연습 4-3.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 의 특이값과 특이 벡터(left, right)를 구하시오.

ans: $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

① Σ를 구하라. $A = U\Sigma V^T$

A 2x3 matrix

- AA^T 2x2 $\Rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  A^TA 3x3 $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T$

$= U\Sigma\Sigma^T U^T$

- eigenvalue decomposition of AA^T

$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\therefore \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ u_1 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ u_2 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}$

$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$AA^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

같은 방법으로 V도 구할 수 있으며, SVD는 Σ가 양수값만을 갖기 때문에 부호가 문제될수 있어 $U^TA = \Sigma V^T$를 이용해 V^T를 구할수 있다.

연습 4-4.

연습 4-3.에서 구한 다음의 행렬 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$의 특이값과 특이 벡터(left, right)를 활용해 $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$의 최소 노름을 가진 해 $\bar{x}$를 구하시오.

ans: $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

or $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$A^+ = V\Sigma^+U^T$ (Pseudo inverse)

$Ax = b \Rightarrow \bar{x} = A^+b$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$