МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

РАСКРАСКА ВЕРШИН ГИПЕРГРАФА

Студент: Пивницкий Д.С.
Группа: М8о-101Б-19
Преподаватель: Смерчинская С.О.
Оценка:____________

Дата:_____________

Задания
Вариант 22

1. Определить для орграфа заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определить:

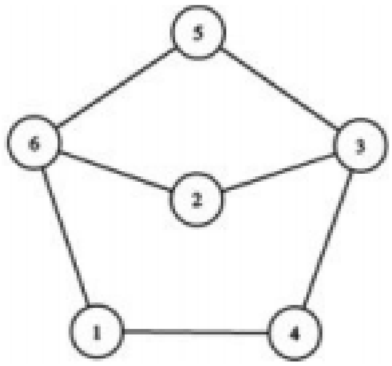
a) Матрицу односторонней связности.

b) Матрицу сильной связности.

c) Компоненты сильной связности.

d) Матрицу контуров.

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



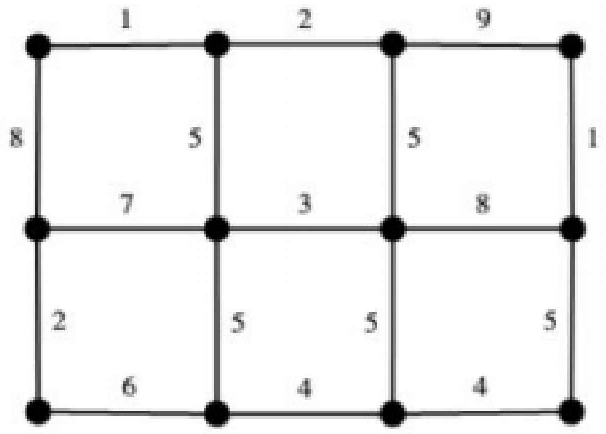
3. Используя алгоритм «фронта волны», найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

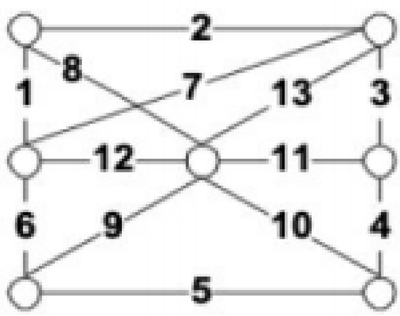
4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

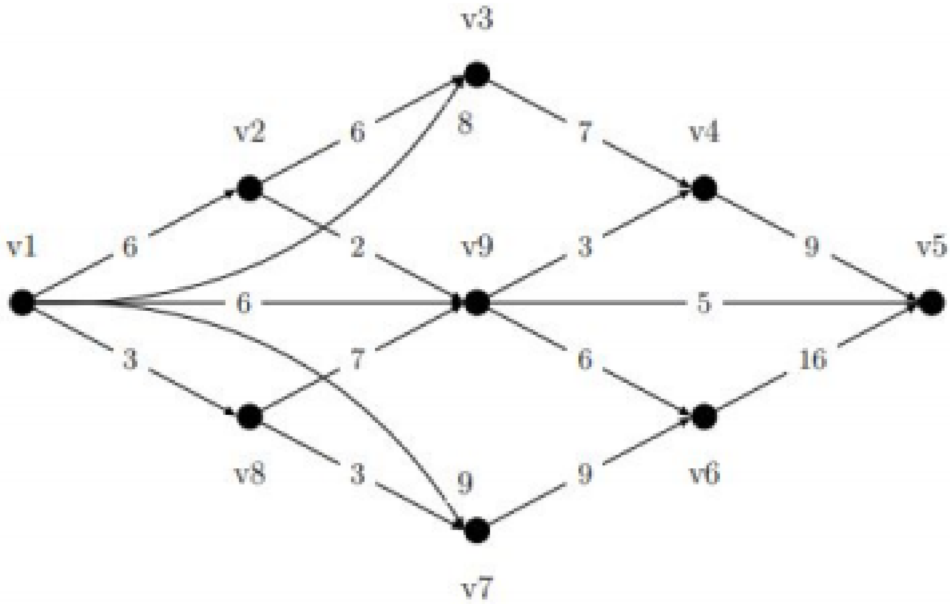
5. Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



6. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2, а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



7. Построить максимальный поток по транспортной сети.



8. Раскраска вершин гиперграфа.

Емеличев. Лекции по теории графов.

Кристофиди. Теория графов. Алгоритмический подход.

Задание 1

а)

$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3;$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

T - матрица односторонней смежности

б)

$S = T \mathbin{\&} T^T$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbin{\&} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица сильной связности.}$$

в)

$V_1 = \{v_1, v_4\};\ V_2 = \{v_2, v_3\};$ – компоненты сильной связности.

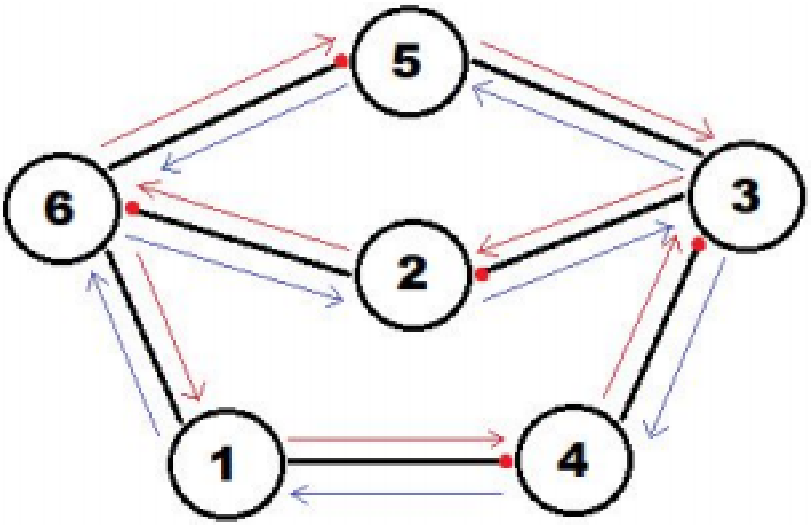
г)

$K = S \& A$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – матрица контуров

следовательно, дуги $< V_1, V_4 >$, $< V_2, V_3 >$, $< V_3, V_2 >$, $< V_4, V_1 >$ принадлежат какому либо контуру исходного графа

Задание 2

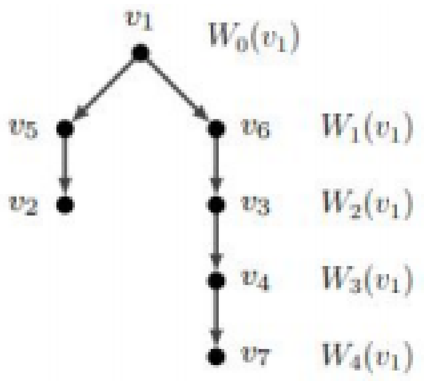


Маршрут обхода:

1→ 4→3→2→ 6→5→3→ 4→1→6→ 2 →3→5→ 6→1

Задание 3

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$v_1 \in W_0$

$\Gamma W_1(v_1) = \{v_5, v_6\}$

$\Gamma W_2(v_1) = \{v_2, v_3\}$

$\Gamma W_3(v_1) = \{v_4\}$

$\Gamma W_4(v_1) = \{v_7\}$

4

Задание 4

Задание 5

Задание 6

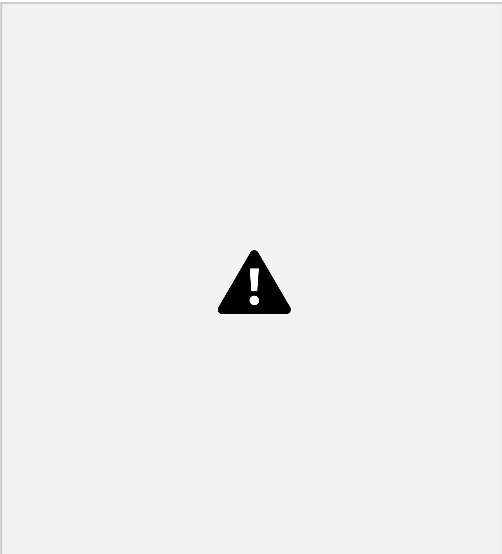
Цикломатическая матрица C:

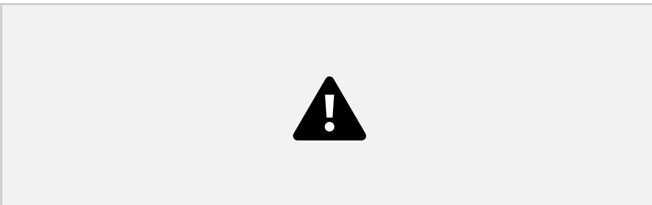
Закон Кирхгофа для напряжений:

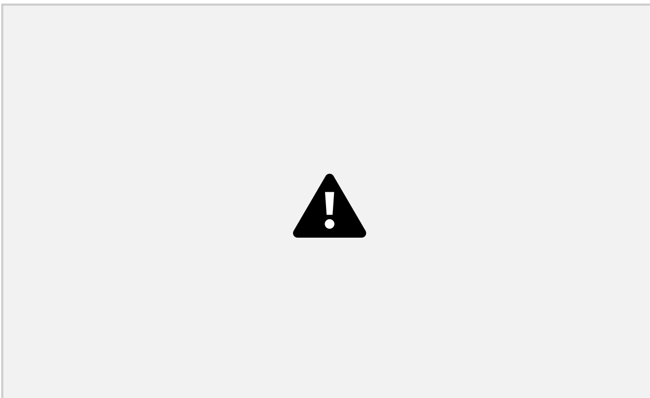
Выпишем уравнения Кирхгофа для токов. Найдем матрицу инцидентности B орграфа:

Совместная система состоит из систем (1) и (2). 13 уравнений и 13 неизвестных — токи $I_1 \ldots I_{13}$; E_1 ; E_2 ; R_2 ; R_3 ; R_4 ; R_5 ; R_6 ; R_7 ; R_8 ; R_9 ; R_{10} ; R_{11} ; R_{12} ; R_{13} — известны.

Задание 7







Задание 8

Теоретические сведения.

Гиперграф *(H)* – обобщение простого графа, когда рёбрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества вершин. Пусть *V* – конечное непустое множество, *E* – некоторое семейство непустых различных подмножеств множества V. Пара *(V, E)* называется гиперграфом с множеством *вершин V* и множеством *рёбер E.*

Если вершина v $\in$ V принадлежит ребру *e* $\in$ E, то будем говорить, что они *инцидентны*. Число $|E(v)|$ называется степенью вершины *v*, а $|e|$ – степенью ребра *e*. Вершина гиперграфа, не инцидентная никакому ребру, называется *изолированной*.

Для любого гиперграфа можно определить граф инциденций – двудольный граф с множеством вершин $V \cup E$ и множеством рёбер $\{(v, e) : (v, e) \in V \times E, v \in e\}$. Для гиперграфов также существует понятие вершинной раскраски. Раскраску вершин гиперграфа будем называть правильной, если любые две вершины v_i, v_j, принадлежащие одному ребру e_t v_i, $v_j \in e_t$, $i \neq j$ имеют разные цвета.

Хроматическое число $\chi(H)$ – наименьшее число цветов, достаточное для правильной раскраски гиперграфа H.

Двудольный граф – граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Описание алгоритма.

Гиперграф задаётся с помощью матрицы инцидентности, где 1 – означает принадлежность к ребру, а 0 – отсутствие принадлежности.

Сперва следует преобразовать матрицу инцидентности в список смежности вершин и упорядочить его.

1. Построить список смежности вершин.
2. Упорядочить по убыванию степеней (количество рёбер, содержащих данную вершину).

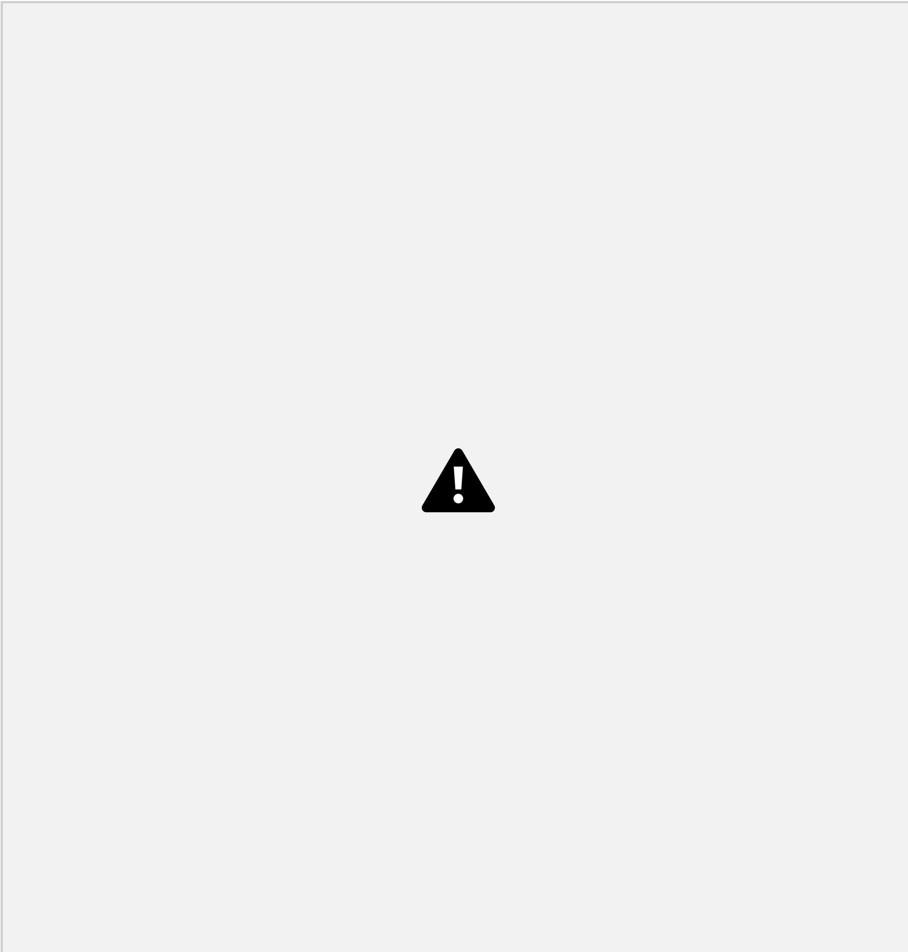
Затем следует непосредственно раскраска:

1. Окрасить первую вершину в цвет 1.
2. Выбрать цвет окраски 1.
3. Пока не окрашены все вершины, повторять п. 3.1 – 3.2:

    3.1. Окрасить в выбранный цвет всякую вершину, которая не смежна с другой, уже окрашенной в этот цвет.

    3.2. Выбрать следующий цвет.

Логическая блок-схема алгоритма.

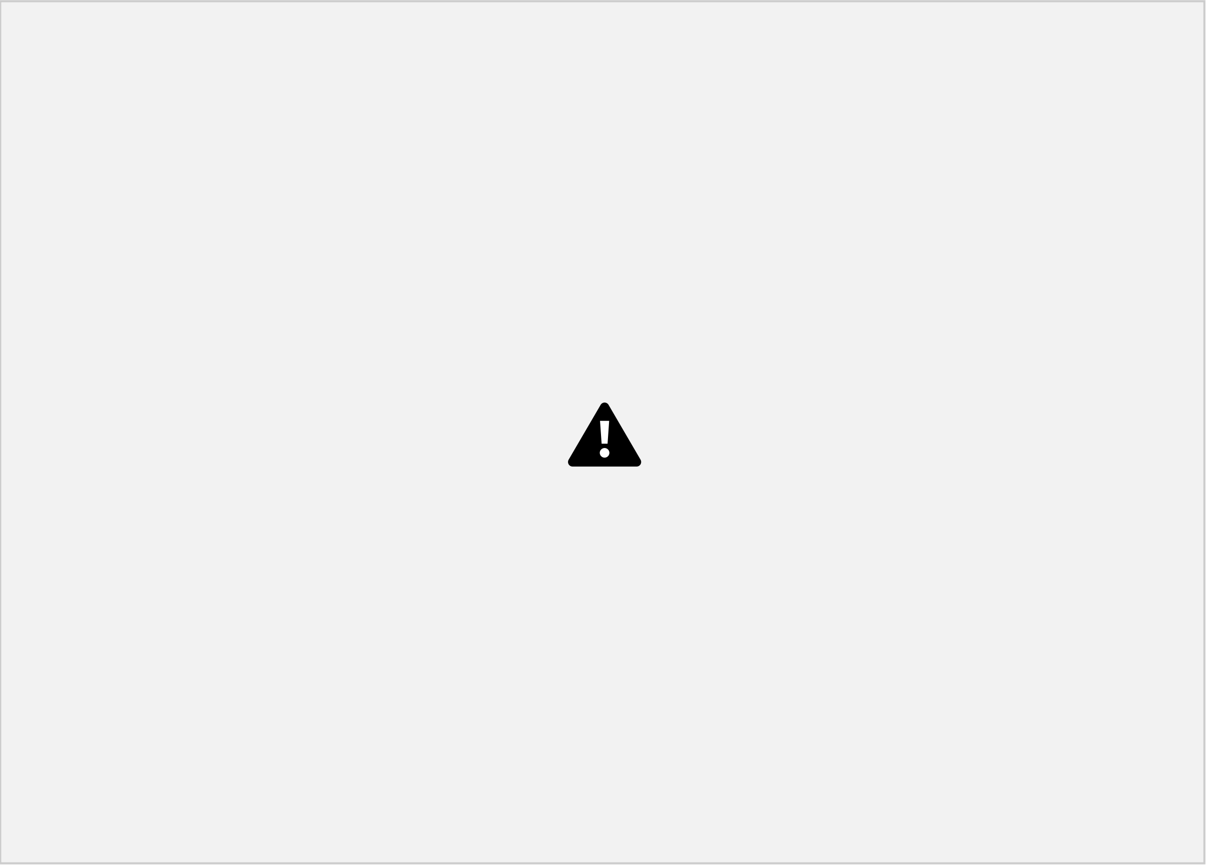


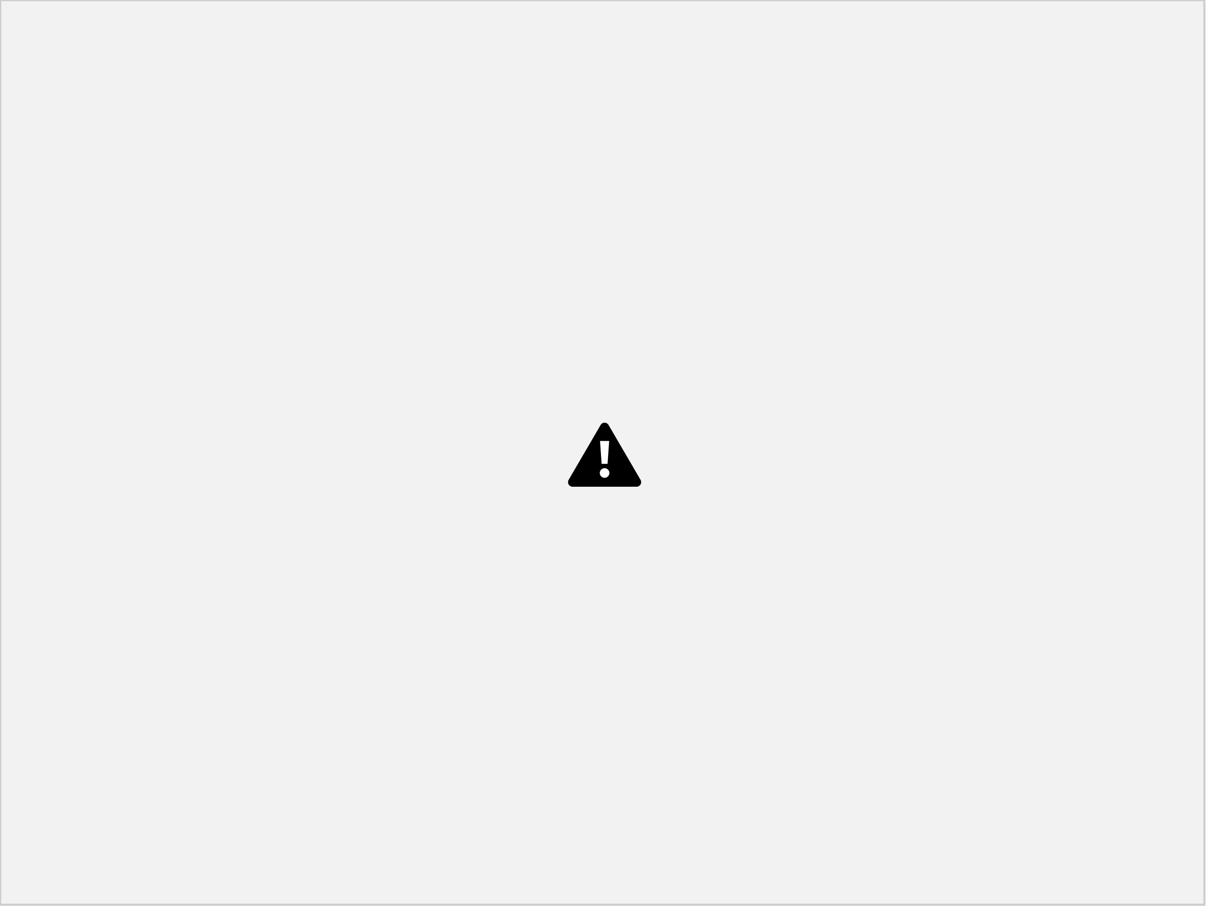
Программа написана на языке Python 3.7 с помощью библиотеки Qt (PyQt5), а также Networkx, для создания интерфейса и отрисовки графа соответственно.

Оценка сложности алгоритма.

Не учитывая время, затраченное на сортировку вершин в порядке невозрастания степеней, необходимо сделать цикл по всем вершинам гиперграфа. Для каждой необходимо найти минимальный цвет, что в худшем случае может занять $O(V^2)$. Значит, общее время составит $O(V^3)$ в худшем случае.

Демонстрация запуска и интерфейса.





Тестовые примеры.

Скриншоты программ.

Пример 1. Вводится частный случай гиперграфа с 6 вершинами и 3 рёбрами. Граф представлен на рис. 1.

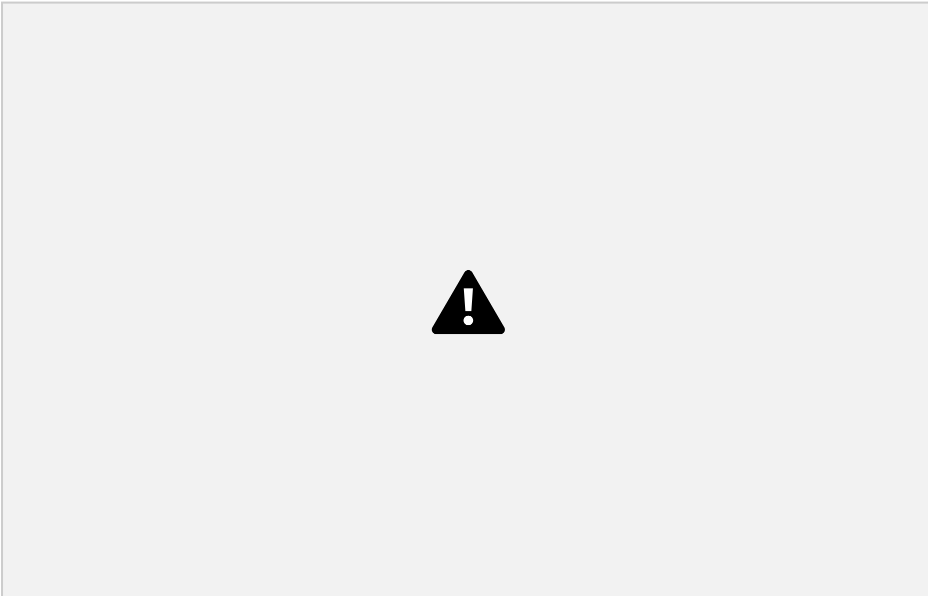


Рис. 1.1: Частный случай гиперграфа

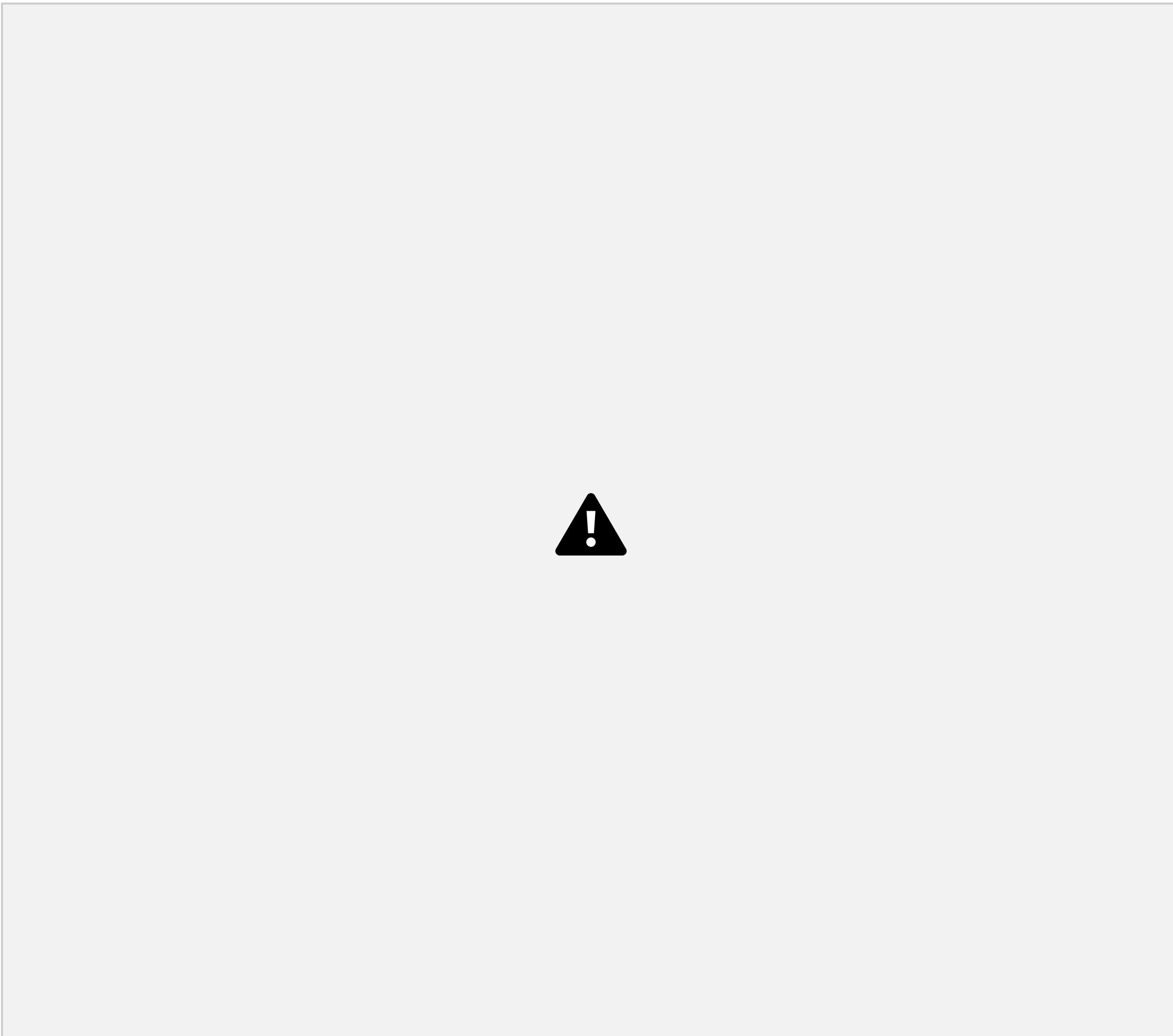


Рис. 1.2: Представление графа в виде двудольного

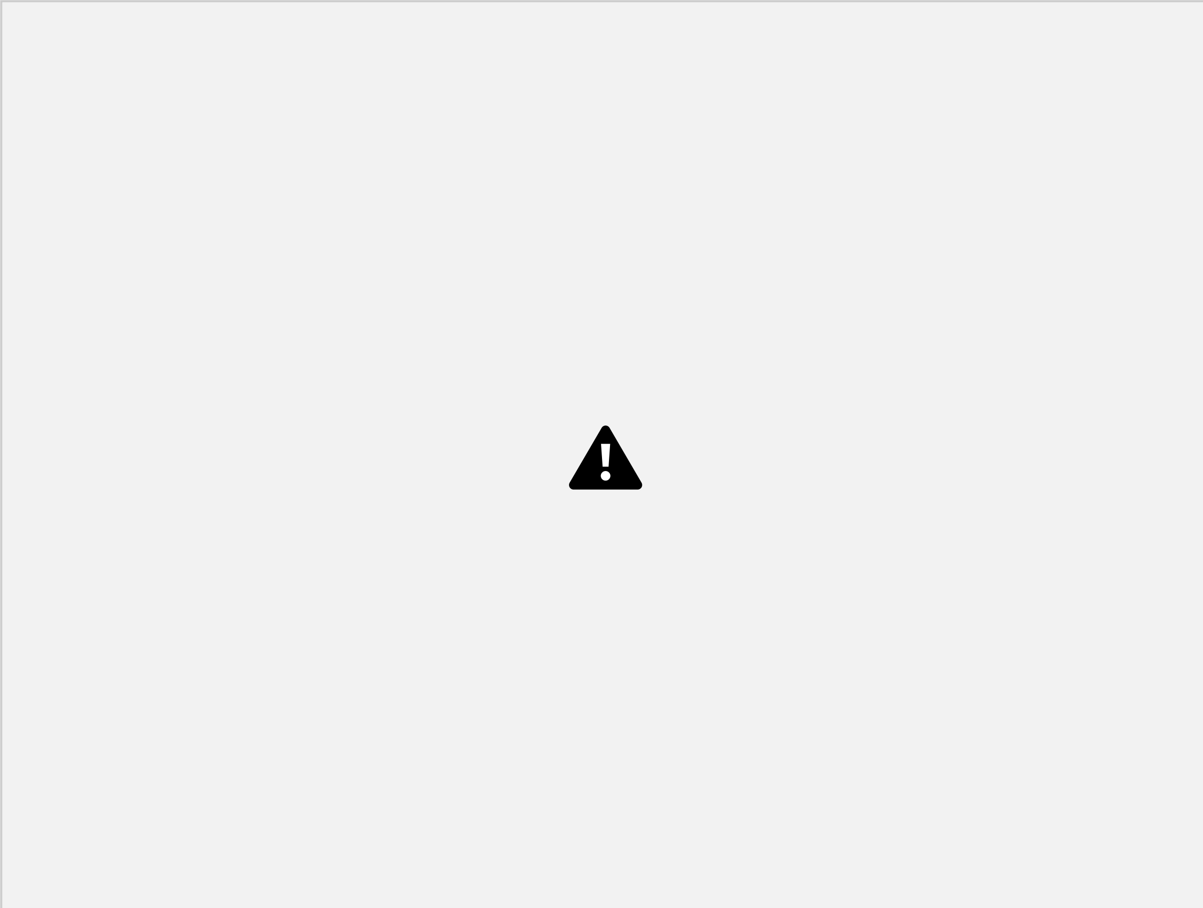


Рис. 1.3: Вид программы и матрица инцидентности

Пример 2. Дан гиперграф с 5 вершинами и 3 рёбрами. Граф представлен на рис. 2.

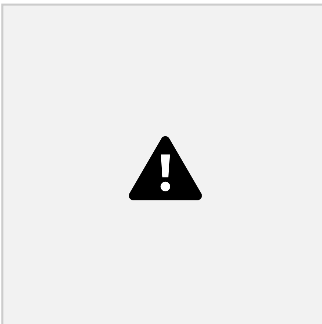


Рис. 2.1: Гиперграф в виде матрицы смежности

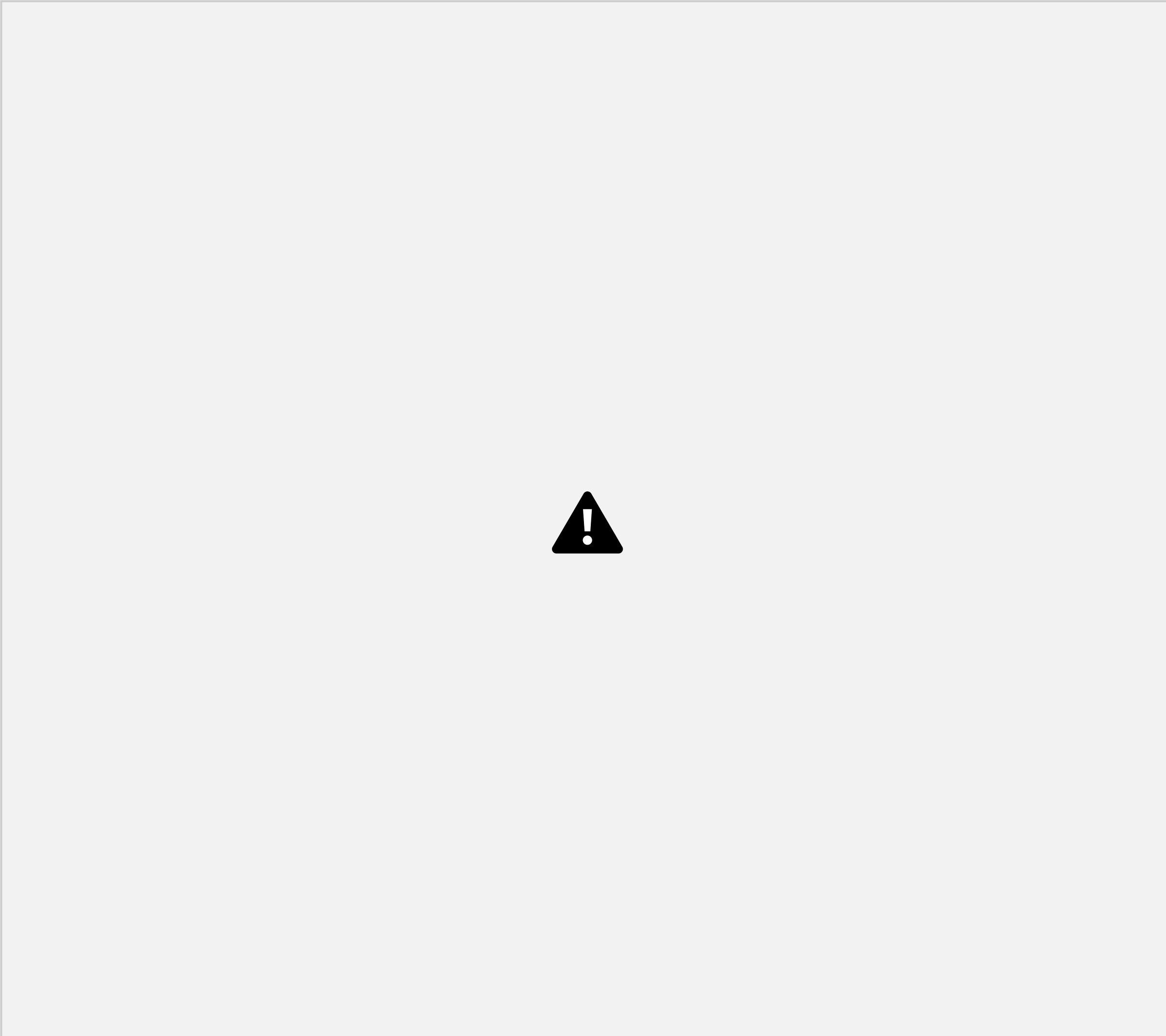


Рис. 2.2: Представление графа в виде двудольного

Примеры прикладных задач.

Для частного случая гиперграфа, например: в задачах календарного планирования осмотры представляются в виде временных интервалов. Каждому осмотру можно сопоставить вершину графа, причём две любые вершины будут соединены ребром только тогда, когда соответствующие им осмотры нельзя осуществлять одновременно. Требуется составить такой график осмотра, который связан с наименьшими временными затратами. Задача эквивалентна задаче о раскраске вершин графа с использованием наименьшего числа цветов. Для гиперграфа можно положить следующую общую задачу: имеется N человек с разными навыками. Есть также K умений, которыми они владеют и всех людей надо разбить на K групп по L человек лучших в этом деле. Например, распределить сбалансированные группы для работы над разными проектами. Пусть каждому элементу из N соответствует какой-то цвет. Тогда вопрос можно сформулировать так: всегда ли существует раскраска в t цветов, при которой группы по L человек будут "не одноцветны"? Такая задача является более общей задачей, однако мы можем находить минимальное возможное количество цветов, при которых эти условия выполнены

Список литературы

[1] Никос Кристофидес. Теория графов: алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. - 423 стр.

[2] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. - 384 стр.

[3] Акользин И.А. Труды МФТИ 2017, Том 9, №4. О справедливых раскрасках простых гиперграфов. М.: Издательство МФТИ, 2017.

[4] Jurgen Hackl. TIKZ - NETWORK MANUAL version 1.1. 2019.

[5]Python 3 и PyQt 5. Разработка приложений. Прохоренок Н., Дронов В. Издательство БХВ-Петербург, 2016.

Содержание