad _0)$

В. w $q^2/(2 \quad _0 S)$ Г. w $q^2/(2 \quad _0 S^2)$

18. Объемная плотность энергии электрического поля плоского воздушного конденсатора равна w 300 Дж/м^3. С какой силой взаимодействуют обкладки конденсатора, если площадь каждой из них равна S 100 см^2?

Ответ: __________Н

19. В однородном электрическом поле напряженностью E перпендикулярно его направлению расположена металлическая пластина толщиной d и площадью S. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы удалить пластину из поля?

А. $A_{\min}$ 0 Б. $A_{\min}$ $_0 E^2 S d$

В. $A_{\min}$ ½ $_0 E^2 S d$ Г. $A_{\min}$ 2 $_0 E^2 S d$

20. Плоский воздушный конденсатор заряжен и отключен от источника. Напряженность электрического поля между обкладками конденсатора E. Площадь каждой обкладки конденсатора S, расстояние между ними d. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поместить конденсатор во внешнее однородное электрическое поле напряженностью E_0, параллельное обкладкам конденсатора?

А. $A_{\min}$ $E^2 S d/2$ Б. $A_{\min}$ $E_0^2 S d/2$

В. $A_{\min}$ $(E \quad E_0)^2 S d/2$ Г. $A_{\min}$ $(E^2 \quad E_0^2) S d/2$

§20. Постоянный ток

При движении заряженных частиц в проводнике происходит перенос электрического заряда с одного места на другое. Поскольку заряженные частицы совершают беспорядочное тепловое движение, то в обычных условиях через любую воображаемую площадку в проводнике за произвольный промежуток времени проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей зарядов противоположных знаков. Если же каким-либо образом упорядочить движение зарядов так, чтобы через эту площадку переносился суммарный заряд, отличный от нуля, то говорят, что через эту площадку течет *электрический ток*. При этом за направление тока условились считать направление движения положительных зарядов. Если ток образован движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока считают противоположным направлению движения частиц.

Для существования электрического тока необходимо наличие в проводниках свободных заряженных частиц, которые называют *носителями тока*. Таковыми, например в металлах, являются электроны, утратившие связи с атомами (свободные электроны или электроны проводимости), в проводящих растворах (электролитах) – это положительные и отрицательные ионы, а в ионизованных газах – одновременно и электроны, и ионы. Однако наличия свободных носителей зарядов еще недостаточно для возникновения тока – необходимо также существование силы, действующей на заряды в определенном направлении. Если эта сила перестанет действовать, то упорядоченное движение зарядов прекратится из-за сопротивления, оказываемого их движению кристаллической решеткой металлов или нейтральными молекулами электролитов. Причиной, вызывающей и поддерживающей упорядоченное движение заряженных частиц, служит электрическое поле, которое существует внутри проводника до тех пор, пока между различными точками проводника имеется разность потенциалов.

Легко понять, что независимо от знака зарядов, образующих ток, ток в проводнике всегда направлен от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Действительно, электрическое поле направлено в сторону убывания потенциала (см. §15), и если свободные заряды положительны, то они будут двигаться по направлению силовых линий поля, если отрицательны – то против них. Поэтому, согласно договоренности о направлении тока, его направление будет совпадать с направлением электрического поля.

Движение носителей тока непосредственно невидимо. Однако это движение вызывает явления, по которым можно судить о наличии тока. Так, электрический ток вызывает нагревание проводников, может изменять химический состав проводника – выделять его химические составные части (при прохождении тока через электролиты), а также оказывать силовое воздействие на соседние токи и магниты.

20.1. Сила тока и плотность тока

Количественной мерой электрического тока служит *сила тока*: она равна суммарному заряду, переносимому через некоторую воображаемую поверхность S (например, через поперечное сечение проводника) за единицу времени. Если за одинаковые промежутки времени через поверхность S переносятся равные заряды q, то сила тока в проводнике равна

$$I \quad \frac{q}{t}, \tag{20.1}$$

при этом такой ток называют *стационарным*.

Если сила тока изменяется с течением времени, то формула (20.1) определяет среднее значение силы тока за промежуток времени t. Для определения мгновенного значения силы тока следует в (20.1) перейти к пределу при $t \quad 0$:

$$I \quad \lim_{t \quad 0} \frac{q}{t} \quad \frac{dq}{dt} \quad \dot{q}. \tag{20.2}$$

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Более детально ток можно характеризовать с помощью *вектора плотности тока* $\vec{j}$. Величина вектора плотности тока равна отношению силы тока dI через элементарную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей тока, к ее площади dS :

$$j \quad \frac{dI}{dS}.$$

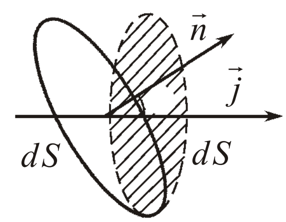


Рис. 20.1

Если плотность тока неодинакова во всех точках проводника, то поверхность S можно разбить на бесконечно малые площадки dS (рис. 20.1), в каждой точке которых плотность тока одинакова. Тогда ток через каждую такую площадку будет равен

$$dI \quad j\,dS \quad j\,dS\cos \quad j_n\,dS,$$

а через всю поверхность S

$$I \quad \underset{S}{} dI \quad \underset{S}{} j_n\,dS \quad \underset{S}{} (\vec{j}, d\vec{S}), \tag{20.3}$$

где $j_n \quad j\cos$ проекция вектора плотности тока на нормаль к площадке dS.

Сила тока является величиной скалярной и алгебраической. Как следует из (20.3), ее знак определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали в каждой точке поверхности S.

Как известно, сила, действующая на заряд q со стороны электрического поля напряженностью $\vec{E}$, определяется формулой $\vec{F} \quad q\vec{E}$. Поэтому при отсутствии других сил носители тока в проводнике должны двигаться с ускорением. Однако из-за столкновений (например, столкновений электронов с ионами, образующими кристаллическую решетку металлов) возникает «тормозящая» сила, в результате чего носители тока будут двигаться с некоторой установившейся скоростью $\vec{\ }$, которую называют *средней скоростью направленного* (*упорядоченного*) *движения* или *средней скоростью дрейфа*.

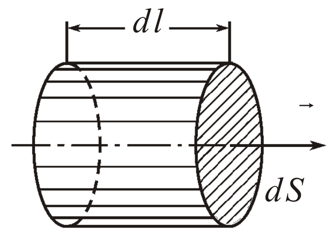


Рис. 20.2

Выделим мысленно в проводнике, по которому течет ток, произвольный бесконечно малый объем, средняя скорость направленного движения носителей в котором одинакова и равна $\vec{\ }$. Выберем в этом объеме бесконечно малую площадку dS, перпендикулярную $\vec{\ }$, и построим на этой площадке прямой цилиндр длиной $dl \qquad dt$ (рис. 20.2). Пусть в проводнике имеются носители тока одного знака, концентрация которых равна n. Тогда число заряженных частиц, которые пройдут через площадку dS за время dt, будет равно числу частиц $dN \quad n\,dS\,dl$ в рассматриваемом цилиндре, а прошедший за это время заряд

$$dq \quad q_0\,dN \quad q_0\,n\,dS\,dl \quad q_0\,n\,dS \qquad dt,$$

где q_0 – заряд одной частицы.

Так как по величине плотность тока равна заряду, переносимому в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную току, то

$$j \quad q_0\,n \qquad . \tag{20.4}$$

Поскольку за направление тока принято направление движения положительных зарядов, то направление плотности тока совпадает с направлением скорости $\vec{\ }$. Поэтому соотношение (20.4) в векторной форме записывают в виде

$$\vec{j} \quad q_0\,n \quad \vec{\ } \quad . \tag{20.5}$$

Поле вектора плотности тока можно изобразить графически с помощью *линий тока* (линий вектора $\vec{j}$), которые строятся так же, как и силовые линии напряженности электрического поля, то есть касательная к линии тока в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{j}$ в этой точке. При этом линии тока также нигде не пересекаются.

20.2. Уравнение непрерывности тока

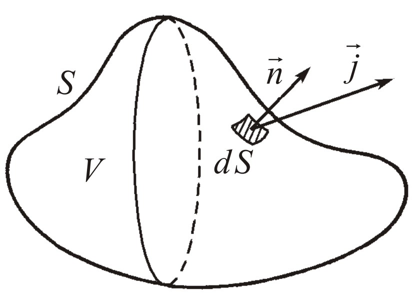


Рис. 20.3

Рассмотрим в некоторой среде, в которой течет ток, произвольную воображаемую замкнутую поверхность S (рис. 20.3). Сила тока dI через элементарную площадку $d\vec{S} \quad \vec{n}\,dS$ равна

$$dI \quad (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Поскольку для замкнутых поверхностей принято под $\vec{n}$ подразумевать внешнюю нормаль, то выражение

$$\underset{S}{\circ}\,(\vec{j}, d\vec{S})$$

дает заряд, выходящий в единицу времени из объема V, ограниченного поверхностью S. В силу закона сохранения электрического заряда, эта величина должна быть равна скорости убывания заряда q, содержащегося в данном объеме:

$$\underset{S}{\circ}\,(\vec{j}, d\vec{S}) \qquad \frac{dq}{dt}\,. \tag{20.6}$$

Представив заряд q в виде

$$q \qquad \underset{V}{}\ dV$$

(где объемная плотность заряда), получим

$$\underset{S}{\circ}\,(\vec{j}, d\vec{S}) \qquad \frac{d}{dt}\underset{V}{}\qquad dV \qquad \underset{V}{}\ \frac{}{t}\,dV. \tag{20.7}$$

Под интегралом в правой части (20.7) стоит частная производная по t, поскольку плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат.

Преобразуем левую часть равенства (20.7) по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\underset{S}{\circ}\,(\vec{j}, d\vec{S}) \qquad \underset{V}{}\ \mathrm{div}\,\vec{j}\,dV.$$

Следовательно,

$$\underset{V}{}\operatorname{div}\vec{j}\,dV \qquad \underset{V}{}\frac{}{t}\,dV; \qquad \underset{V}{}\operatorname{div}\vec{j} \quad \frac{}{t} \quad dV \quad 0. \tag{20.8}$$

Соотношение (20.8) должно выполняться для любого произвольно выбранного объема dV. Это возможно только в том случае, если подынтегральная функция в любой точке пространства равна нулю, то есть

$$\operatorname{div}\vec{j} \qquad \frac{}{t}\,. \tag{20.9}$$

Равенство (20.9) называется *уравнением непрерывности тока*. Оно, как и (20.6), выражает закон сохранения заряда. Согласно (20.9) в точках, которые являются источниками вектора $\vec{j}$, происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока

$$\operatorname{div}\vec{j} \quad 0. \tag{20.10}$$

Таким образом, в случае стационарного тока вектор $\vec{j}$ не имеет источников. Это означает, что линии стационарного тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, то есть являются замкнутыми. Следовательно,

$$\underset{S}{\circ}(\vec{j}, d\vec{S}) \quad 0. \tag{20.11}$$

20.3. Электродвижущая сила источника

Легко понять, что нельзя получить в проводнике постоянный ток, если для создания разности потенциалов на концах проводника использовать заряженный конденсатор. Наличие тока будет сопровождаться переходом зарядов с одной обкладки на другую в таком направлении, чтобы разность потенциалов между обкладками уменьшалась. При этом сила тока в проводнике быстро упадет до нуля.

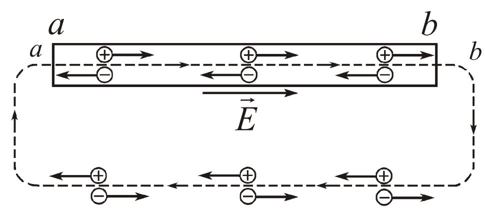


Рис. 20.4

Рассмотрим проводник, между концами a и b которого существует разность потенциалов $\ _a$ $\ _b$, причем $\ _a$ $\ _b$ (рис. 20.4). В проводнике возникнет электрическое поле, под действием которого носители заряда будут перемещаться таким образом, чтобы уменьшить потенциал $\ _a$ и увеличить потенциал $\ _b$. Через некоторое время, если не принять мер для поддержания разности потенциалов, перемещение носителей заряда приведет к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится. Для того чтобы поддержать ток, нужно непрерывно перемещать приносимые на один конец проводника заряды на другой его конец, то есть необходимо осуществить круговорот зарядов, чтобы они двигались по замкнутому пути. Очевидно, чтобы заставить двигаться положительные заряды от меньшего потенциала к большему, а отрицательные – от большего к меньшему, необходима сила, имеющая неэлектрическую природу. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых заряды движутся под действием сил электрического поля (такие участки называют *однородными*), должны существовать участки, где перенос зарядов происходит против сил поля. Перемещение зарядов на таких участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения (то есть некулоновских), которые называют *сторонними*, а участки, на которых они действуют, – *неоднородными*.

Эти силы, например, могут быть обусловлены химическими процессами (всевозможные аккумуляторы) или иметь электромагнитное происхождение (генераторы тока).

Любое устройство, в котором возникают сторонние силы, называют *источником тока*.

Сторонние силы характеризуются работой, которую они совершают над перемещаемыми зарядами. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется *электродвижущей силой* (*ЭДС*), действующей в контуре или на участке цепи:

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \qquad (20.12)$$

Из сопоставления формул (20.12) и (15.19) следует, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, то есть ЭДС измеряется в вольтах.

Стороннюю силу $\vec{F}_{\text{стор}}$, действующую на заряд q, можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{стор}} = q\vec{E}^*, \qquad (20.13)$$

где $\vec{E}^*$ – называют *напряженностью поля сторонних сил*.

Работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи $a-b$ равна

$$A_{\text{стор}} = \int_a^b (\vec{F}_{\text{стор}}, d\vec{l}) = q\int_a^b (\vec{E}^*, d\vec{l}).$$

Следовательно, ЭДС, действующая на этом участке,

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \int_a^b (\vec{E}^*, d\vec{l}). \qquad (20.14)$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\mathscr{E} = \oint (\vec{E}^*, d\vec{l}). \qquad (20.15)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

Если кроме сторонних сил на заряд действуют силы электрического поля $\vec{F}_E = q\vec{E}$, то результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q, будет равна

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{стор}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*). \qquad (20.16)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи $a-b$,

$$A_{a-b} = \int_a^b (\vec{F}, d\vec{l}) = q\int_a^b (\vec{E}, d\vec{l}) + q\int_a^b (\vec{E}^*, d\vec{l}),$$

или с учетом (15.23) и (20.14)

$$A_{a-b} = q(\varphi_a - \varphi_b) + q\mathscr{E}.$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *падением напряжения* (или просто *напряжением*) U на данном участке цепи. Следовательно,

$$U = \frac{A_{a-b}}{q} = (\varphi_a - \varphi_b) + \mathscr{E}. \qquad (20.17)$$

Для однородного участка

$$U \qquad _a \qquad _b, \tag{20.18}$$

то есть напряжение на участке совпадает с разностью потенциалов на его концах.

Источники, используемые в цепях постоянного тока, имеют два электрода (положительный и отрицательный) и предназначены для перемещения положительных зарядов от электрода с меньшим потенциалом к электроду с большим, а отрицательные наоборот. Поэтому работа сторонних сил $A_{\text{стор}}$ 0 (а значит, и ЭДС $\mathscr{E}$ 0), если положительные заряды внутри источника переносятся от отрицательного электрода к положительному. В противном случае $A_{\text{стор}}$ 0 и $\mathscr{E}$ 0.

<u>20.4. Сопротивление проводников. Законы Ома</u>

Рассмотрим металлический проводник (рис. 20.5), между концами которого имеется разность потенциалов $\quad _a \quad _b$ (то есть напряжение $U \quad _a \quad _b$). Если $\quad _a \quad _b$, то ток в проводнике будет направлен от точки a к точке b. Если состояние проводника остается неизменным, то существует однозначная зависимость между напряжением, приложенным к концам проводника, и силой тока в нем. Эту зависимость называют *вольт-амперной характеристикой* данного проводника. Для металлических проводников эта зависимость особенно проста сила тока I в проводнике прямо пропорциональна падению напряжения U на проводнике:

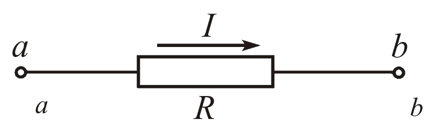


Рис. 20.5

$$I \qquad \frac{U}{R}, \tag{20.19}$$

где коэффициент R называется *электрическим сопротивлением* (или просто *сопротивлением*) *проводника*, которое представляет собой меру противодействия данного проводника протеканию в нем электрического тока.

Формула (20.19) была экспериментально установлена Омом и выражает **закон Ома для однородного участка цепи** (определение однородного участка см. на стр. 117).

Электрическое сопротивление – основная электрическая характеристика проводника, зависящая от его формы и размеров. Для металлических проводников постоянного сечения установлено, что сопротивление прямо пропорционально длине l проводника и обратно пропорционально площади S его поперечного сечения:

$$R \qquad \frac{l}{S}, \tag{20.20}$$

где – *удельное сопротивление проводника*, характеризующее свойства и состояние вещества, из которого он изготовлен. Удельное сопротивление зависит не только от химической природы вещества, но и от температуры проводника: как правило, сопротивление металлов возрастает с ростом температуры, и для всех металлов при обычных температурах

$$_0(1 \qquad t),$$

где – удельное сопротивление проводника при 0°C; – температурный коэффициент сопротивления; t температура проводника в [°C]. У некоторых металлов и сплавов при очень низких температурах сопротивление скачком обращается в нуль. Это явление называется *сверхпроводимостью* и может быть объяснено только с использованием квантовой теории.

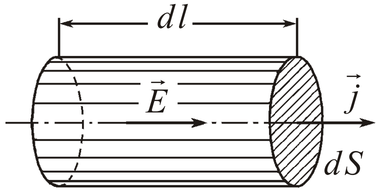


Рис. 20.6

Вернемся к закону Ома (20.19).

Выделим внутри проводника, по которому течет ток, элементарный цилиндрический объем длиной dl и площадью поперечного сечения dS с образующими, параллельными векторам $\vec{j}$ и $\vec{E}$ (рис. 20.6). При напряжении на концах цилиндра $U \quad E\,dl$ через его поперечное сечение будет течь ток силой $I \quad j\,dS$. На основании (20.19) и (20.20) получим:

$$j\,dS \quad \frac{E\,dl\,dS}{dl}; \qquad j \qquad E, \tag{20.21}$$

где $\quad / \quad$ – *удельная электрическая проводимость* проводника, единицей измерения которой является сименс на метр [См/м].

Поскольку в проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора $\vec{E}$, то направления $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают. Поэтому соотношение (20.21) можно записать в виде

$$\vec{j} \qquad \vec{E}. \tag{20.22}$$

Формула (20.22) выражает **закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи**.

Реальный источник тока имеет ЭДС $\mathscr{E}$ и сопротивление r, которое обычно называют *внутренним сопротивлением источника* в отличие от внешнего сопротивления R цепи (в аккумуляторе r – это сопротивление раствора электролита и электродов, в генераторе – сопротивление обмоток). При расчете цепей реальный источник можно заменить идеальным источником с ЭДС $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление которого равно нулю, и последовательно включенным с ним сопротивлением r.

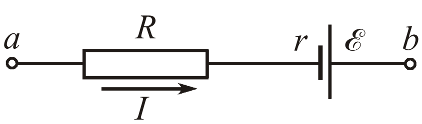


Рис. 20.7

Рассмотрим участок цепи, содержащий источник ЭДС $\mathscr{E}$ с внутренним сопротивлением r и внешнее сопротивление R (рис. 20.7), по которому течет ток I в указанном направлении. Напряжение на данном участке цепи (см. (20.17))

$$U \quad (\quad_a \qquad_b) \quad \mathscr{E}. \tag{20.23}$$

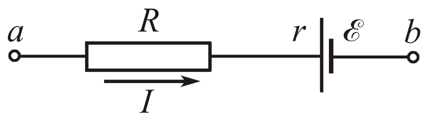


Рис. 20.8

Если источник включен так, как показано на рис. 20.8, то работа сторонних сил будет отрицательной, поскольку внутри источника заряды будут перемещаться в направлении убывания потенциала. В этом случае

$$U \quad (\quad_a \qquad_b) \quad \mathscr{E}. \tag{20.24}$$

Выражения (20.23) и (20.24) можно объединить:

$$U \quad (\quad_a \qquad_b) \quad \mathscr{E}, \tag{20.25}$$

где знак « » перед ЭДС соответствует случаю, если источник способствует движению положительных зарядов в направлении тока на участке, а знак « » – если препятствует.

Разделив напряжение U на полное сопротивление участка $R_{a\quad b} \quad R \quad r$, найдем силу тока на участке:

$$I \quad \frac{U}{R_{a\quad b}} \quad \frac{(\quad_a \qquad_b) \quad \mathscr{E}}{R \quad r}. \tag{20.26}$$

Формула (20.26) выражает **закон Ома для неоднородного участка цепи**.

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электрических сил $\vec{F}_E \quad q\vec{E}$, сторонние силы $\vec{F}_{\text{стор}} \quad q\vec{E}^*$, способные вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, как и силы электрические. Если на однородных участках плотность тока пропорциональна $\vec{E}$ (см. формулы (20.21) и (20.22)), то на неоднородных

$$\vec{j} \qquad (\vec{E} \quad \vec{E}^*). \tag{20.27}$$

Формула (20.27) обобщает формулу (20.22) и выражает **закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи**.

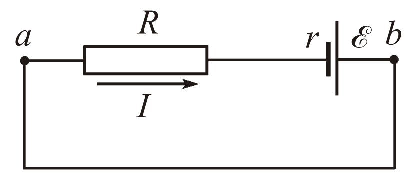


Рис. 20.9

Если цепь замкнута (рис. 20.9), то, положив в (20.26) $\;_b \quad\; _a$, а в (20.27) $\vec{E}^* \quad 0$, получим выражение **закона Ома для замкнутой цепи**:

$$I \quad \frac{\mathcal{E}}{R \quad r}; \qquad \vec{j} \qquad \vec{E}^*. \tag{20.28}$$

20.5. Разветвленные цепи постоянного тока. Законы Кирхгофа

Определим некоторые понятия, принятые в электротехнике:

узел – точка, в которой сходятся более чем два проводника;

ветвь – последовательное соединение сопротивлений, конденсаторов и источников тока, расположенное между двумя узлами;

контур – замкнутый участок цепи, содержащий несколько последовательных ветвей;

независимый контур – содержит хотя бы одну ветвь, не принадлежащую другим контурам, то есть его нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

Расчет электрической цепи в общем случае предполагает нахождение токов во всех ветвях цепи.

Существует два способа расчета разветвленных электрических цепей. Один состоит в том, чтобы путем эквивалентных преобразований (замены последовательно и параллельно соединенных элементов цепи эквивалентными) свести исходную разветвленную цепь к одному контуру, а затем, применив закон Ома для замкнутой цепи, найти ток в неразветвленной части. Далее, применяя законы Ома для однородных и неоднородных участков цепи, обратными преобразованиями нужно вернуться к исходной цепи, последовательно вычислив падения напряжения на каждом из участков и токи во всех ветвях. Однако не все схемы можно преобразовать к одному замкнутому контуру, поэтому этот путь не является универсальным.

Другой способ, не требующий преобразований цепи, основан на применении **законов Кирхгофа**. **Первый закон** относится к узлам цепи: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$_i\, I_i \quad 0, \tag{20.29}$$

при этом ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), а ток, текущий от узла, – имеющим другой знак (минус или плюс). Первый закон Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда: поскольку в узле не может происходить накопления зарядов, то суммарный заряд, приходящий в узел за любой промежуток времени, должен быть равен заряду, вытекающему из узла за это же время.

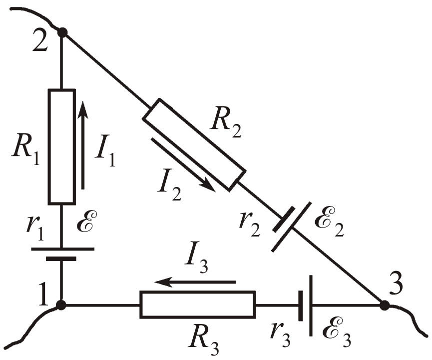


Рис. 20.10

Выделим в разветвленной цепи какой-либо контур (рис. 20.10) и запишем закон Ома (20.26) для отдельных его участков в виде

$$I_1(R_1 + r_1) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_1;$$
$$I_2(R_2 + r_2) = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathscr{E}_2; \qquad (20.30)$$
$$I_3(R_3 + r_3) = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathscr{E}_3.$$

Сложив левые и правые части уравнений (20.30), получим

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) + I_3(R_3 + r_3) = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3,$$

или

$$\sum_i I_i(R_i + r_i) = \sum_j \mathscr{E}_j. \qquad (20.31)$$

Соотношение (20.31) выражает **второй закон Кирхгофа**: *для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений в ветвях контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре*.

Применяя законы Кирхгофа к узлам и к различным замкнутым контурам, входящим в состав разветвленной цепи, можно получить систему уравнений для определения всех токов. Можно показать, что число независимых уравнений всегда равно числу неизвестных токов. Если цепь содержит N узлов и B ветвей с различными токами, то система должна содержать B уравнений, причем $(N - 1)$ из них составлены по первому закону Кирхгофа, а $K = B - (N - 1)$ – по второму, где K – число независимых контуров. Прежде чем составлять систему уравнений по законам Кирхгофа, необходимо задать произвольным образом направления токов в каждой ветви и выбрать направления обхода независимых контуров (по часовой стрелке или против, причем для каждого контура можно выбрать свое направление обхода). При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа соблюдают правила знаков: падения напряжений на однородных участках контуров считаются положительными, если направления токов в них совпадают с направлением обхода, и ЭДС считают положительными, если они действуют в направлении обхода, то есть направление движения положительных зарядов внутри источника (от «минуса» к «плюсу») совпадает с направлением обхода контура.

Следует отметить, что законы Кирхгофа можно применять и в случае так называемых *квазистационарных* токов, когда мгновенные значения токов практически одинаковы на всех участках цепи. Таковыми являются, например, токи в цепях, в которых происходит зарядка или разрядка конденсаторов, где под падением напряжения понимают разность потенциалов между обкладками. При этом законы Кирхгофа применяют к мгновенным значениям токов и напряжений, а вместо алгебраических соотношений получают дифференциальные уравнения, интегрирование которых дает зависимости искомых величин от времени.

20.6. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи, напряжение между концами которого равно U. Через сопротивление R участка будет течь ток силой I, и за промежуток времени Δt через поперечное сечение проводника пройдет заряд $\Delta q = I\Delta t$. Это равносильно тому, что заряд Δq за время Δt будет перенесен из одного конца проводника на другой. При этом силы электрического поля и сторонние силы совершат работу

$$A \quad qU \quad IU \quad t, \tag{20.32}$$

которую принято называть *работой тока*.

Если участок однородный (см. рис. 20.5), то напряжение U будет равно разности потенциалов $\quad_a \quad_b$ и работу по переносу заряда будут совершать только силы электрического поля. При наличии на участке цепи источника тока работу по переносу заряда будут совершать силы электрического поля и сторонние силы, причем, если источник способствует движению положительных зарядов в направлении тока (см. рис. 20.7), то работа сторонних сил положительна, в противном случае (см. рис. 20.8) – отрицательна:

$$A \quad qU \quad IU \quad t \quad I(\quad_a \quad_b) \quad t \quad I\mathscr{E} \quad t. \tag{20.33}$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет собой работу сил электрического поля на участке цепи, а второе – работу сторонних сил, которую также называют *работой источника тока*.

Если цепь замкнута, то $\quad_b \quad_a$ и работа (20.33) будет равна только работе источника тока:

$$A \quad A_{\text{ист}} \quad I\mathscr{E} \quad t. \tag{20.34}$$

Прохождение тока через проводник, обладающий сопротивлением, всегда сопровождается выделением теплоты. Нагревание проводника с током объясняется столкновениями носителей тока с узлами кристаллической решетки: при столкновении часть кинетической энергии носителей тока передается решетке, увеличивая энергию теплового движения атомов вблизи положений равновесия, это и означает увеличение температуры.

Для однородных участков цепи, на которых не совершается механическая работа и ток не производит химических действий, работа тока будет затрачена на увеличение внутренней энергии проводника. В этом случае количество теплоты Q, выделившееся в проводнике сопротивлением R за время $\quad t$, будет равно работе тока за это время:

$$Q \quad A \quad IU \quad t. \tag{20.35}$$

Используя закон Ома (20.19), для однородных участков работу тока (20.32) и количество теплоты (20.35) можно представить по-иному:

$$A \quad Q \quad \frac{U^2}{R} \quad t \quad I^2R \quad t. \tag{20.36}$$

Выражение для Q в виде

$$Q \quad I^2R \quad t \tag{20.37}$$

было получено экспериментально и носит название **закона Джоуля – Ленца**.

Если сила тока изменяется со временем, то за время dt на сопротивлении R выделится количество теплоты

$$Q \quad I^2R\,dt, \tag{20.38}$$

а за время $\quad t$

$$Q \quad {}_0^t \; I^2R\,dt. \tag{20.39}$$

На неоднородных участках цепи протекание тока может сопровождаться не только нагреванием проводников, но и другими процессами, связанными с превращением энергии. Например, на участке цепи, представленном на рис. 20.8, будет происходить зарядка источника, сопровождаемая химическими процессами. В этом случае слагаемое $I\mathscr{E} \quad t$ представляет собой часть работы тока, затраченную на увеличение энергии источника (его зарядку). Однако, независимо от направления тока на участке, суммарное количество теплоты, выделившейся за время $\quad t$ на всех сопротивлениях (включая внутреннее сопротивление источника) неоднородного участка цепи, будет равно

$$Q \quad I^2(R \quad r) \quad t. \tag{20.40}$$

В замкнутой цепи носители тока перемещаются только благодаря источнику (точнее, работе сторонних сил), поэтому электрическое поле работы не совершает. Если при этом ток не производит никаких действий, кроме нагревания проводников, то количество теплоты, выделившейся в цепи (на внешнем сопротивлении R и внутреннем сопротивлении r источника), будет равно работе источника (20.34):

$$Q \quad A_{\text{ист}} \quad I\mathscr{E} \quad t \quad I^2(R \quad r) \quad t, \tag{20.41}$$

при этом на внешнем сопротивлении R цепи будет выделено количество теплоты

$$Q_R \quad I^2 R \quad t. \tag{20.42}$$

Работа, совершаемая источником тока за единицу времени в замкнутой цепи

$$N_{\text{ист}} \quad \frac{A_{\text{ист}}}{t} \quad I\mathscr{E} \quad I^2(R \quad r), \tag{20.43}$$

называется *мощностью источника*, а количество теплоты, выделяющееся на внешнем сопротивлении R (которое часто называют нагрузкой) за единицу времени,

$$N \quad \frac{Q_R}{t} \quad I^2 R \tag{20.44}$$

тепловой мощностью тока или *полезной мощностью*.

Для замкнутой цепи отношение полезной мощности N к мощности источника $N_{\text{ист}}$ называют *коэффициентом полезного действия источника*:

$$\frac{N}{N_{\text{ист}}} \quad \frac{R}{R \quad r}. \tag{20.45}$$

Мощность источника (20.43) и полезная мощность (20.44) с учетом закона Ома (20.28) могут быть записаны в виде

$$N_{\text{ист}} \quad \frac{\mathscr{E}^2}{R \quad r}; \qquad N \quad \frac{\mathscr{E}^2}{(R \quad r)^2} R. \tag{20.46}$$

Отсюда следует, что мощность источника достигает максимального значения при $R \quad 0$, то есть при коротком замыкании источника. Полезная мощность и КПД источника при этом становятся равными нулю. Для нахождения значения максимальной полезной мощности исследуем зависимость

$$N \quad \frac{\mathscr{E}^2}{(R \quad r)^2} R$$

на экстремум:

$$\frac{dN}{dR} \quad \mathscr{E}^2 \frac{(R \quad r)^2 \quad 2R(R \quad r)}{(R \quad r)^4}; \qquad (R_{\text{m}} \quad r)^2 \quad 2R_{\text{m}}(R_{\text{m}} \quad r) \quad 0; \qquad R_{\text{m}} \quad r.$$

Как следует из (20.46), при $R \quad 0$ и $R \qquad$ полезная мощность $N \quad 0$. Таким образом, если внешнее сопротивление R равно внутреннему сопротивлению источника r, полезная мощность будет максимальной:

$$N_{\max} \quad \frac{\mathscr{E}^2}{4r}. \tag{20.47}$$

Как следует из (20.45), КПД источника увеличивается при возрастании сопротивления внешней цепи и при токе, соответствующем максимальной полезной мощности, $_{\text{m}}$ $\frac{1}{2}$.

Зависимости (20.45) и (20.46) , $N_{\text{ист}}$ и N от величины внешнего сопротивления R представлены на рис. 20.11. Как видим, условия получения максимальной полезной мощности и максимального КПД источника несовместимы: когда N достигает наибольшего значения, КПД равен $_{\text{m}}$ $\frac{1}{2}$. Когда же КПД близок к единице, мощность N мала по сравнению с максимальной мощностью, которую мог бы развить данный источник.

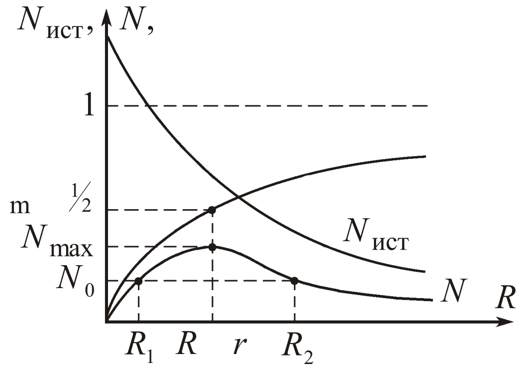


Рис. 20.11

Зависимость N от R показывает, что любую полезную мощность N_0 (меньшую максимальной) можно получить при двух разных сопротивлениях R_1 и R_2 внешней цепи. Очевидно, что для получения заданной полезной мощности следует выбирать большее внешнее сопротивление, так как КПД источника при этом выше.

Для получения большого КПД источника (см. (20.45)) должно выполняться условие $R \quad r$. Если же $R \quad r$, то практически вся мощность будет выделяться в источнике, что может привести к его перегреву и выходу из строя.

Вернемся к работе и мощности тока.

Получим выражение, характеризующее выделение теплоты в различных местах проводника. Для этого выделим внутри проводника, аналогично п. 20.4, элементарный цилиндрический объем длиной dl и площадью поперечного сечения dS с образующими, параллельными векторам $\vec{j}$ и $\vec{E}$ (см. рис. 20.6). На основании закона Джоуля – Ленца (20.37) количество теплоты, выделяющееся в рассматриваемом объеме $dV \quad dS\,dl$ проводника за время dt, равно

$$Q \quad (j\,dS)^2 \quad \frac{dl}{dS}\,dt \qquad j^2\,dS\,dl\,dt \qquad j^2\,dV\,dt,$$

где сила тока представлена в виде $dI \quad j\,dS$, а сопротивление $R \qquad dl/dS$.

Величина

$$Q_{\text{уд}} \quad \frac{Q}{dV\,dt} \qquad j^2 \tag{20.48}$$

определяет количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема проводника, и называется *удельной тепловой мощностью тока*.

Формула (20.48) представляет собой **дифференциальную форму закона Джоуля – Ленца**: удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности тока и удельному сопротивлению проводника в данной точке; она является наиболее общей формой этого закона и применима к любым проводникам вне зависимости от их формы и однородности.

Если на носители тока действуют только электрические силы, то на основании закона Ома (20.22)

$$Q_{\text{уд}} \quad j\,E \quad (\vec{j}, \vec{E}), \tag{20.49}$$

если же действуют еще и сторонние силы, то с учетом (20.27)

$$Q_{\text{уд}} \quad (\vec{j}, \vec{E} \quad \vec{E}^*). \tag{20.50}$$

20.7. Классическая теория электропроводности металлов

В классической физике существование в металлах свободных электронов объясняется тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов металла «отщепляются» слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся коллективной собственностью всего куска металла. Электрический ток в металлах можно вызвать крайне малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что носители тока (электроны) перемещаются по металлу практически свободно.

Исходя из представлений о свободных электронах, была создана теория электропроводности металлов, в которой предполагалось, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь . Однако, в отличие от молекул газа, пробег которых определяется их соударениями друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между так называемым электронным газом и кристаллической решеткой.

Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, оценку средней скорости теплового движения электронов можно произвести по формуле средней арифметической скорости [16, §10, (10.45)]

$$u \qquad \sqrt{\frac{8kT}{m}}\,.$$

Для комнатной температуры (T 300 К) u 10^{5} м/с.

При включении поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью u , накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью , величину которой легко оценить, исходя из формулы (20.4):

$$\frac{j}{|e|\,n}\,. \qquad (20.51)$$

Предельная допустимая техническими нормами плотность тока для медных проводов составляет около 10^{7} А/м^{2}. Взяв для концентрации свободных электронов значение порядка 10^{29} м$^{-3}$, получим 10^{-3} м/с.

Таким образом, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения зарядов примерно в 10^{8} раз меньше средней скорости теплового движения u . Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости можно заменять модулем скорости теплового движения u , а среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки считать равным

$$\frac{\quad}{u}\,. \qquad (20.52)$$

При соударении электрона с ионом кристаллической решетки приобретенная электроном за время разбега энергия полностью передается иону.

Предположим, что поле, ускоряющее электроны, однородно. Тогда под действием поля электрон получит постоянное ускорение, равное

$$a \quad \frac{F}{m} \quad \frac{|e|\,E}{m}\,,$$

и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигнет значения

$$\text{max} \quad \frac{|e|E}{m} \quad ,$$

или с учетом (20.52)

$$\text{max} \quad \frac{|e|E}{m \quad u} \, . \tag{20.53}$$

Скорость при равноускоренном движении электрона изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального:

$$\tfrac{1}{2} \quad \text{max} \quad \frac{|e|E}{2m \quad u} \, . \tag{20.54}$$

Подстановка (20.53) в выражение (20.4) дает

$$j \quad \frac{n\,|e|^2}{2m \quad u} E. \tag{20.55}$$

Как видим, плотность тока оказалась пропорциональной напряженности поля. Следовательно, мы пришли к закону Ома (20.21). Согласно (20.21) коэффициент пропорциональности между j и E представляет собой проводимость:

$$\frac{j}{E} \quad \frac{n\,|e|^2}{2m \quad u} \, . \tag{20.56}$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

К концу свободного пробега электрон приобретает кинетическую энергию (здесь ее будем обозначать буквой $E_{к}$, поскольку буквой T ниже обозначим температуру)

$$E_{к} \quad \frac{m \quad ^2_{\text{max}}}{2} \quad \frac{|e|^2 \quad ^2}{2m \quad u^2} E^2. \tag{20.57}$$

Столкнувшись с ионом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную им энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем $1/ \quad\quad u \; /$ соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (20.57). Следовательно, в единице объема за единицу времени будет выделяться количество теплоты

$$Q_{уд} \quad n \frac{1}{\,} E_{к} \quad \frac{n\,|e|^2}{2m \quad u} E^2. \tag{20.58}$$

Величина $Q_{уд}$ есть не что иное, как удельная тепловая мощность тока (см. формулу (20.49)).

Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Было установлено, что отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре. Так, для алюминия при комнатной температуре это отношение равно $5{,}8\ 10^{-6}$, для меди – $6{,}4\ 10^{-6}$, а для свинца – $7{,}0\ 10^{-6}$ Дж Ом/(с К).

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого следует, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а свободными электронами. Рассматривая эти электроны как одноатомный газ, можно заимствовать для коэффициента теплопроводности выражение из кинетической теории газов [16, §13, (13.17)]

$$\tfrac{1}{3} \qquad c_{\mathrm{V}} \quad \tfrac{1}{3}\, n\, m \qquad c_{\mathrm{V}}, \tag{20.59}$$

где m масса электрона.

Удельная теплоемкость одноатомного газа равна $c_{\mathrm{V}} \quad \tfrac{3}{2} R/ \qquad \tfrac{3}{2} k/m$. Подставив это значение в (20.59), получим

$$\tfrac{1}{2}\, n\, k \qquad . \tag{20.60}$$

Разделив (20.60) на выражение (20.56) и заменив затем $\tfrac{1}{2} m \qquad ^2$ через $\tfrac{3}{2} kT$, придем к соотношению

$$- \quad \frac{k\, m \qquad ^2}{|e|^2} \quad 3\, \frac{k^2}{|e|^2}\, T. \tag{20.61}$$

Подстановка в формулу (20.61) числовых значений при T 300 К дает отношение /   2,23 10^{-6} Дж Ом/(с К), хорошо согласующееся с экспериментальными данными (см. приведенные выше значения). Однако впоследствии выяснилось, что столь хорошее совпадение оказалось ошибочным. Позже расчеты были уточнены с учетом распределения электронов по скоростям. При этом для отношения / получилось значение

$$- \quad 2\, \frac{k^2}{|e|^2}\, T, \tag{20.62}$$

которое хуже согласуется с данными опыта.

Итак, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля – Ленца, а также дала качественное объяснение теплопроводности. Вместе с тем, эта теория встретилась с весьма существенными затруднениями. Из них основными являются два.

Из формулы (20.56) вытекает, что сопротивление металлов (то есть величина, обратная) должно возрастать как корень квадратный из температуры. Действительно, для предположения о зависимости n и   от температуры нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из T. Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов пропорционально T.

Второе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью $\tfrac{3}{2} R$. Добавив эту величину к теплоемкости решетки, составляющей $3R$, получим молярную теплоемкость металла $\tfrac{9}{2} R$. Таким образом, согласно классической теории молярная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости диэлектриков. Объяснение этого несоответствия смогла дать только квантовая механика.

И, наконец, классическая теория не смогла объяснить самого главного   почему электроны в металлах оказываются свободными.

Краткие выводы

1. Плотность тока

$$\vec{j} \quad q_0\, n \quad \vec{\ } \quad .$$

2. Сила тока

$$I \quad \dot{q}; \qquad I \quad \underset{S}{\bigcirc}(\vec{j}, d\vec{S}).$$

3. *Уравнение непрерывности тока*

$$\mathrm{div}\,\vec{j} \qquad \frac{\quad}{t}\,.$$

4. Электродвижущая сила источника

$$\mathcal{E} \quad \frac{A_{\text{стор}}}{q}\,.$$

5. Закон Ома для однородного участка цепи

$$I \quad \frac{U}{R}; \qquad j \qquad E.$$

6. Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$I \quad \frac{U}{R \quad r} \quad \frac{\qquad \mathcal{E}}{R \quad r}; \qquad \vec{j} \qquad (\vec{E} \quad \vec{E}^{*}).$$

7. Закон Ома для замкнутой цепи

$$I \quad \frac{\mathcal{E}}{R \quad r}; \qquad \vec{j} \qquad \vec{E}^{*}.$$

8. Законы Кирхгофа:

а) алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$${}_{i} I_i \quad 0;$$

б) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений в ветвях контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$${}_{i} I_i (R_i \quad r_i) \qquad {}_{j} \mathcal{E}_j.$$

9. Работа тока на однородном участке цепи и тепловая мощность тока

$$A \quad I\,U \quad t \quad \frac{U^2}{R} \quad t \quad I^2 R \quad t; \qquad N \quad I\,U \quad \frac{U^2}{R} \quad I^2 R.$$

10. Работа и мощность источника тока

$$A_{\text{ист}} \quad I\,\mathcal{E} \quad t; \qquad N_{\text{ист}} \quad I\,\mathcal{E}.$$

11. Закон Джоуля – Ленца

$$Q \quad I^2 R \quad t; \qquad Q \quad {}_{0}^{t}\, I^2 R\, dt.$$

12. Удельная тепловая мощность тока

$$Q_{\text{уд}} \qquad j^2; \qquad Q_{\text{уд}} \quad (\vec{j}, \vec{E} \quad \vec{E}^{*}).$$

13. Коэффициент полезного действия источника

$$\frac{R}{R \quad r}\,.$$

Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Дайте определения силы тока и плотности тока.

2. Как, зная плотность тока в каждой точке некоторой поверхности, найти силу тока, текущего через эту поверхность?

3. В чем состоит физический смысл уравнения непрерывности тока?

4. Какова связь ЭДС источника тока с напряженностью поля сторонних сил?

5. Объясните причины увеличения сопротивления проводника при его нагревании.

6. Сформулируйте законы Ома.

7. Сформулируйте законы Кирхгофа.

8. Сформулируйте закон Джоуля   Ленца.

9. Каков КПД источника тока при максимальной полезной мощности тока?

10. Объясните электропроводность металлов исходя из классических представлений.

Задачи

1. Металлический шар радиусом R_1 окружен концентрической металлической оболочкой радиусом R_2. Пространство между электродами заполнено однородной изотропной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением . Определите сопротивление межэлектродного промежутка.

Решение

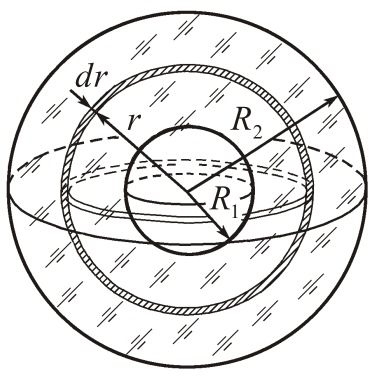


Рис. к задаче №1

Мысленно разобьем межэлектродный слой на бесконечно тонкие концентрические шаровые слои толщиной dr.

Если на электроды подать напряжение, то в силу центральной симметрии во всех точках этого слоя линии тока будут перпендикулярны ему. Поэтому слой можно рассматривать как цилиндрический проводник длиной dr с площадью поперечного сечения $S \quad 4 \quad r^2$. Сопротивление такого слоя

$$dR \qquad \frac{dr}{S} \qquad \frac{dr}{4 \quad r^2} . \tag{1}$$

Интегрируя выражение (1) по r от R_1 до R_2, найдем сопротивление межэлектродного промежутка:

$$R \qquad dR \quad {}_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4 \quad r^2} \quad \frac{}{4} \; {}_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \quad \frac{}{4} \qquad \frac{1}{r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} \quad \frac{}{4} \frac{R_2 \quad R_1}{R_1 R_2} .$$

Ответ: $R \quad \frac{}{4} \frac{R_2 \quad R_1}{R_1 R_2}$.

2. Длинный цилиндрический проводник площадью поперечного сечения S изготовлен из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r от оси проводника по закону: $\quad /r^2$, где   положительная постоянная. По проводнику течет ток I. Определите величину напряженности электрического поля в проводнике.

Решение

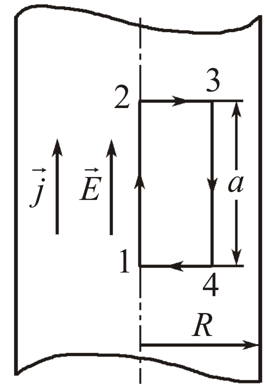


Рис. к задаче №2

По закону Ома для однородного участка цепи, записанному в дифференциальной форме

$$\vec{j} \qquad \vec{E} \quad \vec{E}/ , \qquad (1)$$

напряженность электрического поля в проводнике связана с плотностью тока.

Рассмотрим произвольный прямоугольный контур 1 2 3 4 1 внутри проводника, одна из сторон которого совпадает с осью проводника. По теореме о циркуляции вектора напряженности электрического поля

$$\underset{1\,2\,3\,4\,1}{\circ}\ (\vec{E}, d\vec{l}) \qquad \underset{1\,2}{(\vec{E}, d\vec{l}_{1\,2})} \qquad \underset{2\,3}{(\vec{E}, d\vec{l}_{2\,3})} \qquad \underset{3\,4}{(\vec{E}, d\vec{l}_{3\,4})} \qquad \underset{4\,1}{(\vec{E}, d\vec{l}_{4\,1})} \quad 0.$$

В силу осевой симметрии вектор напряженности электрического поля внутри проводника направлен вдоль его оси, и на равных расстояниях от оси величина напряженности поля будет одинаковой. Следовательно,

$$\underset{1\,2}{(\vec{E}, d\vec{l}_{1\,2})} \quad E_{1\,2}\, a; \qquad \underset{2\,3}{(\vec{E}, d\vec{l}_{2\,3})} \quad 0; \qquad \underset{3\,4}{(\vec{E}, d\vec{l}_{3\,4})} \quad E_{3\,4}\, a; \qquad \underset{4\,1}{(\vec{E}, d\vec{l}_{4\,1})} \quad 0;$$

$$\underset{1\,2\,3\,4\,1}{\circ}\ (\vec{E}, d\vec{l}) \quad (E_{1\,2} \quad E_{3\,4})\, a \quad 0; \qquad E_{1\,2} \quad E_{3\,4}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля одинакова во всех точках сечения проводника, то есть не зависит от расстояния r от его оси.

Ток через поперечное сечение проводника

$$I \qquad \underset{S}{(\vec{j}, d\vec{S})},$$

или с учетом (1) и условия задачи ($\quad /r^2$)

$$I \qquad \underset{S}{(\vec{E}/\ , d\vec{S})} \qquad \underset{S}{\frac{E}{\ }\, dS} \qquad \overset{R}{\underset{0}{\ }} \frac{E\, r^2}{\ } 2 \quad r\, dr \quad \frac{2 \quad E}{\ } \overset{R}{\underset{0}{\ }} r^3\, dr \quad \frac{E R^4}{2} \quad \frac{E\, S^2}{2},$$

где R радиус проводника; $S \quad R^2$ площадь поперечного сечения.

Следовательно, напряженность электрического поля в проводнике

$$E \quad \frac{2 \quad I}{S^2}.$$

Ответ: $E \quad \dfrac{2 \quad I}{S^2}$.

3. Определите ток, текущий через сопротивление R_1 участка цепи, представленного на рис. 1, где R_1 10 Ом, R_2 20 Ом, R_3 30 Ом, а потенциалы в точках *1*, *2* и *3* равны соответственно $_1$ 10 В, $_2$ 6 В, $_3$ 5 В.

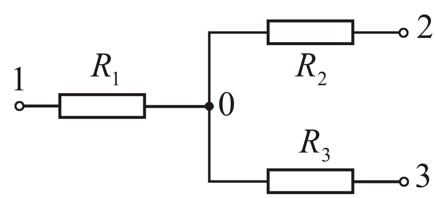


Рис. 1 к задаче №3

Решение

Участок цепи содержит три ветви. Зададим произвольным образом направления токов I_1, I_2 и I_3 в ветвях и обозначим потенциал точки «0» как $_0$ (рис. 2).

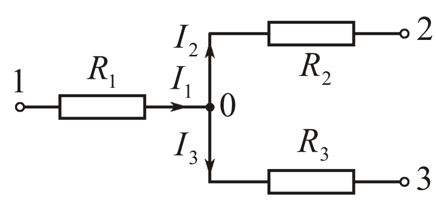


Рис. 2 к задаче №3

Запишем закон Ома для однородных участков 1 0, 0 2 и 0 3 в виде

$$I_1 \quad \frac{_1 \qquad _0}{R_1}; \qquad I_2 \quad \frac{_0 \qquad _2}{R_2}; \qquad I_3 \quad \frac{_0 \qquad _3}{R_3}. \tag{1}$$

Поскольку в узле не может происходить накопления зарядов, то суммарный заряд, приходящий в узел «0» за любой промежуток времени, должен быть равен заряду, вытекающему из узла за это же время (первый закон Кирхгофа). Следовательно,

$$I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad 0.$$

Отсюда с учетом (1) получим:

$$\frac{_1 \qquad _0}{R_1} \quad \frac{_0 \qquad _2}{R_2} \quad \frac{_0 \qquad _3}{R_3} \quad 0;$$

$$_1 R_2 R_3 \qquad _0 R_2 R_3 \qquad _0 R_1 R_3 \qquad _2 R_1 R_3 \qquad _0 R_1 R_2 \qquad _3 R_1 R_2 \quad 0;$$

$$_0 \quad \frac{_1 R_2 R_3 \qquad _2 R_1 R_3 \qquad _3 R_1 R_2}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3}.$$

Следовательно, ток, текущий через сопротивление R_1,

$$I_1 \quad \frac{_1 \qquad _0}{R_1} \quad \frac{_1}{R_1} \quad \frac{_1 R_2 R_3 \qquad _2 R_1 R_3 \qquad _3 R_1 R_2}{R_1 (R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3)} \quad \frac{R_2 (\ _1 \qquad _3) \quad R_3 (\ _1 \qquad _2)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 0{,}2 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 \quad \frac{R_2 (\ _1 \qquad _3) \quad R_3 (\ _1 \qquad _2)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 0{,}2$ А.

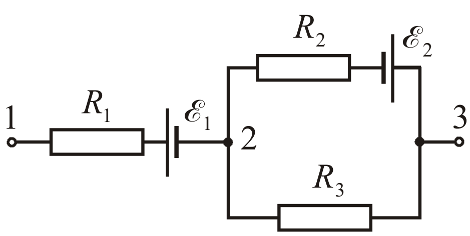


Рис. 1 к задаче №4

4. Определите ток, текущий через сопротивление R_1 участка цепи, представленного на рис. 1, где R_1 5 Ом, R_2 10 Ом, R_3 20 Ом, разность потенциалов между точками *1* и *3* равна $_{1\ 3}$ 20 В, ЭДС источников $\mathscr{E}_1$ 10 В, $\mathscr{E}_2$ 15 В. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

Решение

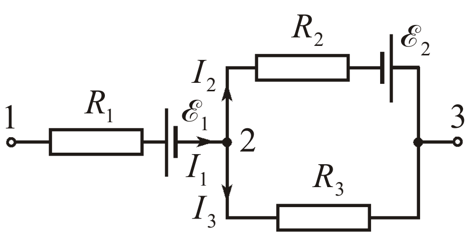


Рис. 2 к задаче №4

Участок цепи содержит три ветви. Зададим произвольным образом направления токов I_1, I_2, I_3 в ветвях и обозначим потенциалы точек *1*, *2*, *3* как $_1$, $_2$, $_3$ (рис. 2).

Запишем закон Ома для неоднородных участков 1 2 и 2 3 и для однородного участка 2 3 в виде

$$I_1 \quad \frac{(\ _1 \qquad _2) \quad \mathscr{E}_1}{R_1}; \qquad I_2 \quad \frac{_2 \qquad _3) \quad \mathscr{E}_2}{R_2}; \qquad I_3 \quad \frac{_2 \qquad _3}{R_3},$$

где учтено, что при выбранном направлении токов внутри источника с ЭДС $\mathscr{E}_1$ «положительные» заряды будут перемещаться в направлении убывания потенциала и работа сторонних сил (а значит, и ЭДС источника) будет отрицательной, а внутри источника с ЭДС $\mathscr{E}_2$ заряды будут перемещаться в направлении возрастания потенциала и работа сторонних сил и ЭДС источника будут положительными.

Поскольку алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле *2*, равна нулю, то

$$I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad 0.$$

Следовательно,

$$\frac{(\ _1 \qquad _2) \quad \mathscr{E}_1}{R_1} \quad \frac{_2 \qquad _3) \quad \mathscr{E}_2}{R_2} \quad \frac{_2 \qquad _3)}{R_3} \quad 0. \tag{1}$$

Представив разность потенциалов $\Delta\varphi_{13}$ как

$$\Delta\varphi_{13}=\varphi_1-\varphi_3=(\varphi_1-\varphi_2)+(\varphi_2-\varphi_3),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{(\varphi_1-\varphi_2)-\mathcal{E}_1}{R_1}-\frac{[\Delta\varphi_{13}-(\varphi_1-\varphi_2)]+\mathcal{E}_2}{R_2}-\frac{[\Delta\varphi_{13}-(\varphi_1-\varphi_2)]}{R_3}=0.$$

Отсюда получим:

$$(\varphi_1-\varphi_2)R_2R_3-\mathcal{E}R_2R_3-[\Delta\varphi_{13}-(\varphi_1-\varphi_2)+\mathcal{E}_2]R_1R_3-[\Delta\varphi_{13}-(\varphi_1-\varphi_2)]R_1R_2=0;$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\mathcal{E}_1R_2R_3+(\Delta\varphi_{13}+\mathcal{E}_2)R_1R_3+\Delta\varphi_{13}R_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.$$

Следовательно, через сопротивление R_1 будет течь ток

$$I_1=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_1}-\frac{\mathcal{E}_1}{R_1}=\frac{\mathcal{E}_1R_2R_3+(\Delta\varphi_{13}+\mathcal{E}_2)R_1R_3+\Delta\varphi_{13}R_1R_2}{R_1(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}-\frac{\mathcal{E}_1}{R_1};$$

$$I_1=\frac{(\Delta\varphi_{13}+\mathcal{E}_2)R_3+\Delta\varphi_{13}R_2-\mathcal{E}_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}=1{,}86\ \text{А}.$$

Ответ: $I_1=\dfrac{(\Delta\varphi_{13}+\mathcal{E}_2)R_3+\Delta\varphi_{13}R_2-\mathcal{E}_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}=1{,}86$ А.

5. В электрической цепи, представленной на рис. 1, ЭДС источников равны $\mathcal{E}_1=5$ В, $\mathcal{E}_2=2$ В, сопротивления $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом. Пренебрегая внутренними сопротивлениями источников, определите разность потенциалов между точками a и b.

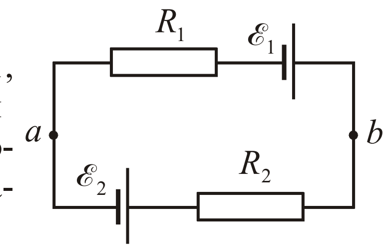


Рис. 1 к задаче №5

Решение

Поскольку в цепи, представленной на рис. 1, нет разветвлений, то ее расчет можно провести с помощью законов Ома, не прибегая к законам Кирхгофа.

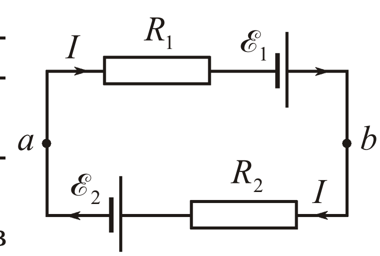


Рис. 2 к задаче №5

Зададим направление тока в цепи и обозначим потенциалы точек a и b как φ_a и φ_b (рис. 2).

Запишем закон Ома для неоднородных участков $a \to R_1 \to \mathcal{E}_1 \to b$ и $b \to R_2 \to \mathcal{E}_2 \to a$ в виде

$$I=\frac{(\varphi_a-\varphi_b)+\mathcal{E}_1}{R_1};\qquad I=\frac{(\varphi_b-\varphi_a)-\mathcal{E}_2}{R_2},$$

где учтено, что при выбранном направлении тока внутри источника с ЭДС $\mathcal{E}_1$ «положительные» заряды будут перемещаться в направлении возрастания потенциала и ЭДС источника будет положительной, а внутри источника с ЭДС $\mathcal{E}_2$ заряды будут перемещаться в направлении убывания потенциала и ЭДС источника будет отрицательной.

Следовательно, $\dfrac{(\varphi_a-\varphi_b)+\mathcal{E}_1}{R_1}=\dfrac{(\varphi_b-\varphi_a)-\mathcal{E}_2}{R_2}$.

Отсюда получим:

$$(\varphi_a-\varphi_b)R_2+\mathcal{E}R_2=(\varphi_b-\varphi_a)R_1-\mathcal{E}_2R_1;\qquad \varphi_a-\varphi_b=-\frac{\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}=-4\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_a-\varphi_b=-\dfrac{\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}=-4$ В.

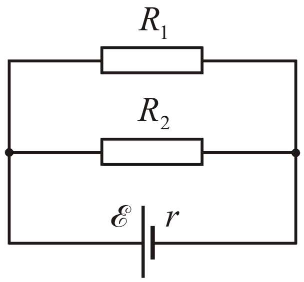


Рис. 1 к задаче №6

6. В электрической цепи, представленной на рис. 1, ЭДС источника равна $\mathcal{E}$ 5 В, внутреннее сопротивление r 0,1 Ом. Определите токи, текущие через сопротивления R_1 4 Ом и R_2 6 Ом.

Решение

Электрическая цепь, представленная на рис. 1, содержит два узла и три ветви с различными токами. Так как ветви, содержащие сопротивления R_1 и R_2, представляют собой однородные участки, то задачу можно решить с помощью законов Ома, не прибегая к законам Кирхгофа.

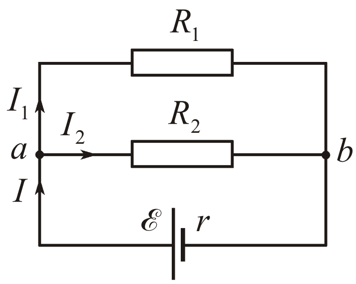


Рис. 2 к задаче №6

Сопротивление внешней цепи, содержащей два сопротивления R_1 и R_2, соединенных параллельно, равно

$$R_{\text{общ}} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 \quad R_2}.$$

Для определения тока I в неразветвленной части цепи, содержащей источник ЭДС, применим закон Ома для замкнутой цепи:

$$I \quad \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}} \quad r} \quad \frac{\mathcal{E}\,(R_1 \quad R_2)}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)}.$$

Записав закон Ома для однородного участка a $R_{\text{общ}}$ b цепи (рис. 2), найдем падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2:

$$U_{a \; b} \quad I R_{\text{общ}} \quad \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)}.$$

Падение напряжения $U_{a \; b}$ $_{a}$ $_{b}$ можно также найти, записав закон Ома для неоднородного участка b $\mathcal{E}$ a цепи:

$$I \quad \frac{(\;_b \quad\; _a) \quad \mathcal{E}}{r}; \qquad I \quad \frac{\mathcal{E} \quad U_{a \; b}}{r}; \qquad U_{a \; b} \quad \mathcal{E} \quad I r \quad \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)}.$$

Зная падение напряжения $U_{a \; b}$ на сопротивлениях R_1 и R_2, найдем токи I_1 и I_2:

$$I_1 \quad \frac{U_{a \; b}}{R_1} \quad \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)} \quad 1{,}2 \text{ А}; \qquad I_2 \quad \frac{U_{a \; b}}{R_2} \quad \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)} \quad 0{,}8 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 \quad \dfrac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)} \quad 1{,}2$ А; $I_2 \quad \dfrac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 \quad r\,(R_1 \quad R_2)} \quad 0{,}8$ А.

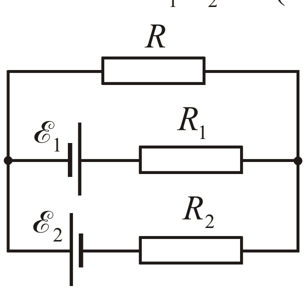


Рис. 1 к задаче №7

7. В электрической цепи, представленной на рис. 1, ЭДС источников равны $\mathcal{E}_1$ 10 В, $\mathcal{E}_2$ 20 В, сопротивления R 10 Ом, R_1 20 Ом, R_2 30 Ом. Пренебрегая внутренними сопротивлениями источников, определите ток через сопротивление R.

Решение

Электрическая цепь, представленная на рис. 1, содержит два узла и три ветви с различными токами. Поэтому система должна содержать три уравнения, причем одно из них составлено по первому закону Кирхгофа, а два – по второму.

Прежде чем составлять систему уравнений по законам Кирхгофа, необходимо задать произвольным образом направления токов в каждой ветви и выбрать направления обхода независимых контуров (по часовой стрелке или против, причем для каждого контура можно выбрать свое направление обхода). При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует соблюдать правила знаков: падения напряжений на однородных участках контуров считаются положительными, если направления токов в них совпадают с направлением обхода, и ЭДС считают положительными, если они действуют в направлении обхода, то есть направление движения положительных зарядов внутри источника (от «минуса» к «плюсу») совпадает с направлением обхода контура.

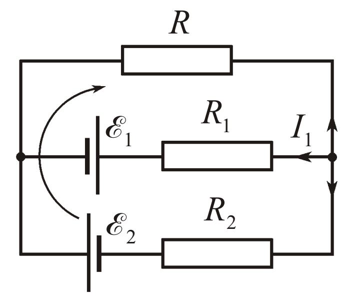


Рис. 2 к задаче №7

Зададим направления токов I, I_1 и I_2 в ветвях и направление обхода контуров так, как показано на рис. 2.

Запишем уравнение, выражающее первый закон Кирхгофа в виде

$$I \quad I_1 \quad I_2 \quad 0. \tag{1}$$

Для составления уравнений по второму закону Кирхгофа, выберем два независимых контура, например, $\mathscr{E}_1 \quad R \quad R_1 \quad \mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2 \quad R \quad R_2 \quad \mathscr{E}_2$:

$$I R \quad I_1 R_1 \quad \mathscr{E}_1; \tag{2}$$

$$I R \quad I_2 R_2 \quad \mathscr{E}_2. \tag{3}$$

Решив систему уравнений (1) (3), получим:

$$I_1 \quad \frac{I R \quad \mathscr{E}_1}{R_1}; \qquad I_2 \quad \frac{I R \quad \mathscr{E}_2}{R_2}; \qquad I \quad \frac{I R \quad \mathscr{E}_1}{R_1} \quad \frac{I R \quad \mathscr{E}_2}{R_2} \quad 0;$$

$$I R_1 R_2 \quad I R R_2 \quad \mathscr{E}_1 R_2 \quad I R R_1 \quad \mathscr{E}_2 R_1 \quad 0; \qquad I \quad \frac{\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1}{R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2} \quad 0{,}1 \text{ А}.$$

Поскольку $I \quad 0$, то это значит, что в действительности ток через сопротивление R течет не так, как мы предположили, а в противоположном направлении.

Ответ: $I \quad \dfrac{\mathscr{E}_2 R_1 \quad \mathscr{E}_1 R_2}{R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2} \quad 0{,}1$ А.

8. Определите заряд конденсатора емкостью $C \quad 10^{-9}$ Ф в электрической цепи, представленной на рис. 1, где $R_1 \quad 10$ Ом, $R_2 \quad 20$ Ом, $R_3 \quad 30$ Ом, ЭДС источников $\mathscr{E}_1 \quad 4$ В, $\mathscr{E}_2 \quad 1$ В. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

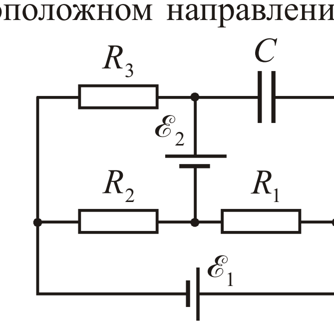


Рис. 1 к задаче №8

Решение

По ветви, содержащей конденсатор, ток будет течь до тех пор, пока конденсатор не зарядится. После этого для расчета токов на остальных участках, указанный участок можно удалить из цепи (рис. 2).

Электрическая цепь, представленная на рис. 2, содержит два узла и три ветви с различными токами.

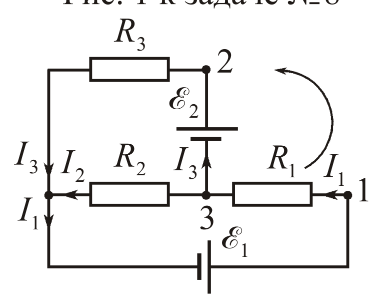


Рис. 2 к задаче №8

Поэтому система должна содержать три уравнения, причем одно из них составлено по первому закону Кирхгофа, а два – по второму.

Зададим направления токов I_1, I_2 и I_3 в ветвях и направление обхода контуров так, как показано на рис. 2.

Запишем уравнение, выражающее первый закон Кирхгофа, в виде

$$I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad 0. \tag{1}$$

Для составления уравнений по второму закону Кирхгофа выберем два независимых контура, например, $\mathscr{E}_1 \quad R_1 \quad R_2 \quad \mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2 \quad R_3 \quad R_2 \quad \mathscr{E}_2$:

$$I_1 R_1 \quad I_2 R_2 \quad \mathscr{E}_1; \tag{2}$$

$$I_2 R_2 \quad I_3 R_3 \quad \mathscr{E}_2. \tag{3}$$

Решив систему уравнений (1) (3), получим:

$$I_1 \quad \frac{\mathscr{E}_1 \quad I_2 R_2}{R_1}; \qquad I_3 \quad \frac{I_2 R_2 \quad \mathscr{E}_2}{R_3}; \qquad \frac{\mathscr{E}_1 \quad I_2 R_2}{R_1} \quad I_2 \quad \frac{I_2 R_2 \quad \mathscr{E}_2}{R_3} \quad 0;$$

$$\mathscr{E}_1 R_3 \quad I_2 R_2 R_3 \quad I_2 R_1 R_3 \quad I_2 R_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1 \quad 0;$$

$$I_2 \quad \frac{\mathscr{E}_1 R_3 \quad \mathscr{E}_2 R_1}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3}; \qquad I_1 \quad \frac{\mathscr{E}_1 (R_2 \quad R_3) \quad \mathscr{E}_2 R_2}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3}; \qquad I_3 \quad \frac{\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 (R_1 \quad R_2)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3}.$$

Чтобы определить заряд конденсатора

$$q \quad C\,U,$$

надо знать напряжение U на его обкладках. Полагая потенциал $_1$ точки *1* больше потенциала $_2$ точки *2*, представим искомое напряжение в виде

$$U \qquad _1 \qquad _2. \tag{4}$$

Рассмотрим путь 1 3 2, по которому ток приходит из точки *1* в точку *2*. Используя потенциал $_3$ промежуточной точки *3*, выражение (4) можно записать в виде

$$U \quad (\quad _1 \qquad _3) \quad (\quad _3 \qquad _2),$$

где разность потенциалов

$$_3 \qquad _2 \qquad \mathscr{E}_2.$$

Чтобы найти разность потенциалов ($_1$ $_3$), запишем закон Ома для однородного участка 1 3:

$$I_1 \quad \frac{_1 \qquad _3}{R_1}.$$

Следовательно,

$$q \quad C\,(I_1 R_1 \quad \mathscr{E}_2) \quad C\,\frac{\mathscr{E}_1 R_1 (R_2 \quad R_3) \quad \mathscr{E}_2 R_3 (R_1 \quad R_2)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 10^{-9}\ \text{Кл}.$$

Ответ: $q \quad C\,\dfrac{\mathscr{E}_1 R_1 (R_2 \quad R_3) \quad \mathscr{E}_2 R_3 (R_1 \quad R_2)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 10^{-9}$ Кл.

9. Аккумулятор с ЭДС $\mathscr{E}$ 2,6 В замкнут на некоторое сопротивление. При этом через аккумулятор течет ток I 1 А и разность потенциалов на его клеммах U 2 В. Определите:

1) тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе;
2) тепловую мощность, выделяемую во внешней цепи;
3) полную мощность тока;
4) КПД источника.

Решение

Запишем закон Ома для полной цепи
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \qquad (1)$$
где R – сопротивление нагрузки; r – внутреннее сопротивление аккумулятора.

Падение напряжения на внешнем участке цепи (на нагрузке)
$$U = IR. \qquad (2)$$
Из уравнений (1)–(2) получим:
$$R = \frac{U}{I}; \quad r = \frac{\mathcal{E}}{I} - R = \frac{\mathcal{E} - U}{I}.$$
Следовательно, тепловая мощность, выделяемая в аккумуляторе,
$$N_r = I^2 r = I(\mathcal{E} - U) = 0{,}6 \text{ Вт};$$
тепловая мощность, выделяемая во внешней цепи,
$$N_R = I^2 R = IU = 2 \text{ Вт};$$
полная мощность тока (мощность источника)
$$N = N_R + N_r = I\mathcal{E} = 2{,}6 \text{ Вт}.$$
КПД источника
$$\eta = \frac{R}{R + r} = \frac{U}{\mathcal{E}} = 0{,}77 = 77\%.$$

Ответ: 1) $N_r = I(\mathcal{E} - U) = 0{,}6$ Вт; 2) $N_R = IU = 2$ Вт;
3) $N = I\mathcal{E} = 2{,}6$ Вт; 4) $\eta = \dfrac{U}{\mathcal{E}} = 0{,}77 = 77\%$.

10. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В замыкают разными сопротивлениями: один раз сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, другой раз – сопротивлением $R_2 = 9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделившееся на сопротивлениях за одно и то же время, одинаково. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора. Какую максимальную полезную мощность можно получить от этого аккумулятора?

Решение

Количество теплоты, выделяемое за время Δt на сопротивлении R, подключенном к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, может быть рассчитано по одной из формул
$$Q = IU\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 R \Delta t, \qquad (1)$$
где I – сила тока, текущего через сопротивление R; U – падение напряжения на нем.

Воспользуемся, например, первой из формул (1).

Силу тока найдем из закона Ома для замкнутой цепи:
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$
Следовательно,
$$Q = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R \Delta t.$$
Так как по условию задачи на сопротивлениях R_1 и R_2 за одинаковое время выделяется одинаковое количество теплоты, то
$$\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2}; \quad \sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r).$$

Отсюда получим

$$r = \sqrt{R_1 R_2} = 6\ \text{Ом}. \qquad (2)$$

При изменении внешнего сопротивления R на нем выделяется тепловая мощность

$$N = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2}{(R + r)^2} R, \qquad (3)$$

которая будет зависеть от величины сопротивления R. Чтобы найти максимальную полезную мощность, исследуем зависимость (3) на экстремум:

$$\frac{dN}{dR} = \mathscr{E}^2 \frac{(R + r)^2 - 2R(R + r)}{(R + r)^4}; \quad (R_\text{m} + r)^2 - 2R_\text{m}(R_\text{m} + r) = 0; \quad R_\text{m} = r.$$

Поскольку при $R \to 0$ и $R \to \infty$ полезная мощность $N \to 0$, то, очевидно, при сопротивлении внешней цепи $R_\text{m} = r$ полезная мощность, получаемая от данного источника, будет максимальной:

$$N_\text{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{(R_\text{m} + r)^2} R_\text{m} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r} = \frac{\mathscr{E}^2}{4\sqrt{R_1 R_2}} = 6\ \text{Вт}.$$

Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6$ Ом; $N_\text{max} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{4\sqrt{R_1 R_2}} = 6$ Вт.

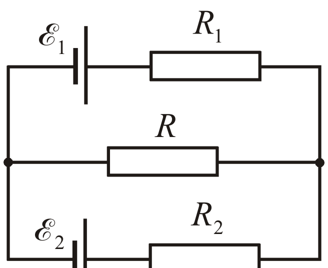


Рис. 1 к задаче №11

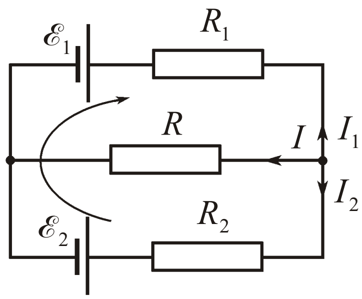


Рис. 2 к задаче №11

11. В электрической цепи, представленной на рис. 1, ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1 = 40$ В, $\mathscr{E}_2 = 10$ В, сопротивления $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом. При каком значении сопротивления R выделяемая на нем тепловая мощность будет максимальной? Чему она равна? Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

Решение

Найдем ток через сопротивление R, как это было сделано при решении задачи №7.

Зададим направления токов I, I_1 и I_2 в ветвях и направление обхода контуров так, как показано на рис. 2.

Запишем уравнение, выражающее первый закон Кирхгофа, в виде

$$I + I_1 + I_2 = 0. \qquad (1)$$

Для составления уравнений по второму закону Кирхгофа, выберем два независимых контура, например,

$\mathscr{E}_1 \to R_1 \to R \to \mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2 \to R \to R_2 \to \mathscr{E}_2$:

$$I_1 R_1 - I R = \mathscr{E}_1; \qquad (2)$$

$$I R - I_2 R_2 = -\mathscr{E}_2. \qquad (3)$$

Решив систему уравнений (1)–(3), получим:

$$I_1 = \frac{IR + \mathscr{E}_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{IR + \mathscr{E}_2}{R_2}; \quad I + \frac{IR + \mathscr{E}_1}{R_1} + \frac{IR + \mathscr{E}_2}{R_2} = 0;$$

$$I R_1 R_2 + I R R_2 + \mathscr{E}_1 R_2 + I R R_1 + \mathscr{E}_2 R_1 = 0; \quad I = -\frac{\mathscr{E}_1 R_2 + \mathscr{E}_2 R_1}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}.$$

Тепловая мощность, выделяемая на сопротивлении R,

$$N \quad I^2 R \qquad \frac{\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1}{R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2}^{2} R \tag{4}$$

зависит от сопротивления R. Чтобы найти сопротивление R, на котором будет выделяться максимальная мощность, исследуем зависимость (4) на экстремум:

$$\frac{dN}{dR} \quad (\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1)^2 \frac{(R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2)^2 \quad 2R(R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2)(R_1 \quad R_2)}{(R R_1 \quad R R_2 \quad R_1 R_2)^4};$$

$$(R_{\text{m}} R_1 \quad R_{\text{m}} R_2 \quad R_1 R_2)^2 \quad 2R_{\text{m}}(R_{\text{m}} R_1 \quad R_{\text{m}} R_2 \quad R_1 R_2)(R_1 \quad R_2) \quad 0;$$

$$R_{\text{m}} R_1 \quad R_{\text{m}} R_2 \quad R_1 R_2 \quad 2R_{\text{m}} R_1 \quad 2R_{\text{m}} R_2 \quad 0; \qquad R_1 R_2 \quad R_{\text{m}} R_1 \quad R_{\text{m}} R_2 \quad 0;$$

$$R_{\text{m}} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 \quad R_2} \quad 24 \text{ Ом}.$$

Следовательно, максимальная мощность, выделяемая на сопротивлении R,

$$N_{\max} \quad \frac{\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1}{R_{\text{m}} R_1 \quad R_{\text{m}} R_2 \quad R_1 R_2}^{2} R_{\text{m}} \quad \frac{(\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1)^2}{4 R_1 R_2 (R_1 \quad R_2)} \quad 8{,}17 \text{ Вт}.$$

Ответ: $R_{\text{m}} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 \quad R_2} \quad 24$ Ом; $N_{\max} \quad \frac{(\mathscr{E}_1 R_2 \quad \mathscr{E}_2 R_1)^2}{4 R_1 R_2 (R_1 \quad R_2)} \quad 8{,}17$ Вт.

12. Стеклянная пластина полностью заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора емкостью C. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. Определите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла .

Решение

Поскольку конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U, то при извлечении пластины заряд и энергия конденсатора изменятся от

$$q_1 \quad CU, \qquad W_1 \quad \tfrac{1}{2} CU^2$$

до

$$q_2 \quad C_2 U, \qquad W_2 \quad \tfrac{1}{2} C_2 U^2$$

где $C_2 \quad C/$ емкость конденсатора без пластины.

На основании теоремы об изменении полной энергии

$$W \quad W_2 \quad W_1 \quad A_{\text{мех}} \quad A_{\text{ист}},$$

где $A_{\text{мех}}$ механическая работа, совершаемая внешними силами при извлечении пластины; $A_{\text{ист}}$ работа источника:

$$A_{\text{ист}} \qquad qU \quad (q_2 \quad q_1)U.$$

Так как при извлечении пластины емкость и заряд конденсатора уменьшаются, то источник совершает отрицательную работу

$$A_{\text{ист}} \quad (C_2 \quad C)U^2 \quad \frac{C(1 \qquad)U^2}{} \qquad \frac{C(\qquad 1)U^2}{}. \tag{1}$$

Изменение энергии конденсатора

$$W \quad W_2 \quad W_1 \quad \frac{C_2 U^2}{2} \quad \frac{CU^2}{2} \quad \frac{C(1 \qquad)U^2}{} \qquad \frac{C(\qquad 1)U^2}{}. \tag{2}$$

Из сравнения формул (1) и (2) следует, что

$$A_{\text{ист}} \quad 2 \quad W.$$

Следовательно,

$$A_{\text{мех}} \qquad W \quad A_{\text{ист}} \qquad \frac{C(\quad 1)U^2}{} \quad \frac{C(\quad 1)U^2}{} \quad \frac{C(\quad 1)U^2}{}.$$

Таким образом, извлекая пластину из конденсатора, внешние силы совершают положительную работу (против электрических сил). При этом источник совершает отрицательную работу и энергия конденсатора уменьшается.

Ответ: $A_{\text{мех}} \quad \frac{C(\quad 1)U^2}{}$.

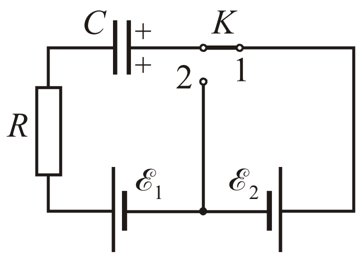


Рис. 1 к задаче №13

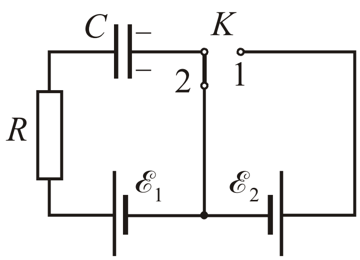


Рис. 2 к задаче №13

13. В электрической цепи, представленной на рис. 1, емкость конденсатора $C \quad 10$ мкФ, ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1 \quad 8$ В, $\mathscr{E}_2 \quad 12$ В. Вначале ключ K замкнут в положение *1*. Какое количество теплоты выделится в цепи, если ключ K замкнуть в положение *2*?

Решение

Если ключ K длительное время находится в положении *1*, заряд конденсатора будет равен

$$q_1 \quad C(\mathscr{E}_2 \quad \mathscr{E}_1),$$

а энергия конденсатора

$$W_1 \quad \frac{q_1^2}{2C} \quad \tfrac{1}{2} C(\mathscr{E}_2 \quad \mathscr{E}_1)^2.$$

Поскольку $\mathscr{E}_2 \quad \mathscr{E}_1$, то на обкладке конденсатора, соединенной с ключом (рис. 1), будет находиться положительный заряд.

После замыкания ключа в положение *2* заряд и энергия конденсатора изменятся:

$$q_2 \quad C\mathscr{E}_1; \qquad W_2 \quad \frac{q_2^2}{2C} \quad \tfrac{1}{2} C\mathscr{E}_1^2,$$

причем, на обкладке, соединенной с ключом, теперь будет отрицательный заряд (рис. 2). Следовательно, через сопротивление R и источник с ЭДС $\mathscr{E}_1$ протечет заряд

$$q \quad q_2 \quad q_1 \quad C\mathscr{E}_2.$$

Так как внутри источника $\mathscr{E}_1$ заряды будут перемещаться в направлении возрастания потенциала, то работа сторонних сил будет положительной и источник $\mathscr{E}_1$ совершит работу

$$A_{\text{ист}} \qquad q\mathscr{E}_1 \quad C\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2.$$

Таким образом, количество теплоты, выделившееся в цепи,

$$Q \quad W_1 \quad A_{\text{ист}} \quad W_2;$$

$$Q \quad \tfrac{1}{2} C(\mathscr{E}_2 \quad \mathscr{E}_1)^2 \quad C\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \quad \tfrac{1}{2} C\mathscr{E}_1^2 \quad \tfrac{1}{2} C\mathscr{E}_2^2 \quad 0{,}72 \text{ мДж}.$$

Результат решения задачи является несколько неожиданным, поскольку количество теплоты, выделившееся в цепи, не зависит от ЭДС источника $\mathscr{E}_1$. Попытайтесь самостоятельно объяснить этот факт.

Ответ: $Q \quad \tfrac{1}{2} C\mathscr{E}_2^2 \quad 0{,}72$ мДж.

14. Конденсатор емкостью C подключен через сопротивление R к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 1). В момент времени $t = 0$ ключ K замкнули. Определите ток в цепи как функцию времени. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

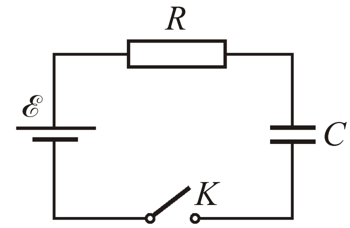


Рис. 1 к задаче №14

Решение

После замыкания ключа (рис. 2) в цепи будет течь ток, заряжающий конденсатор. Увеличивающиеся заряды на обкладках конденсатора будут все в большей степени препятствовать прохождению тока, постепенно уменьшая его.

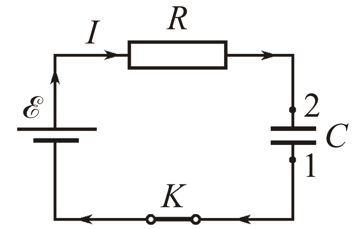


Рис. 2 к задаче №14

В случаях, когда изменение тока происходит не слишком быстро, мгновенное значение тока практически одинаково на всех участках цепи. Такие токи называются квазистационарными, и к ним применимы законы постоянного тока. При этом вместо алгебраических соотношений получают дифференциальные уравнения, интегрирование которых дает зависимости искомых величин от времени.

Запишем закон Ома для неоднородного участка цепи $1 - \mathcal{E} - R - 2$:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}}{R}. \tag{1}$$

Так как после замыкания ключа заряд конденсатора

$$q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$$

с течением времени будет увеличиваться, то сила тока

$$I = \frac{dq}{dt},$$

и уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - q}{RC}, \tag{2}$$

или

$$\frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = \frac{1}{RC}\,dt. \tag{3}$$

Проинтегрировав (3), получим:

$$\int \frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = \int \frac{1}{RC}\,dt + \text{const}; \quad -\ln(C\mathcal{E} - q) = \frac{1}{RC}\,t + \text{const}.$$

Так как в момент времени $t = 0$ заряд конденсатора равен нулю, то

$$-\ln(C\mathcal{E}) = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\ln\frac{C\mathcal{E} - q}{C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\,t; \quad \frac{C\mathcal{E} - q}{C\mathcal{E}} = e^{-t/(RC)}; \quad q = C\mathcal{E}\{1 - e^{-t/(RC)}\},$$

а ток в цепи изменяется со временем по закону

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/(RC)}.$$

Ответ: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/(RC)}$.

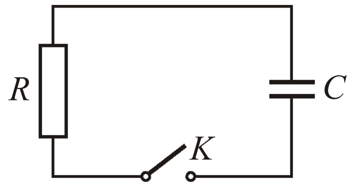


Рис. 1 к задаче №15

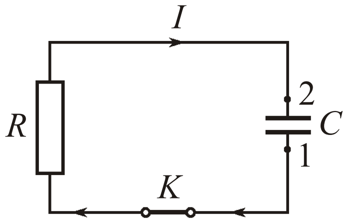


Рис. 2 к задаче №15

15. Конденсатору емкостью C сообщили заряд q_0 и в момент времени $t \quad 0$ замкнули ключ K (рис. 1). Определите количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R за время $\quad t$.

Решение

Пусть в момент замыкания ключа знаки зарядов на обкладках конденсатора соответствуют рис. 2. Тогда потенциал $\quad_1$ точки *1* больше потенциала $\quad_2$ точки *2* и через сопротивление R будет течь ток I в направлении от положительно заряженной обкладки к обкладке, заряженной отрицательно.

Запишем закон Ома для участка цепи 1 $\;R\;$ 2 в виде

$$I \qquad \frac{\quad_1 \qquad _2}{R}. \tag{1}$$

Так как после замыкания ключа заряд конденсатора

$$q \quad C(\;_1 \qquad _2)$$

с течением времени уменьшается, то сила тока

$$I \qquad \frac{dq}{dt},$$

и уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{dq}{dt} \quad \frac{q}{CR}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\frac{dq}{q} \qquad \frac{1}{CR}\,dt; \qquad \frac{dq}{q} \qquad \frac{1}{RC}\,dt \quad \text{const}; \qquad \ln q \qquad \frac{1}{RC}\,t \quad \text{const}.$$

Поскольку в момент времени $t \quad 0$ заряд конденсатора равен q_0, то

$$\ln q_0 \quad \text{const}; \qquad \ln\frac{q}{q_0} \qquad \frac{1}{RC}\,t; \qquad q \quad q_0\, e^{\quad t/(RC)}.$$

Следовательно, после замыкания ключа сила тока через сопротивление R с течением времени будет изменяться по закону

$$I \qquad \frac{dq}{dt} \quad \frac{q_0}{RC}\, e^{\quad t/(RC)}. \tag{3}$$

По закону Джоуля Ленца за бесконечно малое время dt на сопротивлении R выделится количество теплоты

$$Q \quad I^2 R\,dt \quad \frac{q_0^2}{R^2C^2}\, e^{\quad 2t/(RC)} R\,dt,$$

а за время $\quad t$

$$Q \quad \frac{q_0^2}{R^2C^2} \;\;_0^{\;t} e^{\quad 2t/(RC)} R\,dt \qquad \frac{q_0^2}{2C}\, e^{\quad 2t/(RC)}\Big|_0^{\;t} \quad \frac{q_0^2}{2C}\{1 \quad e^{\quad 2t/(RC)}\}.$$

Ответ: $Q \quad \dfrac{q_0^2}{2C}\{1 \quad e^{\quad 2t/(RC)}\}$.

Задачи для самостоятельного решения

20.1. Однородная слабо проводящая среда с удельным сопротивлением   заполняет пространство между двумя коаксиальными проводящими тонкостенными цилиндрами. Радиусы цилиндров R_1 и R_2 R_1, длина каждого цилиндра l. Пренебрегая краевыми эффектами, определите сопротивление среды между цилиндрами.

20.2. Длинный проводник круглого сечения площадью S изготовлен из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r от оси проводника по закону: $/r^2$, где   положительная постоянная. Определите сопротивление единицы длины проводника.

20.3. Определите падение напряжения на сопротивлении R_1 участка цепи, представленного на рисунке, где R_1 10 Ом, R_2 5 Ом, R_3 10 Ом, а разность потенциалов между точками a b равна U 12 В.

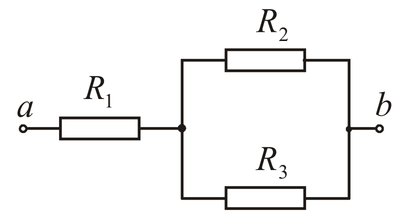


Рис. к задаче №20.3

20.4. В участке цепи, представленном на рисунке, сопротивления R_1 5 Ом, R_2 10 Ом, емкость конденсатора C 10 мкФ, ЭДС источника $\mathscr{E}$ 10 В. Определите ток, текущий через сопротивление R_1, если заряд конденсатора q 100 мкКл. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

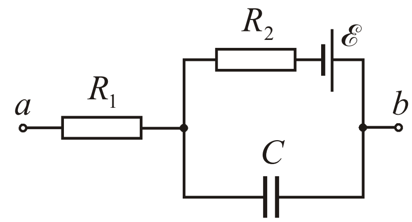


Рис. к задаче №20.4

20.5. Два источника с одинаковыми ЭДС, но различными внутренними сопротивлениями r_1 5 Ом и r_2 10 Ом, соединены последовательно и замкнуты на некоторое сопротивление R (см. рисунок). При каком сопротивлении R разность потенциалов на клеммах одного из источников равна нулю и на каком?

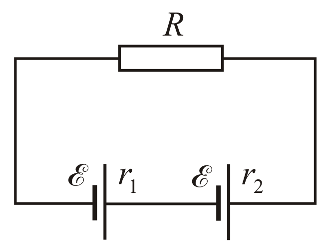


Рис. к задаче №20.5

20.6. В электрической цепи, представленной на рисунке, ЭДС источника $\mathscr{E}$ 10 В, сопротивления R_1 2 Ом, R_2 8 Ом. Определите разность потенциалов между точками a и b. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

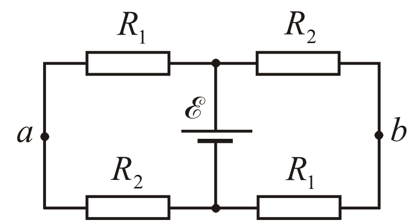


Рис. к задаче №20.6

20.7. В электрической цепи, представленной на рисунке, ЭДС источников $\mathscr{E}_1$ 1,5 В, $\mathscr{E}_2$ 2 В, $\mathscr{E}_3$ 2,5 В, сопротивления R_1 10 Ом, R_2 20 Ом, R_3 30 Ом. Пренебрегая внутренними сопротивлениями источников, определите ток через сопротивление R_1.

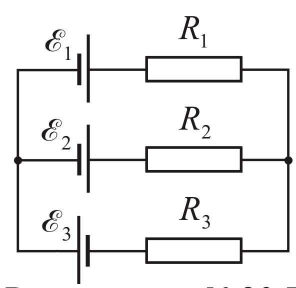


Рис. к задаче №20.7

20.8. Определите заряд конденсатора емкостью C 3 мкФ в электрической цепи, представленной на рисунке, где R_1 10 Ом, R_2 20 Ом, ЭДС источников $\mathscr{E}_1$ 1 В, $\mathscr{E}_2$ 2 В, $\mathscr{E}_3$ 3 В. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

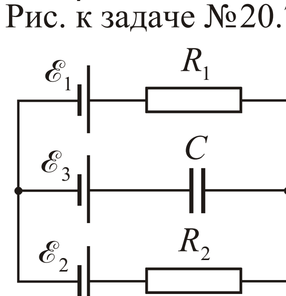


Рис. к задаче №20.8

20.9. В автомобиле лампочка ближнего света потребляет от аккумулятора мощность N_1 55 Вт при токе I_1 5,3 А, а лампочка дальнего света – мощность N_2 65 Вт при токе I_2 6,5 А. Определите ЭДС аккумулятора.

20.10. Аккумулятор замыкают один раз сопротивлением R_1 100 Ом, а другой раз – сопротивлением R_2 400 Ом. В обоих случаях во внешней цепи выделяется мощность N 225 Вт. Определите ток короткого замыкания аккумулятора.

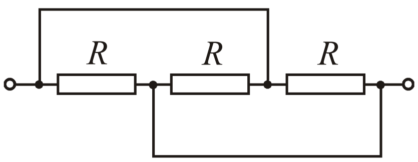


Рис. к задаче №20.11

20.11. К источнику тока с внутренним сопротивлением r 10 Ом подключили три одинаковых сопротивления R, соединенные между собой, как показано на рисунке. При каком значении сопротивления R выделяемая на внешнем участке цепи тепловая мощность будет максимальной?

20.12. Стеклянная пластинка полностью заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора емкостью C 7 мкФ. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ 10 В. Пластинку медленно извлекли из конденсатора. Определите работу, совершенную при этом источником. Диэлектрическая проницаемость стекла   7.

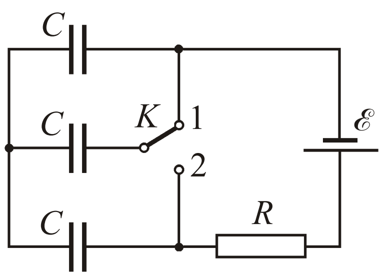


Рис. к задаче №20.13

20.13. Три одинаковых конденсатора емкостью C 100 пФ каждый соединены в электрической цепи, как показано на рисунке, где ЭДС источника $\mathscr{E}$ 30 В. Вначале ключ K замкнут в положение *1*. Какое количество теплоты выделится в цепи, если ключ K замкнуть в положение *2*?

20.14. Заряженный конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью   2,1, теряет за t 3 мин половину сообщенного ему заряда. Полагая, что утечка заряда происходит только через диэлектрический слой, определите его удельное сопротивление.

20.15. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны R_1 и R_2 R_1. Пространство между обкладками заполнено слабо проводящим однородным диэлектриком с проницаемостью и удельным сопротивлением . В момент времени t 0 на внутреннюю обкладку конденсатора поместили заряд q_0. Определите закон изменения со временем заряда на внутренней обкладке конденсатора и количество теплоты, выделившееся при растекании заряда.

Тесты

1. Кусок провода без изоляции сложили пополам и скрутили. Во сколько раз изменилось его сопротивление?

А. Не изменилось — Б. Уменьшилось в 2 раза

В. Увеличилось в 2 раза — Г. Уменьшилось в 4 раза

2. Каркас квадрата изготовлен из проволоки. Сопротивление каждой стороны каркаса равно R 8 Ом. Сопротивление между соседними вершинами квадрата равно …

А. $R_{общ}$ 2 Ом — Б. $R_{общ}$ 4 Ом

В. $R_{общ}$ 6 Ом — Г. $R_{общ}$ 8 Ом

3. Сопротивление участка цепи, представленного на рисунке, равно …

А. $R_{общ}$ R Б. $R_{общ}$ $3R$

В. $R_{общ}$ $\frac{1}{3}R$ Г. $R_{общ}$ $\frac{2}{3}R$

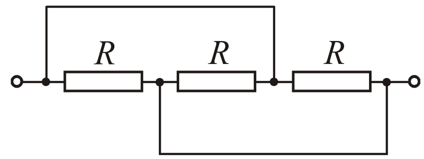


Рис. к тесту №3

4. Сопротивление участка цепи, представленного на рисунке, равно …

А. $R_{общ}$ R Б. $R_{общ}$ $4R$

В. $R_{общ}$ $\frac{1}{4}R$ Г. $R_{общ}$ $\frac{3}{5}R$

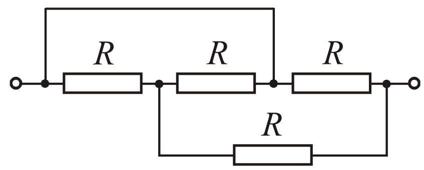


Рис. к тесту №4

5. Каркас правильного тетраэдра (см. рисунок) изготовлен из проволоки. Сопротивление каждого ребра каркаса равно R 10 Ом. Определите сопротивление между двумя произвольными вершинами каркаса.

Ответ: __________Ом

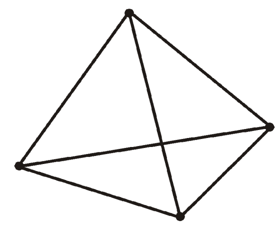


Рис. к тесту №5

6. Разность потенциалов между точками a и b участка цепи, представленного на рисунке, равна 20 В. Считая амперметр идеальным, определите его показания, если R_1 R_2 20 Ом, R_3 10 Ом.

Ответ: __________А

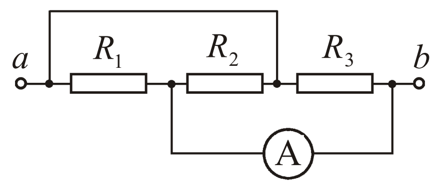


Рис. к тесту №6

7. Разность потенциалов между точками a и b участка цепи, представленного на рисунке, равна 3 В. Считая вольтметр идеальным, определите его показания, если R_1 1 Ом, R_2 2 Ом.

Ответ: __________В

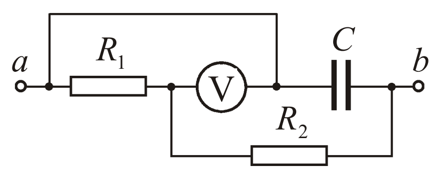


Рис. к тесту №7

8. Определите напряженность электрического поля в алюминиевом проводе, по которому течет ток I 1 А. Площадь поперечного сечения провода S 1,4 мм^2, удельное сопротивление алюминия 2,8 10^{-8} Ом м.

А. E 0,02 В/м Б. E 0,2 В/м

В. E 2 В/м Г. E 20 В/м

9. При зарядке аккумулятора током I_1 2 А напряжение на его клеммах U_1 12 В. При зарядке того же аккумулятора током I_2 4 А напряжение на его клеммах U_2 14 В. Определите ЭДС аккумулятора.

Ответ: __________В

10. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ 12 В замкнут проводником сопротивлением R 20 Ом. При этом ток в цепи I 0,5 А. Определите ток короткого замыкания источника.

Ответ: __________А

11. Определите заряд конденсатора в электрической цепи, представленной на рисунке, где C 1 мкФ, R 9 Ом, ЭДС источника $\mathcal{E}$ 5 В, его внутреннее сопротивление r 1 Ом.

А. q 4,5 мкКл Б. q 5 мкКл

В. q 45 мкКл Г. q 50 мкКл

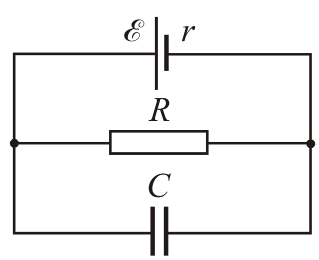


Рис. к тесту №11

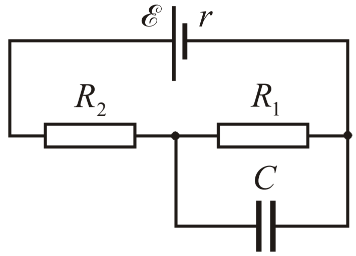


Рис. к тесту №12

12. В электрической цепи, представленной на рисунке, заряд конденсатора емкостью C 10 мкФ равен q 10^{-4} Кл. Определите ЭДС источника, если его внутреннее сопротивление r 1 Ом, а R_1 5 Ом, R_2 4 Ом.

А. $\mathscr{E}$ 10 В　　　　Б. $\mathscr{E}$ 20 В

В. $\mathscr{E}$ 40 В　　　　Г. $\mathscr{E}$ 80 В

13. К источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ 100 В подключили незаряженный конденсатор емкостью C 6 мкФ. Определите работу, совершаемую источником при зарядке конденсатора.

Ответ: __________мДж

14. К источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ 10 В подключен плоский воздушный конденсатор емкостью C 3 мкФ. Какую минимальную работу против электрических сил надо совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора, увеличив расстояние между ними в 3 раза?

А. $A_{\min}$ 0,1 мДж　　　　Б. $A_{\min}$ 0,2 мДж

В. $A_{\min}$ 1 мДж　　　　Г. $A_{\min}$ 2 мДж

15. К источнику ЭДС подключен конденсатор. Не отключая от источника, обкладки конденсатора медленно раздвинули, совершив против электрических сил работу A 10 мкДж. На сколько изменилась энергия конденсатора?

А. W 10 мкДж　　　　Б. W 10 мкДж

В. W 20 мкДж　　　　Г. W 20 мкДж

16. В электрическую цепь с напряжением U 127 В включены параллельно несколько лампочек сопротивлением R 420 Ом каждая. При этом потребляемая ими мощность N 500 Вт. Определите количество лампочек в цепи.

Ответ: __________

17. Два одинаковых нагревательных элемента, соединенных параллельно и подключенных к сети, потребляют мощность N 4 кВт. Какую мощность будут потреблять эти элементы, если их соединить последовательно?

Ответ: __________кВт

18. Аккумулятор замыкают один раз сопротивлением R_1 40 Ом, другой раз – сопротивлением R_2 90 Ом. В обоих случаях во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Ответ: __________Ом

19. Источник с ЭДС $\mathscr{E}$ 12 В и внутренним сопротивлением r 1 Ом замкнут проволокой. Сопротивление проволоки подобрано так, что на ней выделяется максимальная мощность. Какое количество теплоты выделится в проволоке за t 5 мин?

А. Q 2,7 кДж　　　　Б. Q 5,4 кДж

В. Q 10,8 кДж　　　　Г. Q 21,6 кДж

20. Ток в проводнике сопротивлением R 100 Ом в течение t 30 с равномерно нарастает от I_1 0 до I_2 10 А. Количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике, равно …

Ответ: __________кДж

Ответы к задачам

15.1. $F \quad \frac{{}^2 n^2 m^2 N_A^2 e^2}{4 \quad {}_0 \quad {}^2 r^2} \quad 1{,}6\ 10^{15}$ Н.

15.2. $T \quad \frac{q_1 q_2 (1 \quad \sqrt{q_3/q_2} \quad \sqrt{q_3/q_1})}{4 \quad {}_0 l^2} \quad 10$ Н.

15.3. $R \quad \sqrt{\frac{q_0 q}{8 \ {}^2 \ {}_0 T}}$.

15.4. $E_{max} \quad \frac{q}{3\sqrt{3} \quad {}_0 a^2}; \quad \frac{q}{\sqrt{6} \quad {}_0 a}$.

15.5. $F \quad \frac{|q q_0|}{3 \quad {}_0 l^2}$.

15.6. $E \quad \frac{\sqrt{2}}{4 \quad {}_0 a}$.

15.7. $E \quad 0$.

15.8. $\frac{}{2 \ {}_0}\{\sqrt{R^2 \quad x^2} \quad x\}$.

15.9. $E \quad \frac{{}_0}{4 \ {}_0 R}$.

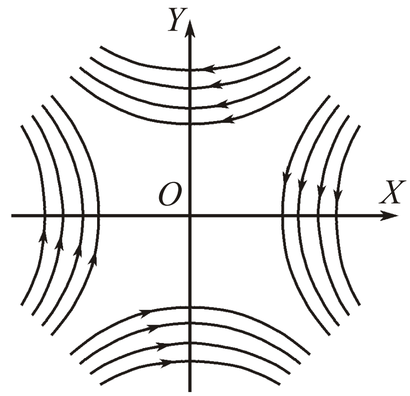


Рис. к ответу задачи №15.10

15.10. $\vec{E} \quad y\vec{i} \quad x\vec{j} \quad 30\vec{i} \quad 40\vec{j}$ [В/м];

$E \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad 50$ В/м; $A_{1\ 2} \quad q \quad (x_1 y_1 \quad x_2 y_2) \quad 10^{-6}$ Дж; см. рисунок.

16.1. $\Phi \quad 4 \quad R^3$.

16.2. $\Phi \quad \frac{}{2 \ {}_0}[a \quad R \quad (a^2 \quad R^2)^{1/2}]$.

16.3. $E \quad \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{}{{}_0}$.

16.4. $E \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\frac{}{{}_0 a}$.

16.5. $F \quad \frac{R^4}{3 \ {}_0 (r \quad R) r}$.

16.6. $E(r \quad R) \quad {}_0\frac{(3R \quad 2r) r}{6 \ {}_0 R}; \ E(r \quad R) \quad {}_0 \frac{R^2}{6 \ {}_0 r}$.

16.7. $E(r \quad R)\quad \frac{{}_0}{3 \ {}_0 \quad r^2} \quad 1 \quad e^{\quad r^3}; \ E(r\quad R) \quad \frac{{}_0}{3\ {}_0 \quad r^2}\quad 1 \quad e^{\quad R^3}$.

16.8. $\frac{R^2}{8 \ {}_0}$.

16.9. $E \quad \frac{}{2\ {}_0} a$.

16.10. $x \quad 6 \quad {}_0 x$.

17.1. $\frac{1}{} \ {}_0 E_0$.

17.2. $\frac{1}{}\ {}_0 E_0 \cos$.

17.3. arctg (tg).

17.4. $(l \quad d) \quad \frac{l^2}{2\ {}_0}; \quad (l \quad d) \quad \frac{d}{{}_0}\frac{d}{2} \quad l \quad d$.

17.5. $E \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r^2}; \quad \frac{q}{4 \quad {}_0 r}$.

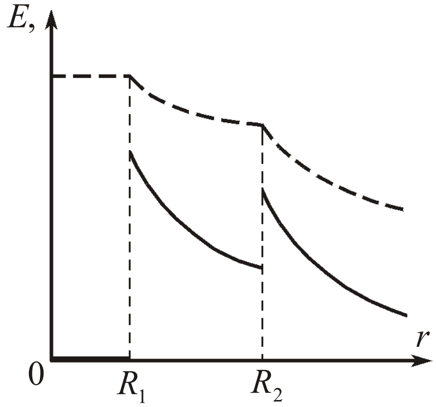


Рис. к ответу задачи №17.6

17.6. См. рисунок; зависимость $E(r)$ изображена сплошной линией, а (r) штриховой, где

$E(r \quad R_1) \quad 0;\ E(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0 r^2};$

$E(r \quad R_2) \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0 r^2};$

$(r \quad R_1) \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0} \quad \dfrac{1}{R_1} \quad \dfrac{}{R_2};$

$(R_1 \quad r \quad R_2) \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0} \quad \dfrac{1}{r} \quad \dfrac{}{R_2};$

$(r \quad R_2) \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0 r}.$

17.7. $q_{\text{ед}} \quad 2 \quad P_0; \quad \dfrac{2 P_0}{R^2}.$

17.8. $q_1 \quad q_2 \quad \dfrac{1}{} q.$

17.9. $\dfrac{q}{4 \quad r^4}.$

17.10. $\dfrac{1}{}\ \dfrac{}{3} R.$

18.1. $R_2 \quad R_1 \dfrac{{}_0}{{}_0}.$

18.2. $q_1 \quad q_2 \quad 2\,q;\ q_1 \quad q_2 \quad q.$

18.3. $\dfrac{{}_0}{2\,d}.$

18.4. $q \quad q \dfrac{R}{R \quad l}.$

18.5. $q \quad q \dfrac{R_2}{R_1}.$

18.6. 1) $F \quad (2\sqrt{2} \quad 1)\dfrac{q^2}{8 \quad {}_0 l^2}$; 2) $E \quad 2 \quad 1 \quad \dfrac{1}{5\sqrt{5}} \quad \dfrac{q}{{}_0 l^2}.$

18.7. $(x) \quad \dfrac{l}{(l^2 \quad x^2)}.$

18.8. $C \quad \dfrac{2 \quad {}_0 S}{(1 \quad)\,d}.$

18.9. $C \quad 8 \quad {}_0\dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 \quad R_1^2}.$

18.10. $C \quad \dfrac{2 \quad {}_0 L}{R_2 \quad R_1}.$

19.1. $W \quad 3 \quad \dfrac{3}{\sqrt{2}} \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \dfrac{q^2}{{}_0\, a}.$

19.2. $W \quad \dfrac{q}{4 \quad {}_0} \ln 2.$

19.3. 1) $W \quad \dfrac{q^2}{8 \quad {}_0\, l}$; 2) $A \quad \dfrac{q^2}{16 \quad {}_0\, l}.$

19.4. $W \quad \dfrac{(q_1 \quad q_2)^2}{2\,(C_1 \quad C_2)}.$

19.5. 1) $A_1 \quad \dfrac{(\quad 1)\,q^2}{2\,C}$; 2) $A_2 \quad \dfrac{(\quad 1)\,C\,U^2}{2}.$

19.6. $A \quad C\,U^2.$

19.7. $A \quad \dfrac{q^2}{8 \quad {}_0} \dfrac{R_2 \quad R_1}{R_1 R_2}.$

19.8. $W \quad \dfrac{4 \quad {}^2 R^5}{15 \quad {}_0}.$

19.9. $W \quad \dfrac{2 \quad {}^2 R_1^3 [R_2 \quad (\quad 1)\, R_1]}{{}_0 R_2}.$

19.10. $W \quad \dfrac{q^2 (R_2 \quad R_1)}{4 \quad {}_0 L}.$

20.1. $R \quad \frac{}{2 \quad l} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

20.2. $R_{\text{ед}} \quad \frac{2}{S^2}$.

20.3. $U_1 \quad \frac{U R_1 (R_2 \quad R_3)}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 9$ В.

20.4. $I_1 \quad \frac{q \quad C\mathscr{E}}{C R_2} \quad 2$ А.

20.5. $R \quad r_2 \quad r_1 \quad 5$ Ом; на источнике с внутренним сопротивлением r_2.

20.6. $U_{a \quad b} \quad \mathscr{E} \frac{R_2 \quad R_1}{R_1 \quad R_2} \quad 6$ В.

20.7. $I \quad \frac{(\mathscr{E}_1 \quad \mathscr{E}_2) R_3 \quad (\mathscr{E}_1 \quad \mathscr{E}_3) R_2}{R_1 R_2 \quad R_1 R_3 \quad R_2 R_3} \quad 0{,}06$ А.

20.8. $q \quad C \frac{\mathscr{E}_3 (R_1 \quad R_2) \quad \mathscr{E}_2 R_1 \quad \mathscr{E}_1 R_2}{R_1 \quad R_2} \quad 5$ мкКл.

20.9. $\mathscr{E} \quad \frac{N_1 I_2^2 \quad N_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 \quad I_1)} \quad 12$ В.

20.10. $I_{\text{к.з.}} \quad \sqrt{N} \frac{\sqrt{R_1} \quad \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad 2{,}25$ А.

20.11. $R \quad 3r \quad 30$ Ом.

20.12. $A_{\text{ист}} \quad \frac{C(\quad 1)\mathscr{E}^2}{} \quad 6\ 10^{-4}$ Дж.

20.13. $Q \quad \tfrac{1}{3} C \mathscr{E}^2 \quad 3\ 10^{-8}$ Дж.

20.14. $\quad \frac{t}{{}_0 \ln 2} \quad 1{,}4\ 10^{13}$ Ом м.

20.15. $q \quad q_0\, e^{\quad t/(\quad {}_0 \quad)}$; $Q \quad \frac{q_0^2}{8 \quad {}_0} \frac{R_2 \quad R_1}{R_1 R_2}$.

Ответы к тестам

№ задания	§15	§16	§17	§18	§19	§20
1	В	А	А	500	А	Г
2	А	5	25	В	В	В
3	Г	А	В	Б	А	В
4	40	А	В	Б	2	Г
5	Б	Б	А	5	Б	5
6	В	5	А	Б	А	2
7	45	Г	6	Г	А	1
8	Г	А	В	Г	Г	А
9	Г	10	Г	А	500	10
10	Б	Б	А	В	Б	3
11	В	А	15	В	В	А
12	В	Г	А	4	Г	Б
13	30	6	Б	27	В	60
14	Г	36	В	Г	1	А
15	А	Б	Б	А	В	Б
16	А	А	А	Г	Г	13
17	Б	Г	200	Б	Г	1
18	А	25	Б	Г	3	60
19	60	В	Г	Г	В	В
20	68	В	В	3	Б	100

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.: Наука, 1991.

2. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М.: Наука, 1988.

3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука, 1983.

4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 2002.

5. Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Хайкин С. Э., Эльцин И. А., Яковлев И. А. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. Т. 3/ Под ред. И. А. Яковлева. М.: Физматлит, 2005.

6. Чертов А. Г., Воробъев А. А. Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1988.

7. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. СПб.: СпецЛит, 2002.

8. Лаушкина Л. А., Солохина Г. Э., Хохлачева Г. М. Практический курс физики. Электричество/ Под ред. Г. Г. Спирина. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 2008.

9. Анисимов В. М., Лаушкина Л. А., Третьякова О. Н. Физика в задачах/ Под ред. О. Н. Третьяковой. 4-е изд. М.: Вузовская книга, 2012.

10. Бабецкий В. И., Третьякова О. Н. Прикладная физика. Механика. Электромагнетизм. М.: Высшая школа, 2005.

11. Демков В. П., Третьякова О. Н. Физика. Теория. Методика. Задачи. М.: Высшая школа, 2001.

12. Демков В. П., Третьякова О. Н. Физика. Молекулярная физика. Тепловые явления. Электричество и магнетизм. 5-е изд., перераб. М.: Изд-во МАИ, 2006.

13. Турчина Н. В., Рудакова Л. И., Суров О. И. и др. 3800 задач по физике. М.: Дрофа, 2000.

14. Демков В. П., Суров О. И. Физика. Механика. Кинематика. Динамика. Законы сохранения. М.: Изд-во МАИ, 2017.

15. Демков В. П., Суров О. И. Физика. Механика. Вращательное движение. Механические колебания и волны. Специальная теория относительности. М.: Изд-во МАИ, 2018.

16. Демков В. П., Суров О. И., Ципенко А. В. Физика. Молекулярная физика. Тепловые явления. М.: Изд-во МАИ, 2019.

Оглавление

Тем. план 2020, поз. 13

Демков Владимир Павлович
Суров Олег Иванович
Ципенко Антон Владимирович

ФИЗИКА
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
Электростатика. Постоянный ток

Редактор *М. С. Винниченко*
Компьютерная верстка *В. П. Демкова*

Подписано в печать 21.02.2020.
Бумага писчая. Формат 60х84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 9,75. Тираж 500 экз.
Зак. 1082/765.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993