§9.2 曲面积分（高斯公式）§10.1 常数项级数（概念和性质）

一、填空题（一）

2．设区域Ω由坐标面与$x+y+z=1$围成，Σ为Ω边界曲面的外侧，

则$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $\iiint_{\Omega}(1+1+0)dv = 2\cdot V(\Omega) = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$的外侧，则$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint_{\Omega} dv = \frac{4}{3}\pi a^3$；

$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint_{\Omega} 2x dv = 0$ 奇函数；$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint_{\Omega} 3x^2 dv = 3\iiint_{\Omega} z^2 dv = 3\int_{-a}^{a} z^2 dz \iint_{D_z} dxdy = 3\int_{-a}^{a} z^2\cdot\pi(a^2-z^2)dz = \frac{4\pi}{5}a^5$

4．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x dydz = \frac{4\pi}{3}$.

5．设是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$的下侧， 加盖 $\Sigma_1: z=1$ 向上. $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1} x dydz + 2y dzdx + 3(z-1) dxdy = \iiint_{\Omega}(1+2+3)dv = 6\times\frac{\pi}{3}$

则$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $2\pi - 0 = 2\pi$. $\iint_{\Sigma_1} = 0+0+0=0$

二、计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$的上侧.

设 $\Sigma_1: z=1$, $x^2+y^2\le 1$, 取上侧, Σ_1与Σ^-围成几何体为Ω, 则

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1+\Sigma^-}(2x+z)dydz + z dxdy = \iiint_{\Omega}(2+1)dv = 3\int_0^1 dz\iint_{D_z} dxdy = 3\int_0^1 \pi z dz = \frac{3\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)dydz + z dxdy = \iint_{D_{xy}}(2x+1)\times 0 + \iint_{D_{xy}} 1\, dxdy = \pi$$

Σ_1面垂直于yOz面

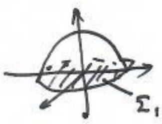
$$\therefore\ -I+\pi = \frac{3\pi}{2},\quad I = -\frac{\pi}{2}$$

三、计算曲面积分$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

$$I = \frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy = \frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega} 3 dv = \frac{3}{a^3}\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi$$

四、设Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，计算曲面积分

1．$I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；2．$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



(1). 加盖 $\Sigma_1: z=0,\ x^2+y^2\le 4$, 向下. 设$\Sigma$与$\Sigma_1$围成闭区域$\Omega$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^2 z\,dz\cdot\pi(4-z^2)$$

$$=\pi\left(2z^2-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^2=\pi(8-4)=4\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\underset{\substack{\uparrow\\ \Sigma_1\text{与}zOx\text{面垂直}}}{0}+\left(-2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\right)=-2\pi\cdot 2^2=-8\pi$$

$$\therefore\ I+(-8\pi)=4\pi,\quad I=12\pi$$

(2). $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz=0+0+2\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0+0-0=0$$

$\therefore$ ~~I + (-8π)~~ $\therefore I+0=8\pi,\quad I=8\pi$

五、设是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，利用高斯公式计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4\right)\mathrm{d}S$.

$$\vec{n}=(2x,2y,2z),\quad \vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$$

$$\therefore I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4\cdot\frac{dydz}{\cos\gamma}+y^4\cdot\frac{dzdx}{\cos\beta}+z^4\cdot\frac{dxdy}{\cos\gamma}\right)$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma} ax^3dydz+ay^3dzdx+az^3dxdy$$

$$=3a\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$

$$=9a\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz$$

$$\overset{\text{三-(3)}}{=\!=}\ 9a\cdot\frac{4\pi}{15}a^5=\frac{12\pi}{5}a^6$$

六、填空题（二）

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\left(u_n^{\ 2}-2u_n-3\right)=$ $\underline{0-0-3}=\underline{-3}$

2．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n\right)=$ $\underline{0-0=0}$

$= \lim_{n\to\infty} u_{n+1}-u_n$

3．级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$ 的和是 $\underline{1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$．

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

4．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和是3，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ 的和是 $\underline{3-u_1-u_2}$.

5．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 的和是 2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2}$ 的和是 $\underline{\quad 1 \quad}$.

6．设 x 是一个任意给定的数，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和是 $\underline{\frac{x}{1-x}}$. $\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)$

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和等于 $\underline{1+1=2}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

七、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛.

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\therefore S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{i+2}+\sqrt{i+1}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=-(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛.

八、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$．

$u_n=(-1)^{n-1}\nrightarrow 0$

∴发散

2．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$．

$|q|=\frac{1}{5}<1$

∴收敛

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$．

$|q|=\frac{3}{2}>1$

∴发散．

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.01}$．

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.01}=1\neq 0$

∴发散

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+e^n}{6^n}$．

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{6}\right)^n$ 收敛

∴原级数收敛．

6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$．

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 收敛

∴原级数发散．

§10.1 常数项级数（续：正项级数和一般项级数）§10.2 幂级数（收敛域）

一.填空（填序号）

1.下列正项级数中收敛的是 ③④⑥⑨⑩.

①$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$； ②$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$； ③$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-3}}$； ④$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$； ⑤$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$；

⑥$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$； ⑦$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$； ⑧$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$； ⑨$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ⑩$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}\sin^2\frac{2}{n}$

2.下列级数中绝对收敛的是 ②③⑥⑨⑩，条件收敛的是 ①⑦⑧，发散的是 ④⑤

①$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$； ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^2}$； ③$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n\sqrt{n}}$； ④$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $u_n \not\to 0$ ⑤$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ $u_n \not\to 0$

⑥$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ； ⑦$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$；⑧$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$；⑨$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{2^n}$； ⑩$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^4}{n!}$.

二、判断下列正项级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{6^n}$ 收敛

$\sin\frac{\pi}{6^n}\sim\frac{\pi}{6^n}$. $(n\to\infty)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n}$ 收敛.

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\frac{3}{2}>1$$

∴ 发散

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)^n}}{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

∴ 收敛.

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$

$\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$ $\cancel{\lim_{n\to\infty}}$

$<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-1}}$ 收敛

∴原级数收敛.

三、.讨论下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{n^2}$ 收敛.

∴原级数绝对收敛.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调递减趋于零.

而 $\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ 发散.

∴级数不绝对收敛，从而条件收敛

3 . $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\infty$$

∴ $u_n \not\to 0$ ∴原级数发散.

四、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\ 2}$都收敛，试证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

$$|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

五、设正项数列$\{a_n\}$单调减，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，判断$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性

递

由条件知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$.（否则，由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+a_{n+1}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{1+a_n}{1+a_{n+1}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{a_n - a_{n+1}}{1+a_{n+1}}\right)^n$$

~~当n充分大时 $a-\frac{a}{2} < a_n < a+\frac{3a}{2}$，即 $a_n <$~~

从而 $a_n \geq a$，$\frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{1+a}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 也收敛.

六、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$收敛，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}$是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

$$\left|(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}\right| = |a_n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2+\pi}\right)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}$ 绝对收敛.

七、填空题（二）

1．若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$在$x=0$处收敛，则在$x=5$处 收敛 .（收敛，发散）

$\left|\frac{x-3}{2}\right| < \left|\frac{0-3}{2}\right|$ 时的x级

都收敛

2．若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 2$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$的收敛半径为 $\sqrt{2}$.

3．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$的收敛域 $[-1, 1]$.

4．设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为3，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$的收敛区间是 $(-2, 4)$.

5．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-5)^n$的收敛域为 $[4, 6)$.

八、试确定下列各幂级数的收敛域

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n n}$.

$R=3$.

$x-3=-3$ 即 $x=0$ 时

级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，

$x-3=3$ 时，成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散

故收敛域为 $[0, 6)$

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$.

$R=1$.

$x=-1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$，收

$x=1$ 时 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，发

∴收敛域为 $[-1, 1)$

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

$R=1$.

$|x-3|\le 1$ 时 收敛.

∴收敛域为

$[2, 4]$

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{4^n n}$.

$R=\sqrt{4}=2$.

$|x-2|<2$ 时 收敛 （端点发

∴收敛域为

$(0, 4)$

§10.2 幂级数（续：和函数与展开式）

一.选择和填空

1．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$在$(-\infty,+\infty)$的和函数是（ A ）.

（A）$e^{-\frac{x}{2}}$　　（B）$e^{\frac{x}{2}}$　　（C）$-e^{\frac{x}{2}}$　　（D）$-e^{-\frac{x}{2}}$

2．函数$\sin\frac{x}{2}$的麦克劳林展开式中x^3的系数为 $-\frac{1}{48}$.

二、求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}$的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$的和.

易见，收敛域为 $[-1,1)$.

设 $\frac{x}{3}=t$，$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$，则 $s'(t)=\sum_{n=1}^{n}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$，$s(0)=0$.

$\therefore s(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$.　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}=-\ln(1-\frac{x}{3})$，

$x\in[-3,3)$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}=\ln(1-\frac{-1}{3})=\ln\frac{4}{3}$.

三、求$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及和函数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'+x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'+x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-1+x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1+x}{(1-x)^2}-1\quad,\ x\in(-1,1).$$

四.求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$的和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}$$

$$=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

$$x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

五.求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^{n-2}}{3^n}$的和

令 $s(x)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，则此级数的收敛域为$(-1,1)$

$$s(x)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'=\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'$$

$$=\frac{1}{6}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{6}\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right]'=\frac{1}{6}\left[x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'\right]'$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

令 $x=\frac{2}{3}$，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n-2}}{3^n}=S(\frac{2}{3})=\frac{15}{2}$

六、将函数$f(x)=\frac{x+5}{2x^2-x-6}$展开成$x$的幂级数，并求$f^{(n)}(0)$.

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{2-x}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$x\in(-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n,$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}},\quad\therefore f^{(n)}(0)=\left[\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cdot n!$$

七、将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

$$f(x)=\frac{1}{[2+(x-2)]^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]^2}$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{x-2}{2}=t}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)'$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)'=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}$$

$$\therefore\ =-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},\quad x\in(0,4)$$

八、将函数 $f(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$f(x)=\frac{2x-2-1}{(x-1)^2}=2\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

九、已知 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

1．将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；2．指出该幂级数的收敛域；3．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)\cdot 3^n}$ 的和.

(1) $f'(x)=\arctan x$， $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，

$$\therefore f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}dx\right]+f(0)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}，=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2n}x^{2n}$$

(2) 收敛域为 $[-1,1]$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)\cdot 3^n}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$=-2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln 2-\ln 3.$$

自测题五（无穷级数）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a+n}{n^2}$：（B）

B、发散　B、条件收敛　C、绝对收敛　D、敛散性与 a 的取值有关

2、部分和数列有界是正项级数收敛的(　)

A、充分条件　　B、必要条件　　C、充要条件　　D、无关条件

3、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为：（B）

B、$[-1,3]$　　B、$(-1,3]$　　C、$[-1,3)$　　D、$(-1,3)$

4、设 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$，$v_n=\frac{n^n}{n!}$，则:（C）

$=(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}-\frac{1}{n}$

$\nrightarrow 0$

B、$\sum u_n$ 收敛，$\sum v_n$ 发散;　　B、$\sum u_n$ 发散，$\sum v_n$ 收敛;

C、$\sum u_n$ 发散，$\sum v_n$ 发散;　　D 、$\sum u_n$ 收敛，$\sum v_n$ 收敛

5、设 u_n 是数列，则下列正确的是（A）

$\Sigma(-1)^n$

B、$\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛　B、$\sum(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛

$\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

C、$\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛　D、$\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛

$\Sigma\frac{1}{n}$

三、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n^{\lambda}}$ 收敛，则 λ 取值的最大范围是 $\lambda>\frac{1}{2}$

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}$

$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$

3、数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ 无界，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$

取 $x=0$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$，以级数收敛。

$x=2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

4、设常数 $a>1$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=$ $\frac{a}{(a-1)^2}$。

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，取 $x=\frac{1}{a}$，原式 $=\frac{1}{a}f($

5、将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+3^n)}x^{2n}$ 的收敛域为 $\sqrt{3}$

三、 解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1.求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$的和函数。

解法一 积分法 令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，则 $\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$

$$s(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $\quad -1<x<1$

解法二.（凑导数法） $S(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$

$$=x\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

2.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n$的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x-1)^n$$

$$=-\ln(1-(x-1))+\frac{1}{x-1}[\ln(1-(x-1))]+1$$

$$=-\ln(2-x)+\cancel{\frac{1}{x-1}[\ln(2-x)+1]}+\frac{\ln(2-x)}{x-1}+1,$$

$x\in(0,1)\cup(1,2)$

3.将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$展开成$(x-1)$的幂级数，并求$f^{(n)}(1)$

$$f(x)=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{5\cdot3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{5\cdot2^{n+1}}\right](x-1)^n$$

收敛域：$|x-1|<2$ 即 $x\in(-1,3)$

4.求$f(x)=\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(1+2x)}$的幂级数展开式，指出其收敛域.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2+(1+2x)}{(x-1)^2(1+2x)}=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{(x-1)^2} \leftarrow =\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-2)^n+(n+1)\right]x^n,$$

收敛域：$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cap(-1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

四、解下列各题（每题10分，共30分）

1、设有两条抛物线$y=nx^2+\dfrac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$，记它们的交点的横坐标的绝对值为$a_n$，它们所围的平面图形的面积为$A_n$，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{a_n}$的和.

$$\begin{cases} nx^2+\frac{1}{n}=y \\ (n+1)x^2+\frac{1}{n+1}=y \end{cases} \Rightarrow x^2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \quad \therefore a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$A_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-x^2\right]dx$$

$$=2\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}^3}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{a_n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{3}.$$

2. . 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a>0,b>0)$的收敛域.

考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$，易 ~~a<1时~~，收敛域为$[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ 的收敛域为 $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$

$\therefore$ 收敛域为 $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})\cap[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]=\begin{cases}[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}], & a<b.\\ [-\frac{1}{a},\frac{1}{a}), & a\geq b.\end{cases}$

3、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$收敛，且正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i+1})$，则 $S_n=1-u_{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{u_n\}$ 收敛.

~~∴当n充分大时~~. $\Rightarrow \{u_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|u_n|<M$.

$\therefore |u_nv_n|<Mv_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛