§6.1 向量代数　§6.2 平面和空间直线的方程（平面方程）

一、填空题

1. 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为 $\pm(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$.

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，则以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\frac{1}{2}=\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. $(\cos\theta=\sin\theta)$

4. 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5$，若 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 垂直，则常数 $k=$ $\pm\frac{3}{5}$. $(|\vec{a}|^2-k^2|\vec{b}|^2=0)$

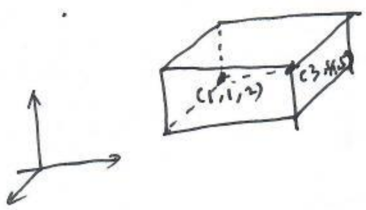
5. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$，则 $\boldsymbol{x}=$ $(-4,2,-4)$. 设 $\vec{x}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda$

~~(-4,2,-4)~~

6. 设 $\boldsymbol{a}=(4,-2,4),\boldsymbol{b}=(6,3,-2)$，则 $\operatorname{Pr}j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$ $\frac{10}{7}$. $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

7. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ $-\frac{3}{2}$. $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

二、设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点坐标分别为 $(1,1,2),(3,4,5)$，试写出余下六个顶点的坐标.



顶点：$\{1,3\}\times\{1,4\}\times\{2,5\}$

$=\{(1,1,2),\ (3,4,5),$
$(3,1,2),\ (1,4,5),$
$(1,4,2),\ (1,1,5),$
$(3,4,2),\ (3,1,5)\}$

三、一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，在 x,y,z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$，求此向量的始点坐标，方向余弦和方向角.

设起点 A 坐标为 (x,y,z)，则 $\begin{cases}2-x=4\\-1-y=-4\\7-z=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=3\\z=0\end{cases} \Rightarrow A(-2,3,$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$　$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{9},\ \cos\beta=-\frac{4}{9},\ \cos\gamma=\frac{7}{9}$

$\therefore \alpha=\arccos\frac{4}{9},\ \beta=\arccos(-\frac{4}{9}),\ \gamma=\arccos\frac{7}{9}$

5

25

四、设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量$\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$在$x$轴上的投影以及在$y$轴上的分向量.

$$\vec{l}=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}-15\vec{k}=(15,7,-15)$$

$\therefore \vec{l}$ 在 x 轴上投影为 15

在 y 轴上分向量为 $7\vec{j}$

五、设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; (3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$

(2) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}}=\dfrac{3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

(3) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

六、已知 $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$, 求与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直的单位向量.

$\overrightarrow{AB} = (4, -5, 0)$,

$\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (15, 12, 16)$$

$|\vec{n}| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25$.

$\therefore \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{1}{25}(15, 12, 16)$ 为所求单位向量

七、在 Oxy 面上，求垂直于 $\boldsymbol{a} = (5,-3,4)$，并与 $\boldsymbol{a}$ 等长的向量 $\boldsymbol{b}$.

设 $\vec{b} = (x, y, 0)$，则

$|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{50}$

$\therefore x^2+y^2 = 50$ ①

又 $\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore 5x-3y = 0$ ②

联立 ① ② 得 $x = \pm\frac{15}{\sqrt{17}}$，$y = \pm\frac{25}{\sqrt{17}}$

$\therefore \vec{b} = \pm\left(\frac{15}{\sqrt{15}}, \frac{25}{\sqrt{17}}, 0\right)$

八、已知空间三点 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(3,4,5)$, 求 ΔABC 的面积.

$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

九、已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$, 根据要求填写系数应满足的条件：

过原点	平行于 z 轴	包含 x 轴	平行于 xOy 平面
$D=0$	$C=0$	$A=D=0$	$A=B=0$

十、求满足下列条件的平面方程：

1. 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 答： $3x-7y+5z-4=0$

$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)$

2. 过点 $(1,1,1)$ 和点 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 相垂直. 答： $2x-y-z=0$

$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-2,1,1)$

3. 过点 $(1,1,1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$. 答： $x-3y-6z-8=0$

$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=(-1,3,6)$

4. 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$. 答： $y+5=0$

设 $By+D=0$ $\Rightarrow D=5B$

5. 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2),(5,1,7)$.

设平面 $By+Cz+D=0$

则 $\begin{cases}-2C+D=0\\ B+7C+D=0\end{cases}$

$\therefore\ C=\frac{D}{2}$

$B=-\frac{9}{2}D$

$\therefore\ -\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0$

即 $9y-z-2=0$

6. 平面 $x-2y+2z+21=0$ 与平面 $7x+24z-5=0$ 之间的二面角的平分面.

设 (x,y,z) 是所求平面上任意一点，则

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+0^2+24^2}}$$

$$\frac{x-2y+2z+21}{3}=\pm\frac{7x+24z-5}{25}$$

$\therefore\ 2x-25y-11z+270=0$

或 $46x-50y+122z+510=0$

§6.2 平面和空间直线的方程（续）§6.3 曲面和曲线的方程

一、填空题（一）

1. 过点 $M_1(4,1,2), M_2(-3,5,-1)$ 的直线方程为 $\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-2}{3}$.

2. 设直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x+1=y-1=z$ 相交，则 $\lambda=$ $\frac{5}{4}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{s}_1\times\vec{s}_2$

3. 直线 $\begin{cases}3x-y+2z=0,\\6x-3y+2z=0\end{cases}$ 与 z 轴的夹角为 $\arccos\frac{3}{\sqrt{61}}$.

4. 过点 $(2,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{5}$ 的直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$. 平行

5. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都相交的直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$. $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}$ $=(-2,3,1)$

6. 过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程为 $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$.

$\vec{s}=\vec{s}_1\times(\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}_1)$

二、写出直线 $\begin{cases}2x+5z+3=0,\\x-3y+z+2=0\end{cases}$ 的对称式方程及参数方程.

先在直线上找一点，令 $z=-1$，则 $\begin{cases}2x=2\\x-3y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$，∴有点 $M_0(1,\frac{2}{3},-1)$

$\therefore \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(2,0,5)\times(1,-3,1)=3(5,1,-2)$

∴对称式方程：$\frac{x-1}{5}=\frac{y-\frac{2}{3}}{1}=\frac{z+1}{-2}\quad(=t)$

参数式方程：$x=1+5t,\ y=\frac{2}{3}+t,\ z=-1-2t$.

三、确定下列各组中的直线和平面间的位置关系：

1. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$;

$\vec{s}=(3,1,-4)$. $\vec{n}=(1,1,1)$

$\vec{s}\cdot\vec{n}=0$，故直线与平面平行

又直线上点 $(2,-2,3)$ 满足平面方程 $x+y+z=3$

故直线在平面上.

2. $\begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 和 $4x-2y+z-2=0$.

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = (-28, 14, -7)$

取 $\vec{s} = (-4, 2, -1)$

$\because \vec{n} = (4, -2, 1)$

$\therefore \vec{s} \parallel \vec{n}$

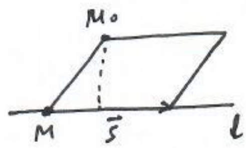
故直线垂直于平面.

四. 求点 $M_0(3,-4,4)$ 到直线 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$ 的距离.

$M(4,5,2)$, $\vec{s} = (2, -2, 1)$

$\overrightarrow{M_0M} = (1, 9, -2)$, $|\vec{s}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3$, $\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -5, -20)$

$\therefore d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{15\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$



五、求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影直线的方程.

方法一：平面束

设过直线的平面束方程为 $2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$

即 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$

则 $\vec{n} = (2+3\lambda, -4-\lambda, 1-2\lambda) \perp (0,0,1)$ $\quad \therefore 1-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 投影平面 $\frac{7}{2}x - \frac{9}{2}y = \frac{9}{2}$

$\therefore$ 投影直线 $\begin{cases} 7x-9y=9 \\ z=0 \end{cases}$

方法二. 消去 z 得投影面 $7x-9y=9$ $\therefore$ 投影直线 $\begin{cases} 7x-9y=9 \\ z=0. \end{cases}$

六、选择题

1. 方程 $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示（ A ）

A. 旋转双曲面　B. 双叶双曲线　C. 双曲柱面　D. 锥面

2. 二次曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 与平面 $y=h$ 相截，其截痕是空间中的（ B ）

A 双曲线　B 抛物线　C 椭圆　D 直线

七、填空题（二）

1. 一动点到坐标原点的距离等于它到点 $(2,3,4)$ 的距离的一半，则该动点的轨迹方程为

$(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=(\frac{2}{3}\sqrt{29})^2$. 球面

2. xOy 平面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 $4x^2+4z^2-9y^2=36$ 单叶双曲

3. xOy 平面上的圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 $x^2+y^2+z^2+3=4\sqrt{x^2+z^2}$ 轮胎形

4. yOz 平面上的直线 $2y-3z+1=0$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为 $4(x^2+y^2)=(3z-1)^2$ 圆锥面，

$(0,0,\frac{1}{3}$

5. 根据方程填入图形名称

	平面解析几何中	空间解析几何中
$y=x+1$	直线	平行于z轴的平面
$x^2-y^2=1$	双曲线	双曲柱面.（母线平行于z轴）

6. 母线平行于 x 轴及 z 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2y^2+z^2+4x-4z=0,\\ y^2+3z^2-8x-12z=0\end{cases}$ 的柱面方程分别为

（消去 x）

$y^2+z^2-4z=0$ 和 ______

投影曲线

7. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y=0\end{cases}$ 的参数方程为 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$, $z=\sin t$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$

$t\in[0,2\pi]$

投影曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=3\\ z=0\end{cases}$

8. 曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos t\\ y=\sqrt{3}\sin t\\ z=0\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

9. 根据曲线填入它们在三个坐标面上的投影曲线的方程

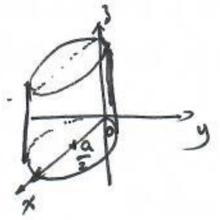
	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1;\end{cases}$	$\begin{cases}(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}\\ z=0\end{cases}$	$\begin{cases}z=(1-y-z)^2+y^2\\ x=0\end{cases}$	$\begin{cases}z=x^2+(1-x-z)^2\\ y=0\end{cases}$
$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\\ z=2\theta.\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$	$\begin{cases}x=\cos\frac{z}{2}\\ y=0\end{cases}$	$\begin{cases}y=\sin\frac{z}{2}\\ x=0\end{cases}$

10. 试在表中填入下列曲面所围成的立体在三个坐标面上的投影

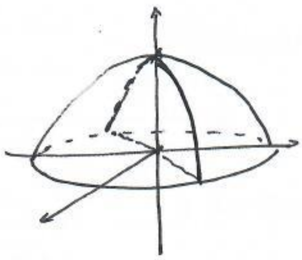
	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$z=x^2+y^2$ 与 $z=2-x^2-y^2$	$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$	$\{(y,z)\mid y^2\le z\le 2-y^2,\ -1\le y\le 1\}$	$\{(z,x)\mid x^2\le z\le 2-x^2,\ -1\le x\le 1\}$
$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2=1,\ z=0$	$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$	$\{(y,z)\mid -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$	$\{(z,x)\mid 0\le z\le 1,\ -1\le x\le 1\}$

八、画出下列方程所表示的曲面或曲线：

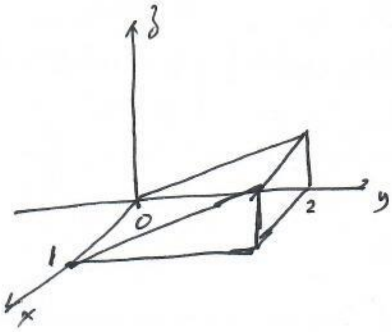
1. $(x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=(\dfrac{a}{2})^2$;



2. $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \\ y=x. \end{cases}$



九、画出由平面 $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\dfrac{y}{4}$ 所围成的立体的图形.



自测题一（向量代数与空间解析几何）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

$(a+b)\cdot(a+b)=(a-b)\cdot(a-b)$

1、已知 a, b 为非零向量，且 $|a+b|=|a-b|$，则必有：（ C ）

A、$a-b=0$；B、$a+b=0$；C、$a\cdot b=0$；D、$a\times b=0$

2、设 a, b, c 为非零向量且 $(a\times b)\cdot c=2$，则 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$（ A）

A、4;　B、2;　C、-2；D、0.　　注意 $(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$

3、直线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ 与平面 $2x+y-z+4=0$ 的夹角为：（ B）

$\sin\alpha=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A、$\dfrac{\pi}{6}$　B、$\dfrac{\pi}{3}$　C、$\dfrac{\pi}{4}$　D、$\dfrac{\pi}{2}$

4、点 $(1,1,1)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 的投影为：（ c ）　~~垂直平面~~ 垂线方程 $x=1+t$ $y=1+2t$ $z=1-t$ 代入平面得 $t=-\frac{1}{2}$

A、$(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2})$；B、$(1,-1,0)$；C、$(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2})$；D、$(0,1,-1)$

5、方程 $x^2-y^2+z^2=1$ 表示的旋转曲面和旋转轴为（ c ）

A、单叶双曲面、x 轴；　B、双叶双曲面、x 轴；

C、单叶双曲面、y 轴；　D、双叶双曲面、y 轴。

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ x=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 $x-3y-z+4=0$　　$\vec{s}=(-1,3,1)$

2、设一平面过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程是 $2x+2y-3z=0$

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)$

3、曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 可以由曲线 $\begin{cases}z=2-y\\x=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}z=2-x\\y=0\end{cases}$ 绕 Z 轴旋转一周得到。

4、曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=x^2\end{cases}$ 在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases}z+y^2=1\\x=0\end{cases}$ $(-1\le y\le 1)$　先消去x 得投影柱面 $y^2+z=1$

5.点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　$d=\dfrac{|\vec{PM_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

三.解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1、求直线$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$的对称式方程和参数式方程.

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4,-1,-3)$. $\therefore \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$

参数式方程：$\begin{cases} x = 4t-1 \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$

2、化曲线的一般方程$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$为参数方程.

令 $x-1=\cos t$，$y=\sin t$，代入方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 得 $z=2\sin\frac{t}{2}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$\therefore \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \\ z=2\sin\frac{t}{2} \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

3、设一向量与x轴 y 轴夹角相等，而与z轴所成的角是它们的两倍，求该向量的单位向量.

设该单位向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则 $\beta=\alpha$，$\gamma=2\alpha$.

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，即 $\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha=0$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，所求向量为

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 或 $(0,0,1)$

4.求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，与柱面 $z^2=2x$ ~~$x^2+y^2=1$ 与 $z=0$~~ 所围立体在三个坐标面上的投影.

在 xOy 面上：消去 z 得 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$

在 yOz 面上：消去 x 得 $\begin{cases}\left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\le 1\\ x=0\end{cases}$

在 zOx 面上：消去 y 得 $\begin{cases}x\le z\le\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases}$

四.解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1.试求点 $M_1(3,1,-4)$ 关于直线 $L:\begin{cases}x-y-4z+9=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$ 的对称点 M_2 的坐标.

L 的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&-4\\2&1&-2\end{vmatrix}=(6,-6,3)=3(2,-2,1)$

L 上有一点 $M_0(1,2,2)$

$\therefore L$ 可以写为参数方程 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\\ z=2+t\end{cases}$

设 L 上有一点 N 使 $\overrightarrow{M_1N}\perp L$.

$\overrightarrow{M_1N}=(1+2t-3,\ 2-2t-1,\ 2+t+4)=(2t-2,\ 1-2t,\ 6+t)$

则 $\overrightarrow{M_1N}\cdot\vec{s}=0$，即 $4t-4+4t-2+t+6=0$，$\therefore 9t=0$，$t=0$

$\therefore \overrightarrow{M_1M_0}\perp L$. 设 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$\left(\frac{3+x_2}{2},\ \frac{1+y_2}{2},\ \frac{-4+z_2}{2}\right)=(1,2,2)$

$\therefore M_2(x_2,y_2,z_2)=(-1,3,8)$

2.已知点 $A(1,0,0)$ ， $B(0,2,1)$ 试在 z 轴上找一点 C ，使得 ΔABC 的面积最小.

设 $C(0,0,z)$

则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = (2z,\ z-1,\ 2)$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|(2z, z-1, 2)| = \frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}$ ，当 $z=\frac{2}{10}$ 时取得最小值
$=\frac{1}{5}$

3.有一束平行于直线 $L: x=y=-z$ 的平行光束照射不透明球面 $S: x^2+y^2+z^2=2z$，求球面在 xOy 面上留下的阴影部分的边界曲线方程.

经过球心与L垂直的平面为 $(x-0)+(y-0)-(z-1)=0$

即 $x+y-z+1=0$

交与球面的交线为 $L_0: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

设 $M(x,y,z)$ 是L_0的阴影柱面上任一点， $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是

对应的 L_0 上一点．则 $\overrightarrow{MM_1} \parallel (1,1,-1)$，故

$$\frac{x_1-x}{1} = \frac{y_1-y}{1} = \frac{z_1-z}{-1} = t$$

$\therefore \begin{cases} x_1 = x+t \\ y_1 = y+t \\ z_1 = z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2+(z-t)^2=2(z-t) \\ (x+t)+(y+t)-(z-t)+1=0 \end{cases}$ —— 柱面方程

令 $z=0$ 得 $\begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2=-2t-t^2, \\ (x+t)+(y+t)=-t-1, \end{cases} \Rightarrow t=-\frac{x+y+1}{3}$

消去 t 得 $\left(\frac{2x-y-1}{3}\right)^2+\left(\frac{2y-x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{2-x-y}{3}\right)^2=1$

即 $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y-3=0$