Punto 5 - Parcial II Teoría Electromagnética

Sebastián Loaiza Ospina (1923876)

11 de julio de 2022

Para resolver un problema de cálculo del potencial electrostático en un“volumen” bidimensional finito con condiciones de contorno y “conductores” en el interior a potenciales dados con su respectivo campo eléctrico, utilizaremos como referencia el ejemplo 3.4 de Introduction to Electrodinamic-Griffith, en el cual tenemos dos superficies metálicas infinitas paralelas a potencial 0, ubicadas en $y = 0$ y $y = a$ conectadas por dos superficies metálicas a potencial constante V_0 en $x = \pm b$ como se muestra a continuación.

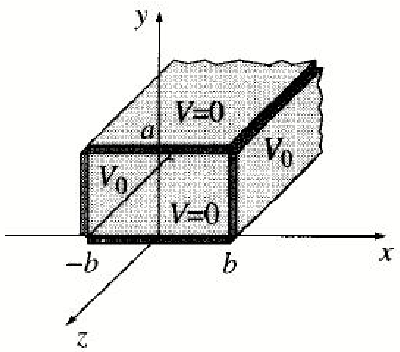

Figura 1: Conductores dentro de nuestra región

Para resolver este problema dentro de la región delimitada por las 4 superficies, hay que tener en cuenta su ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Teniendo en cuenta la forma de la ecuación de Laplace se sabe que el valor de la función en un punto dado, será el promedio de los puntos a su alrededor, y ya que el potencial que se calculará es para un ”Volumen”bidimensional finito, el potencial eléctrico estará dado por el promedio de sus 4 vecinos de alrededor. Para ver de que manera es cada contribución consideremos la expansión en Taylor alrededor del punto (x_0, y_0).

$$
\begin{aligned}
V(x_0+\delta,y_0) &= V(x_0,y_0)+\frac{\partial V}{\partial x}\delta+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\delta^3+\cdots\\
V(x_0-\delta,y_0) &= V(x_0,y_0)+\frac{\partial V}{\partial x}(-\delta)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(-\delta)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(-\delta)^3+\cdots\\
V(x_0,y_0+\delta) &= V(x_0,y_0)+\frac{\partial V}{\partial y}\delta+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\delta^3+\cdots\\
V(x_0,y_0-\delta) &= V(x_0,y_0)+\frac{\partial V}{\partial y}(-\delta)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(-\delta)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}(-\delta)^3+\cdots
\end{aligned}
$$

Sumando las 4 expresiones anteriores y despejando $V(x_0,y_0)$ se obtiene la siguiente expresión

$$V(x_0,y_0)=\frac{V(x_0+\delta,y_0)+V(x_0,y_0+\delta)+V(x_0-\delta,y_0)+V(x_0,y_0-\delta)}{4}$$

La cual es válida hasta tercer orden en δ.

Entonces teniendo en cuenta expresión anterior se puede formar una grilla [i,j] compuesta por valores aleatorios $V_{i,j}$ que cumplan las condiciones de contorno, para luego iterar el promedio muchas veces de manera que se obtenga cada vez, una mejor aproximación de $V(x,y)$, es decir

$$V_{i,j}=\frac{V_{i+1,j}+V_{i-1,j}+V_{i,j+1}+V_{i,j-1}}{4}$$

De esta manera se declararon valores arbitrarios iniciales de $V_{i,j}$ donde era 0 para las superficies conectadas a tierra y 1 las superficies a potencial V_0 obteniendo así los siguientes resultados programados en Mathematica, teniendo en cuenta una región $x=b=50$.

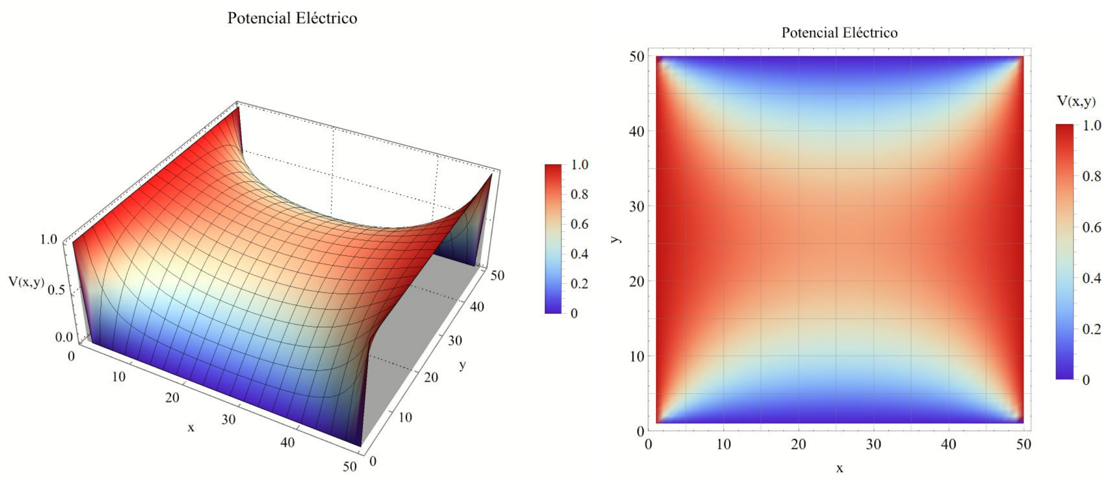

Figura 2: Potencial eléctrico dentro de los conductores

Para el cálculo del campo eléctrico se tuvo en cuenta la relación entre el potencial y este

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V(x,y)$$

Y se calculó numéricamente con funciones dadas por Mathematica

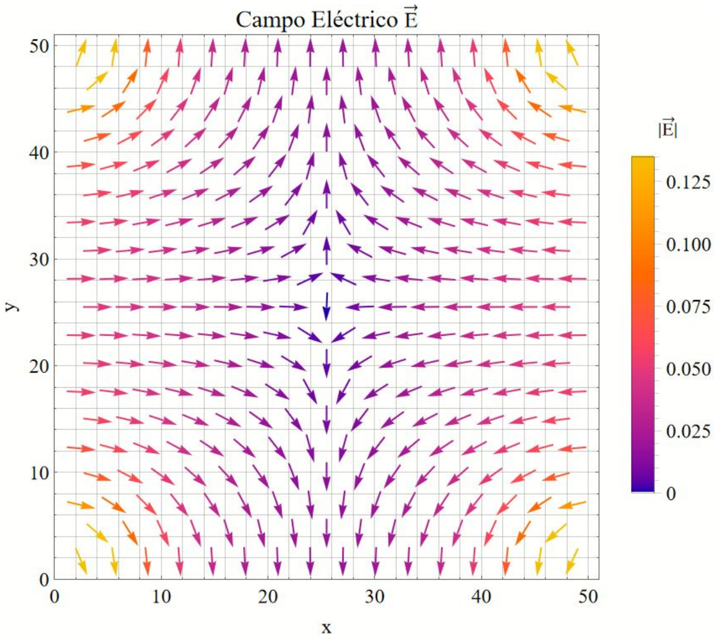

Figura 3: Lineas de campo de $\vec{E}$

Como se puede ver tanto el potencial como el campo eléctrico calculados numéricamente dan una muy buena aproximación del potencial resuelto analíticamente en el ejemplo 3.4 de Introduction to Electrodinamic-Griffith. El script del código en Mathematica se encuentra en el archivo adjunto con este documento.