§11.1 微分方程的基本概念 一阶微分方程

一、求以 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x$ 为通解的微分方程（C_1,C_2 为任意常数）.

$(y+x)e^x = c_1e^{2x}+c_2$,

两边求导得 $(y'+1)e^x+(y+x)e^x = 2c_1e^{2x}$

即 $(y'+y+x+1)e^{-x} = 2c_1$

两边再求导得 $(y''+y'+1-y'-y-x-1)e^{-x}=0$

$\therefore y''-y-x=0$.

二、求下列微分方程的通解.

1. $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$;

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{1-x}{x}dx$

$\int\dfrac{dy}{y}=\int(\dfrac{1}{x}-1)dx$

$\ln|y|=\ln|x|-x+c$, $\therefore \ln|\dfrac{y}{x}|=-x+c$ $\therefore y=cxe^{-x}$

2. $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$;

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{4x-x^2}$. $\int\dfrac{dy}{y}=\frac{1}{4}\int(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4-x})dx$

$\ln|y|=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|4-x|+c$, $\therefore y^4=\dfrac{cx}{4-x}$

3. $(x+1)y'+1=2e^{-y}$;

$(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2e^{-y}-1$, $\int\dfrac{e^y dy}{2-e^y}=\int\dfrac{dx}{x+1}$

$-\ln|2-e^y|=\ln|x+1|+c$,

$\therefore (2-e^y)(x+1)=c$.

4. $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$;

$$\int \frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y} = -\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx, \quad \ln|\tan y| = -\ln|\tan x| + c$$

$$\therefore \tan x\cdot\tan y = c$$

三、求下列微分方程的特解.

1. $(1+x^2)y'=\arctan x, y|_{x=0}=0$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\arctan x}{1+x^2}, \therefore y = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c,$$

$$\because y|_{x=0}=0, \quad \therefore c=0. \quad \therefore y=\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

2. $xy'+y=0, y(1)=1$.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \ln|y| = -\ln|x| + c \quad \therefore xy=c, \quad \because y(1)=1$$

$$\therefore c=1, \quad \therefore xy=1$$

四、若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t+\ln 2$, 求 $f(x)$.

令 $f(x)=y$, 则 $y' = f(x)\cdot 2 + 0$

即 $\begin{cases} y'=2y \\ y(0)=\ln 2 \end{cases}$

$$\therefore \int\frac{dy}{y} = \int 2dx \quad \ln|y| = 2x+c, \quad y = ce^{2x}$$

$$\because y(0)=\ln 2, \quad \therefore \ln 2 = c, \quad \therefore y = \ln 2\cdot e^{2x}$$

五、求下列微分方程的通解.

1. $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$;

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy}=-\frac{3+2\cdot\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\cdot\frac{y}{x}}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程可化为

$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{3+2u-u^2}{1-2u}$，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-3u-3}{1-2u}$，$-\frac{1}{3}\int\frac{-2u-1}{u^2-u-1}du=\int\frac{1}{x}dx$

$\therefore -\frac{1}{3}\ln|u^2-u-1|=\ln|x|+\ln C_1$，$\therefore u^2-u-1=Cx^{-3}$，

$\therefore \underline{xy^2-x^2y-x^3=C}$ $(C\in R)$

2. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$;

$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ （齐次）

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$y'=u+x\frac{du}{dx}$，$u+x\frac{du}{dx}=e^u+u$

$\therefore e^{-u}du=\frac{1}{x}dx$ $\int e^{-u}du=\int\frac{1}{x}dx$，$-e^{-u}=\ln|x|+C_1$

$\therefore -e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx$ $(C\neq 0)$

3. $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$，$\frac{dx}{dy}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}=\frac{3(\frac{x}{y})^2-1}{2\frac{x}{y}}$，

令 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=uy$，$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，

$u+y\frac{du}{dy}=\frac{3u^2-1}{2u}$，$\therefore \int\frac{2u}{u^2-1}du=\int\frac{1}{y}dy$，$\ln|u^2-1|=\ln|y|+C_1$

$\therefore u^2-1=Cy$，即 $(\frac{x}{y})^2-1=Cy$，$\underline{x^2-y^2=Cy^3}$ $(C\in R)$

六. 求微分方程的特解：$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2, y|_{x=e}=2e$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$，令 $y=ux$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}$，$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$，

$\therefore\int u\,du=\int\frac{1}{x}dx$，$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$

$\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2=\ln|x|+C$，$\therefore y^2=2x^2(\ln|x|+C)$

由 $y|_{x=e}=2e$ 得 $C=1$ $\therefore$ 特解为 $\underline{y^2=2x^2(\ln|x|+1)}$

七、求下列微分方程的通解.

1. $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$;

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^{-x}$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln x}\left[\int xe^{-x}\cdot e^{-\ln x}dx+c\right]$$

$$=x\{\int e^{-x}dx+C]$$

$$\therefore y=xe^{-x}+cx \qquad (C\in\mathbb{R})$$

2. $y'+y\tan x=\cos x$;

$$y=e^{-\int\tan x\,dx}\left[\int\cos x\cdot e^{\int\tan x\,dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln\cos x}\left[\int\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+c\right]$$

$$\therefore y=\cos x\,(x+c) \qquad (C\in\mathbb{R})$$

八、求微分方程的特解：$(y+x^3)dx-2xdy=0, y|_{x=1}=\frac{6}{5}$.

$$y'-\frac{1}{2x}\cdot y=\frac{x^2}{2}$$

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{x^2}{2}\cdot e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+c\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{x^2}{2}e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c\right)$$

$$\therefore y=\frac{1}{5}x^3+c\sqrt{x}$$

$$\because y|_{x=1}=\frac{6}{5},\quad\therefore c=1$$

$$\therefore y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}.$$

§11.2 二阶微分方程，§10.3 傅里叶级数（机动）

一、填空题（一）

$(ye^{-2x})''=(c_1+c_2x)''=0$，或用公式（特征方程）

1. 以 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$ (C_1,C_2 为任意常数) 为通解的微分方程是 $y''-4y'+4y=0$.

2. 以 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$($C_1,C_2$ 为任意常数) 为通解的微分方程是 $y''-2y'+2y=0$.

特征方程 $r_{1,2}=1\pm i$　$r_1+r_2=2$，$r_1\cdot r_2=2$　$\therefore r^2-2r+2=0$

3. 微分方程 $y''-4y'+4y=e^{2x}+4x$ 的特解形式为 $y^*=Ax^2e^{2x}+Bx+C$.

4. 已知微分方程 $y''-y=f(x)$ 的一个特解为 y^*，则该方程的通解为 $c_1e^x+c_2e^{-x}+y^*$.

5. 求下列微分方程的通解.

$e^{2x}\cdot y''=1$　即 $y''=e^{-2x}$	$y''=y'+x$　$y'=e^{\int dx}[\int xe^{-\int dx}dx+C]$	$1+xy''+y'=0$
$y=\frac{1}{4}e^{-2x}+c_1x+c_2$	$y=c_1e^x+c_2-\frac{x^2}{2}-x$	$y=c_1\ln\lvert x\rvert-x+c_2$
$y''-12y'+27y=0$	$9y''-30y'+25y=0$	$y''+2y'+5y=0$
$y=c_1e^{3x}+c_2e^{9x}$	$y=(c_1x+c_2)e^{\frac{5}{3}x}$	$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

$y'=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1$　　$1+(xy')'=0$　$xy'=-x+c$　$y'=-1+\frac{c}{x}$　　$\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$

二、验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

$y_1'=2xe^{x^2}$，$y_1''=(4x^2+2)e^{x^2}$，$\therefore y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=(4x^2+2-8x^2+4x^2-2)e^{x^2}$

$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=(1+2x^2)e^{x^2}$

$y_2''=(4x+2x+4x^3)e^{x^2}$，

$\therefore y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=(6x+4x^3-4x-8x^3+4x^3-2x)e^{x^2}=0$

$\therefore y_1,y_2$ 都是解，且线性无关，故通解为 $y=c_1y_1+c_2y_2$，即 $y=(c_1+c_2x)e^{x^2}$

三、求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的解.

对应齐次线性方程为 $y''-2y'=0$，特征根 $r_1=2$，$r_2=0$.

$\therefore$ 通解为 $Y=c_1e^{2x}+c_2$

$\because$ 2是一重特征根．$\therefore$ 设 $y^*=Axe^{2x}$，$y^{*\prime}=A(2x+1)e^{2x}$

$y^{*\prime\prime}=4A(x+1)e^{2x}$

代入原方程得

$4A(x+1)e^{2x}-2A(2x+1)e^{2x}-e^{2x}=0$

$\therefore 4A-2A-1=0$　$A=\frac{1}{2}$．$\therefore$ 原方程的通解为

$y=c_1e^{2x}+c_2+\frac{1}{2}xe^{2x}$，由此得 $y'=2c_1e^{2x}+\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}$

由初始条件得 $\begin{cases}1=c_1+c_2\\1=2c_1+\frac{1}{2}\end{cases}$　$\therefore c_1=\frac{1}{4}$，$c_2=\frac{3}{4}$

$\therefore$ 所求解为 $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{3}{4}+\frac{x}{2}e^{2x}$

四、求非齐次微分方程的通解. $y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$;

对应齐次方程为 $y''+2y'+2y=0$. 特征根 $r=-1\pm i$.

$\therefore$ 齐次方程通解为 $\bar{y}=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

由 $f(x)=e^{-x}\sin x$ 知特解形式为 $y^*=Axe^{-x}\sin x+Bxe^{-x}\cos x$,

$\therefore y^{*\prime}=Ae^{-x}\sin x-Axe^{-x}\sin x+Axe^{-x}\cos x+Be^{-x}\cos x-Bxe^{-x}\cos x-Bxe^{-x}\sin x$

$=A(\sin x-x\sin x+x\cos x)e^{-x}+B(\cos x-x\cos x-x\sin x)e^{-x}$

$y^{*\prime\prime}=A(2\cos x-2\sin x-2x\cos x)\cancel{-x\sin x}\,e^{-x}+B(-2\sin x-2\cos x+2x\sin x)\cancel{-x\cos x}\,e^{-x}$

$\therefore y^{*\prime\prime}+2y^{*\prime}+2y^*=A(2\cos x\cancel{-2\sin x}\cancel{-2x\cos x}\cancel{+2\sin x}\cancel{-2x\sin x}\cancel{+2x\cos x}\cancel{+2x\sin x})e^{-x}$

$+B(-2\sin x\cancel{-2\cos x}\cancel{+2x\sin x}\cancel{+2\cos x}\cancel{-2x\cos x}\cancel{-2x\sin x}\cancel{+2x\cos x})e^{-x}$

$=e^{-x}\sin x$ $\qquad\therefore 2A\cos x-2B\sin x=\sin x$

$\therefore A=0,\ B=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)-\frac{x}{2}\cos x$

五、已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程.

$y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应齐次方程的解.

$y_2-y_1=e^{-x}-e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解

$\therefore (y_1-y_3)-(y_2-y_1)=e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解

$\therefore$ 对应齐次方程的特征根为 $-1, 2$.

特征方程为 $r^2-r-2=0$,

$\therefore$ 此微分方程为

$y''-y'-2y=xe^x+e^{2x}$.

六、填空题（二）

1．$f(x)$ 满足收敛定理条件，其傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，已知 $f(x)$ 在处 $x=0$ 左连续，且 $f(0)=-1, s(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ ~~4~~ 5 ．$s(0)=\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}$，即 $\frac{f(0+0)-1}{2}=2$

2．设 $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{\pi}, -\pi \le x < 0 \\ 1-\dfrac{x}{\pi}, 0 \le x \le \pi\end{cases}$ 展成以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，

则 $s(-3)=$ $f(-3)=1-\frac{3}{\pi}$ (连续点)，$s(12)=$ $1+\frac{12-4\pi}{\pi}=\frac{12}{\pi}-3$，$s(k\pi)=$ $\begin{cases}0, & k\text{奇数} \\ 1, & k\text{偶数}\end{cases}$ $(k\in \mathbf{Z})$．

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x\, dx$

$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x \sin x\, dx$

3．$f(x)=e^x\cos x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数 $a_0=$ $\frac{1}{2\pi}(e^{-\pi}-e^{\pi})$，$b_1=$ $\frac{1}{5\pi}(e^{-\pi}-e^{\pi})$．

4．以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi \le x \le 0 \\ 1+x^2, 0 < x \le \pi\end{cases}$，

则其傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$ $=\frac{(1+\pi^2)+(-1)}{2}$．

5．$f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶展开式中系数 $b_3=$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\, dx = 2\int_0^{\pi} x\sin 3x\, dx+0$ $=\cdots=\frac{2\pi}{3}$．

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx\right)\cos 2x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos^2 2x\, dx$

6．设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx, (-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$ 1．

$=a_2\cdot\pi$

$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\, dx=\cdots=1$

七、把函数 $f(x)=x^3$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数，若已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$，试求

$-$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 的和.

这是奇函数，$\therefore a_n=0$，$(n=0,1,2\cdots)$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx = -\frac{2\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{12(-1)^n}{n^3}$

$\therefore f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{12(-1)^n}{n^3}\right]\sin nx \quad x\in(-\pi,\pi)$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 当 $n=4k+1$ 时 $\sin nx=\sin(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}=1$，当 $n=4k-1$ 时，$\sin nx=-1$

当 $n=2k$ 时，$\sin nx=0$

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi^2}{4k+1}-\frac{12}{(4k+1)^3}\right)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi^2}{4k-1}-\frac{12}{(4k-1)^3}\right)\cdot(-1)$

$=2\pi^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=2\pi^2\cdot\frac{\pi}{4}-12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

移项得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

八、将函数$f\left(x\right)=x^2$在$\left[-1,1\right]$上展开成傅里叶级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

$b_n=0$，$n=1,2\cdots$

$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}$

$n\geq 1$时，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}x^2\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$

$=0-0+\frac{4}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n^2\pi}\underbrace{\int_0^1\cos n\pi x\,dx}_{=0}=\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$

$\therefore f(x)=x^2=\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$，$x\in[-1,1]$

令$x=1$，则 $1=\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cdot(-1)^n$，$\therefore\frac{2}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

令$x=0$，则 $0=\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

由此得 $\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)-\frac{1}{4}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots)$

$\therefore\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$

九、将函数$f\left(x\right)=x\sin x$在$\left[-\pi,\pi\right]$上分别展开成

（1）正弦级数；　　（2）余弦级数.

(1) 正弦级数. $a_n=0$，$n=0,1,2\cdots$；$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[-\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\,dx$

$=-\frac{1}{\pi(n+1)}x\sin(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi(n+1)}\int_0^{\pi}\sin(n+1)x\,dx+\frac{1}{\pi(n-1)}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi(n-1)}\int_0^{\pi}\sin(n-$

$=-\frac{1}{\pi(n+1)^2}\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi(n-1)^2}\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{(-1)^n}{\pi(n+1)^2}-\frac{(-1)^n}{\pi(n-1)^2}=\frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n-1)^2}\right]=\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{-4n}{(n^2-1)^2}$

$=\frac{4n(-1)^{n-1}}{\pi(n^2-1)^2}$

$\therefore f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n(-1)^{n-1}}{\pi(n^2-1)^2}\sin nx$，$x\in[0,\pi]$

(2) 余弦级数，$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,\cancel{dx}=-\frac{2}{\pi}x\cos x\Big|_0^{\pi}=2$

$n\geq 1$时 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,dx$

$=-\frac{x\cos(n+1)x}{\pi(n+1)}\Big|_0^{\pi}+\frac{x\cos(n-1)x}{\pi(n-1)}\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{(-1)^n}{(n-1)}=\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}$

$\therefore f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$，$x\in[0,\pi]$

自测题六（常微分方程）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．$y=C-x$（C 为任意常数）是微分方程 $xy''+y'=-1$ 的（ D ）

（A）通解；（B）特解；（C）不是解；（D）解，既非通解也非特解

2．微分方程 $y\mathrm{d}x+(y^2x-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$ 是（ B ）　$\frac{dx}{dy}+yx=\frac{e^y}{y}$

（A）全微分方程；（B）一阶线性方程；（C）可分离变量方程；（D）齐次方程

3.一曲线上任一点的切线的斜率为 $-\dfrac{2x}{y}$，则此曲线是（ C ）

（A）直线　　（B）抛物线　　（C）椭圆　　（D）圆

4.由 $x^2-xy+y^2=C$ 确定的隐函数的微分方程是（ A ）

（A）$(x-2y)y'=2x-y$　（B）$(x-2y)y'=2x$　（C）$xy'=2x-y$（D）$-2yy'=2x-y$

5. 满足方程 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)$（n 为大于 1 的自然数）的可导函数 $f(x)$ 为 （ A ）

（A）$Cx^{\frac{1-n}{n}}$　（B） Cx　（C）$C\sin nx$　（D）$C\cos nx$

令 $tx=u$，则 $\int_0^x f(u)\frac{du}{x}=nf(x)$

$\int_0^x f(u)du=nxf(x)$

求导得 $f(x)=nf(x)+nxf'(x)$

$\frac{nf'(x)}{f(x)}=\frac{1-n}{x}\Rightarrow n\ln|f(x)|=(1-$ $+1$

$\Rightarrow f(x)=Cx^{\frac{1-n}{n}}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $xy'''+2y''+x^2y=0$ 是＿＿3＿＿阶微分方程.

2. 微分方程 $F(x,y^4,y',(y'')^2)=0$ 的通解中所含任意常数的个数是＿＿2＿＿. 2

3. 以 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$（C 为任意常数）为通解的微分方程是＿$ye^{-x^2}=C\Rightarrow$＿. $y'=2xy$ ✓

4. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$, 则 $y(1)=$＿＿＿＿. $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ ✓

$y'=\frac{y}{1+x^2}$. $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{1+x^2}$

$\ln|y|=\arctan x+C$

$y=Ce^{\arctan x}$ ∵ $y(0)=\pi$

∴ $y=\pi e^{\arctan x}$

5. 函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是否为方程 $y''+y=0$ 的解＿＿不是＿＿

三、解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求微分方程的通解：$(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0.$

$e^x(e^y-1)dx=-e^y(e^x+1)dy$, $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{e^y}{e^y-1}dy$

$\ln(e^x+1)=-\ln|e^y-1|+\ln C$

~~∴ $(e^x+1)(e^y-1)$~~

∴ $(e^x+1)(e^y-1)=C$

2. 求微分方程的通解：$(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$;

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}\cdot y=\frac{\cos x}{x^2-1}$$

$$\therefore y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)dx+C\right]$$

$$\therefore y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$$

$C\in\mathbb{R}$

3. 求微分方程的特解：$x^2y'+xy=y^2, y(1)=1$;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-xy}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.

$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$，$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=u^2-2u$

$$\int\frac{du}{u(u-2)}=\int\frac{1}{x}dx \qquad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln c+\ln|x|$$

$$\therefore \frac{u-2}{u}=cx^2$$

即 $\frac{y-2x}{y}=cx^2$

由 $y(1)=1$ 知 $c=-1$. 得特解 $\frac{y-2x}{y}=-x^2$

$$\text{即 } y=\frac{2x}{1+x^2}.$$

4. 求微分方程的特解：$xy'+y-e^x=0, y|_{x=1}=e$.

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$$

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x}} \left[\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{\int\frac{1}{x}dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-\ln x} \left[\int \frac{e^x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + c \right]$$

$\therefore y = \frac{1}{x}(e^x + c)$

$\because y|_{x=1} = e$，$\therefore c = 0$

$\therefore$ 特解为 $y = \frac{e^x}{x}$

四、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t(t>1)$ 与 X 轴所围成的平面图形绕 X 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$. 试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

$V(t) = \pi\int_1^t f^2(t)dt = \frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$.

两边对 t 求导有 $3f^2(t) = 2tf(t) + t^2f'(t)$，故 $y=f(x)$ 满足

$x^2y' = 3y^2 - 2xy$，这是一个一阶齐次方程. 令 $y=xu$，就有

$y' = u + xu'$，$x\frac{du}{dx} = 3u(u-1)$. $\frac{u-1}{u} = cx^3$.

即 $y = cx^3y + x$. 由条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 知 $c=-1$

$\therefore$ $y = -x^3y + x$ 即 $y = \frac{x}{1+x^3}$

2、求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1,x=2$ 以及X轴所围成的平面图形绕X轴旋转一周的旋转体体积最小.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=-1 \Rightarrow y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{2dx}{x}}dx+C\right]=x^2\left(\int-\frac{1}{x^2}dx+C\right)$$

$$\therefore\ y=x+cx^2.$$

$$V(c)=\int_1^2\pi(x+cx^2)^2dx=\pi\left(\frac{31}{5}c^2+\frac{15}{2}c+\frac{7}{3}\right)$$

令 $V'(c)=\pi\left(\frac{62}{5}c+\frac{15}{2}\right)=0$，得 $c=-\frac{75}{124}$

此时 $V''(c)=\frac{62}{5}\pi>0$

$\therefore c=-\frac{75}{124}$ 为唯一极值点，也是最小值点。

于是 $y=y(x)=x-\frac{75}{124}x^2$

3. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且满足 $f(t)=e^{\pi t^2}+\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$，求 $f(t)$.

由此 $f(0)=1$，$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(\rho)\rho d\rho=2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho$.

$$\therefore f(t)=e^{\pi t^2}+2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho$$

$$f'(t)=2\pi t e^{\pi t^2}+2\pi t f(t)$$

$$f(t)=e^{\int 2\pi t dt}\left[\int 2\pi t e^{\pi t^2}\cdot e^{-\int 2\pi t dt}dt+C\right]$$

$$=e^{\pi t^2}\left[\int 2\pi t dt+C\right]$$

$$=(\pi t^2+C)e^{\pi t^2}$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$ $\quad\therefore f(t)=(\pi t^2+1)e^{\pi t^2}$.

期末复习卷一

一、填空题：（每小题 3 分，共 30 分）

1．二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域为 $1\le x^2+y^2<4$.

设 $a=\lambda b$

2．设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 共线,并满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=28$, 则 $\boldsymbol{a}=$ $4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

3. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面方程为 $y^2+z^2=5x$.

4．设 $x=x(y,z)$ 由方程 $\arctan(xe^z)+ye^z=1$ 确定,则 $\dfrac{\partial x}{\partial z}=$ $-y(1+x^2e^{2z})-x$

5．函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u|_M=$ $\frac{2}{9}(1,2,-2)$.

$+$

6．函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是 $(0,2)$.

7．设 D 是由曲线 $\rho=a(1+\cos\varphi)(0\le\varphi\le\pi)$ 与极轴围成的区域, 则 D 的面积可用极坐标下的累次积分表示为 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho$.

8．设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, $z=f(4x^2-y^2)$，则全微分 $dz|_{\substack{x=1\\y=2}}=$ $4dx-2dy$

$dz=8xf'\cdot dx-2yf'\cdot dy$

9．函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的麦克劳林级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$ $(|x|<1)$

10. 微分方程 $xy'+2y=3x$ 的解为 $y=x+\frac{c}{x^2}$.

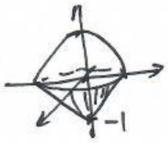
二．解下列各题：（每小题 7 分，共 35 分）

1．求过点 $M_0(2,4,0)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+2z-1=0,\\y-3z-2=0\end{cases}$ 的直线方程.

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$$

∴ 直线方程为 $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-0}{1}$

2．计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^3 dv$, $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1, z+1\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.



$$\iiint\limits_{\Omega} z^3 dv = \int_{-1}^{0} z^3 dz \iint\limits_{D_{z下}} dxdy + \int_0^1 z^3 \iint\limits_{D_{z上}} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{0} z^3 \cdot \pi(1+z)^2 dz + \int_0^1 z^3 \cdot \pi(1-z^2) dz$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}(z^3+2z^4+z^5)dz + \pi\int_0^1 (z^3-z^5)dz$$

$$= \frac{\pi}{15}$$

3．计算 $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ 的一拱.

$$\int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} [a(1-\cos t)]^2 \sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}\, dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^2 \cdot 2\sin\frac{t}{2}\, dt = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\, du$$

$$= 16a^3 \cdot 2 \cdot \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1} = \frac{256}{15}a^3$$

4．已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x} f(\frac{t}{3})\,dt+e^{2x}$, 求 $f(x)$.

$f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$, 令 $f(x)=y$, 则

$$\begin{cases} y'=3y+2e^{2x} \\ y(0)=1, \end{cases}$$

$\therefore\ y=e^{\int 3dx}[\int e^{-3\int dx}\cdot 2e^{2x}dx+c]$,

$\therefore\ y=e^{3x}(-2e^{-x}+c)$

即 $y=-2e^{x}+ce^{3x}$

$\because\ y(0)=1$, $\therefore\ c=3$. $\therefore\ y=-2e^{x}+3e^{3x}$

5．判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$是否收敛,如果是收敛的,是绝对收敛,还是条件收敛?

易知$\{\frac{\ln n}{n}\}$单调递减趋于零，故$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$收敛,

又因为当$n>2$时 $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

∴级数条件收敛.

三．解下列各题:（共 35 分）

1. (10 分)已知$y=e^{ty}+x$,而t是由方程$y^2+t^2-x^2=1$确定的x,y的函数,求$\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=e^{ty}\left(y\frac{dt}{dx}+t\frac{dy}{dx}\right)+1\\ 2y\frac{dy}{dx}+2t\frac{dt}{dx}-2x=0\end{cases}$$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{t+xye^{ty}}{t-t^2e^{ty}+y^2e^{ty}}\overset{e^{ty}=y-x}{=}\frac{t+xy(y-x)}{t-(t^2-y^2)(y-x)}$

2. (10 分)在曲面$z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2(z>0)$上求点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,使点$P_1$到原点$O$的距离为最短,并证明该曲面在点$P_1$处的法线与向量$\overrightarrow{OP_1}$平行.

令$u=d^2=x^2+y^2+z^2$，∵$z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2$

则$u=x^2+y^2+2(x-1)^2+(y-1)^2$

$=3x^2+2y^2-4x-2y+3$

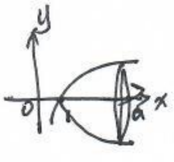
由$\begin{cases}u_x=6x-4=0\\u_y=4y-2=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{2}$，而$z>0$

∴$P_1(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6})$是满足条件的点.

此时法向量$\vec{n}=(4(x-1),2(y-1),-2z)_{P_1}=2(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{17}}{6})$

而$\overrightarrow{OP_1}=(4,3,\sqrt{17})$，∴$\overrightarrow{OP}\parallel\vec{n}$.

3. (8 分)计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是由 xOy 平面上的曲线 $x=\mathrm{e}^{y}(0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面, 它的法向量与 x 轴正向的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$.



加盖 Σ_1 : $x=e^a$，向前侧，则 Σ_1 与 Σ 围成封闭区域，在 Ω 上可用高斯公式，这里 $\Sigma: x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}$，向外

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega} (-4x+8x-4x)dV = 0$$

Σ_1 垂直于坐标

$$\iint\limits_{\Sigma_1} 2(1-x^2)dydz + 8xy\,dzdx - 4zx\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} 2(1-x^2)dydz + 0 + 0$$

$$= \iint\limits_{y^2+z^2\le a^2} 2[1-(e^a)^2]dydz = 2\pi(1-e^{2a})a^2$$

$$\therefore\ I = 2\pi(e^{2a}-1)a^2$$

4. (7 分)已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le y, \left(x^2+y^2\right)^3 \le y^4\right\}$, 计算 $\iint\limits_{D} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

图形关于 y 轴对称，所以

$$I = \iint\limits_{D} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 0 + \iint\limits_{D} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\iint\limits_{D_1} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

D_1 第一象限

由 $\begin{cases} |\rho\cos\theta| = \rho\sin\theta \\ \rho^6 = \rho^4\sin^4\theta \end{cases}$ 得交点 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\rho^2=\frac{1}{4}$，$\rho=\frac{1}{2}$.

$$于是\ I = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin^2\theta} \frac{\rho\sin\theta}{\rho}\rho\,d\rho$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\rho^2\Big|_0^{\sin^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\,d\theta$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\cos\theta = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^2 d\cos\theta$$

$$\xlongequal{\cos\theta=t} -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} (1-2t^2+t^4)dt = \left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{43}{120}\sqrt{2}$$

期末复习卷二

一.填空题：（每小题 3 分，共 30 分）

1．设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-5)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,-4)$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ ___(1，3，1)___.

2．$\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=$ ___0___. （无穷小乘有界量）

3．设 $z=e^{xy}$，则 $dz|_{(2,1)}=$ ___$e^2(dx+2dy)$___

4．平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角为___$\frac{\pi}{3}$___.

5．设 $u=2xy-z^2$，则 u 在 $(2,-1,1)$ 处的方向导数的最大值为___$2\sqrt{4+1+1}=2\sqrt{6}$___

6．设 D 是由 $x+y=1$ 及两坐标轴围成的闭区域，则 $\iint\limits_D x\,dxdy=$ ___$\frac{1}{6}$___.

$=\bar{x}\cdot A(D)$

7．设 L 为 $x^2+y^2=1$ 取逆时针方向，则 $\oint_L ydx=$ ___$-\iint\limits_D dxdy=-\pi$___

8．设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint_\Sigma(x^2+1)dS=$ ___$\iint\limits_\Sigma\frac{x^2+y^2+z^2}{3}ds+\iint\limits_\Sigma ds$___

$=\frac{4}{3}\iint\limits_\Sigma ds=\frac{4}{3}\times4\pi=\frac{16\pi}{3}$

9．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+1)^2$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ ___-1___.

10．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=$ ___1___.

二．解下列各题：（每小题 7 分，共 35 分）

1．设 $z=yf\left(2x,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 可微,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=y(2f_1'-\frac{y}{x^2}f_2')$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f+\frac{y}{x}f_2'$

2．求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $M(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

$\vec{n}=(y,x,e^z-1)_M=(1,2,0)$

$\therefore$ 切平面 $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)=0$．即 $x+2y-4=0$

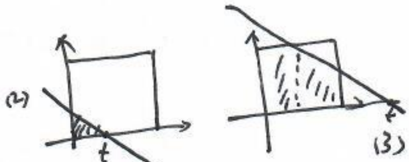
法线：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$

3．设 $f(x,y)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，求 $F(t)=\iint\limits_{x+y\le t} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的表达式.

(1) 当 $t\le 0$ 时，$f(x,y)=0$ $\quad(x+y\le t)$

$\therefore F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$

(2) 当 $0<t\le 1$ 时，$F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$



$=\int_0^t dx\int_0^{t-x}2x\,dy=\int_0^t(2xt-2x^2)\,dx=\frac{t^3}{3}$

(3) 当 $1<t\le 2$ 时 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{t-1}dx\int_0^1 2x\,dy+\int_{t-1}^1 dx\int_0^{t-x}2x\,dy$

$=\int_0^{t-1}2x\,dx+\int_{t-1}^1(2xt-2x^2)\,dx=-\frac{t^3}{3}+t^2-\frac{1}{3}$

(4) 当 $2<t$ 时，$F(t)=\int_0^1 dx\int_0^1 2x\,dy=1$，综上所述，$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \frac{t^3}{3}, & 0<t\le 1\\ -\frac{t^3}{3}+t^2-\frac{1}{3}, & 1<t\le 2\\ 1, & t>2\end{cases}$

4．计算曲面积分 $\oiint_\Sigma\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界.

$I=\left(\iint\limits_{\Sigma_上}+\iint\limits_{\Sigma_锥}\right)(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,d\sigma+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,d\sigma$

$=(1+\sqrt{2})\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dxdy=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho$

$=(1+\sqrt{2})\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}\cdot(1+\sqrt{2})$

5．求微分方程 $\left(y^2-3x^2\right)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$ 的通解.

$y^2dy=x^2dy-2xydx \qquad dy=\frac{x^2dy-2xydx}{y^2}$

$dy+d\frac{x^2}{y}=0 \qquad d\left(y+\frac{x^2}{y}\right)=0$

$\therefore y+\frac{x^2}{y}=C$

三．解下列各题：（共 35 分）

1. (10 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

$$f(x)=(x-1)\cdot\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{x-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}$$

$$=\frac{x-1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x-1)^n,$$

$x\in(-2,4)$

$\because \dfrac{1}{3^n}=\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$, $\therefore f^{(n)}(1)=\dfrac{n!}{3^n}$

2. (10 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面为

$z=4-x^2-y^2$ 在 xOy 平面上方部分的上侧.

取 Σ_1: $z=0$，向下侧，记 Σ 与 Σ_1 围成几何体为 Ω，则由

高斯公式 $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma}=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dv=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho\,d\rho\int_0^{4-\rho^2}dz$

$=6\pi\int_0^2(4\rho-\rho^3)\,d\rho=24\pi$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\underset{垂直}{0}+\underset{垂直}{0}+\underset{z=0}{0}=0$

$\therefore 0+I=24\pi$，$I=24\pi$

3. (8 分) 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

设三边长为 x,y,z. $(x,y,z>0)$.

则 $xy+yz+zx=\frac{a^2}{2}$，目标 $V=xyz$

记 $L=xyz+\lambda(xy+yz+zx-\frac{a^2}{2})$，由 $\begin{cases}L_x=yz+\lambda(y+z)=0\\L_y=zx+\lambda(x+z)=0\\L_z=xy+\lambda(x+y)=0\\xy+yz+zx=\frac{a^2}{2}\end{cases}$

得 $x=y=z=\frac{a}{\sqrt6}$ $\therefore V_{max}=\left(\frac{a}{\sqrt6}\right)^3=\frac{a^3}{6\sqrt6}$

另解：$V=xyz=\sqrt{xy\cdot yz\cdot zx}$

$\le\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{6}\right)^3}=\frac{a^3}{6\sqrt6}$，当 $x=y=z=\frac{a}{\sqrt6}$ 时取得等式

4. (7 分) 已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y(1)=\sqrt{e}$.

(1) 求 $y(x)$；

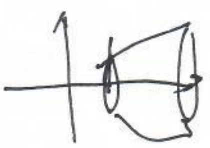
$$y = e^{\int x\,dx}\left[\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\int x\,dx}dx + c\right]$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + c\right], \quad \therefore y = e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+c)$$

$\because y(1)=\sqrt{e}$，故 $\sqrt{e} = \sqrt{e}(1+c)$，$\therefore$ $c = 0$

$$\therefore y = \sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

(2) 设 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2, 0\le y\le y(x)\}$，求平面区域 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.



$$V = \pi\int_1^2 \left(\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_1^2 x e^{x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$