第9章 Black-Scholes-Merton期权定价模型

内容

- 期权
- 期权定价模型
- 与期权相关的希腊字母

期权

期权的收益和利润/损失函数

欧式看涨期权的收益:payoff=Max$(S_T - X, 0)$

其中S_T是到期日T的股票价格，X是执行价

- 如果看涨期权的期权费(即期权价格)为c,且合约有效期较短，可忽略货币的时间价值，则有

  看涨期权买方的损益P/L=Max$(S_T - X, 0)$-c

  看涨期权卖方的损益P/L=c-Max$(S_T - X, 0)$

期权的收益和利润/损失函数

欧式看跌期权的收益:payoff=Max$(X-S_T,0)$

其中S_T是到期日T的股票价格，X是执行价

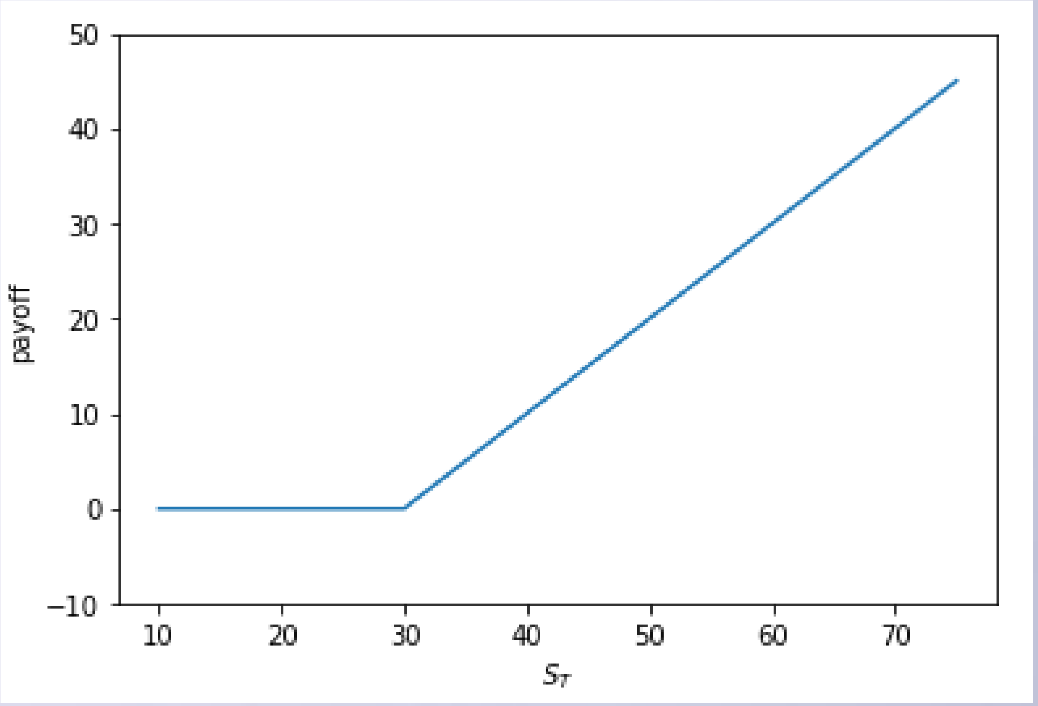
- 如果看跌期权的期权费(即期权价格)为p,且合约有效期较短，可忽略货币的时间价值，则有

  看跌期权买方的损益P/L=Max$(X-S_T,0)$-p

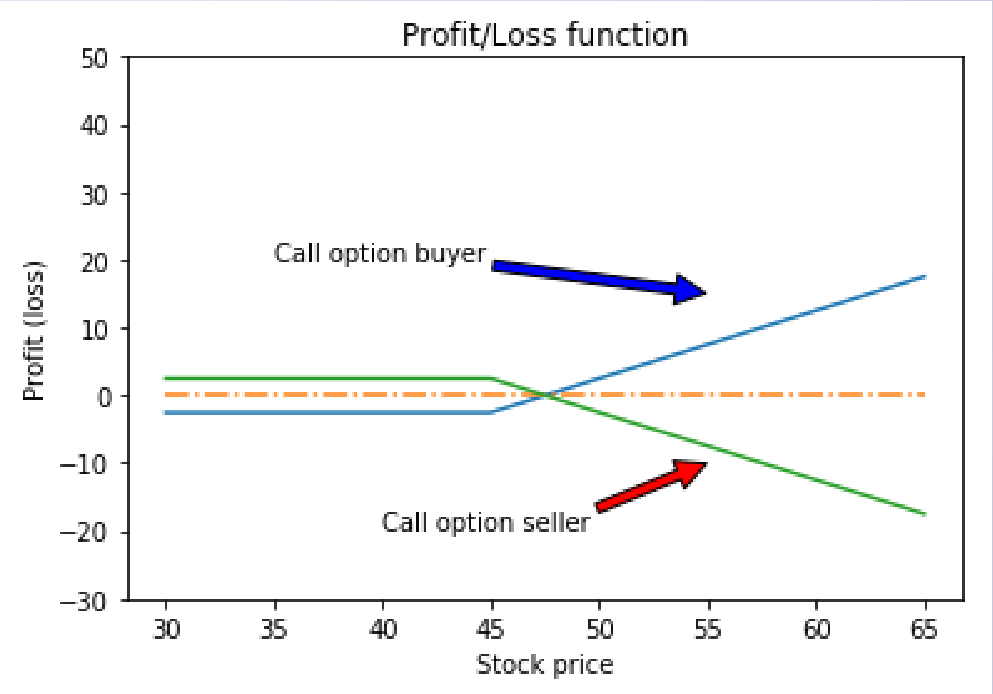
  看涨期权卖方的损益P/L=p-Max$(X-S_T,0)$

例：有一个欧式看涨期权规定买方可以用执行价30￥，在3个月后购买某只股票，请绘制与到期日股价S_T有关的收益函数曲线。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
s = np.arange(10,80,5)
x=30
payoff=(np.abs(s-x)+s-x)/2
plt.ylim(-10,50)
plt.plot(s,payoff)
plt.xlabel("$S_T$")
plt.ylabel("payoff")
```

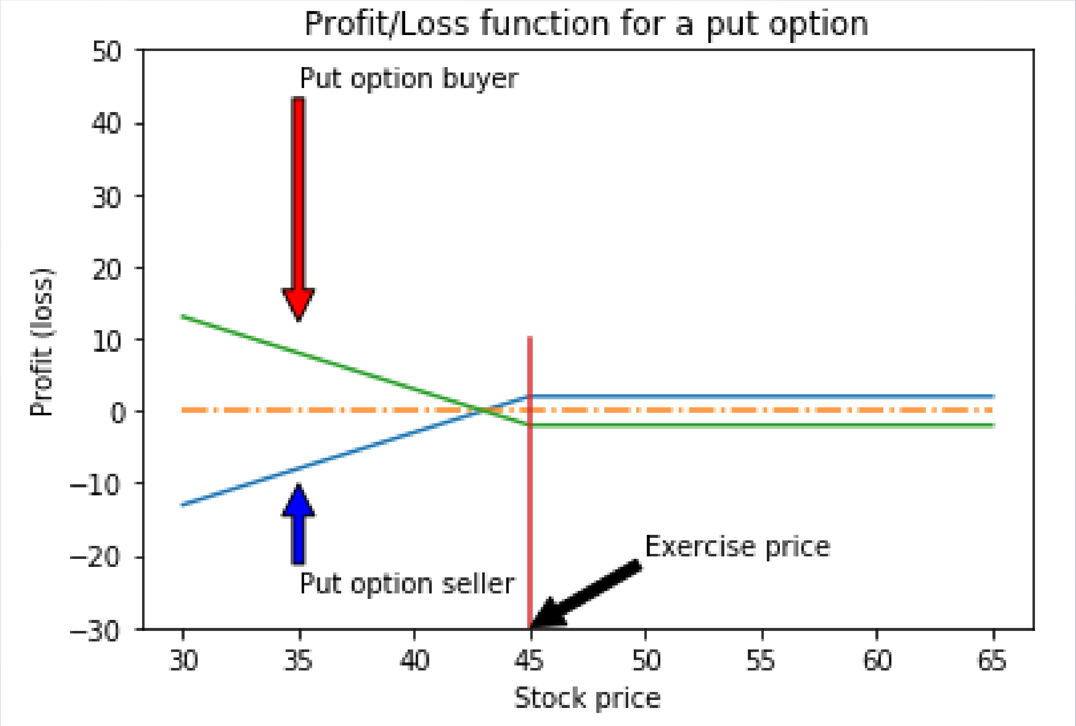


绘制看涨期权买方和卖方的损益函数，假设期权定价c=2.5, X=45




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
s = np.arange(30,70,5)
x=45;call=2.5
profit=(np.abs(s-x)+s-x)/2 -call
y2=np.zeros(len(s))
plt.ylim(-30,50)
plt.plot(s,profit)
plt.plot(s,y2,'-.')
plt.plot(s,-profit)
plt.title("Profit/Loss function")
plt.xlabel('Stock price')
plt.ylabel('Profit (loss)')
plt.annotate('Call option buyer', xy=(55,15), xytext=(35,20),
        arrowprops=dict(facecolor='blue',shrink=0.01),)
plt.annotate('Call option seller', xy=(55,-10), xytext=(40,-20),
        arrowprops=dict(facecolor='red',shrink=0.01),)
plt.show()
```

绘制看跌期权买方和卖方的损益函数，假设期权定价 p=2, X=45




```
import numpy as np
Import matplotlib.pyplot as plt
s = np.arange(30,70,5)
x=45;p=2
y=p-(np.abs(x-s)+x-s)/2
y2=np.zeros(len(s))
x3=[x, x]
y3=[-30,10]
plt.ylim(-30,50)
plt.plot(s,y)
plt.plot(s,y2,'-.')
plt.plot(s,-y)
plt.plot(x3,y3)
plt.title("Profit/Loss function for a put option")
plt.xlabel('Stock price')
plt.ylabel('Profit (loss)')
plt.annotate('Put option buyer', xy=(35,12), xytext=(35,45),
        arrowprops=dict(facecolor='red',shrink=0.01),)
plt.annotate('Put option seller', xy=(35,-10), xytext=(35,-25),
        arrowprops=dict(facecolor='blue',shrink=0.01),)
plt.annotate('Exercise price', xy=(45,-30), xytext=(50,-20),
        arrowprops=dict(facecolor='black',shrink=0.01),)
```

欧式期权与美式期权

- 欧式期权只能在到期日执行，而美式期权可以在到期日或到期日之前的任何时间行权。
- 由于美式期权可以在到期日行权，所以它的价格（期权费）应该不低于欧式期权。
- 欧式期权的定价公式有解析表达式，如B-S-M期权模型，而美式期权的价格没有解析表达式。

现金流、不同类型的期权、权利和责任

表 9-1

	期权买方（多头）	期权卖方（空头）	欧式期权	美式期权
看涨期权	有权利以约定价格购买标的资产	必须履行义务以约定价格卖出标的资产	只能在到期日行权	能在到期日之前行权
看跌期权	有权利以约定价格卖出标的资产	必须履行义务以约定价格买入标的资产	只能在到期日行权	能在到期日之前行权
期权费流向	支付期权费	收取期权费		

表 9-1 显示了多头/空头、看涨/看跌期权、欧式/美式期权和初始现金流的方向。

期权定价模型

不分红股票的期权定价模型

B-S-M模型假设标的股票在到期日前不支付任何股息，而给出的期权价格的解析表达式。如果用S_0代表当前价格，X代表行权价，r代表连续复利的无风险利率，T代表期权有效期，σ代表股票波动率，则欧式看涨期权价格c和看跌期权价格p的公式如下：

其中N()是标准正态累积分布函数

$$
\begin{cases}
d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_0}{x}\right) + \left(\gamma + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_0}{x}\right) + \left(\gamma - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\
c = S_0 N(d_1) - X e^{-\gamma T} N(d_2) \\
p = X e^{-\gamma T} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)
\end{cases}
$$

已知分红股票的欧式期权价格

假设期权到期日为T，已知标的股票在时间T_1将发放红利，$T_1 < T$。可以修改原始的B-S-M模型来给该期权定价，就是用以下S来代替S_0

$$S = S_0 - e^{-rT_1} d \qquad (11)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{x}\right) + \left(\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (12)$$

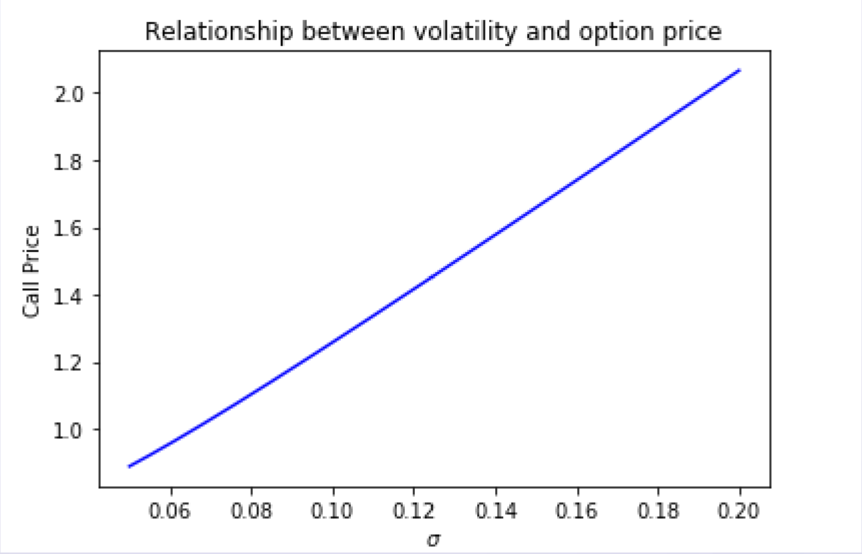
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{s}{x}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \qquad (13)$$

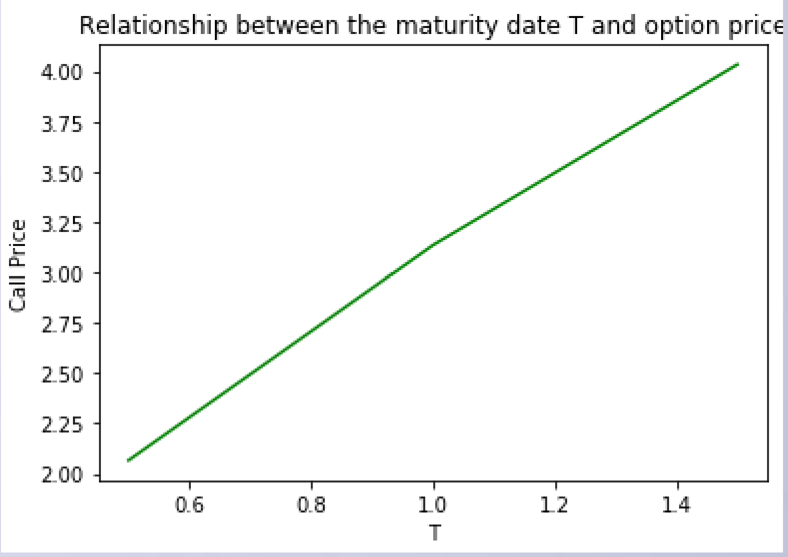
$$c = S * N(d_1) - X * e^{-rT} N(d_2) \qquad (14)$$

$$p = X * e^{-rT} N(-d_2) - S * N(-d_1) \qquad (15)$$

研究：期权价格和股票波动率的关系

当标的股票的波动率增加时，其看涨期权和看跌期权的价值都增加。当股票价格的波动幅度增大时，股票价格有更大的机会出现极端值，即更有机会从期权合约中获利。





与期权相关的希腊字母

希腊字母含义与公式

- 在期权理论中，几个希腊字母用于表示期权等金融衍生品的价格的敏感性，通常称为风险敏感性、风险度量或套利参数。
- 希腊字母delta(Δ)，是期权价格对股价导数：$\Delta=\frac{\partial c}{\partial s}$，
- 假设不分红的股票，则它的欧式看涨期权Δ_{call}=N(d_1);它的欧式看跌期权Δ_{put}=N(d_1)-1
- 可以基于delta值设计一个套期保值策略，假设卖出一个看涨期权，可以买入数量为delta的标的股票，使得股票价格的微小变化可以被看涨期权的价格的变化相抵消。

希腊字母含义与公式

- 希腊字母Γ是标的股票的价格变化引起的delta的变化率：

$$\Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial S}$$

为了有效实施delta对冲，必须不断更新持有的标的股票的头寸，因为delta与标的股票的价格相关。

- 如果gamma值比较小，就不必频繁改变持有标的股票的头寸。
- 欧式看涨期权（或看跌期权）的gamma值：

$$\Gamma=\frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

小 结

- 期权
- 期权定价公式
- 与期权相关的希腊字母