Сошников Дмитрий Валерьевич
к.ф.-м.н., доцент
http://soshnikov.com

Лекция 3: Логика

Логическое программирование

https://soshnikov.com/courses/logpro/

Что такое логика?

Логике – больше 2000 лет!

Наука логики

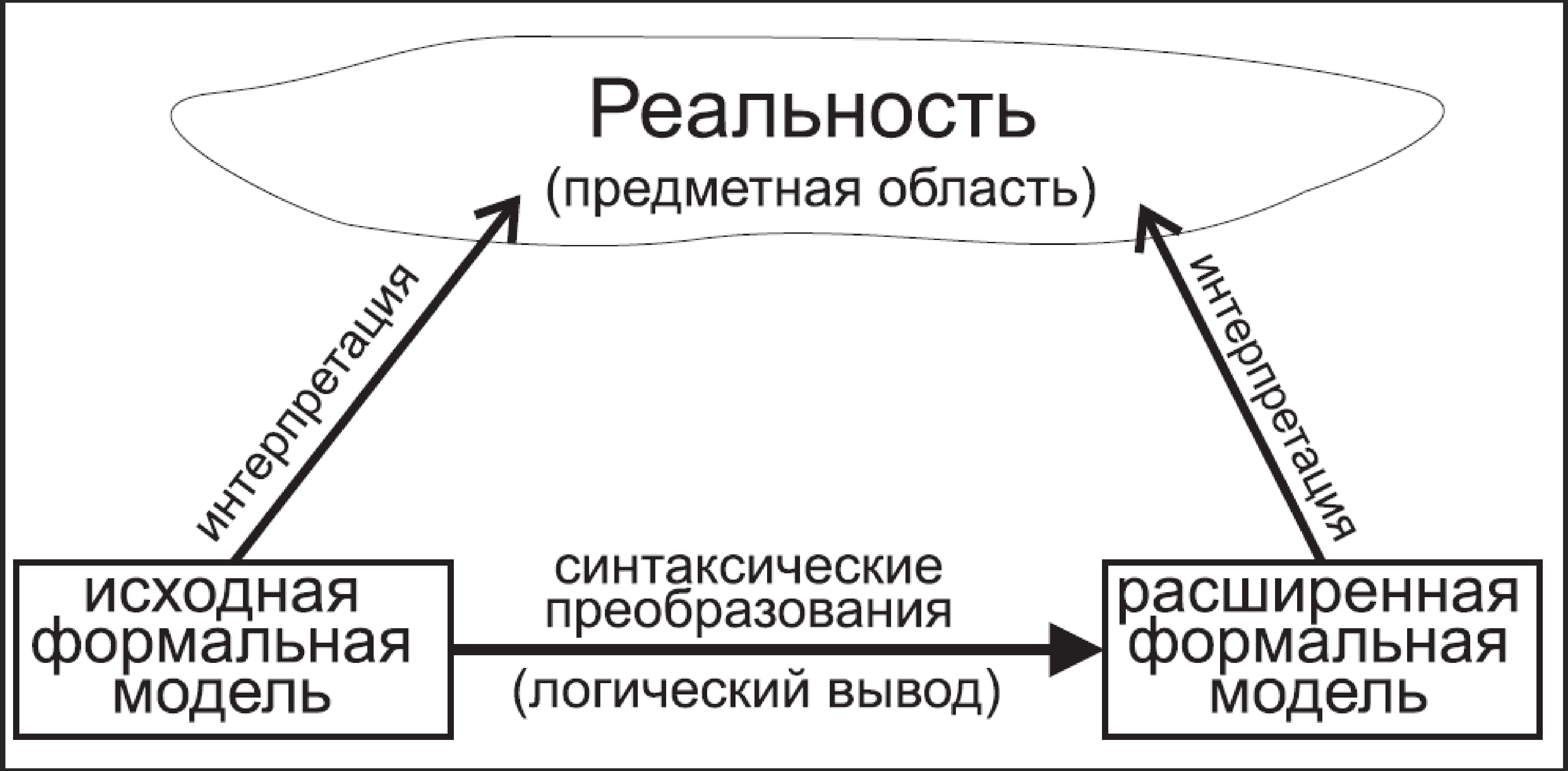
- Аристотель: «Наука логики»
  - Силлогизмы
    - Все люди смертны
    - Сократ – человек
    - => Сократ – смертен
    - Все математики изучали мат.лог.
    - Вася - математик
    - => Вася изучал мат.логику
  - Один из 64-х видов силлогизмов, 19 модусов

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Все } X \text{ обладают свойством } Y\\ A \text{ является } X\end{array}}{\therefore A \text{ обладает свойством } Y}$$

История логики

- Аристотель
- Джордж Буль, де Морган
- Фреже (понятие квантора, предиката)
- Пеано (формализация арифметики)
- Н.Бурбаки

Основополагающий принцип



Формальная аксиоматическая система

Определение ***Формальная аксиоматическая система*** *определяется заданием следующих компонентов:*

1. ***Алфавит*** $A = \{A_0, \ldots, A_n\}$ *— некоторое конечное непустое множество различимых знаков*
2. *Множество* ***правильно построенных формул*** $\Phi \subseteq A^*$ *в алфавите* A*. Это множество как правило задается некоторым набором правил или* ***грамматикой****.*
3. *Множество* ***аксиом*** $\Gamma_0 \subseteq \Phi$
4. *Множество* ***правил вывода****, позволяющих получать из нескольких правильно построенных формул заключения*

Определение ***Выводом*** *формулы* f *из множества формул* Γ *называется последовательность* $f_0, \ldots, f_n = f$*, где* f_i *получается применением какого-либо правила вывода к некоторым формулам из* $\Gamma \cup \{f_0, \ldots, f_{i-1}\}$*. В этом случае говорят, что формула* f ***выводима*** *из множества* Γ *(обозначается* $\Gamma \vdash f$*). Формула* f *называется* ***выводимой в формальной аксиоматической системе*** *(обозначается* $\vdash f$*), если* $\Gamma_0 \vdash f$*.*

Пример формальной системы

- Алфавит: {0,...,9,*,+,(,),}
- ППФ:
  - <цифра> ::= 0 | 1 | ... | 9
  - <число> ::= <цифра> | <цифра><число>
  - <оператор> ::= + | *
  - <выражение> :== <число> | (<выражение>) | <выражение><оператор><выражение>

Пример формальной системы

- Правила вывода:
  - <число>*1 $\vdash$ <число>
  - <число>*0 $\vdash$ 0
  - …
- Пример вывода:
  - (12+0)*1 $\vdash$ 12+0 $\vdash$ 12

$\vdash$ - выводимость

Интерпретация

- Формальная система имеет смысл, когда ее формулам придается некоторая семантика
- Семантика задается с помощью интерпретации
- Вывод в формальной системе обычно сохраняет интерпретацию
- Пример:
  - I : ППФ –> N
- Обозначение: I(F)

Корректность и полнота

- $F \vdash G$ – формула G выводима из F
- $F \models G$ – формула G следует из F, если $\forall I\ I(F)=И \Rightarrow I(G)=И$

  - $F \vdash G \Rightarrow I(F) = I(G)$ [$F \models G$] (корректность)
  - $F \models G \Rightarrow F \vdash G$ – неверно (неполнота)

Логика и исчисление высказываний

Определение 3.3 ***Правильно построенная формула логики высказываний*** *(ППФ) определяется следующими правилами:*

1. *Высказывание* $p, q, \ldots$ *является ППФ.*
2. *Если* p, q *— ППФ, то ППФ также являются* $(p \wedge q), (p \vee q), (\neg p), (p \supset q), \ldots$
3. *Никакая другая строка не является ППФ.*

Определение 3.4 *Пусть* F *— некоторая ППФ.* ***Интерпретацией*** $\mathcal{I}$ *формулы* F *называется функция* $\mathcal{I} : \mathrm{Vars}\, f \to \{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F}\}$*, приписывающая каждой пропозициональной переменной истинностное значение: истина* $(\boldsymbol{T})$ *или ложь* $(\boldsymbol{F})$.

Пример

- Если Петя опоздает на работу, то его уволят или сделают выговор. Петя опоздает, если не придет автобус, или не прозвонит будильник.
- Обозначим:
  - Опоздание: l
  - Не пришел автобус: b
  - Будильник не звонил: a
  - Уволили: f
  - Сделали выговор: t

$$l \supset (f \vee t)$$

$$(a \vee b) \supset l$$

Интерпретация

- Будильник не прозвонил, Петя опоздал, его уволили:
  - { a=И, l=И, f=И, t=Л, b=Л }

$$\begin{aligned} l \supset (f \lor t) &= \text{И} \\ (a \lor b) \supset l &= \text{И} \end{aligned}$$

- Будильник прозвонил, Петя опоздал, но его не уволили и не сделали выговор:
  - { a=И, l=И, f=Л, t=Л, b=Л }

$$\begin{aligned} l \supset (f \lor t) &= \text{Л} \\ (a \lor b) \supset l &= \text{И} \end{aligned}$$

Общезначимые формулы

- Определение. *Формула F называется* ***общезначимой*** *(обозначается* $\models F$*), если она истина во всех интерпретациях. Формула F называется* ***выполнимой****, если она истина хотя бы в одной интерпретации.*

- Определение. *Формула B* ***следует*** *из формулы A (обозначают* $A \models B$*), если в любой интерпретации, для которой истинно A, оказывается истинным и B. Можно распространить следствие на произвольное конечное множество высказываний следующим образом:* $A_1,\ldots,A_n \models B$ *означает* $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$*.*

- Теорема. $A \models B \quad <=> \quad \models A \supset B$

Исчисление высказываний

- Надо добавить аксиомы + правила вывода
- Правило вывода:
  - $A, A \supset B \vdash B$ (modus ponens)
- Аксиомы:
  - $p \supset (q \supset p)$
  - $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
  - $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$

Смысл упражнения

- **Теорема** о дедукции: $G, A \vdash B <=> G \vdash A \supset B$, *где G - произвольное множество формул логики высказываний (в т.ч. множество аксиом)*
- **Следствие** $A \models B <=> A \vdash B$

Полнота и непротиворечивость

- Определение. *Исчисление называется* ***полным*** *(complete), если любая общезначимая формула A выводима (т.е.* $\models A \Rightarrow\ \vdash A$*)*
- Определение. *Исчисление называется* ***формально*** *(или* ***внутренне****)* ***непротиворечивым*** *(consistent), если не существует такой формулы A, что* $\vdash A$ *и* $\vdash \neg A$*.*
- Определение. *Исчисление называется* ***семантически непротиворечивым*** *или* ***достоверным*** *(sound), если любая выводимая формула является общезначимой, т.е.* $\vdash A \Rightarrow\ \models A$*.*

Доказательство общезначимости

- Нас интересует возможность доказать общезначимость/выводимость формул

- **Синтаксический** метод: пытаемся получить $\vdash A$ (построить вывод)
- **Семантический** метод: пытаемся получить $\models A$ (перебрать все интерпретации)

- Исчисление **разрешимо**, если существует алгоритм определения того, является ли заданная формула общезначимой или нет

Построение вывода в исчислении

Разрешимость исчисления высказываний

- Исчисление высказываний **разрешимо**
- Доказательство: достаточно построить алгоритм семантической проверки общезначимости.
  - Простой перебор 2^n вариантов интерпретации

Логика и исчисление предикатов

- Расширим логику высказываний следующими понятиями
  - Предикат P(…) – высказывание, зависящее от аргумента
  - Аргументами могут быть термы: **константы** (a,b,…) или **функциональные термы** вида $f(t_1,\dots,t_n)$, где t_i – термы, f - функтор
  - Кванторы $\forall$ и $\exists$
    - $(\forall x)P(x)$
  - Переменные x,y,…

Синтаксис

Определение *__Термом__ в логике предикатов является:*

1. ***Предметная константа*** a_i, *выбираемая из некоторого множества предметных констант* M. *Предметные константы служат для уникального обозначения объектов моделируемой предметной области.*

2. ***Переменная*** x_i

3. ***Функциональный терм*** $f(t_1, \ldots, t_n)$, *где* t_i *— термы. В этом случае говорят, что функциональный символ* f *имеет* **арность** n. *Когда важно подчеркнуть арность функционального символа, используют обозначение* $f^{(n)}$. *Следует отметить, что одинаковые функцинальные термы с различной арностью считаются различными.*

Определение ***Правильно-построенной формулой логики предикатов*** (well-formed formula) *является:*

- *Атомарная формула вида* $P(t_1, \ldots, t_n)$, *где* P *— предикатный символ арности* n, t_i *— термы.*
- *Формулы вида* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ *и т.д., где* A *и* B *— правильно простроенные формулы*
- *Формулы вида* $(\forall x)F$ *и* $(\exists x)F$, *где* F *— правильно построенная формула, в которой переменная* x *является* **свободной**. *В полученных формулах переменная* x *становится* **связанной**.

Пример: арифметика

- 0, s(.)
- 2+2 = 4 => add(s(s(0)),s(s(0)),s(s(s(s(0)))))

Семантика логики предикатов

- Задается **область интерпретации** D.
- После этого необходимо:
  - Придать значения из области интерпретации всем предметным константам a_i, что описывается некоторой функцией I_a: $\{a_i\} \rightarrow D$
  - Придать некоторый смысл всем функциональным символам $f_i^{(n)}$ при помощи функции I_f: $\{f_i^{(n)}\} \rightarrow (D^n \rightarrow D)$
  - Придать некоторые значения всем предикатным символа $P_i^{(n)}$ в формуле, функцией I_p: $\{P_i^{(n)}\} \rightarrow (D^n \rightarrow \{\mathrm{T,F}\})$
- Таким образом, **интерпретация** определяется как совокупность $I = \langle I_a, I_f, I_p \rangle$

Пример

- Все люди смертны $H(x) \supset M(x)$
- Сократ – человек H(сократ)
- => Сократ – смертен M(сократ)

- D – множество всех существ и преметов / множество людей
- H(x) = { x – человек } H(x) = { x – лысый}
- M(x) = { x – смертен } M(x) = { x – умный}

Чистое vs. прикладное исчисление

- Прикладное исчисление предикатов расширяется некоторым набором аксиом
- Например, формальная арифметика Пеано:
  - 0, s(x), +(x,y,z) – константа и функциональные символы
  - $+(0,x,x)$
  - $+(x,y,z) \vdash +(s(x),y,s(z))$
- Пример:
  - $+(0,s(s(0)),s(s(0))) \vdash +(s(0),s(s(0)),s(s(s(0)))) \vdash +(s(s(0)),s(s(0)),s(s(s(s(0)))))$

Полнота и непротиворечивость

- **Теорема** Исчисление предикатов непротиворечиво
- **Теорема** Гёделя о полноте исчисления предикатов. *Чистое исчисление предикатов первого порядка полно, т.е. любая общезначимая формула выводима (*$\models A \Rightarrow\ \vdash A$*).*
- **Теорема** Гёделя о неполноте. *Любая прикладная теория первого порядка, содержащая формальную арифметику, не является полной теорией, т.е. существуют такие истинные формулы (*$\models F$*), что ни* F*, ни* $\neg F$ *не являются выводимыми в соответствующем исчислении.*

Идея доказательства

- Если теория содержит арифметику, то мы можем «пронумеровать» все формулы!
- $P(x)$ = { формула с номером x – невыводима }
- Рассмотрим формулу $F = P(\#F)$
- Если F – выводима => F - истинна
  => F-невыводима
- Получается, что F - невыводима, но при этом истинна

А как быть с вычислимостью?

- Возможно ли перебрать все интерпретации?
- Арифметика: 0, s(.), +(.,.)

Эрбрановская интерпретация

- $H_0 = \{ 0 \}$
- $H_1 = \{ s(0), +(0,0) \}$
- $H_2 = \{ s(s(0)), +(s(0),0), +(0, s(0)), +(s(0),s(0)) \}$
- …

- $H_\infty = \cup H_i$

Эрбрановская интерпретация

- Для любого множества формул есть множество интерпретаций
- Для многих вопросов естествено рассматривать т.н. Эрбрановскую интерпретацию
  - D – эрбрановский универсум $H = \cup H_i$
    - $H_0 = \{a, b, \dots.\}$, $H_i = H_{i-1} \cup \{f^{(j)}(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in H_i\}$
  - Функции и константы интерпретируются самими собою
  - Интерес представляет только интерпретация предикатов

Теорема Чёрча

- Множество возможных Эрбрановских интерпретаций счетно

- **Теорема** Чёрча. *Исчисление предикатов является неразрешимой теорией, т.е. не существует алгоритма установления общезначимости произвольной формулы логики предикатов.*

Что же делать?

- Возвращаться к синтаксическому способу доказательства
- Рассматривать менее выразительное подмножество логики предикатов

Вопросы?

- http://t.me/log_pro
- https://soshnikov.com/courses/logpro/

- Литература: Верещанин, Шень. Языки и исчисления. https://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf