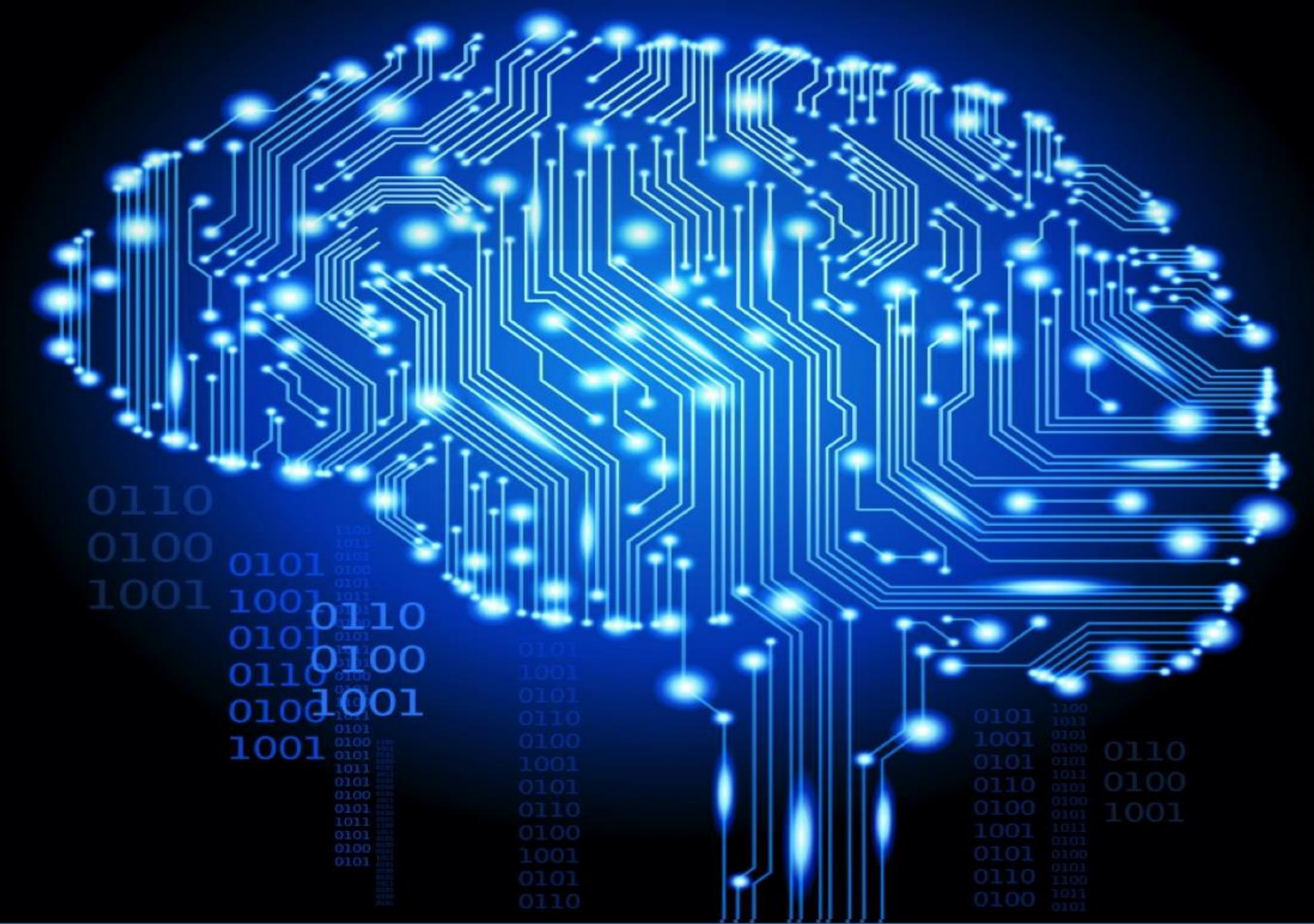


Statistical Learning and Computational Finance Lab.
Department of Industrial Engineering
http://slcf.snu.ac.kr

Lecture 5: 선형대수 및 다변량 해석학 연습

Linear Algebra

Vector Products

- 두 벡터 x, y

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 은 (n,1) 벡터

- Inner product

- $x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Matrix Multiplication

- A : m x p , B : p x n 행렬
- 행렬의 곱
- AB = C : m x n
- 예시
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ => $AB = \begin{bmatrix} 2*1+4*3 & 2*0+4*1 \\ 2*1+5*3 & 2*0+5*1 \end{bmatrix}$
- 주의할 점 : $\mathrm{AB} \neq BA$

Seoul National University

SLCF What You Imagine is What You Get

Determinant

- 2 x 2 matrix
  - $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
  - $\det A = ad - bc$
- 3x3 matrix
  - $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
  - $\det A = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$

Determinant

- N x N matrix A에 대하여,
  - A의 두 행이 같으면, $\det(A) = 0.$
  - 한 행의 n배를 다른 행에서 빼는 연산은 행렬식을 변화시키지 않는다.
  - A 가 0인 행이나 열을 가지면, $\det(A) = 0.$
  - A 의 전치 행렬의 행렬식은 A 자신의 행렬식과 같다
    $\det(A^T) = \det(A).$

Determinant (review)

1. A가 삼각(Triangular)행렬이면, $\det(A)$는 주대각 성분 $a_{11}a_{22}...a_{nn}$의 곱이다.
   특히, A의 대각 성분이 모두 1이면, $\det(A)=1$.
2. 행렬식은 역행렬이 존재하는 지를 볼 수 있다. A의 행렬식이 0이면, A 는 특이행렬(singular)이다. $\det(A) \neq 0$ 라면 A는 가역(invertible) 행렬이다.
3. 두 정방행렬 $A, B \in \mathfrak{R}^{n\times n}$에 대해, 곱 AB에 대한 행렬식은 행렬식들의 곱과 동일하다.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

4. A의 행렬식은 n차원 공간에서 A의 행들로부터 모서리를 만들었을 때의 평행다면체(parallelepiped) P의 부피와 동일하다.

determinant

$$\begin{vmatrix} x-1 & -4 & 2 \\ -3 & x-2 & -4 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$ 을 만족하는 x 구하기

Positive Definite Matrix

- 행렬 A에 대해 모든 nonzero vector $x \in R^n$에 대해 $x^T Ax > 0$ 이면 Positive Definite ($x^T Ax \geq 0$ 이면 Positive Semi-Definite) $\Leftrightarrow x \succ 0$ ($x \succcurlyeq 0$)

- Test for P.D matrix (하나만 체크하면 됨)
  - $x^T Ax > 0$ 을 직접 확인
  - 모든 eigenvalue에 대해 $\lambda_i > 0$
  - 행렬 A의 upper left submatrices A_k의 determinant 들이 모두 0보다 크다

Positive Definite Matrix

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 가 positive definite 임을 보이시오.

Positive Definite Matrix

- $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$ 가 positive definite 이기 위한 a의 조건을 구하시오.

Positive Definite Matrix

- $A = C^T C$ 가 positive semi definite 임을 보이시오.

Linear Independence

- 벡터 $v_1, \ldots, v_k$에 대하여 , $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = 0$ 의 해가 오직 $c_1 = c_2 = \cdots = 0$ 이라면, $v_1, v_2, \ldots v_k$ 를 linearly independent 라고 한다.
- 따라서 벡터들이 서로 linearly independent 하다는 것은 나머지 벡터들의 선형조합으로 자기 자신을 만들어낼 수 없다는 것이다.

Linear Independence

- $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$의 linear independence를 검증하시오.

Linear Independence

- $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 의 linear independence를 검증하시오.

Seoul National University

SLCF
What You Imagine is What You Get

Rank of a matrix

- 행렬 A의 rank
  - linearly independent한 col의 개수
  - linearly independent한 row의 개수
  - dimension of col(A), row(A)
- A = (m,n) 행렬
  - m=rank(A) => full column rank
  - n=rank(A) => full row rank

Rank of a matrix

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- A,B의 Rank?

Seoul National University

SLCF What You Imagine is What You Get

Rank properties

행렬 $A, B \in \Re^{m\times n}, C \in \Re^{n\times k}$에 대해

1. $\text{rank}(A) \le \min\{m, n\}$
2. $\text{rank}(A+B) \le \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$
3. $\text{rank}(AC) \le \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(C)\}$
4. $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$
5. 만일 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = n$ 이면 $\text{rank}(AC) = n$이다.

Norm

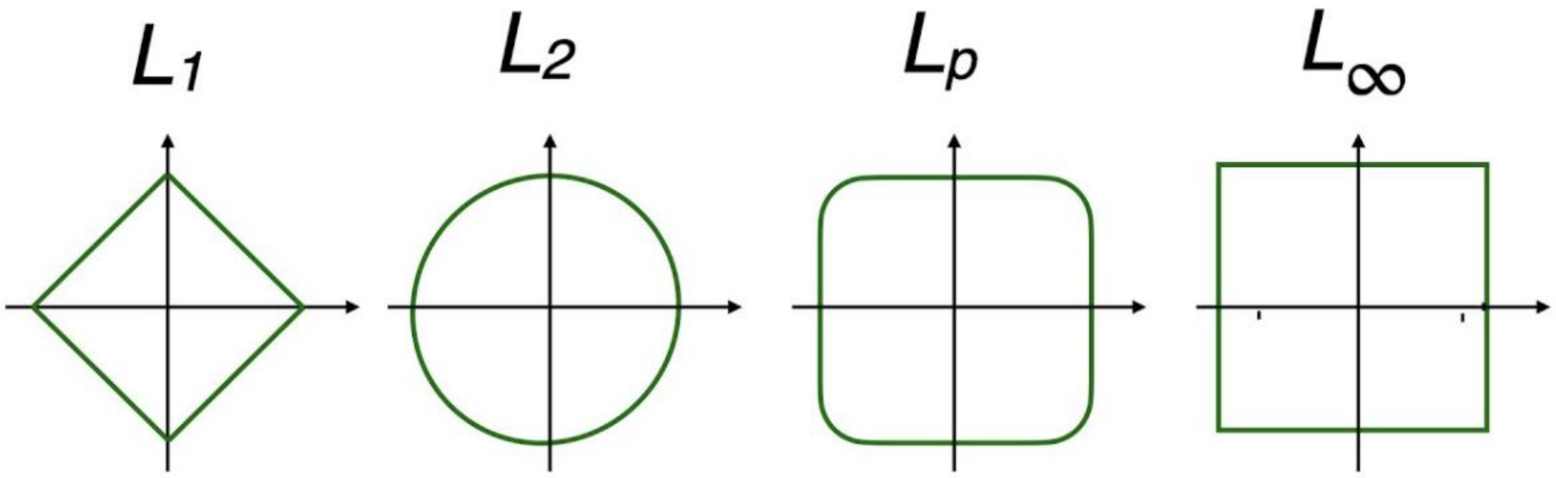
- Norm 의 정의
  - S가 x를 원소로 하는 Vector space 라면, real-valued function $\|x\|$ 가 다음 성질을 만족
  - $\|x\| \geq 0$, for any $x \in S$
  - $\|x\| = 0$, if and only if $x = 0$
  - $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, α는 scalar
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangular inequality)

Norm

- $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 일 때, $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty, \|x+y\|_2$ 를 구하시오.

Vector norm

- Vector p-Norm
  - $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$
  - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$



Matrix norm

- Matrix p-Norm
  - $A \in R^{m \times n}$
  - $\|A\|_p = sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$$

Norm

- $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$일 때, $\|A\|_1, \|A\|_F, \|A\|_\infty$를 구하시오.

Norm

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$일 때, $\|A\|_\infty + \det(A) + rank(A)$ 를 구하시오.

Seoul National University

SLCF
What You Imagine is What You Get

Cauchy-Schwarz Inequality

(1.4) **Proposition.** *Let $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ be real numbers. Then*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.1}$$

Proof: We compute

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_j x_j y_i)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqq 0.$$

This is equivalent to (1.4.1). $\square$

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

등호조건: $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

(*)Norm

😄**보조 정리 2.1. [횔더 부등식 (Hölder Inequality)]**

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$에 대해 만일 $1 \leq p, q \leq \infty$ 이고 $1/p + 1/q = 1$ 이면 다음의 **횔더 부등식(Hölder inequality)** 이 성립한다:

$$|\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \cdot \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

(*)Norm

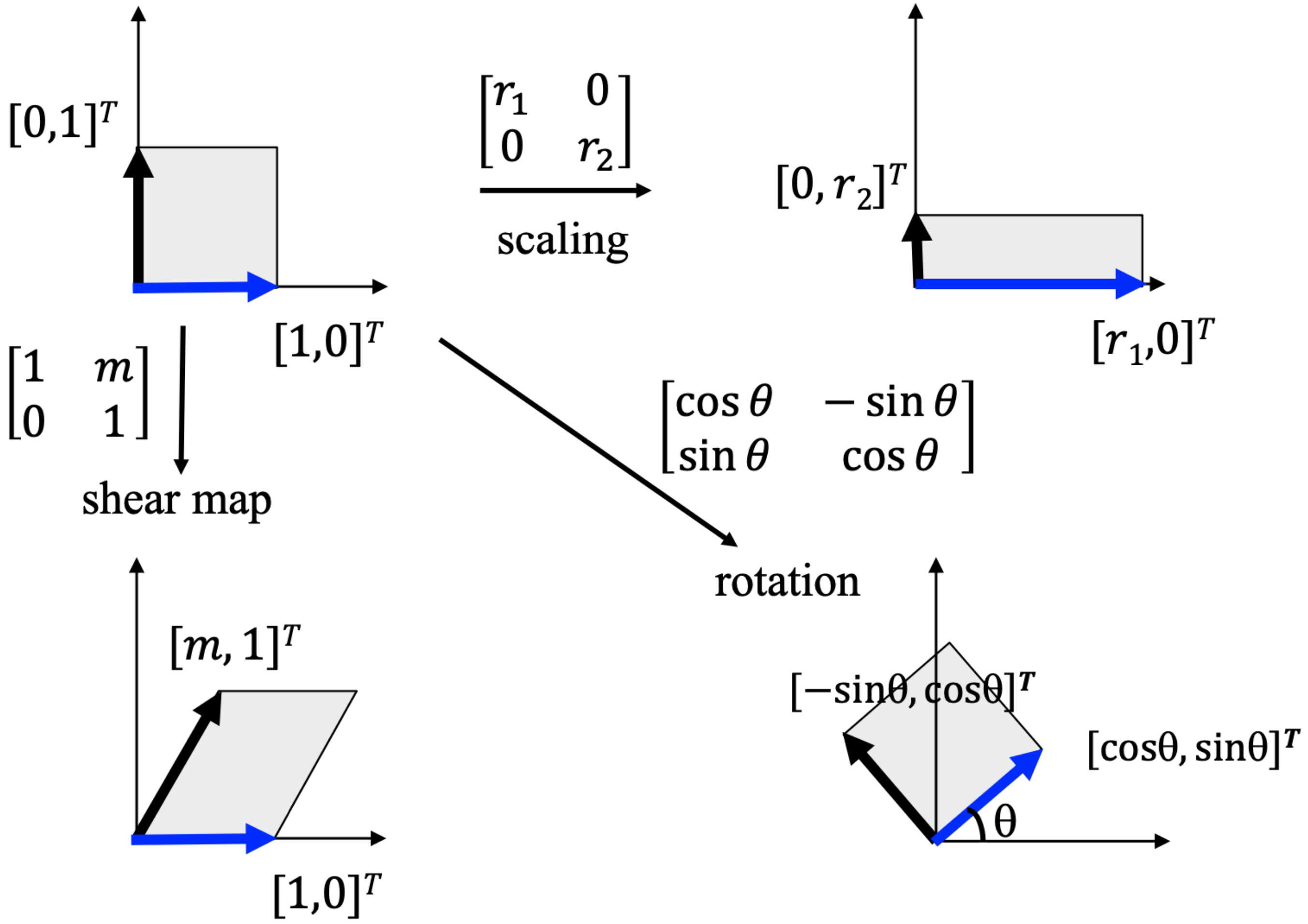
임의의 $A \in \mathfrak{R}^{m\times n}$에 대해,

- $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$: 가장 큰 열의 합
- $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$: 가장 큰 행의 합
- $\exists\, z \in \mathfrak{R}^n$ s.t $A^T A z = \mu^2 z$ where $\mu = \|A\|_2$.

  특히, $\|A\|_2$ 는 $A^T A$의가장 큰 고유값(eigenvalue)의 제곱근이다.
- $\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$
- 임의의 $A \in \mathfrak{R}^{m\times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n\times p}$에 대해, $\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F$

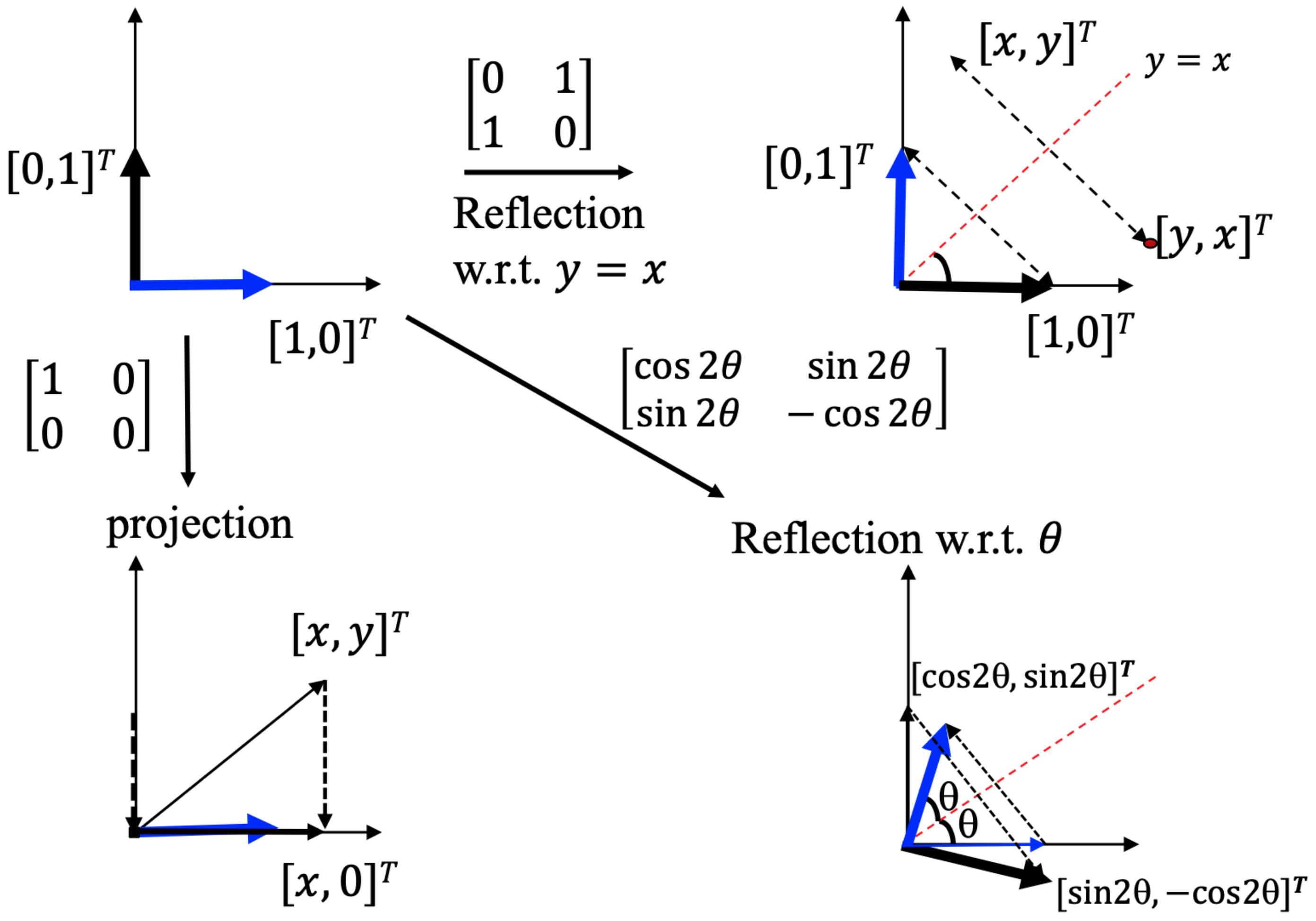
Matrices : scaling, rotation

- Stretching
- Rotation
- Reflection
- Projection
- Identity



Matrices : scaling, rotation

- Stretching
- Rotation
- Reflection
- Projection
- Identity

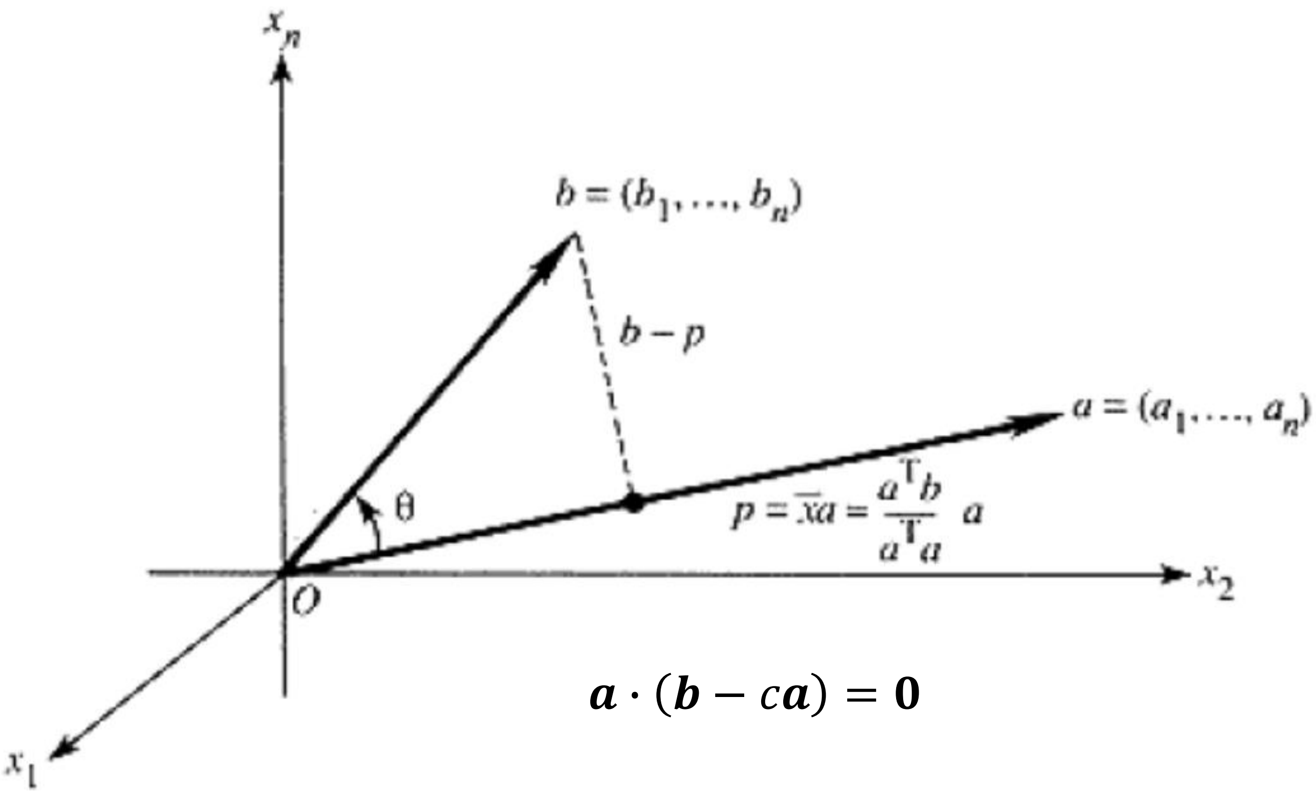


Matrices : scaling, rotation

- $a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$일 때, a_1을 60도 회전시키는 행렬은?

Projection Matrix

- b를 a에 projection 시킨 vector p
- p는 a와 같은 방향
- b-p는 a와 수직
- $p = \frac{aa^T}{a^Ta} b$
- Projection matrix : $P_a = \frac{aa^T}{a^Ta}$



$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - c\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

Projection Matrix

- $a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 일 때, a_2를 a_1에 projection시킨 벡터 p와 이 때의 projection matrix P_{a_1} 을 구하시오.

Projection Matrix

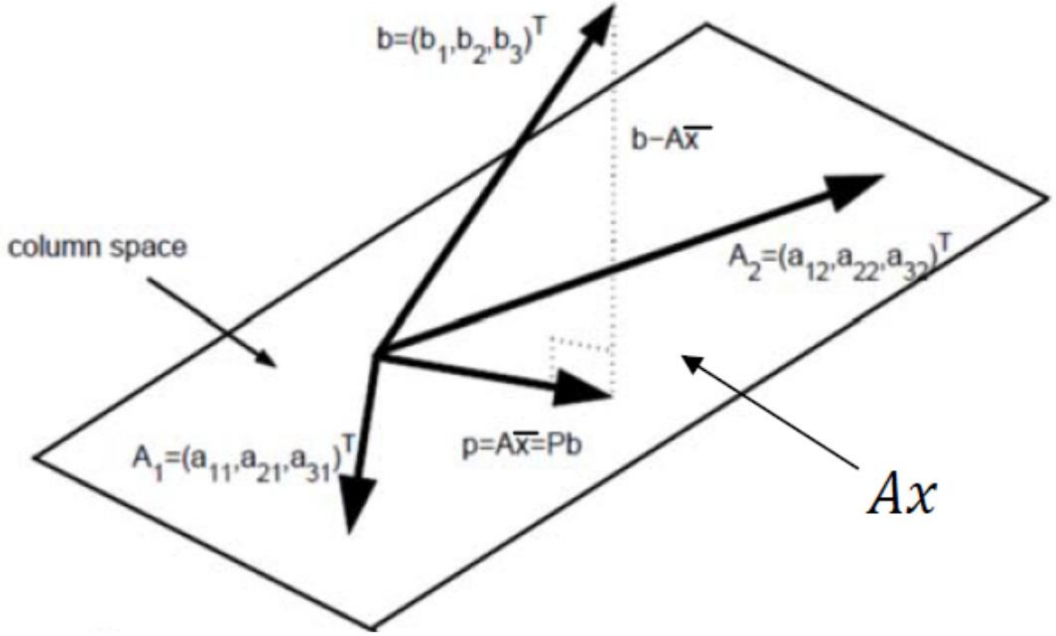
- Projection Matrix의 정의
  - 행렬 P 가 $P^2 = P$ 을 만족하면 projection matrix다.
- Projection의 성질 (P : n x n)
  - P가 projection이고, $P = P^T$이면, P를 orthogonal projection matrix 라고 한다.
  - P가 projection이면, $\mathrm{I} - P$도 projection이다.
  - P가 orthogonal projection이라면, $\mathrm{I} - P$도 orthogonal projection이다.

Seoul National University

SLCF
What You Imagine is What You Get

Least Squares Problem

- $Ax = b$ 의 해가 존재하지 않는 경우가 있다.
- ⇔A의 column vector들로 b를 만들어낼 수 없다.
- ⇔b가 A의 column space에 존재하지 않는다.
- $P = A(A^T A)^{-1} A^T$



Least Squares Problem

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 일 때, Ax=b의 해가 있는지 조사하고 없으면 $\min\|Ax - b\|$ 의 해 x와 orthogonal projection matrix P를 구하시오.

Orthogonal Matrix

- Orthogonal Matrix의 정의
  - 행렬 Q가 square matrix이며 모든 column과 row가 서로 orthogonal한 unit vector들이라면 Q는 orthogonal matrix 라고 한다.
  - $Q^T Q = Q Q^T = I$
  - 길이, 내적, 각도 보존

Orthogonal Matrix

- $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$가 orthogonal matrix임을 보이시오.

Orthogonal Matrix

- $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$가 orthogonal matrix일 때 , $6(b-a)^2$의 값을 구하시오.

Eigenvalue

- $(A \in R^{n\times n}, x \neq 0)$ $\boldsymbol{Ax = \lambda x}$ 에서 x, λ 는 각각 eigenvector, eigenvalue

- 특성 방정식
  - $\det(A - \lambda I) = 0$ 풀면 eigenvalue 값을 구할 수 있음

- Eigenvalue Decomposition
  - $A = S\Lambda S^{-1}$ (S는 eigenvector로 이루어졌고, Λ는 eigenvalue로 이루어진 행렬)

Eigenvalue

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$에 대한 고유값과 고유벡터를 구하시오.
- 고유값과 고유벡터를 활용해 A^5를 구하시오.

Eigenvalue

- eigenvalue가 다르면 eigenvector들끼리 서로 linearly dependent
- A의 eigenvalue들의 합은 trace(A)와 같다
- A의 eigenvalue들의 곱은 det(A)와 같다
- eigenvalue가 모두 positive <=> A가 positive definite

Spectral Theorem

- A가 대칭행렬(symmetric matrix) 면 $A = V\Lambda V^T$ 로 분해 가능
  - V : orthogonal matrix
  - Λ : eigenvalue diagonal matrix
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $V\Lambda V^T$ 꼴로 분해하면?

SVD Decomposition

- 임의의 $m \times n$ 행렬 A는 다음과 같이 분해될 수 있다.
  - $\mathrm{A} = U\Sigma V^T$
  - U,V 는 orthogonal matrix, Σ는 diagonal matrix
  - Σ의 대각 성분을 singular value 라고 함
  - AA^T or A^TA의 고유값 분해를 했을 때 AA^T의 $\sqrt{\lambda_i}$ 가 Σ가 된다.

SVD Decomposition

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 의 특이값과 특이벡터 (left, right)를 구하시오.