Cálculo de Programas
Trabalho Prático
LEI — 2022/23

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Janeiro de 2023

Grupo nr.	4
a96766	Guilherme Sampaio
a96681	Luís Pereira
a95254	Rui Oliveira
a95104	Tiago Pereira

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Problema 1

Suponha-se uma sequência numérica semelhante à sequência de Fibonacci tal que cada termo subsequente aos três primeiros corresponde à soma dos três anteriores, sujeitos aos coeficientes a, b e c:

$$
\begin{aligned}
&f\ a\ b\ c\ 0 = 0\\
&f\ a\ b\ c\ 1 = 1\\
&f\ a\ b\ c\ 2 = 1\\
&f\ a\ b\ c\ (n+3) = a * f\ a\ b\ c\ (n+2) + b * f\ a\ b\ c\ (n+1) + c * f\ a\ b\ c\ n
\end{aligned}
$$

Assim, por exemplo, $f\ 1\ 1\ 1$ irá dar como resultado a sequência:

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \ldots$$

$f\ 1\ 2\ 3$ irá gerar a sequência:

$$1, 1, 3, 8, 17, 42, 100, 235, 561, 1331, \ldots$$

etc.

A definição de f dada é muito ineficiente, tendo uma degradação do tempo de execução exponencial. Pretende-se otimizar a função dada convertendo-a para um ciclo *for*. Recorrendo à lei de recursividade mútua, calcule $loop$ e $initial$ em

$$fbl\ a\ b\ c = wrap \cdot \mathsf{for}\ (loop\ a\ b\ c)\ initial$$

por forma a f e fbl serem (matematicamente) a mesma função. Para tal, poderá usar a regra prática explicada no anexo B.

Valorização: apresente testes de *performance* que mostrem quão mais rápida é fbl quando comparada com f.

Problema 2

Pretende-se vir a classificar os conteúdos programáticos de todas as UCs lecionadas no *Departamento de Informática* de acordo com o ACM Computing Classification System. A listagem da taxonomia desse sistema está disponível no ficheiro `Cp2223data`, começando com

```
acm_ccs = ["CCS",
"    General and reference",
"        Document types",
"            Surveys and overviews",
"            Reference works",
"            General conference proceedings",
"            Biographies",
"            General literature",
"            Computing standards, RFCs and guidelines",
"        Cross-computing tools and techniques",
```

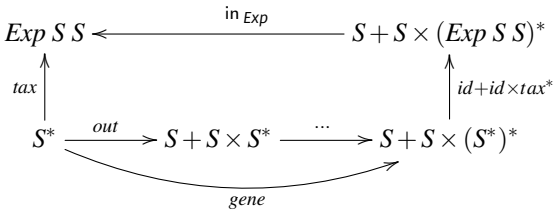
(10 primeiros ítens) etc., etc.[1]

Pretende-se representar a mesma informação sob a forma de uma árvore de expressão, usando para isso a biblioteca Exp que consta do material padagógico da disciplina e que vai incluída no zip do projecto, por ser mais conveniente para os alunos.

1. Comece por definir a função de conversão do texto dado em acm_ccs (uma lista de *strings*) para uma tal árvore como um anamorfismo de Exp:

   $$tax :: [String] \to Exp\ String\ String$$
   $$tax = (\!|\ gene\ |\!)_{Exp}$$

   Ou seja, defina o $gene$ do anamorfismo, tendo em conta o seguinte diagrama[2]:

   Para isso, tome em atenção que cada nível da hierarquia é, em acm_ccs, marcado pela indentação de 4 espaços adicionais — como se mostra no fragmento acima.

   Na figura 1 mostra-se a representação gráfica da árvore de tipo Exp que representa o fragmento de acm_ccs mostrado acima.

2. De seguida vamos querer todos os caminhos da árvore que é gerada por tax, pois a classificação de uma UC pode ser feita a qualquer nível (isto é, caminho descendente da raiz `"CCS"` até um subnível ou folha). [3]

[1] Informação obtida a partir do site ACM CCS selecionando *Flat View*.
[2] S abrevia $String$.
[3] Para um exemplo de classificação de UC concreto, pf. ver a secção **Classificação ACM** na página pública de Cálculo de Programas.

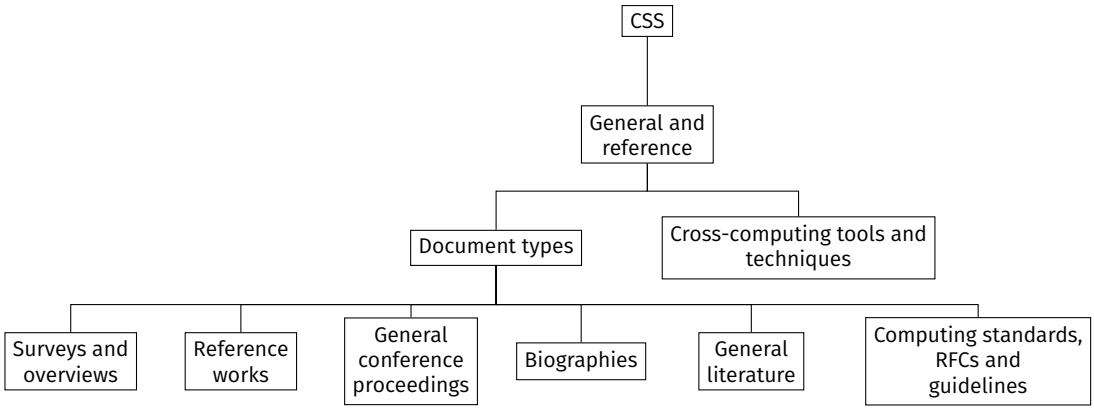


Figura 1: Fragmento de acm_ccs representado sob a forma de uma árvore do tipo Exp.

Precisamos pois da composição de tax com uma função de pós-processamento $post$,

$$tudo :: [String] \to [[String]]$$
$$tudo = post \cdot tax$$

para obter o efeito que se mostra na tabela 1.

CCS			
CCS	General and reference		
CCS	General and reference	Document types	
CCS	General and reference	Document types	Surveys and overviews
CCS	General and reference	Document types	Reference works
CCS	General and reference	Document types	General conference proceedings
CCS	General and reference	Document types	Biographies
CCS	General and reference	Document types	General literature
CCS	General and reference	Cross-computing tools and techniques	

Tabela 1: Taxonomia ACM fechada por prefixos (10 primeiros ítens).

Defina a função $post :: Exp\ String\ String \to [[String]]$ da forma mais económica que encontrar.

Sugestão: Inspecione as bibliotecas fornecidas à procura de funções auxiliares que possa re-utilizar para a sua solução ficar mais simples. Não se esqueça que, para o mesmo resultado, nesta disciplina *"ganha" quem escrever menos código*!

Sugestão: Para efeitos de testes intermédios não use a totalidade de acm_ccs, que tem 2114 linhas! Use, por exemplo, $take\ 10\ acm\_ccs$, como se mostrou acima.

Problema 3

O tapete de Sierpinski é uma figura geométrica fractal em que um quadrado é subdividido recursivamente em sub-quadrados. A construção clássica do tapete de Sierpinski é a seguinte: assumindo um quadrado de lado l, este é subdivido em 9 quadrados iguais de lado $l/3$, removendo-se o quadrado central. Este passo é depois repetido sucessivamente para cada um dos 8 sub-quadrados restantes (Fig. 2).

NB: No exemplo da fig. 2, assumindo a construção clássica já referida, os quadrados estão a branco e o fundo a verde.

A complexidade deste algoritmo, em função do número de quadrados a desenhar, para uma profundidade n, é de 8^n (exponencial). No entanto, se assumirmos que os quadrados a desenhar são os que estão a verde, a complexidade é reduzida para $\sum_{i=0}^{n-1} 8^i$, obtendo um ganho de $\sum_{i=1}^{n} \frac{100}{8^i}\%$. Por exemplo, para $n = 5$, o ganho é de 14.28%. O objetivo deste problema é a implementação do algoritmo mediante a referida otimização.

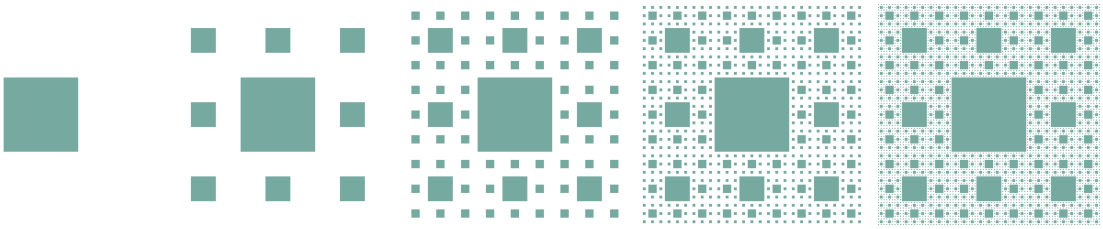


Figura 2: Construção do tapete de Sierpinski com profundidade 5.

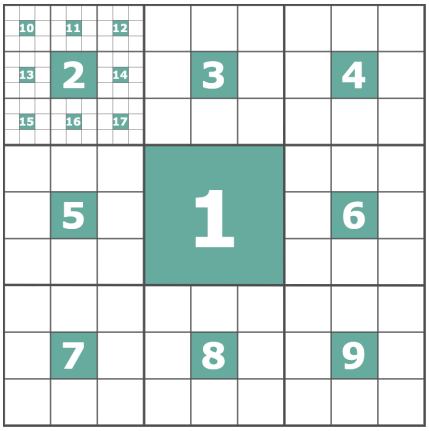


Figura 3: Tapete de Sierpinski com profundidade 2 e com os quadrados enumerados.

Assim, seja cada quadrado descrito geometricamente pelas coordenadas do seu vértice inferior esquerdo e o comprimento do seu lado:

type $Square = (Point, Side)$
type $Side = Double$
type $Point = (Double, Double)$

A estrutura recursiva de suporte à construção de tapetes de Sierpinski será uma Rose Tree, na qual cada nível da árvore irá guardar os quadrados de tamanho igual. Por exemplo, a construção da fig. 3 poderá[4] corresponder à árvore da figura 4.

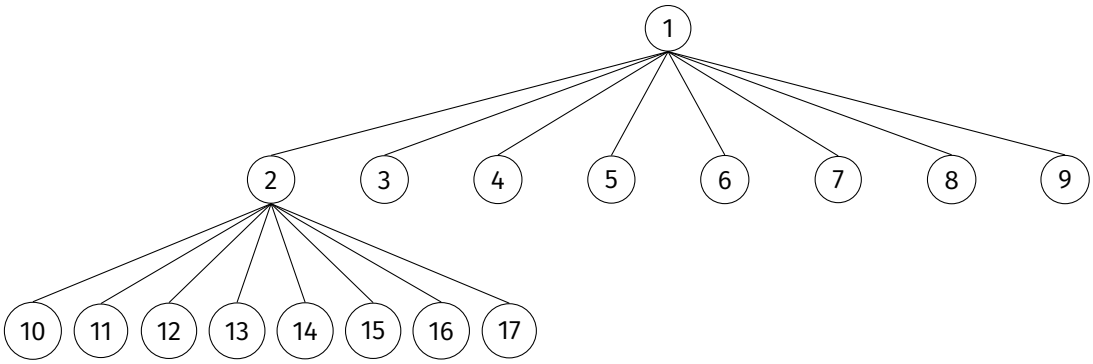


Figura 4: Possível árvore de suporte para a construção da fig. 3.

Uma vez que o tapete é também um quadrado, o objetivo será, a partir das informações do tapete (coordenadas do vértice inferior esquerdo e comprimento do lado), desenhar o quadrado central, subdividir o tapete nos 8 sub-tapetes restantes, e voltar a desenhar, recursivamente, o quadrado nesses 8 sub-tapetes. Desta forma, cada tapete determina o seu quadrado e os seus 8 sub-tapetes. No exemplo em cima, o tapete que contém o quadrado 1 determina esse próprio quadrado e determina os sub-tapetes que contêm os quadrados 2 a 9.

[4] A ordem dos filhos não é relevante.

Portanto, numa primeira fase, dadas as informações do tapete, é construida a árvore de suporte com todos os quadrados a desenhar, para uma determinada profundidade.

$$squares :: (Square, Int) \to Rose\ Square$$

NB: No programa, a profundidade começa em 0 e não em 1.

Uma vez gerada a árvore com todos os quadrados a desenhar, é necessário extrair os quadrados para uma lista, a qual é processada pela função *drawSq*, disponibilizada no anexo D.

$$rose2List :: Rose\ a \to [a]$$

Assim, a construção de tapetes de Sierpinski é dada por um hilomorfismo de *Rose Trees*:

$$sierpinski :: (Square, Int) \to [Square]$$
$$sierpinski = [\![gr2l, gsq]\!]_R$$

Trabalho a fazer:

1. Definir os genes do hilomorfismo *sierpinski*.
2. Correr

$$\begin{aligned}
&sierp4 = drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),3))\\
&constructSierp5 = \mathbf{do}\ drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),0))\\
&\quad await\\
&\quad drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),1))\\
&\quad await\\
&\quad drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),2))\\
&\quad await\\
&\quad drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),3))\\
&\quad await\\
&\quad drawSq\ (sierpinski\ (((0,0),32),4))\\
&\quad await
\end{aligned}$$

3. Definir a função que apresenta a construção do tapete de Sierpinski como é apresentada em *construcaoSierp5*, mas para uma profundidade $n \in \mathbb{N}$ recebida como parâmetro.

$$constructSierp :: Int \to \mathsf{IO}\ [()]$$
$$constructSierp = present \cdot carpets$$

Dica: a função *constructSierp* será um hilomorfismo de listas, cujo anamorfismo $carpets :: Int \to [[Square]]$ constrói, recebendo como parâmetro a profundidade n, a lista com todos os tapetes de profundidade $1..n$, e o catamorfismo $present :: [[Square]] \to \mathsf{IO}\ [()]$ percorre a lista desenhando os tapetes e esperando 1 segundo de intervalo.

Problema 4

Este ano ocorrerá a vigésima segunda edição do Campeonato do Mundo de Futebol, organizado pela Federação Internacional de Futebol (FIFA), a decorrer no Qatar e com o jogo inaugural a 20 de Novembro.

Uma casa de apostas pretende calcular, com base numa aproximação dos *rankings*[5] das seleções, a probabilidade de cada seleção vencer a competição.

Para isso, o diretor da casa de apostas contratou o Departamento de Informática da Universidade do Minho, que atribuiu o projeto à equipa formada pelos alunos e pelos docentes de Cálculo de Programas.

[5] Os *rankings* obtidos aqui foram escalados e arredondados.

Para resolver este problema de forma simples, ele será abordado por duas fases:
1. versão académica sem probabilidades, em que se sabe à partida, num jogo, quem o vai vencer;
2. versão realista com probabilidades usando o mónade *Dist* (distribuições probabilísticas) que vem descrito no anexo C.

A primeira versão, mais simples, deverá ajudar a construir a segunda.

Descrição do problema

Uma vez garantida a qualificação (já ocorrida), o campeonato consta de duas fases consecutivas no tempo:

1. fase de grupos;
2. fase eliminatória (ou "mata-mata", como é habitual dizer-se no Brasil).

Para a fase de grupos, é feito um sorteio das 32 seleções (o qual já ocorreu para esta competição) que as coloca em 8 grupos, 4 seleções em cada grupo. Assim, cada grupo é uma lista de seleções.

Os grupos para o campeonato deste ano são:

$$\begin{aligned}
&\textbf{type } Team = String\\
&\textbf{type } Group = [Team]\\
&groups :: [Group]\\
&groups = [[\texttt{"Qatar"},\texttt{"Ecuador"},\texttt{"Senegal"},\texttt{"Netherlands"}],\\
&\quad [\texttt{"England"},\texttt{"Iran"},\texttt{"USA"},\texttt{"Wales"}],\\
&\quad [\texttt{"Argentina"},\texttt{"Saudi Arabia"},\texttt{"Mexico"},\texttt{"Poland"}],\\
&\quad [\texttt{"France"},\texttt{"Denmark"},\texttt{"Tunisia"},\texttt{"Australia"}],\\
&\quad [\texttt{"Spain"},\texttt{"Germany"},\texttt{"Japan"},\texttt{"Costa Rica"}],\\
&\quad [\texttt{"Belgium"},\texttt{"Canada"},\texttt{"Morocco"},\texttt{"Croatia"}],\\
&\quad [\texttt{"Brazil"},\texttt{"Serbia"},\texttt{"Switzerland"},\texttt{"Cameroon"}],\\
&\quad [\texttt{"Portugal"},\texttt{"Ghana"},\texttt{"Uruguay"},\texttt{"Korea Republic"}]]
\end{aligned}$$

Deste modo, *groups !! 0* corresponde ao grupo A, *groups !! 1* ao grupo B, e assim sucessivamente. Nesta fase, cada seleção de cada grupo vai defrontar (uma vez) as outras do seu grupo.

Passam para o "mata-mata" as duas seleções que mais pontuarem em cada grupo, obtendo pontos, por cada jogo da fase grupos, da seguinte forma:

- vitória — 3 pontos;
- empate — 1 ponto;
- derrota — 0 pontos.

Como se disse, a posição final no grupo irá determinar se uma seleção avança para o "mata-mata" e, se avançar, que possíveis jogos terá pela frente, uma vez que a disposição das seleções está desde o início definida para esta última fase, conforme se pode ver na figura 5.

Assim, é necessário calcular os vencedores dos grupos sob uma distribuição probabilística. Uma vez calculadas as distribuições dos vencedores, é necessário colocá-las nas folhas de uma *LTree* de forma a fazer um *match* com a figura 5, entrando assim na fase final da competição, o tão esperado "mata-mata". Para avançar nesta fase final da competição (i.e. subir na árvore), é preciso ganhar, quem perder é automaticamente eliminado ("mata-mata"). Quando uma seleção vence um jogo, sobe na árvore, quando perde, fica pelo caminho. Isto significa que a seleção vencedora é aquela que vence todos os jogos do "mata-mata".

Arquitetura proposta

A visão composicional da equipa permitiu-lhe perceber desde logo que o problema podia ser dividido, independentemente da versão, probabilística ou não, em duas partes independentes — a da fase de grupos e a do "mata-mata". Assim, duas sub-equipas poderiam trabalhar em paralelo, desde que se

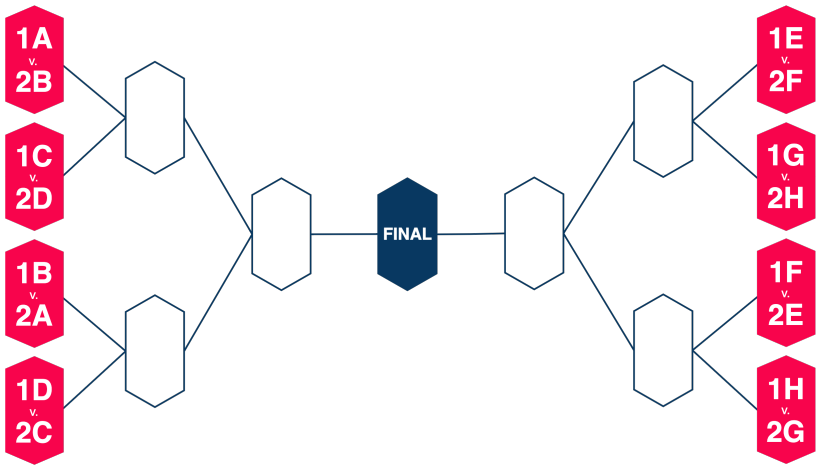


Figura 5: O “mata-mata”

garantisse a composicionalidade das partes. Decidiu-se que os alunos desenvolveriam a parte da fase de grupos e os docentes a do “mata-mata”.

Versão não probabilística

O resultado final (não probabilístico) é dado pela seguinte função:

$$\begin{aligned} &winner :: Team \\ &winner = wcup\ groups \\ &wcup = knockoutStage \cdot groupStage \end{aligned}$$

A sub-equipa dos docentes já entregou a sua parte:

$$knockoutStage = (\!|\, [id, koCriteria] \,|\!)$$

Considere-se agora a proposta do *team leader* da sub-equipa dos alunos para o desenvolvimento da fase de grupos:

> *Vamos dividir o processo em 3 partes:*
> - *gerar os jogos,*
> - *simular os jogos,*
> - *preparar o “mata-mata” gerando a árvore de jogos dessa fase (fig. 5).*
>
> *Assim:*
>
> $$\begin{aligned} &groupStage :: [Group] \to LTree\ Team \\ &groupStage = initKnockoutStage \cdot simulateGroupStage \cdot genGroupStageMatches \end{aligned}$$
>
> *Comecemos então por definir a função $genGroupStageMatches$ que gera os jogos da fase de grupos:*
>
> $$\begin{aligned} &genGroupStageMatches :: [Group] \to [[Match]] \\ &genGroupStageMatches = map\ generateMatches \end{aligned}$$
>
> *onde*
>
> $$\mathbf{type}\ Match = (Team, Team)$$
>
> *Ora, sabemos que nos foi dada a função*
>
> $$gsCriteria :: Match \to Maybe\ Team$$
>
> *que, mediante um certo critério, calcula o resultado de um jogo, retornando $Nothing$ em caso de empate, ou a equipa vencedora (sob o construtor $Just$). Assim, precisamos de definir a função*

> $simulateGroupStage :: [[Match]] \to [[Team]]$
> $simulateGroupStage = map\ (groupWinners\ gsCriteria)$
>
> *que simula a fase de grupos e dá como resultado a lista dos vencedores, recorrendo à função* $groupWinners$*:*
>
> $groupWinners\ criteria = best\ 2 \cdot consolidate \cdot (\gg\!= matchResult\ criteria)$
>
> *Aqui está apenas em falta a definição da função* $matchResult$*.*
> *Por fim, teremos a função* $initKnockoutStage$ *que produzirá a LTree que a sub-equipa do "mata-mata" precisa, com as devidas posições. Esta será a composição de duas funções:*
>
> $initKnockoutStage = [\![\ glt\ ]\!] \cdot arrangement$

Trabalho a fazer:

1. Definir uma alternativa à função genérica $consolidate$ que seja um catamorfismo de listas:

   $$consolidate' :: (Eq\ a, Num\ b) \Rightarrow [(a,b)] \to [(a,b)]$$
   $$consolidate' = (\!|cgene|\!)$$

2. Definir a função $matchResult :: (Match \to Maybe\ Team) \to Match \to [(Team, Int)]$ que apura os pontos das equipas de um dado jogo.
3. Definir a função genérica $pairup :: Eq\ b \Rightarrow [b] \to [(b,b)]$ em que $generateMatches$ se baseia.
4. Definir o gene glt.

Versão probabilística

Nesta versão, mais realista, $gsCriteria :: Match \to (Maybe\ Team)$ dá lugar a

$$pgsCriteria :: Match \to \text{Dist}\ (Maybe\ Team)$$

que dá, para cada jogo, a probabilidade de cada equipa vencer ou haver um empate. Por exemplo, há 50% de probabilidades de Portugal empatar com a Inglaterra,

```
pgsCriteria("Portugal","England")
        Nothing  50.0%
 Just "England"  26.7%
Just "Portugal"  23.3%
```

etc.

O que é Dist? É o mónade que trata de distribuições probabilísticas e que é descrito no anexo C, página 11 e seguintes. O que há a fazer? Eis o que diz o vosso *team leader*:

> *O que há a fazer nesta versão é, antes de mais, avaliar qual é o impacto de* $gsCriteria$ *virar monádica (em* Dist*) na arquitetura geral da versão anterior. Há que reduzir esse impacto ao mínimo, escrevendo-se tão pouco código quanto possível!*

Todos relembraram algo que tinham aprendido nas aulas teóricas a respeito da "monadificação" do código: há que reutilizar o código da versão anterior, monadificando-o.

Para distinguir as duas versões decidiu-se afixar o prefixo 'p' para identificar uma função que passou a ser monádica.

A sub-equipa dos docentes fez entretanto a monadificação da sua parte:

$$pwinner :: \text{Dist}\ Team$$
$$pwinner = pwcup\ groups$$

$$pwcup = pknockoutStage \bullet pgroupStage$$

E entregou ainda a versão probabilística do "mata-mata":

$$\begin{aligned}
&pknockoutStage = mcataLTree'\ [return, pkoCriteria]\\
&mcataLTree'\ g = k\ \textbf{where}\\
&\quad k\ (Leaf\ a) = g1\ a\\
&\quad k\ (Fork\ (x,y)) = mmbin\ g2\ (k\ x, k\ y)\\
&\quad g1 = g \cdot i_1\\
&\quad g2 = g \cdot i_2
\end{aligned}$$

A sub-equipa dos alunos também já adiantou trabalho,

$$pgroupStage = pinitKnockoutStage \bullet psimulateGroupStage \cdot genGroupStageMatches$$

mas faltam ainda $pinitKnockoutStage$ e $pgroupWinners$, esta usada em $psimulateGroupStage$, que é dada em anexo.

Trabalho a fazer:

- Definir as funções que ainda não estão implementadas nesta versão.
- **Valorização**: experimentar com outros critérios de "ranking" das equipas.

> **Importante**: (a) código adicional terá que ser colocado no anexo E, obrigatoriamente; (b) todo o código que é dado não pode ser alterado.

Anexos

A Documentação para realizar o trabalho

Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2223t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2223t.lhs`[6] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2223t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2223t.lhs > cp2223t.tex
$ pdflatex cp2223t
```

em que `lhs2tex` é um pré-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar utilizando o utiliário cabal disponível em haskell.org.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2223t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2223t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2223t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

[6] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

A.1 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em todos os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo E com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2223t.aux
$ makeindex cp2223t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou.

No anexo D, disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas apresentados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

A.2 Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[7]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B
\end{array}
$$

B Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[8]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor F $X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n
\end{array}
$$

[7] Exemplos tirados de [**?**].
[8] Lei (3.95) em [**?**], página 112.

$$f\ 0 = 1$$
$$f\ (n+1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where}$$
$$\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f)$$
$$\quad init = (1,1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[9]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[10], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$
$$f\ (n+1) = f\ n + k\ n$$
$$k\ 0 = a + b$$
$$k\ (n+1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where}$$
$$\quad loop\ (f,k) = (f + k, k + 2 * a)$$
$$\quad init = (c, a + b)$$

C O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \text{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{1}$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a,p) numa distribuição $d ::$ Dist a indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,

será representada pela distribuição

$$d_1 :: \text{Dist}\ Char$$
$$d_1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]$$

que o GHCi mostrará assim:

[9] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.
[10] Secção 3.17 de [**?**] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d_2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
    "Uma"  20.0%
  "cinco"  20.0%
     "de"  20.0%
  "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d_3 = normal\ [10..20]$$

etc.[11] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a,1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q*p) \mid (x,p) \leftarrow g\ a, (y,q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to \text{Dist}\ B$ e $f : B \to \text{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

D Código fornecido

Problema 1

Alguns testes para se validar a solução encontrada:map

$$test\ a\ b\ c = map\ (fbl\ a\ b\ c)\ x \equiv map\ (f\ a\ b\ c)\ x\ \textbf{where}\ x = [1..20]$$
$$test1 = test\ 1\ 2\ 3$$
$$test2 = test\ (-2)\ 1\ 5$$

Problema 2

Verificação: a árvore de tipo Exp gerada por

$$acm\_tree = tax\ acm\_ccs$$

deverá verificar as propriedades seguintes:

- $expDepth\ acm\_tree \equiv 7$ (profundidade da árvore);
- $length\ (expOps\ acm\_tree) \equiv 432$ (número de nós da árvore);
- $length\ (expLeaves\ acm\_tree) \equiv 1682$ (número de folhas da árvore).[12]

O resultado final

$$acm\_xls = post\ acm\_tree$$

não deverá ter tamanho inferior ao total de nodos e folhas da árvore.

[11] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [**?**].

[12] Quer dizer, o número total de nodos e folhas é 2114, o número de linhas do texto dado.

Problema 3

Função para visualização em SVG:

$$drawSq\ x = picd''\ [Svg.scale\ 0.44\ (0,0)\ (x \gg\!= sq2svg)]$$
$$sq2svg\ (p,l) = (color\ \texttt{"\#67AB9F"} \cdot polyg)\ [p, p .+ (0,l), p .+ (l,l), p .+ (l,0)]$$

Para efeitos de temporização:

$$await = threadDelay\ 1000000$$

Problema 4

Rankings:

```
rankings = [
  ("Argentina",4.8),
  ("Australia",4.0),
  ("Belgium",5.0),
  ("Brazil",5.0),
  ("Cameroon",4.0),
  ("Canada",4.0),
  ("Costa Rica",4.1),
  ("Croatia",4.4),
  ("Denmark",4.5),
  ("Ecuador",4.0),
  ("England",4.7),
  ("France",4.8),
  ("Germany",4.5),
  ("Ghana",3.8),
  ("Iran",4.2),
  ("Japan",4.2),
  ("Korea Republic",4.2),
  ("Mexico",4.5),
  ("Morocco",4.2),
  ("Netherlands",4.6),
  ("Poland",4.2),
  ("Portugal",4.6),
  ("Qatar",3.9),
  ("Saudi Arabia",3.9),
  ("Senegal",4.3),
  ("Serbia",4.2),
  ("Spain",4.7),
  ("Switzerland",4.4),
  ("Tunisia",4.1),
  ("USA",4.4),
  ("Uruguay",4.5),
  ("Wales",4.3)]
```

Geração dos jogos da fase de grupos:

$$generateMatches = pairup$$

Preparação da árvore do "mata-mata":

$$arrangement = (\gg\!= swapTeams) \cdot chunksOf\ 4\ \textbf{where}$$
$$swapTeams\ [[a_1,a_2],[b_1,b_2],[c_1,c_2],[d_1,d_2]] = [a_1,b_2,c_1,d_2,b_1,a_2,d_1,c_2]$$

Função proposta para se obter o *ranking* de cada equipa:

$$rank\ x = 4 ** (pap\ rankings\ x - 3.8)$$

Critério para a simulação não probabilística dos jogos da fase de grupos:

$$\begin{aligned}
&gsCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle \textbf{ where} \\
&\quad s\ ((s_1,s_2),(r_1,r_2)) = \textbf{let } d = r_1 - r_2 \textbf{ in} \\
&\quad\quad \textbf{if } d > 0.5 \textbf{ then } Just\ s_1 \\
&\quad\quad\quad \textbf{else if } d < -0.5 \textbf{ then } Just\ s_2 \\
&\quad\quad\quad\quad \textbf{else } Nothing
\end{aligned}$$

Critério para a simulação não probabilística dos jogos do mata-mata:

$$\begin{aligned}
&koCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle \textbf{ where} \\
&\quad s\ ((s_1,s_2),(r_1,r_2)) = \textbf{let } d = r_1 - r_2 \textbf{ in} \\
&\quad\quad \textbf{if } d \equiv 0 \textbf{ then } s_1 \\
&\quad\quad\quad \textbf{else if } d > 0 \textbf{ then } s_1 \textbf{ else } s_2
\end{aligned}$$

Critério para a simulação probabilística dos jogos da fase de grupos:

$$\begin{aligned}
&pgsCriteria = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle \textbf{ where} \\
&\quad s\ ((s_1,s_2),(r_1,r_2)) = \\
&\quad\quad \textbf{if } abs\ (r_1 - r_2) > 0.5 \textbf{ then } \mathsf{fmap}\ Just\ (pkoCriteria\ (s_1,s_2)) \textbf{ else } f\ (s_1,s_2) \\
&\quad f = D \cdot ((Nothing, 0.5) :) \cdot map\ (Just \times (/2)) \cdot unD \cdot pkoCriteria
\end{aligned}$$

Critério para a simulação probabilística dos jogos do mata-mata:

$$\begin{aligned}
&pkoCriteria\ (e_1,e_2) = D\ [(e_1, 1 - r_2\ /\ (r_1 + r_2)), (e_2, 1 - r_1\ /\ (r_1 + r_2))] \textbf{ where} \\
&\quad r_1 = rank\ e_1 \\
&\quad r_2 = rank\ e_2
\end{aligned}$$

Versão probabilística da simulação da fase de grupos:[13]

$$\begin{aligned}
&psimulateGroupStage = trim \cdot map\ (pgroupWinners\ pgsCriteria) \\
&trim = top\ 5 \cdot sequence \cdot map\ (filterP \cdot norm) \textbf{ where} \\
&\quad filterP\ (D\ x) = D\ [(a,p) \mid (a,p) \leftarrow x, p > 0.0001] \\
&\quad top\ n = vec2Dist \cdot take\ n \cdot reverse \cdot presort\ \pi_2 \cdot unD \\
&\quad vec2Dist\ x = D\ [(a, n\ /\ t) \mid (a,n) \leftarrow x] \textbf{ where } t = sum\ (map\ \pi_2\ x)
\end{aligned}$$

Versão mais eficiente da *pwinner* dada no texto principal, para diminuir o tempo de cada simulação:

$$\begin{aligned}
&pwinner :: \mathsf{Dist}\ Team \\
&pwinner = mbin\ f\ x \gg\!= pknockoutStage \textbf{ where} \\
&\quad f\ (x,y) = initKnockoutStage\ (x +\!\!+ y) \\
&\quad x = \langle g \cdot take\ 4, g \cdot drop\ 4 \rangle\ groups \\
&\quad g = psimulateGroupStage \cdot genGroupStageMatches
\end{aligned}$$

Auxiliares:

$$\begin{aligned}
&best\ n = map\ \pi_1 \cdot take\ n \cdot reverse \cdot presort\ \pi_2 \\
&consolidate :: (Num\ d, Eq\ d, Eq\ b) \Rightarrow [(b,d)] \to [(b,d)] \\
&consolidate = map\ (id \times sum) \cdot collect \\
&collect :: (Eq\ a, Eq\ b) \Rightarrow [(a,b)] \to [(a,[b])] \\
&collect\ x = nub\ [k \mapsto [d' \mid (k',d') \leftarrow x, k' \equiv k] \mid (k,d) \leftarrow x]
\end{aligned}$$

Função binária monádica f:

$$\begin{aligned}
&mmbin :: Monad\ m \Rightarrow ((a,b) \to m\ c) \to (m\ a, m\ b) \to m\ c \\
&mmbin\ f\ (a,b) = \textbf{do } \{x \leftarrow a; y \leftarrow b; f\ (x,y)\}
\end{aligned}$$

Monadificação de uma função binária f:

[13] Faz-se "trimming" das distribuições para reduzir o tempo de simulação.

$$mbin :: Monad\ m \Rightarrow ((a,b) \to c) \to (m\ a, m\ b) \to m\ c$$
$$mbin = mmbin \cdot (return \cdot)$$

Outras funções que podem ser úteis:

$$(f\ `is`\ v)\ x = (f\ x) \equiv v$$
$$rcons\ (x,a) = x +\!\!+ [a]$$

E Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

$$k\ a\ b\ c\ ((x,y),z) = a*y + b*x + c*z$$
$$loop\ a\ b\ c = \langle\langle \pi_2 \cdot \pi_1, k\ a\ b\ c\rangle, \pi_1 \cdot \pi_1\rangle$$
$$initial = ((1,1),0)$$
$$wrap = \pi_2$$

Consideremos, de igual modo, as seguintes funções

$$g'\ a\ b\ c\ n = f\ a\ b\ c\ (n+1)$$
$$h'\ a\ b\ c\ n = g'\ a\ b\ c\ (n+1)$$

Destas definições imediatamente segue que

$$g\ a\ b\ c\ 0 = 1$$
$$g\ a\ b\ c\ (n+1) = h\ a\ b\ c\ n$$
$$h\ a\ b\ c\ 0 = 1$$
$$h\ a\ b\ c\ (n+1) = a*h\ a\ b\ c\ n + b*g\ a\ b\ c\ n + c*f'\ a\ b\ c\ n$$

.

Estas três funções são mutuamente recursivas. Deste modo, tem-se que

$$
\left\{\begin{array}{l}
g\ 0 = 1 \\
g\ (n+1) = h\ n \\
h\ 0 = 1 \\
h\ (n+1) = a * h\ n + b * g\ n + c * f'\ n \\
f'\ 0 = 0 \\
f'\ (n+1) = g\ n
\end{array}\right.
$$

$\equiv$ { k a b c ((x, y), z) = a * y + b * x + c * z }

$$
\left\{\begin{array}{l}
g\ 0 = 1 \\
g\ (n+1) = \pi_2 \cdot \pi_1\ ((g\ n, h\ n), f'\ n) \\
h\ 0 = 1 \\
h\ (n+1) = k\ a\ b\ c\ ((g\ n, h\ n), f'\ n) \\
f'\ 0 = 0 \\
f'\ (n+1) = \pi_1 \cdot \pi_1\ ((g\ n, h\ n), f'\ n)
\end{array}\right.
$$

$\equiv$ { lei da recursividade mútua }

$$\langle\langle g, h\rangle, f'\rangle = (\!|\langle\langle[\underline{1}, \pi_2 \cdot \pi_1], [\underline{1}, k\ a\ b\ c]\rangle, [\underline{0}, \pi_1 \cdot \pi_1]\rangle|\!)$$

$\equiv$ { lei da troca }

$$\langle\langle g, h\rangle, f'\rangle = (\!|\langle[\underline{(1,1)}, \langle \pi_2 \cdot \pi_1, k\ a\ b\ c\rangle], [\underline{0}, \pi_1 \cdot \pi_1]\rangle|\!)$$

$\equiv$ { lei da troca }

$$\langle\langle g, h\rangle, f'\rangle = (\!|[\underline{((1,1),0)}, \langle\langle \pi_2 \cdot \pi_1, k\ a\ b\ c\rangle, \pi_1 \cdot \pi_1\rangle]|\!)$$

$\equiv$ { definição de for }

$$\langle\langle g, h\rangle, f'\rangle = \text{for}\ \langle\langle \pi_2 \cdot \pi_1, k\ a\ b\ c\rangle, \pi_1 \cdot \pi_1\rangle\ \underline{((1,1),0)}$$

□

Comparação de desempenho

Dadas estas duas implementações da mesma função, comparou-se o seu desempenho. Para isso, criou-se um *Jupyter Notebook*, submetido juntamente com este relatório, que tratasse dessa mesma análise. Para medir o tempo de execução de cada função utilizou-se a biblioteca Criterion; e para gerar os gráficos apresentados nas figuras 6 e 7 usou-se a biblioteca Chart.

Os tempos calculados correspondem à média de 10 execuções de cada função para o respetivo argumento. Para os testes, usou-se $a = 2, b = 3, c = 4$.

Como se pode ver pelos gráficos, a implementação ineficiente de f apresenta um crescimento exponencial do tempo de execução, comparativamente à implementação eficiente, que tira proveito da recursividade mútua, que apresenta um crescimento linear.

Esta melhoria de desempenho é notável, visto que torna uma função que não seria viável utilizar para valores relativamente pequenos do seu argumento, numa função capaz de processar valores muito superiores em intervalos de tempo bastante reduzidos.

Problema 2

Gene de *tax*:

$$gene = ((id) + (id \times ((groupBy\ \underline{canTrim}) \cdot (map\ trim'))))) \cdot out$$

Função de pós-processamento:

$$post = (\!|[singl \cdot singl, \widehat{map} \cdot ((:) \times concat)]|\!)_{Exp}$$

Figura 6: Desempenho da implementação ineficiente de f

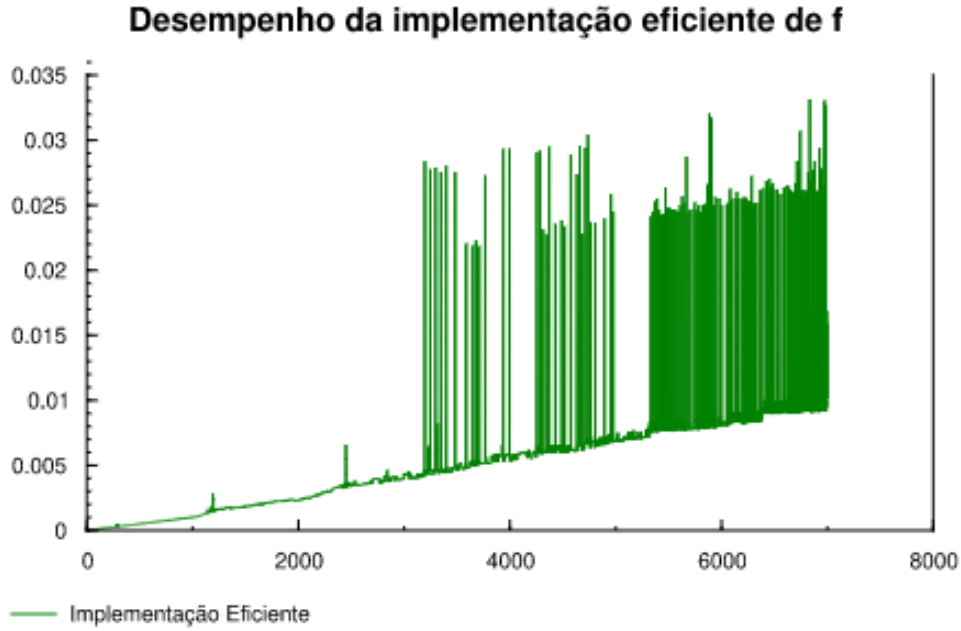


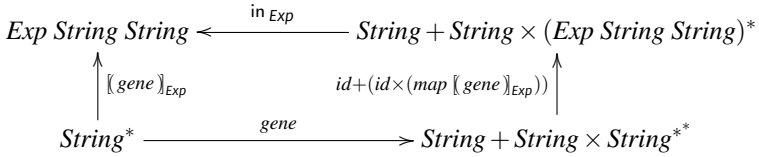
Figura 7: Desempenho da implementação eficiente de f

Funções Auxiliares:

$$trim' \ (\text{' '} : \text{' '} : \text{' '} : \text{' '} : r) = r$$
$$canTrim \ (\text{' '} : \text{' '} : \text{' '} : \text{' '} : \_) = True$$
$$canTrim \ \_ = False$$

gene

Desenhando o diagrama do anamorfismo:



A função `gene` vai ser expressa em função do seu caso base e caso geral. De notar que, se aplicarmos o funtor das listas não vazias (`out`) ao argumento da função, podemos definir o gene como uma soma de funções.

O lado esquerdo da soma - correspondente ao caso de paragem - será a identidade. Isto porque, caso a lista seja singular, pretende devolver-se esse elemento, que será uma folha na árvore de expressão.

O lado direito da soma é, como já tem sido hábito, bastante mais complexo. Como se deve tratar de uma função que recebe e devolve pares, vamos exprimi-la como um produto de outras duas funções. O fator do lado esquerdo deve ser, mais uma vez, a identidade, visto que se pretende preservar o elemento à cabeça da lista no nodo atual da árvore. O fator do lado direito deve ser uma função que, dada a cauda da lista, remova 4 espaços a todos os elementos (visto que estes elementos serão filhos na árvore, todos os elementos da lista serão *strings* que começam com, pelo menos, 4 espaços), e parta a lista resultante por subárvores a explorar recursivamente. Como se faz esta divisão? Simplesmente parte-se a lista sempre que há um elemento que não está identado. Porquê nesses elementos? Porque esses elementos constituem as raízes das subárvores e, por isso, devem ser a cabeça das listas que serão recursivamente convertidas em árvores.

Deste modo, começa-se por um `map trim` à lista inicial. A função `trim` remove os primeiros quatro espaços de uma `string`. De seguida, essa função é composta com um `groupBy (const canTrim)`[14]. A função `groupBy` está definida no módulo de Haskell `Data.List` e parte uma lista sempre que a função argumento seja verdadeiro, colocando o elemento para o qual isso aconteceu à cabeça de uma nova lista.

Assim sendo, o gene do anamorfismo é definido por

```
gene = ((id) -|- ( id >< ((groupBy (const canTrim)) . (map trim)))) . out
```

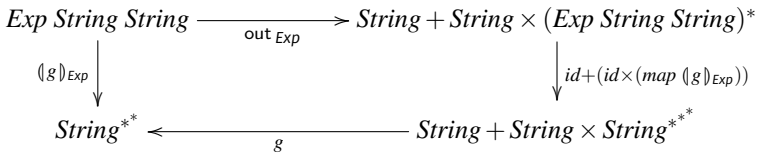
com as seguintes funções auxiliares

```
trim (' ':' ':' ':' ':r) = r canTrim (' ':' ':' ':' ':_) = True canTrim _                    = Fal
```

post

A função `post` recebe uma árvore de expressão e deve retornar uma lista de listas de `String`, que corresponde à tabela pretendida. Mais concretamente, deve, para cada elemento da árvore, criar uma lista correspondente à travessia na árvore desde a sua raiz até esse elemento.

Esta operação pode ser implementada como um catamorfismo sobre árvores de expressões. Fazendo o diagrama correspondente:



Com isto, basta apenas definir o gene do catamorfismo. Tendo em conta o facto da função receber uma soma e devolver uma lista, esta será definida como um `either`.

[14] Dada a assinatura da função `groupBy`, houve a necessidade de adicionar um primeiro argumento à função `canTrim`, que deve ser ignorado pela mesma, daí a utilização da função `const`

O caso de paragem (lado esquerdo do `either`) corresponde a uma folha da árvore de expressão. Nesse caso deve retornar-se uma lista singular, contendo outra lista singular contendo apenas esse valor. Isto faz-se com duas chamadas consecutivas de `singl`, ou seja, `singl . singl`.

No caso recursivo, recebe-se o elemento atual e o resultado das chamadas recursivas para os filhos. Aí, concatenam-se todos os resultados recursivos na mesma lista (para manter a noção de tabela) e, de seguida, adiciona-se o elemento à cabeça de cada uma dessas listas. Em notação *pointwise*:

```
map (s:) (concat l)
```

Passando para *pointfree*:

```
(uncurry map) . ((:) >< concat)
```

Juntando tudo, temos a definição do gene e da função `post`:

```
post = cataExp g g = either (singl . singl) ((uncurry    map) . ((:) >< concat))
```

Problema 3

$$
\begin{aligned}
&squares = [\![\, gsq \,]\!]_R \\
&gsq = \langle middleSquare \cdot \pi_1, [nil, \widehat{zip} \cdot (sideSquares \times repeat)] \cdot distr \rangle \cdot (id \times outNat) \\
&rose2List = (\!|\, gr2l \,|\!)_R \\
&gr2l = concat \cdot cons \cdot (singl \times id) \\
&carpets\ n = map\ (sierpinski \cdot \langle \underline{defaultSquare}, id \rangle)\ [0..n-1] \\
&present = sequence \cdot (map\ ((\gg\!= await) \cdot drawSq))
\end{aligned}
$$

Funções auxiliares:

$$
\begin{aligned}
&middleSquare = \langle \widehat{addTup} \cdot (id \times Cp.dup), \pi_2 \rangle \cdot (id \times (/3)) \\
&sideSquares\ (xy, l) = [(addTup\ xy\ \$\ scaleTup\ l'\ (x,y), l') \mid x \leftarrow [0..2], y \leftarrow [0..2], (x,y) \not\equiv (1,1)] \\
&\quad \textbf{where}\ l' = l\,/\,3 \\
&addTup\ (a,b)\ (c,d) = (a+c, b+d) \\
&scaleTup\ a\ (b,c) = (a*b, a*c) \\
&defaultSquare = ((0,0), 32)
\end{aligned}
$$

`gsq`

Façamos o esquema representativo dos anamorfismos sobre Rose Trees.

$$
\begin{array}{ccc}
Rose\ Square & \xleftarrow{\ \mathbf{in}\ } & Square \times Rose\ Square^* \\
\uparrow{\scriptstyle [\![gsq]\!]_R} & & \uparrow{\scriptstyle id \times (map([\![g]\!]_R))} \\
Square \times Int & \xrightarrow{\ gsq\ } & Square \times (Square \times Int)^*
\end{array}
$$

Com isto, determina-se o tipo de `gsq`. O primeiro elemento do par corresponde ao quadrado a partir em subquadrados mais pequenos, e o segundo elemento é o número de partições restantes. Se este valor for 0, o quadrado deve ser preservado.

Isto motiva a utilização do funtor dos naturais. Isso justifica o primeiro elemento da composição de funções que é a função `gsq`:

```
(id >< outNat)
```

Com isto, preserva-se o quadrado, mas diminui-se o natural numa unidade, possibilitando também a utilização de um `either` para separar o caso de paragem dos restantes casos.

Dado facto de a função receber um produto, está será expressa como um `split`. Expliquemos primeiro o lado direito do mesmo, responsável pela criação dos quadrados mais pequenos, que serão posteriormente processados recursivamente.

Foquemo-nos, inicialmente, no caso de paragem (lado esquerdo do `either`[15]). Este caso é bastante simples: deve ser retornada uma lista vazia, logo é utilizada a função `nil`.

O segundo caso é bastante mais complicado, e, também por isso, mais interessante. Por um lado, quer-se calcular todos os subquadrados gerados a partir do quadrado atual: para isso usa-se a função auxiliar `sideSquares`. Por outro lado, pretende-se juntar (`zip`) essa lista com uma lista contendo o valor inteiro fornecido. Para isso, podemos aproveitar a avaliação *lazy* de Haskell e a função `repeat`.

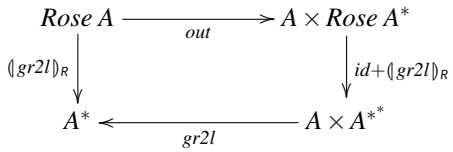
Sumariando, pretende-se pegar no par quadrado / número, calcular todos os subquadrados, e, em paralelo repetir o valor inteiro, juntando no fim essas listas. Isso é expresso pela expressão

```
(uncurry zip) . (sideSquares >< repeat)
```

Passemos, agora, para o lado esquerdo do `split`, que devolve o quadrado que não será mais dividido. Este é bastante simples, basta extrair o primeiro elemento do par (o quadrado), e aplicar-lhe a função auxiliar `middleSquare`, que calcular o quadrado que deve ficar *no meio*. Assim sendo, o lado esquerdo corresponde a `(middleSquare . p1)`.

gr2l

Consideremos o diagrama do catamorfismo `rose2List`:



Derivamos, deste modo, o tipo da função `gr2l` pretendida. O que se pretende é que esta função concatene todas as listas que recebe como argumento no segundo elemento do par, e que adicione o elemento que recebe como primeiro elemento do par à cabeça da lista.

A solução concebida foi a seguinte: colocar o primeiro elemento como uma lista e juntá-lo à cabeça da lista de listas recebida como segundo argumento, e, de seguida, concatenar as listas interiores para formar uma só lista.

Este último passo é efetuado trivialmente pela função `concat`. O passo anterior recorre à função `cons`, que pega num par do tipo `(a,[a])` e devolve uma lista em que o primeiro elemento foi acrescentado à lista. Para, neste caso, conseguir aplicar essa função, é necessário que o primeiro elemento do par seja, também ele, uma lista. Para isso usa-se a função `singl` multiplicada com a identidade.

Assim sendo, a função `gr2l` é a composição de todas estas funções:

```
gr2l = concat . cons . (singl >< id)
```

carpets

Esta função deve receber um inteiro e devolver uma lista contendo os diferentes passos de aplicação do algoritmo. Ou seja, o primeiro elemento corresponde à lista de quadrados que se obtém rodando o algoritmo uma vez, o segundo elemento duas vezes, .etc.

Para isso, pode-se aproveitar a função `sierpinski`, que recebe um par quadrado/inteiro, que corresponde ao quadrado inicial e ao número de iterações do algoritmo, respetivamente; e devolve os quadrados gerados.

[15] Foi aplicada a função `distr` antes do código aqui explicado, de forma a passar o `either` para fora do par, para facilitar a resolução. Isto apenas foi feito no lado direito do `split`, pois não era conviente para o lado esquerdo, como será explicado de seguida

Pretende aplicar-se, então, a função `sierpinski` com todos os limites de profundidade de 0 a $n-1$ (inclusivé) (em que n é o parâmetro de `carpets`). Isso motiva a aplicação de um `map` da função `sierpinski` à lista `[0..n - 1]`: .

```
carpets n = map (sierpinski . ??) [0..n]
```

No entanto, não é possível aplicar a função `sierpinski` a um inteiro. De facto, a função, como referido anteriormente, recebe um par. Esse inteiro deve ser passado à função como segundo elemento do par, sendo que o primeiro elemento é independente desse valor, sendo sempre o mesmo (expresso pela função `defaultSquare`). Isto motiva a utilização de um `split`, em que do lado direito se aplica a função identidade, e do lado esquerdo a constante `defaultSquare`.

Assim chega-se à definição final de `carpets`.

```
carpets n = map (sierpinski . (split (const defaultSquare) id)) [0..n-1]
```

present

Finalmente, esta função deve receber uma lista como aquela devolvida pela função `carpets` e representá-la visualmente, devolvendo, assim, um `IO [()]`. Entre cada iteração, deve aguardar um valor fixo de tempo - algo que a função `await` já faz.

Esta função pode ser definida como um catamorfismo sobre listas. No entanto, o grupo desenvolveu uma solução mais simples recorrendo a um `map`. O raciocínio é bastante semelhante: pretende-se desenhar os quadrados e esperar; para cada elemento da lista recebida. Para isso, pode-se executar um `map` de uma função que faça o pretendido para cada elemento da lista. Mas como definir tal função?

O primeiro passo será sempre desenhar: por isso a função `drawSq` será sempre a primeira a ser chamada. De seguida é preciso esperar, recorrendo-se à função `>> await`. A combinação de `await` com a função >> de Haskell pode ser explicada pelo facto da função `drawSq` retornar um tipo monádico que deve ser ignorado por `await`.

No entanto, o tipo de retorno desta solução é `[IO ()]` e não `IO [()]`. Para resolver este problema, basta adicionar uma chamada à função `sequence`, que transforma uma lista de monades num mónade de listas.

```
present = sequence . (map ((>> await) . drawSq))
```

Problema 4

Versão não probabilística

Gene de $consolidate'$:

$$cgene :: (Eq\ a, Num\ b) \Rightarrow () + ((a,b),[(a,b)]) \rightarrow [(a,b)]$$
$$cgene = [nil, \widehat{addPoints}]$$

Geração dos jogos da fase de grupos:

$$pairup = concat \cdot ((\widehat{zipWith\ zip})) \cdot \langle repeat, tail \cdot suffixes \rangle$$
$$matchResult\ f = \widehat{matchResults} \cdot \langle id, f \rangle$$
$$glt = (id + (splitInHalf \cdot \widehat{(:)})) \cdot out$$
$$matchResults = \overline{cons \cdot (tra \times singl \cdot tra)} \cdot \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \times id \rangle$$

Funções auxiliares:

$$tra = \widehat{teamResult}$$
$$splitInHalf\ l = \langle take\ half, drop\ half \rangle\ l$$
$$\textbf{where}\ half = (length\ l)\ `div`\ 2$$
$$teamResult\ t = maybe\ (t,1)\ \equiv t \rightarrow \underline{t,3}, \underline{t,0}$$

$$addPoints :: (Eq\ a, Num\ b) \Rightarrow (a,b) \to [(a,b)] \to [(a,b)]$$
$$addPoints\ x = (Main.collapse\ x) \cdot (x:)$$
$$collapse :: (Eq\ a, Num\ b) \Rightarrow (a,b) \to [(a,b)] \to [(a,b)]$$
$$collapse\ (x,y)\ list = (x, sum\ [b \mid (a,b) \leftarrow list, a \equiv x]) : [(a,b) \mid (a,b) \leftarrow list, a \not\equiv x]$$
$$toList = cons \cdot (id \times singl)$$
$$multiProd = foldr\ (joinWith\ (:))\ (return\ [])$$

Comecemos pela função `pairup`, que deve, dado um grupo, devolver uma lista com todos os jogos desse grupo, sobre a forma de pares de equipas (*strings*).

A função `matchResult` deve, dada uma função que devolve o resultado de um jogo e um jogo, devolver uma lista com a pontuação de cada uma das equipas nesse jogo. Recordemos que, no futebol, uma equipa ganha 3 pontos se ganhar, 1 se empatar, e 0 se perder.

Inicialmente, partiu-se o problema em duas partes mais pequenas. A primeira consiste em calcular, dados um jogo e o seu resultado, as pontuações de cada equipa; o que deu origem à função `matchResults`. A segunda parte consiste em calcular o resultado do jogo, e preparar essa informação para ser consumida pela função anterior.

A função `matchResults` é do tipo `Match -> Maybe Team -> [(Team, Int)]`. Em primeiro lugar, esta função vai ser *uncurried* para receber um par. Em segundo lugar, para obter os dados para esta função, basta aplicar um `split` (visto tratar-se de uma função que recebe um par), em que uma das funções é a identidade (porque pretendemos passar o jogo que recebemos, sem modificações), e a outra é a função que calcula o resultado do jogo, que foi recebida como argumento (`f`).

Passemos, agora, à primeira parte do problema: a função `matchResults`.

A função `glt` é o gene de um anamorfismo sobre *Leaf Trees*, o qual deve, a partir da lista das equipas que passaram à fase eliminatória em cada grupo, construir a árvore que representa o *mata-mata*. O anamorfismo é representado no seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} LTree\ Team & \xleftarrow{\text{in}_{LTree}} & Team + (LTree\ Team \times LTree\ Team) \\ {\scriptstyle [\![glt]\!]}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id + (Leaf \times [\![glt]\!])} \\ Team^* & \xrightarrow{gr2l} & Team + (Team \times Team^*) \end{array}$$

Deriva-se, assim o tipo em Haskell da função `glt`: `[Team] -> Either Team (Team,[Team])`. Como o resultado é uma soma, esta função poderá ser expressa, provavelmente, como uma soma de funções. No entanto, o tipo de entrada não é uma soma, é uma lista. Mas, se aplicarmos o funtor das listas ao argumento de entrada já ficamos com uma soma: `Team + Team \times Team`.

Após aplicar o funtor, é necessário definir ambos os casos da soma. Caso a lista seja singular, deve devolver-se o próprio elemento, isto é, a função do lado esquerdo da soma deve ser a identidade. Caso a lista tenha mais elementos, deve-se dividi-la exatamente ao meio. Para isso, primeiro é preciso reconstruir a lista (utilizando o operador `:` de Haskell) e usar uma função, definida pelo grupo, para a dividir a meio, chamada `splitInHalf`.[16].

Assim sendo, o lado direito da soma é

```
(splitInHalf . (uncurry (:)))
```

e o gene

```
glt = (id -|- (splitInHalf . (uncurry (:)))) . out
```

Versão probabilística

$$pinitKnockoutStage = return \cdot initKnockoutStage$$

[16] Há já definida uma função no módulo `LTree`, chamada `lspit`, que também parte a lista a meio. No entanto, esta não a parte exatamente a meio. Em vez disso, intercala os elementos entre as duas listas resultantes. Por isso, não foi usada.

$$pgroupWinners :: (Match \to \text{Dist } (Maybe\ Team)) \to [Match] \to \text{Dist } [Team]$$
$$pgroupWinners\ criteria = (\gg\!= return \cdot best\ 2 \cdot consolidate \cdot concat) \cdot multiProd \cdot map\ (pmatchResult\ criteria)$$
$$pmatchResult\ criteria = \widehat{(\gg\!=)} \cdot \langle criteria, return\ `multiComp`\ matchResults \rangle$$
$$multiComp = (\cdot) \cdot (\cdot)$$

A definição da função `pinitKnockoutStage` é trivial quando feita à custa de `initKnockoutStage`. De facto, a `pinitKnockoutStage` não depende em nada de probabilidades; a única diferença em relação à sua variante não monádica é o facto de ter de retornar um valor no monáde das probabilidades. Assim sendo, basta utilizar a função `return` do monáde após aplicar a `initKnockoutStage` original; ficando assim definida como `pinitKnockoutStage = return . initKnockoutStage`.

Comecemos por derivar a definição da função `pgroupWinners`. O problema foi dividido em duas partes. A primeira consiste em obter a distribuição de probabilidade de cada conjunto de resultados dos jogos do grupo. Para fazer isso, aplica-se a função `pmatchResult criteria` a todos os elementos da lista de jogos. Ou seja, a primeira parte do problema consiste na função `map (pmatchResult criteria)`. Para converter os resultados de uma lista de monádes para um monáde de lista, usa-se a função `multiProd`. Assim sendo, esta primeira parte é, na verdade, resolvida através da função `multiProd . map (pmatchResult criteria)`.

A segunda parte consiste em, sabendo os resultados dos jogos, determinar os vencedores do grupo. Para isso, é necessário juntar as listas correspondentes a cada jogo numa só - usando, para isso, a função `concat` - e consolidar (`consolidate`) a lista, de forma a ficar com a pontuação de cada equipa. Finalmente, é necessário retornar os 2 melhores, utilizando, para isso, a função `best 2`. Como estamos a trabalhar num contexto monádico, é necessário utilizar a função `return` do monáde das distribuições de probabilidade para *colocar* o resultado dentro desse mónade.

De forma a combinar estas duas partes, utiliza-se o operador >>= de Haskell, para passar o resultado da primeira para a segunda. Assim sendo, o resultado é o descrito acima.

Finalmente, consideremos a função `pmatchResult`, que deve, para um dado encontro e uma função de probabilidade, retornar a probabilidade de cada resultado - sob a forma de pontuação de cada equipa. O primeiro passo é, naturalmente, aplicar a função de probabilidade ao encontro em questão. De seguida, deve converter-se em resultado em pontuações para cada equipa - que é o que faz a função `matchResult`. Assim sendo, esta função pode ser escrita, *pointwise*, da seguinte forma:

```
pmatchResult criteria m = criteria m >>= (return . matchResults m)
```

Convertendo esta função para uma definição *pointfree* temos

```
pmatchResult criteria = uncurry (>>=) . split criteria (return `multiComp` matchResults)
multiComp = (.) . (.)
```

Valorização: Critérios de Ranking

Como sugerido no enunciado, o grupo decidiu experimentar com as funções de critérios providenciadas: `gsCriteria` e `koCriteria` para a versão determinística e `pgsCriteria` e `pkoCriteria` para a versão probabilística.

Na versão determinística, estas funções estão sob restrições bastante apertadas: na fase de grupos, em que o empate é um resultado admissível, queremos que as equipas empatem se o seu ranking for próximo o suficiente e, caso contrário, que a equipa com maior ranking ganhe. O único parâmetro que podemos ajustar é esta margem, a partir da qual o jogo resulta num empate:

$$\begin{aligned}
&gsCriteria' :: Match \to Maybe\ Team \\
&gsCriteria' = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle \\
&\quad \textbf{where } s\ ((s_1,s_2),(r_1,r_2)) = \textbf{let } d = r_1 - r_2 \textbf{ in} \\
&\qquad \textbf{if } d > margin \textbf{ then } Just\ s_1 \\
&\qquad\quad \textbf{else if } d < -margin \textbf{ then } Just\ s_2 \\
&\qquad\qquad \textbf{else } Nothing \\
&\qquad margin = 0.5
\end{aligned}$$

No código fornecido a margem é de 0.5. Experimentando diferentes valores não alterou o resultado do campeonato até ao valor 4, a partir do qual a França é vencedora. Este valor de margem elevado leva a que muitos jogos da fase de grupos resultem num empate, forçando a simulação a escolher arbitrariamente entre os elementos do grupo e eliminando as equipas com um ranking superior à França (Bélgica e Brazil).

No `koCriteria` não são admitidos empates. Isto significa que a equipa vencedora será a equipa com maior ranking. No entanto, se ambas as equipas tiverem o mesmo ranking a equipa vencedora é escolhida arbitrariamente. No código fornecido é escolhida a primeira equipa do par.

$$
\begin{aligned}
&koCriteria' :: Match \to Team \\
&koCriteria' = s \cdot \langle id \times id, rank \times rank \rangle \\
&\quad \textbf{where } s\ ((s_1,s_2),(r_1,r_2)) = \textbf{let } d = r_1 - r_2 \textbf{ in} \\
&\qquad \textbf{if } d \equiv 0 \textbf{ then } tiebreaker\ (s_1,s_2) \\
&\qquad\quad \textbf{else if } d > 0 \textbf{ then } s_1 \\
&\qquad\qquad \textbf{else } s_2 \\
&\qquad tiebreaker = \pi_1
\end{aligned}
$$

Se se alterar esta escolha para a segunda equipa do par, o vencedor do inevitável jogo Brazil-Bélgica (as duas equipas com maior ranking) será a Bélgica, mudando o resultado da simulação.

Na versão probabilística, é possível alterar de forma significativa estas funções. Não foram realizados muitos testes com versões alternativas de `pkoCriteria`, embora tais formulações sejam definitivamente possíveis. Em vez disso, chamou a atenção do grupo a função `pgsCriteria`, cuja versão original utiliza um mecanismo parecido com a versão original determinística para determinar um empate. Caso as diferenças entre os rankings sejam superiores a 0.5, um empate é impossível e o cálculo do resultado do jogo é delegado à função `pkoCriteria`. Caso contrário, um empate tem probabilidade de 50%, sendo que os restantes 50% são preenchidos com o resultado da função pkoCriteria. O grupo decidiu generalizar esta estrutura rígida com uma função tieProb, que dada a diferença dos rankings determina a probabilidade de um empate:

$$
\begin{aligned}
&pgsCriteria' :: Match \to \text{Dist}\ (Maybe\ Team) \\
&pgsCriteria' = s \cdot \langle id, rank \times rank \rangle \\
&\quad \textbf{where } s\ (m,(r_1,r_2)) = D\,\$\,((Nothing, prob):)\,\$\,map\ (Just \times (*(1-prob)))\,\$\,unD\,\$\,pkoCriteria\ m \\
&\qquad \textbf{where } prob = tieProb\,\$\,abs\ (r_1 - r_2) \\
&\qquad\quad tieProb\ x \mid x > 0.5 = 0 \\
&\qquad\qquad \mid otherwise = 0.5
\end{aligned}
$$

Uma função tieProb alternativa seria, por exemplo, uma função linear entre 0 e 0.5, atribuindo 100% de probabilidade de empate caso os rankings sejam iguais e 0% caso a diferença seja maior a 0.5:

$$
\begin{aligned}
&tieProb\ x \mid x > 0.5 = 0 \\
&\quad \mid otherwise = 1 - x
\end{aligned}
$$

Esta formulação altera ligeiramente as probabilidades do resultado final da simulaçlão, mas a ordem das 5 equipas com maior probabilidade de vencer mantém-se.

Índice