Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет

«Московский институт электронной техники»

Кафедра Высшая математика 1

Филиппов Сергей Александрович

Бакалаврская работа
по направлению 01.03.04
«Прикладная математика»
(бакалавриат)

Топологические полигоны над полугруппами

Студент Филиппов С.А.

Руководитель ВКР,

д.ф.-м.н., профессор Кожухов И.Б.

Москва 2024

Оглавление

Введение

В современном мире математика играет все более важную роль, занимая центральное место во многих научных и практических областях. В ее сердце лежат такие разделы как: алгебра, топология и теория чисел, которые играют ключевую роль в исследовании различных математических и физических явлений.

Топология, как наука о качественных свойствах и структуре пространства, изучает понятие непрерывности и свойства топологических пространств. Она дает нам возможность абстрагироваться от конкретных объектов и изучать их глобальные свойства. Топологические методы используются во многих областях, включая физику, экономику, биологию и информатику.

Алгебра, с другой стороны, изучает математические структуры и операции, которые могут быть применены к различным объектам. Этот раздел математики позволяет нам анализировать и решать сложные задачи, используя абстрактные алгебраические системы. Алгебраические методы находят свое применение в криптографии, физике элементарных частиц и теории кодирования.

Изучение производных структур математических объектов (таких как группа автоморфизмов, решетка конгруэнций и пр.) играет важную роль для развития теорий, так как они содержат в себе информацию о свойствах и структуре самих объектов. Так, например, целая ветвь в теории универсальных алгебр занимается изучением решеток конгруэнций. На ряду с решетками конгруэнций рассматривают решетки топологий универсальных алгебр. Так, в [1] показано, что решетка, двойственная к решетке конгруэнций произвольной алгебры, изоморфна некоторой подрешетке решетки топологий этой алгебры. В работе [2] показано, что решетка квазипорядков и решетка топологий конечной цепи X_n из n элементов изоморфны булеану из 2^{2n-2} элементов.

Стоит отметить, что исследование взаимосвязи топологической структуры с порядковой представляет интерес само по себе, а порядковая структура на множестве предоставляет более богатый выбор операций для наделения множества алгебраической структурой. Поэтому данный вопрос может быть рассмотрен в качестве побочной задачи.

Любую алгебру с n-арной операцией можно свести к алгебре с унарными операциями, которую можно рассматривать как полигон над собой. Действительно, пусть (A, f) - алгебра с n-арной операцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n), a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Тогда алгебру (A, f) можно свести к унарной алгебре (A, Ω) с операциями $\varphi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Любая унарная алгебра, в свою очередь, является полигоном над полугруппой S, порожденной операциями из Ω относительно композиции отображений. С учетом этого, в рамках данной темы можно рассмотреть связь топологических структур с операциями на произвольных универсальных алгебрах.

Целью данной работы является исследование взаимосвязи топологических и алгебраических структур.

Для достижения данной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Рассмотреть способы введения топологии на упорядоченном множестве;

2. Рассмотреть взаимосвязь непрерывных и изотонных отображений на пространствах с топологией, индуцированной порядком;

3. Разработать алгоритм, позволяющий находить все топологии на конечном множестве, относительно которых произвольная операция непрерывна;

4. Реализовать возможность визуализации решеток на ЭВМ;

5. Построить решетки топологий на множествах различных мощностей, сохраняющих операцию "ограниченного сложения" и проверить, являются ли они дистрибутивными или модулярными;

6. Построить решетки топологий на множествах различных мощностей, сохраняющих операцию max и проверить, являются ли они дистрибутивны-

ми или модулярными.

Необходимые сведения из общей топологии можно найти в [3] и [4], теории полугрупп в [5], [6], теории полигонов в [6], [7], [8], теории решеток в [9].

Глава 1

Основные понятия и конструкции

Частично упорядоченным множеством называется пара
$(X, \leq)$, где X - это множество, а $\leq$ - бинарное отношение, удовлетворяющее аксиомам:

PO1) $\forall x \in X : x \leq x$

PO2) $\forall x, y \in X : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$

PO3) $\forall x, y, z \in X : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

Частично упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным* или *цепью*, если удовлетворяет следующей аксиоме:

LO1) $\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$

Отображение $f : X \to Y$ из частично упорядоченного множества X в частично упорядоченное множество Y называется *изотонным*, если выполнено: $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.

Универсальной алгеброй или просто *алгеброй* называется непустое множество A, снабженное набором n-арных операций. Множество Ω символов n-арных операций, определенных на A называется *сигнатурой* алгебры A.

Полугруппой S называется алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией $*$, т.е. выполняется:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Для любых элементов a, b, c из множества S.

Верхней (нижней) полурешёткой называется частично упорядоченное множество, в котором у любых двух элементов есть супремум sup (инфимум inf).

Частично упорядоченное множество, являющееся и верхней и нижней полурешеткой относительно порядка на нем, называется *решёткой*. Если любое непустое подмножество решетки имеет супремум и инфимум, то решётка называется *полной*.

Решетка $\mathfrak{L}$ называется *модулярной*, если удовлетворяет условию $\forall x, y, z \in \mathfrak{L} : x \geq z \implies x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$.

Решетка $\mathfrak{L}$ называется *дистрибутивной*, если удовлетворяет условию $\forall x, y, z \in \mathfrak{L} : (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$.
Модулярность является необходимым условием дистрибутивности.

Непустое множество A называется *правым полигоном над полугруппой* S, если задано отображение $\mu : A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto as := \mu(a, s)$, удовлетворяющее условию $a(st) = (as)t$ при всех $a \in A$, $s, t \in S$. Левый полигон над полугруппой S определяется двойственным образом. Как уже отмечалось во введении, любую универсальную алгебру с n-арной операцией можно свести к унарной алгебре и рассматривать как полигон над полугруппой S, порожденной операциями из сигнатуры относительно композиции отображений.

Топологией на множестве X называется набор $\mathcal{T}$ его подмножеств, удовлетворяющий аксиомам:

O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

O2) $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \bigcap V \in \mathcal{T}$

O3) $\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{T} : \bigcup\limits_{U \in \mathcal{F}} U \in \mathcal{T}$

Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*. Подмножества X, принадлежащие семейству $\mathcal{T}$ называются *открытыми*. Подмножество X называется *замкнутым множеством*, если дополнение к нему открыто. *Окрестностью* точки $x \in X$ называется всякое открытое множество U такое, что $x \in U$.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ – топологическое пространство. Семейство $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ такое, что каждое непустое открытое множество представимо в виде объединения некоторого подсемейства $\mathfrak{B}$ называется *базой топологии* $\mathcal{T}$.

Всякая база обладает следующими свойствами:

B1) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \quad \forall x \in B_1 \bigcap B_2 \quad \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B \subset B_1 \bigcap B_2$

B2) $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B$

Семейство $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ такое, что набор пересечений $\bigcap \mathcal{P}_n$ его конечных подсемейств $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ является базой топологии $\mathcal{T}$, называется *предбазой топологии* $\mathcal{T}$.

Отображение $f : X \to Y$ из топологического пространства $(X, \mathcal{T}_X)$ в топологическо пространство $(Y, \mathcal{T}_Y)$ называется *непрерывным*, если $\forall U \in \mathcal{T}_Y$: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$, т.е. если прообраз всякого открытого подмножества пространства Y является открытым подмножеством пространства X.

Пусть даны множество X и семейство $\mathfrak{B}$ его подмножеств, удовлетворяющее условиям (B1)-(B2). Пусть $\mathcal{T}$ - семейство всех подмножеств множества X, являющихся объединениями подсемейств $\mathfrak{B}$. Семейство $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям (O1)-(O3), а $\mathfrak{B}$ является базой топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. *Топология* $\mathcal{T}$ *называется топологией, порожденной базой* $\mathfrak{B}$ (см. [3, Предложение 1.2.1.]).

Пусть даны множество X, семейство топологических пространств $\{Y_s\}_{s \in S}$ и семейство проекций $\{f_s\}_{s \in S}$, где f_s - отображение X в Y_s. Тогда на X можно задать топологию, порожденную базой, состоящей из всех множеств вида $\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$, где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ и V_i - произвольное открытое подмножество пространства Y_{s_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$. Такая топология называется *топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_s\}_{s \in S}$ (см. [3, Предложение 1.4.8.]).

Пусть $\{X_s\}_{s \in S}$ – семейство топологических пространств. Рассмотрим произведение $X = \prod_{s \in S} X_s$ множеств $\{X_s\}_{s \in S}$ и семейство отображений $\{p_s\}_{s \in S}$, где p_s ставит в соответствие точке $x = \{x_s\} \in X = \prod_{s \in S} X_s$ ее s-ю координату $x_s \in X_s$. Множество X с топологией, порожденной семейством отображений $\{p_s\}_{s \in S}$ называется *произведением пространств* $\{X_s\}_{s\in S}$, а сама топология называется *топологией произведения* или *тихоновской топологией*.

Пусть $(A, \mathcal{T}, \Omega)$ – универсальная алгебра с сигнатурой Ω и топологией $\mathcal{T}$ на носителе, f – n-арная операция из сигнатуры. Операция f называется *непрерывной*, если верно следующее условие:

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \forall W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathcal{T} \exists U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_n(x_n) \in \mathcal{T} :$$

$$f(U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_n(x_n)) \subset W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Топология на носителе A, относительно которой каждая операция из сигнатуры Ω непрерывна, называется *топологией на алгебре A*.

Глава 2

Основная часть

2.1. Топологии, индуцированные частичным порядком

Рассмотрим подмножества множества X следующего вида:

$$B_x = \{y \in X | y \leq x\}$$

Покажем, что набор подмножеств $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{x \in X} B_x$ – является базой некоторой топологии на X. Для этого необходимо проверить свойства базы топологии. Если оба свойства верны, семейство $\mathfrak{B}$ - порождает на X топологию.

$\triangleright$ Проверим свойство (B1): пусть $B_x, B_y \in \mathfrak{B}$ и $x_0 \in B_x \bigcap B_y$. Нужно показать, что существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $x_0 \in B \subset B_x \bigcap B_y$. Заметим: $B_{x_0} = \{z \in X | z \leq x_0\} \subseteq B_x$ т.к. $x_0 \in B_x$. Аналогично, $B_{x_0} \subseteq B_y$. Тогда, с учетом замечания имеем: $x_0 \in B_{x_0}$ и $B_{x_0} \subseteq B_x \bigcap B_y$.

Выполнение свойства (B2) - очевидно. Действительно, пусть $x \in X$ - произвольный элемент. $x \in B_x = \{y \in X | y \leq x\} \in \mathfrak{B}$ по свойству (PO1). $\triangleleft$

Теперь рассмотрим подмножества вида:

$$B_x^s = \{y \in X | y < x\}$$

Набор $\mathfrak{B}^s = \bigcup\limits_{x \in X} B_x^s$ не удовлетворяет свойству (B2) в общем случае (например, если в X есть максимальный элемент). Доопределим набор, добавив в него множество X: $\mathfrak{B}^s = \{X\} \bigcup (\bigcup\limits_{x \in X} B_x^s)$, тогда свойство (B2) будет выполнено и набор $\mathfrak{B}^s$ порождает некоторую топологию на X.

Предложение 2.1. *Пусть $(X, \leq), (Y, \preccurlyeq)$ – два частично упорядоченных множества с топологией порожденной базой вида $\mathfrak{B}$ и $f : X \to Y$ – отображение между ними. Отображение f – непрерывно тогда и только тогда, когда оно изотонно.*

$\triangleright$ Достаточность:

Пусть f – изотонно, и $y \in$ – произвольный элемент. Рассмотрим $V_y = \{z \in Y | z \leq y\} \in \mathfrak{B}^Y$, где $\mathfrak{B}^Y$ – база в Y. Положим $U = f^{-1}(V_y)$ и пусть $x \in U$ – произольный элемент. В силу изотонности отображения: $\forall t \in X : t \leq x \implies f(t) \leq f(x)$. Значит $f(t) \in V_y$ и, следовательно, $t \in U$. Тогда $B_x = \{t \in X | t \leq x\} \subseteq U$ и, в силу произвольности элемента $x : f^{-1}(V_y) = U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$. Так, прообраз базового множества V_y представим в виде объединения открытых, следовательно отображение f – непрерывно.

Необходимость:

Пусть теперь f – непрерывно. Рассмотрим $V_{f(x)} = \{y \in Y | y \leq f(x)\} \in \mathfrak{B}^Y$, где x – некоторый элемент из X. $U = f^{-1}(V_{f(x)})$ – открыто в силу непрерывности отображения f. По определению базы топологии в $X : \exists B(x) \in \mathfrak{B}^X : B(x) \subset U$, причем $B(x)$ имеет вид: $B(x) = \{t \in X | t \leq x_0\}$, где $x_0 \in X$ и $x \leq x_0$. Пусть x' – произвольный элемент, не превосходящий x. Тогда $x' \in B(x)$ по свойству (РО3), а значит $x' \in U = f^{-1}(V_{f(x)})$, так как $B(x) \in U$. Следовательно $f(x') \in V_{f(x)}$, откуда заключаем, что $f(x') \leq f(x)$. Таким образом, f – изотонно. $\triangleleft$

Если задать на X, Y топологии, порожденные базами вида $\mathfrak{B}^s$, то утверждение будет неверно, причем обе импликации неверны. Действительно, пусть $f : X \to Y$ – непрерывно. Покажем, что в общем случае оно не изотонно: рассмотрим $X = \{0, 1\}$ с естественным порядком, $Y = \{a, b\}, a < b$, $f(0) = f(1) = a$. $\{a\}$ - открыто в Y, $0 < 1$, но $f(0) \not< f(1)$. Пусть теперь $f : X \to Y$ – изотонно. Покажем, что в общем случае оно не непрерывно: рассмотрим $X = \{0, 1, a\}$, $0 < 1$, $Y = \{0, 1, 2\}$ с естественным порядком, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(a) = 2$. Отображение не является непрерывным т.к. $\{0, 1\}$ - открыто в Y, $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, но $\{0, 1\}$ - не является открытым в X.

2.2. Поиск топологий на конечных алгебрах

Пусть (X, Ω) - алгебра на конечном множестве X мощности n с сигнатурой Ω. В общем случае задача поиска всех топологий, относительно которых каждая операция из Ω непрерывна, решается алгоритмически. В первом приближении алгоритм решения следующий:

1. Найти все топологии на множестве X
2. Проверить непрерывность операций из сигнатуры для каждой найденной топологии.

Шаг 2 будем выполнять простой проверкой для каждой операции f из Ω, используя определение непрерывности n-арной операции:

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \forall W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathcal{T} \exists U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_n(x_n) \in \mathcal{T} :$$

$$f(U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_n(x_n)) \subset W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Рассмотрим шаг 1 более детально: необходимо разработать алгоритм, позволяющий находить все топологии на конечном множестве. Наиболее наивным способом был бы полный перебор всех возможных наборов подмножеств булеана 2^X и проверка каждого на соответствие аксиомам топологии (O1) - (O3). Однако, данный алгоритм требует большого количества вычислений, т.к. возникает необходимость перебирать 2^{2^X} элементов.

Воспользуемся следующей идеей из статьи [10]: заметим, что если на множестве X задана топология $\mathcal{T}$, то задан и набор замкнутых множеств $\mathfrak{C} = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}\}$, удовлетворяющий аксиомам, двойственным к (O1)-(O3). Верно и обратное: если задан набор замкнутых множеств $\mathfrak{C}$, удовлетворяющий аксиомам, двойственным к (O1)-(O3), то задана топология $\mathcal{T} = \{X \setminus F | F \in \mathfrak{C}\}$.

Замкнутые множества можно рассматривать как идемпотенты относительно оператора замыкания Cl. Тогда, топологическое пространство можно определить следующим образом:

Множество X называют топологическим пространством, если задано отображение $Cl : 2^X \to 2^X$, удовлетворяющее условиям:

a) $Cl(\emptyset) = \emptyset$

b) $\forall A \in 2^X : A \subset Cl(A)$

c) $\forall A, B \in 2^X : Cl(A \bigcup B) = Cl(A) \bigcup Cl(B)$

d) $\forall A \in 2^X : Cl(Cl(A)) = Cl(A)$, т.е. $Cl^2 = Cl$

Отображение Cl называют *замыканием*. Множество $Cl(U)$ называют *замыканием множества U*.

Таким образом, задача сводится к поиску всех возможных операторов замыкания, так как если задан оператор замыкания, то задан и набор замкнутых множеств. Заметим, что в силу тождественности свойства (a), пустое множество можно исключить из 2^X для сокращения количества вычислений и доопределить оператор по завершении алгоритма, используя свойство (a).

2.2.1. Описание алгоритма нахождения всех топологий на конечном множестве

Занумеруем все одноэлементные подмножества X степенями двойки и представим в двоичном виде. Все остальные подмножества X, кроме пустого множества, автоматически будут пронумерованы с использованием оператора побитового или $\wedge$, т.к. полугруппа $(\mathbb{Z}_n, \wedge)$, где $n = |2^X|$ изоморфна полугруппе $(2^X, \bigcup)$, а множество $\mathcal{A} = \{2^i | i = 0, 1, \ldots, m-1\} \bigcup \{0\}$, где $m = |X|$ является порождающим в $(\mathbb{Z}_n, \wedge)$. Элементы множества $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ назовем *атомарными*, а соответствующие им множества назовем одноименно. Пустому множеству будет соответствовать $0 \in \mathbb{Z}_n$. Таким образом, если известны образы атомарных элементов при применении оператора Cl к соответствующим атомарным множествам, то с учетом свойства (a), известно и замыкание каждого подмножества

множества X, а значит задан набор замкнутых множеств. Заметим, что при этом сохраняется свойство (c).

Поставим в соответствие каждому атомарному элементу множество потенциальных образов таким образом, чтобы не нарушалось свойство (b). В итоге получим матрицу $m \times \frac{n}{2}$, в строках которой располагаются потенциальные образы атомарных элементов.

Далее будем строить оператор следующим образом: выберем образ из первой строки матрицы, вычеркнем ее. Теперь вычеркнем элементы из остальных строк матрицы так, чтобы не нарушалось свойство (d). Условия для вычеркивания элемента следующие:

1. $A \subset \varphi(B) \quad \wedge \quad \varphi(A) \bigcup \varphi(B) \neq \varphi(B)$;
2. $B \subset \varphi(A) \quad \wedge \quad \varphi(A) \bigcup \varphi(B) \neq \varphi(A)$,

где A - атомарное множество, соответствующее атомарному элементу, образ которого был определен предыдущим, B - атомарное множество, соответствующее текущей строке в матрице. Перебор по первой строке и вычеркивание элементов образуют рекурсию, выход из которой будет выполнен, когда матрица будет пуста.

После выхода из рекурсии, полученный набор образов атомарных элементов необходимо доопределить образами элементов $\mathbb{Z}_n$, порожденных множеством $\mathcal{A}$, используя оператор побитового или $\wedge$.

Получив таким образом все возможные множества образов элементов множества $\mathbb{Z}_n$ и перейдя к соответствующим им подмножествам множества X, получим все возможные наборы замкнутых множеств и соответствующие им топологии.

2.3. Решетки топологий конечной алгебры

Множество топологий на конечном множестве X образует полную решетку относительно отношения $\subseteq$, т.е. произвольное семейство топологий имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. Точная верхняя грань - это топология, для которой объединение этого семейства является предбазой. Точная нижняя грань - это пересечение топологий из семейства. Минимумом решетки при этом является антидискретная топология $\Delta = \{\emptyset, X\}$, а максимумом - дискретная топология $\nabla = 2^X$. Известно, что набор топологий, сохраняющих некоторую фиксированную операцию $*$ является полной подрешеткой решетки всех топологий на X.

За неимением более предпочтительного аналога для визуализации решеток на ЭВМ была решено работать с графами. Для реализации представления набора топологий в виде решетки была использована python-библиотека «Networkx» и пакет утилит «Graphviz». В «Graphviz» был выбран алгоритм «dot», который находит оптимальную конфигурацию вершин итогового графа, располагая вершины слоями и минимизируя количество пересечений ребер.

2.3.1. Решетки топологий на конечной цепи с операцией ”ограниченного сложения”

Пусть $(X, \leq)$ - конечная цепь из n элементов. Можно считать, что $X = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ с естественным порядком, т.к. конечная цепь из n элементов изоморфна данной.

Наделим X следующей бинарной операцией:

$$x * y := \begin{cases} x + y, \text{ если } x + y \leq m \\ m, \text{ если } x + y > m \end{cases} \quad \text{, где } m = \max X$$

Приведем полученные результаты при $n = 2, 3, 4, 5$:

Топологии, сохраняющие операцию $*$ для $X = \{0, 1\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$

2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$

3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$

4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

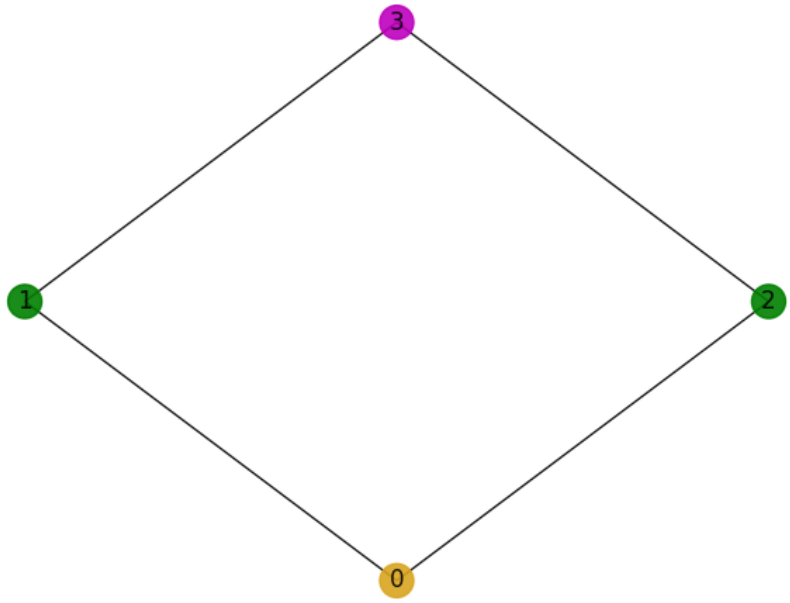

Рис. 2.1. Решетка топологий, сохраняющих операцию $*$ при $|X| = 2$

Здесь и далее: зеленым цветом выделены вершины, соответствующие топологиям, сохраняющим операцию; желтым цветом выделена топология, соответствующая минимуму решетки Δ; фиолетовым цветом выделена вершина, соответствующая максимуму решетки ∇.

Данная решетка дистрибутивна.

Топологии, сохраняющие операцию $*$ для $X = \{0, 1, 2\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}\}$
2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}\}$
3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$
6. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
7. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
8. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$
9. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
10. $\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
11. $\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

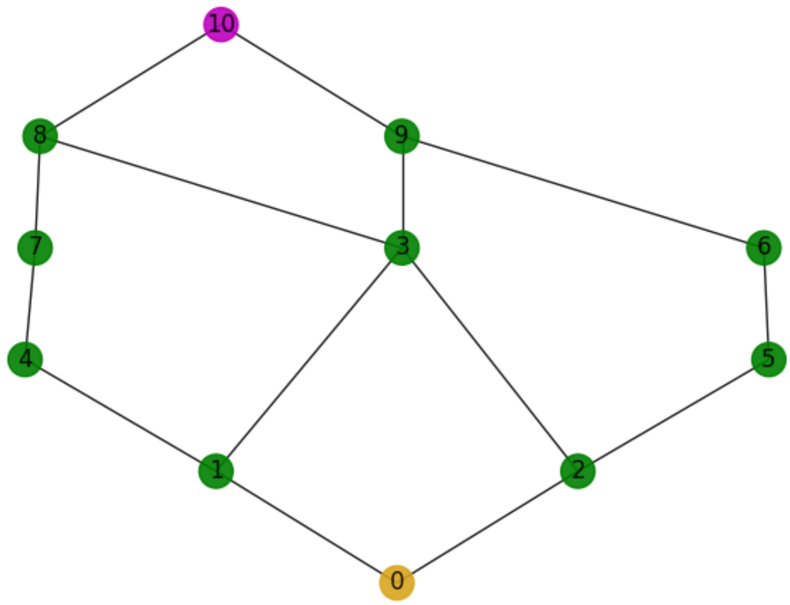

Рис. 2.2. Решетка топологий, сохраняющих операцию $*$ при $|X| = 3$

Заметим, что решетка не является модулярной и, следовательно, дистрибутивной, т.к. содержит пентагон $\{1, 3, 4, 7, 8\}$.

Топологии, сохраняющие операцию $*$ для $X = \{0, 1, 2, 3\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2, 3\}\}$

2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

6. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

7. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

8. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

9. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

10. $\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

11. $\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

12. $\mathcal{T}_{11} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

13. $\mathcal{T}_{12} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

14. $\mathcal{T}_{13} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

15. $\mathcal{T}_{14} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

16. $\mathcal{T}_{15} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

17. $\mathcal{T}_{16} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

18. $\mathcal{T}_{17} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

19. $\mathcal{T}_{18} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

20. $\mathcal{T}_{19} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

21. $\mathcal{T}_{20} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

22. $\mathcal{T}_{21} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

23. $\mathcal{T}_{22} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

24. $\mathcal{T}_{23} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

25. $\mathcal{T}_{24} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

26. $\mathcal{T}_{25} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

27. $\mathcal{T}_{26} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

28. $\mathcal{T}_{27} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

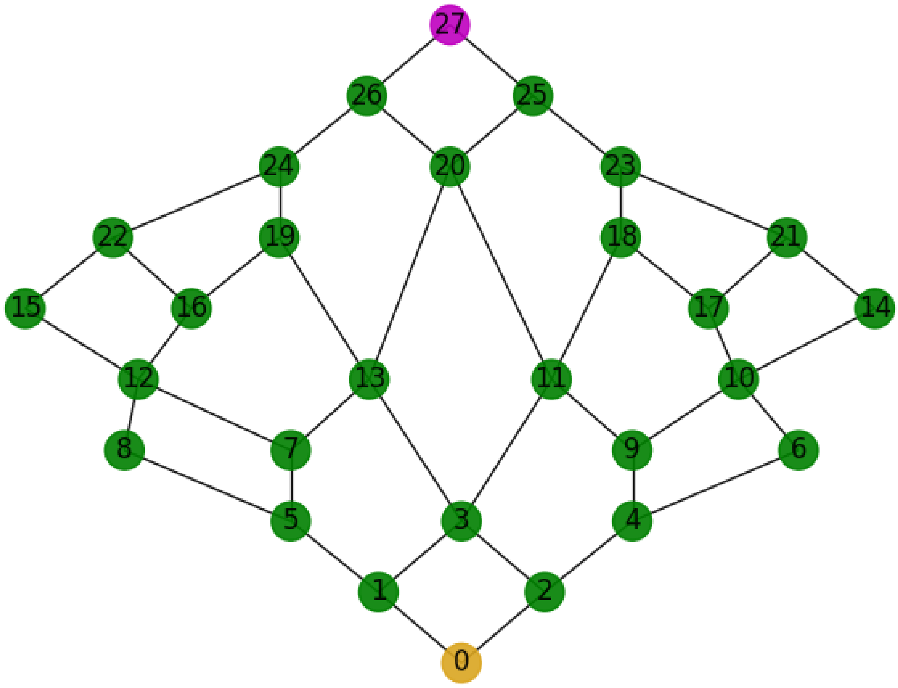

Рис. 2.3. Решетка топологий, сохраняющих операцию $*$ при $|X| = 4$

Решетка не является модулярной и, следовательно, дистрибутивной.

Топологии, сохраняющие операцию $*$ для $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

Список топологий в приложении А в виду громоздкости.

Решетка не является модулярной и, следовательно, дистрибутивной.

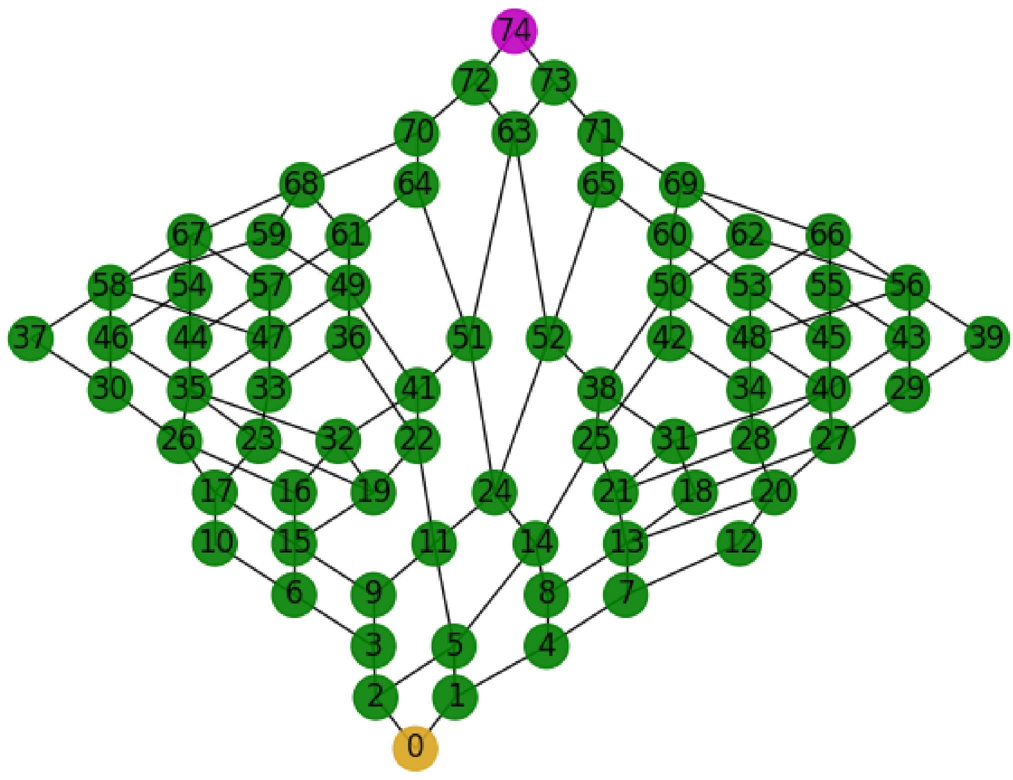

Рис. 2.4. Решетка топологий, сохраняющих операцию $*$ при $|X| = 5$

2.3.2. Решетки топологий на конечной цепи с операцей max

Как отмечалось во введении, в статье [2, Теорема 2.], была доказана теорема, дающая полное описание решетки топологий конечной цепи, сохраняющих операции $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Показано, что эта решетка изоморфна булеану из 2^{2n-2} элементов. Рассмотрим решетку топологий конечной цепи, сохраняющих только операцию $\vee = \max$.

При $n = 2$ все топологии на X сохраняют обе операции min, max. Решетка топологий, соответственно, такая же как на рисунке 2.1.

Топологии, сохраняющие операцию max **для** $X = \{0, 1, 2\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}\}$

2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$

3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}\}$

4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{2\}, \{0,1,2\}\}$

6. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$

7. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

8. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{2\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$

9. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

10. $\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$

11. $\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$

12. $\mathcal{T}_{11} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

13. $\mathcal{T}_{12} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$

14. $\mathcal{T}_{13} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$

15. $\mathcal{T}_{14} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

16. $\mathcal{T}_{15} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

17. $\mathcal{T}_{16} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

18. $\mathcal{T}_{17} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$

19. $\mathcal{T}_{18} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

20. $\mathcal{T}_{19} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

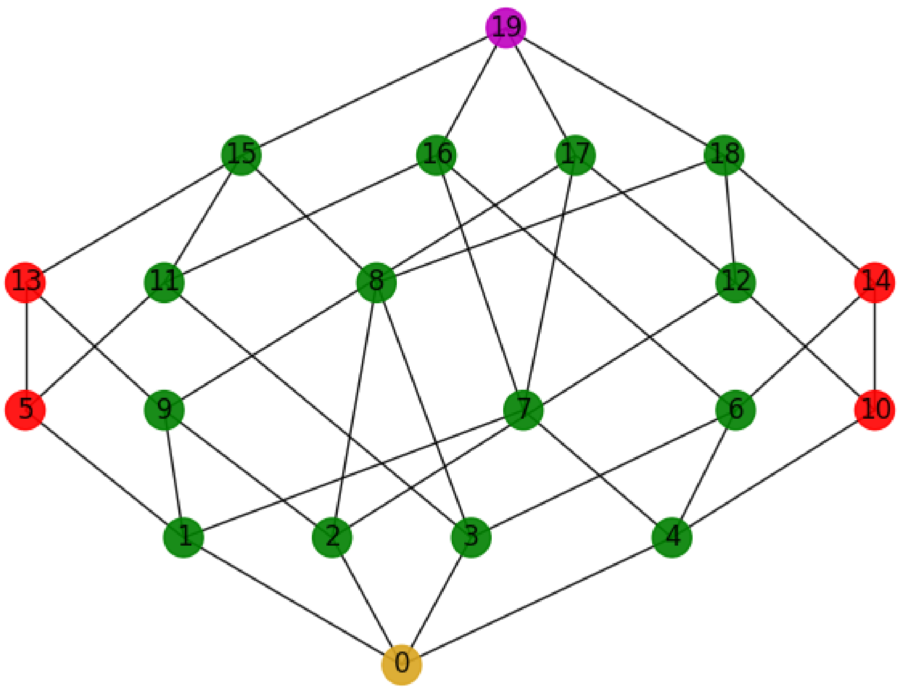

Рис. 2.5. Решетка топологий, сохраняющих операцию max при $|X| = 3$

Здесь и далее: зеленым цветом выделены вершины, соответствующие топологиям, сохраняющим как операцию max, так и операцию min; красным цветом выделены вершины, соответствующие топологиям, сохраняющим только операцию max; желтым цветом выделена топология, соответствующая минимуму решетки Δ; фиолетовым цветом выделена вершина, соответствующая максимуму решетки ∇.

Решетка не является модулярной и, следовательно, дистрибутивной.

Топологии, сохраняющие операцию для $X = \{0, 1, 2, 3\}$:

Список топологий в приложении Б в виду громоздкости.

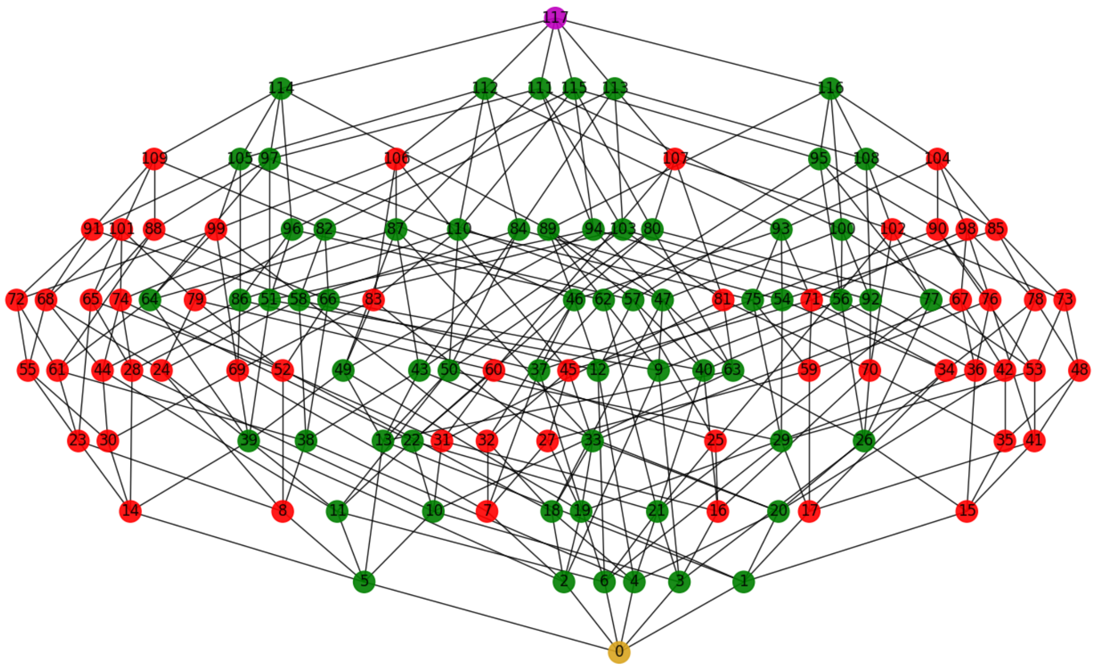

Рис. 2.6. Решетка топологий, сохраняющих операцию max при $|X| = 4$

Решетка не является модулярной и, следовательно, дистрибутивной.

2.3.3. Решетки топологий на конечной цепи с n-арной операцией

Пусть, как и ранее,
$X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ с естественным порядком. Рассмотрим следующую операцию:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} [xy]_n + [zt]_n, \; [xy]_n + [zt]_n < m; \\ m, \; [xy]_n + [zt]_n \geq m, \end{cases}$$

где $m = \max(X)$, $[x]_n$ – остаток от деления x на n.

При $n = 2$ все топологии на X сохраняют данную операцию, решетка топологий, соответственно, такая же как на рисунке 2.1.

Топологии, сохраняющие операцию для $X = \{0, 1, 2\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}\}$

2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}\}$

3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

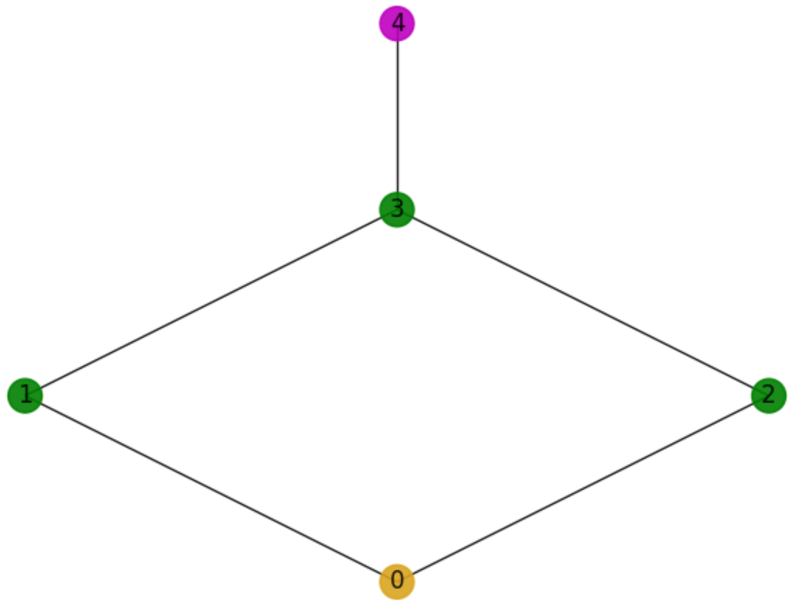

Рис. 2.7. Решетка топологий, сохраняющих операцию f при $|X| = 3$

Данная решетка дистрибутивна.

При $n = 4$ операцию сохраняют только дискретная и антидискретная топологии. При $n = 5$ решетка топологий, сохраняющих операцию f, изоморфна решетке на рисунке 2.7.

Топологии, сохраняющие операцию для $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 3\}, \{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 1\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 3, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

Пусть (X, Ω) – конечная алгебра. Исходя из симметричности решеток, рассмотренных в данном разделе, предположим, что отображение φ, заданное формулой $\varphi(\mathcal{T}) = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}\}$, является автоморфизмом решетки топологий на X, сохраняющих операции из сигнатуры.

Предложение 2.2. *Пусть X - конечная алгебра с сигнатурой Ω и $\mathfrak{L}$ - решетка топологий на X, относительно которых все операции из сигнатуры непрерывны. Отображение φ, заданное формулой: $\varphi(\mathcal{T}) = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{L}$, является автоморфизмом решетки $\mathfrak{L}$.*

$\triangleright$ Пусть ψ – n-арная операция из Ω. Покажем, что образ $\varphi(\mathcal{T})$ топологии $\mathcal{T}$, сохраняющей операцию ψ при отображении φ является топологией, сохраняющей операцию ψ, т.е. принадлежит решетке $\mathfrak{L}$.

Очевидно, что $\varphi(\mathcal{T})$ удовлетворяет аксиомам топологии (O1)-(O3). Чтобы доказать, что операция ψ – непрерывна относительно топологии $\varphi(\mathcal{T})$, вопспользуемся другим определением непрерывности операции:

n-арная операция ψ непрерывна, если непрерывно отображение $f : X^n \to X$ такое, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $X \setminus U$– произвольное открытое множество в $\varphi(\mathcal{T})$. В силу непрерывности отображения f, прообраз $f^{-1}(X \setminus U)$– замкнут в X^n с тихоновской топологией, порожденной $(X, \mathcal{T})$. Так как всякое открытое множество U' в X^n представимо в виде $U' = \bigcup\limits_{s \in S} \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i_s}$, где $U_{i_s} \in \mathcal{T}$, то $f^{-1}(X \setminus U) = X^n \setminus (\bigcup\limits_{s \in S} \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i_s}) = \bigcap\limits_{s \in S} (X^n \setminus (\prod\limits_{i=1}^{n} U_{i_s})) = \bigcap\limits_{s \in S} \bigcup\limits_{i=1}^{n} ((\prod\limits_{0<j<i} X) \times (X \setminus U_{i_s}) \times (\prod\limits_{j>i} X))$, причем семейство

S конечно в силу конечности топологии $\mathcal{T}$. Так как $\forall s \in S \forall i = 1, 2, \ldots, n$: $(X \setminus U_{i_s}), X \in \varphi(\mathcal{T})$, то $f^{-1}(X \setminus U)$– открыто в X^n с тихоновской топологией, порожденной $(X, \varphi(\mathcal{T}))$, а значит операция ψ – непрерывна в $(X, \varphi(\mathcal{T}))$.

Покажем, что φ– гомоморфизм решеток, т.е. что $\varphi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2) = \varphi(\mathcal{T}_1) \vee \varphi(\mathcal{T}_2)$ и $\varphi(\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2) = \varphi(\mathcal{T}_1) \wedge \varphi(\mathcal{T}_2)$.

Действительно, $\varphi(\mathcal{T}_1) \wedge \varphi(\mathcal{T}_2) = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_1\} \wedge \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_2\} = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_1\} \bigcap \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_2\} = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_1 \bigcap \mathcal{T}_2\} = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2\} = \varphi(\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2)$.

Рассмотрим $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$. По определению операции $\vee$ в решетке топологий, $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 = \{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\}$ т.к. объединение топологий является предбазой топологии $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$. Заметим, что $D = \{\bigcap\limits_{i=1}^{s} \bigcup\limits_{j=1}^{t} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} \subset \{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}$. Это следует из того, что $\bigcup \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2$ - открыто в $(X, \mathcal{T})$ и, в силу конечности топологий $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ - $\bigcap\limits_{s \in S} (\bigcup \mathcal{U}_s)$ тоже открыто в топологии $\mathcal{T}$, а значит элементы множества D содержатся в $\mathcal{T}$. С учетом этого замечания и двойственного к нему для топологии $\mathcal{T}' = \varphi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)$: $\varphi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2) = \varphi(\{\bigcap\limits_{i=1}^{s} \bigcup\limits_{j=1}^{t} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} \bigcup \{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\}.) = \{X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{s} \bigcup\limits_{j=1}^{t} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} \bigcup \{X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcap\limits_{j=1}^{m} U_{i_j} | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} = \{\bigcup\limits_{i=1}^{s} \bigcap\limits_{j=1}^{t} (X \setminus U_{i_j}) | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} \bigcup \{\bigcap\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{m} (X \setminus U_{i_j}) | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} = \{\bigcup\limits_{i=1}^{s} \bigcap\limits_{j=1}^{t} (X \setminus U_{i_j}) | U_{i_j} \in \mathcal{T}_1 \bigcup \mathcal{T}_2\} = \varphi(\mathcal{T}_1) \bigcup \varphi(\mathcal{T}_2)$.

Биективность φ является очевидным следствием того что φ - инволютивный гомоморфизм. $\lhd$

Из этого непосредственно следует, что φ является автоморфизмом решетки всех топологий на конечном множестве.

Заключение

В данной работе мы ограничились изучением топологических структур на конечных универсальных алгебрах и взаимосвязи топологической и порядковой структуры на множестве.

В первой части работы бал рассмотрен способ введения топологии на частично упорядоченном множестве с нестрогим порядком и похожий способ для строгого порядка. В первом случае оказалось, что отображение между пространствами с топологиями, индуцированными нестрогими порядками непрерывно тогда и только тогда, когда оно изотонно. В случае со строгими порядками данный результат неверен, причем как непрерывность отображения не следует из изотонности, так и изотонность отображения не следует из его непрерывности.

Во второй части работы мы исследовали взаимосвязь операций и топологий на множестве. Была реализована программа на языке python, позволяющая:

1. Находить все топологии на конечном множестве;
2. Проводить проверку операций на непрерывность;
3. Визуализировать решетки топологий;
4. Проводить проверку решетки на модулярность;
5. Проводить проверку решетки на дистрибутивность.

С помощью данной программы были построены решетки топологий на конечной цепи X из n элементов для: бинарной операции "ограниченного сложения" ($n = 2, 3, 4, 5$), бинарной операции max ($n = 2, 3, 4$) и операции

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} [xy]_n + [zt]_n, [xy]_n + [zt]_n < m; \\ m, [xy]_n + [zt]_n \geq m, \end{cases}$$

где $m = \max(X)$, $[x]_n$ – остаток от деления x на n. ($n = 2, 3, 4, 5$)

Для каждой из полученных решеток было выяснено, является ли она дистрибутивной или модулярной.

Из соображений симметрии было выдвинуто и доказано предположение о том, что отображение φ, заданное формулой $\varphi(\mathcal{T}) = \{X \setminus U | U \in \mathcal{T}\}$ является автоморфизмом решетки топологий на конечной алгебре (X, Ω), сохраняющих операции из сигнатуры.

Список литературы

1. *Карташова А. В.* О решетках конгруэнции и топологий унарных алгебр // Чебышевский сборник. — 2011. — Т. 12, 2 (38). — С. 27—33.
2. *Веселова А. А.*, *Кожухов И. Б.* Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи // Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 24. — С. 12—21.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — 1986.
4. *Бурбаки Н.* Общая топология (основные структуры): пер. сфранц. СН Крачковского, под ред. ДА Райкова. — 1968.
5. *Клиффорд А.*, *Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: Том 1. — М.:Мир, 1972.
6. *Kilp M.*, *Knauer U.*, *Mikhalev A. V.* Monoids, Acts and Categories: With Applications to Wreath Products and Graphs. A Handbook for Students and Researchers. Т. 29. — Walter de Gruyter, 2011.
7. *Клиффорд А.*, *Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: Том 2. — М.:Мир, 1972.
8. *Кожухов И. Б.*, *Михалёв А. В.* Полигоны над полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 141—199.
9. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — 1982.
10. *Шилин И.*, *Китюков В.* Программный способ вычисления топологий и исследования их свойств // Прикладная информатика. — 2013. — 1 (43). — С. 127—136.

Приложение А

Топологии, сохраняющие операцию ”ограниченного сложения” для $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
6. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
7. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
8. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
9. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
10. $\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
11. $\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
12. $\mathcal{T}_{11} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
13. $\mathcal{T}_{12} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
14. $\mathcal{T}_{13} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
15. $\mathcal{T}_{14} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
16. $\mathcal{T}_{15} = \{\emptyset, \{3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
17. $\mathcal{T}_{16} = \{\emptyset, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

18. $\mathcal{T}_{17} = \{\emptyset, \{4\}, \{3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

19. $\mathcal{T}_{18} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

20. $\mathcal{T}_{19} = \{\emptyset, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

21. $\mathcal{T}_{20} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

22. $\mathcal{T}_{21} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

23. $\mathcal{T}_{22} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

24. $\mathcal{T}_{23} = \{\emptyset, \{4\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

25. $\mathcal{T}_{24} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

26. $\mathcal{T}_{25} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

27. $\mathcal{T}_{26} = \{\emptyset, \{4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

28. $\mathcal{T}_{27} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

29. $\mathcal{T}_{28} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

30. $\mathcal{T}_{29} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

31. $\mathcal{T}_{30} = \{\emptyset, \{4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

32. $\mathcal{T}_{31} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

33. $\mathcal{T}_{32} = \{\emptyset, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\},$
$\{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

34. $\mathcal{T}_{33} = \{\emptyset, \{4\}, \{0, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

35. $\mathcal{T}_{34} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

36. $\mathcal{T}_{35} = \{\emptyset, \{4\}, \{0, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

37. $\mathcal{T}_{36} = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{0, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

38. $\mathcal{T}_{37} = \{\emptyset, \{4\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

39. $\mathcal{T}_{38} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

40. $\mathcal{T}_{39} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

41. $\mathcal{T}_{40} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

42. $\mathcal{T}_{41} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

43. $\mathcal{T}_{42} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

44. $\mathcal{T}_{43} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

45. $\mathcal{T}_{44} = \{\emptyset, \{4\}, \{1, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

46. $\mathcal{T}_{45} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

47. $\mathcal{T}_{46} = \{\emptyset, \{4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

48. $\mathcal{T}_{47} = \{\emptyset, \{4\}, \{0,4\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

49. $\mathcal{T}_{48} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

50. $\mathcal{T}_{49} = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{0,4\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

51. $\mathcal{T}_{50} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

52. $\mathcal{T}_{51} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

53. $\mathcal{T}_{52} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

54. $\mathcal{T}_{53} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

55. $\mathcal{T}_{54} = \{\emptyset, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

56. $\mathcal{T}_{55} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

57. $\mathcal{T}_{56} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

58. $\mathcal{T}_{57} = \{\emptyset, \{4\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{0,3,4\}, \{0,1,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

59. $\mathcal{T}_{58} = \{\emptyset, \{4\}, \{0,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

60. $\mathcal{T}_{59} = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{0,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

61. $\mathcal{T}_{60} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2\},$
$\{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

62. $\mathcal{T}_{61} = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{0,3,4\}, \{0,1,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

63. $\mathcal{T}_{62} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\},$
$\{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

64. $\mathcal{T}_{63} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,3,4\}, \{0,1,2\},$
$\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

65. $\mathcal{T}_{64} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{4\}, \{0,1\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{0,3,4\}, \{0,1,4\},$
$\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

66. $\mathcal{T}_{65} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,2,3\},$
$\{1,2,3\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

67. $\mathcal{T}_{66} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\},$
$\{0,1,2,3,4\}\}$

68. $\mathcal{T}_{67} = \{\emptyset, \{4\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,2,4\}, \{0,1,4\},$
$\{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{2,3,4\},$
$\{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

69. $\mathcal{T}_{68} = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,2,4\}, \{0,1,4\},$
$\{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\},$
$\{0,1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

70. $\mathcal{T}_{69} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\},$
$\{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

71. $\mathcal{T}_{70} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{4\}, \{0,1\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,2,4\},$
$\{0,1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,3,4\},$
$\{0,2,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

72. $\mathcal{T}_{71} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,2,3,4\},$
$\{0,1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

73. $\mathcal{T}_{72} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{1,2\}, \{2,4\},$
$\{0,3,4\}, \{0,1,2\}, \{0,2,4\}, \{0,1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\},$
$\{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

74. $\mathcal{T}_{73} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{0,3,4\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\},$
$\{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

75. $\mathcal{T}_{74} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{0,4\}, \{0,1\}, \{1,4\},$
$\{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{0,2,4\}, \{0,2,3\}, \{0,3,4\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\},$
$\{0,1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\},$
$\{0,1,2,3\}, \{0,1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

Приложение Б

Топологии, сохраняющие операцию max для $X = \{0, 1, 2, 3\}$

1. $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0, 1, 2, 3\}\}$
2. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
3. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
4. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
5. $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
6. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
7. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
8. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
9. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
10. $\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
11. $\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, \{3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
12. $\mathcal{T}_{11} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
13. $\mathcal{T}_{12} = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
14. $\mathcal{T}_{13} = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
15. $\mathcal{T}_{14} = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
16. $\mathcal{T}_{15} = \{\emptyset, \{2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$
17. $\mathcal{T}_{16} = \{\emptyset, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

18. $\mathcal{T}_{17} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

19. $\mathcal{T}_{18} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2,3\}\}$

20. $\mathcal{T}_{19} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

21. $\mathcal{T}_{20} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

22. $\mathcal{T}_{21} = \{\emptyset, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

23. $\mathcal{T}_{22} = \{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

24. $\mathcal{T}_{23} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

25. $\mathcal{T}_{24} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

26. $\mathcal{T}_{25} = \{\emptyset, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

27. $\mathcal{T}_{26} = \{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

28. $\mathcal{T}_{27} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

29. $\mathcal{T}_{28} = \{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

30. $\mathcal{T}_{29} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

31. $\mathcal{T}_{30} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

32. $\mathcal{T}_{31} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

33. $\mathcal{T}_{32} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2,3\}\}$

34. $\mathcal{T}_{33} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

35. $\mathcal{T}_{34} = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

36. $\mathcal{T}_{35} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

37. $\mathcal{T}_{36} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

38. $\mathcal{T}_{37} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

39. $\mathcal{T}_{38} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

40. $\mathcal{T}_{39} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,1\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

41. $\mathcal{T}_{40} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

42. $\mathcal{T}_{41} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

43. $\mathcal{T}_{42} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

44. $\mathcal{T}_{43} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

45. $\mathcal{T}_{44} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

46. $\mathcal{T}_{45} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

47. $\mathcal{T}_{46} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

48. $\mathcal{T}_{47} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

49. $\mathcal{T}_{48} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

50. $\mathcal{T}_{49} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

51. $\mathcal{T}_{50} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

52. $\mathcal{T}_{51} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,1\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

53. $\mathcal{T}_{52} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

54. $\mathcal{T}_{53} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

55. $\mathcal{T}_{54} = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

56. $\mathcal{T}_{55} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

57. $\mathcal{T}_{56} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,1\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

58. $\mathcal{T}_{57} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

59. $\mathcal{T}_{58} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

60. $\mathcal{T}_{59} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

61. $\mathcal{T}_{60} = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

62. $\mathcal{T}_{61} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

63. $\mathcal{T}_{62} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

64. $\mathcal{T}_{63} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

65. $\mathcal{T}_{64} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

66. $\mathcal{T}_{65} = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

67. $\mathcal{T}_{66} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

68. $\mathcal{T}_{67} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

69. $\mathcal{T}_{68} = \{\emptyset, \{3\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

70. $\mathcal{T}_{69} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

71. $\mathcal{T}_{70} = \{\emptyset, \{2\}, \{0, 2\}, \{0, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

72. $\mathcal{T}_{71} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

73. $\mathcal{T}_{72} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

74. $\mathcal{T}_{73} = \{\emptyset, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

75. $\mathcal{T}_{74} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

76. $\mathcal{T}_{75} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

77. $\mathcal{T}_{76} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

78. $\mathcal{T}_{77} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

79. $\mathcal{T}_{78} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

80. $\mathcal{T}_{79} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

81. $\mathcal{T}_{80} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

82. $\mathcal{T}_{81} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{0,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

83. $\mathcal{T}_{82} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

84. $\mathcal{T}_{83} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

85. $\mathcal{T}_{84} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

86. $\mathcal{T}_{85} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

87. $\mathcal{T}_{86} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

88. $\mathcal{T}_{87} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

89. $\mathcal{T}_{88} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

90. $\mathcal{T}_{89} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

91. $\mathcal{T}_{90} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

92. $\mathcal{T}_{91} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

93. $\mathcal{T}_{92} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

94. $\mathcal{T}_{93} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

95. $\mathcal{T}_{94} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

96. $\mathcal{T}_{95} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

97. $\mathcal{T}_{96} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

98. $\mathcal{T}_{97} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

99. $\mathcal{T}_{98} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

100. $\mathcal{T}_{99} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

101. $\mathcal{T}_{100} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

102. $\mathcal{T}_{101} = \{\emptyset, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

103. $\mathcal{T}_{102} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

104. $\mathcal{T}_{103} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}\}$

105. $\mathcal{T}_{104} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

106. $\mathcal{T}_{105} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

107. $\mathcal{T}_{106} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

108. $\mathcal{T}_{107} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

109. $\mathcal{T}_{108} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

110. $\mathcal{T}_{109} = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

111. $\mathcal{T}_{110} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

112. $\mathcal{T}_{111} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

113. $\mathcal{T}_{112} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

114. $\mathcal{T}_{113} = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

115. $\mathcal{T}_{114} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,3\}, \{0,1\}, \{1,3\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

116. $\mathcal{T}_{115} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

117. $\mathcal{T}_{116} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

118. $\mathcal{T}_{117} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

Приложение В

Ссылка на github репозиторий с программным кодом

https://github.com/SLipWGH/Diplom/tree/master

Необходимые зависимости:

1. Необходима версия интерпретатора python 3.10.
2. Отдельно должен быть установлен пакет ”Graphviz”
3. Зависимости модулей см. в файле ”requirements.txt”

Для проверки произвольной n-арной операции, следует написать функцию, реализовывающую это операцию и создать объект класса "Operation передав в конструктор эту функцию и n. Пример использования есть в Main.py файле (см. функцию "custom_operation_task").