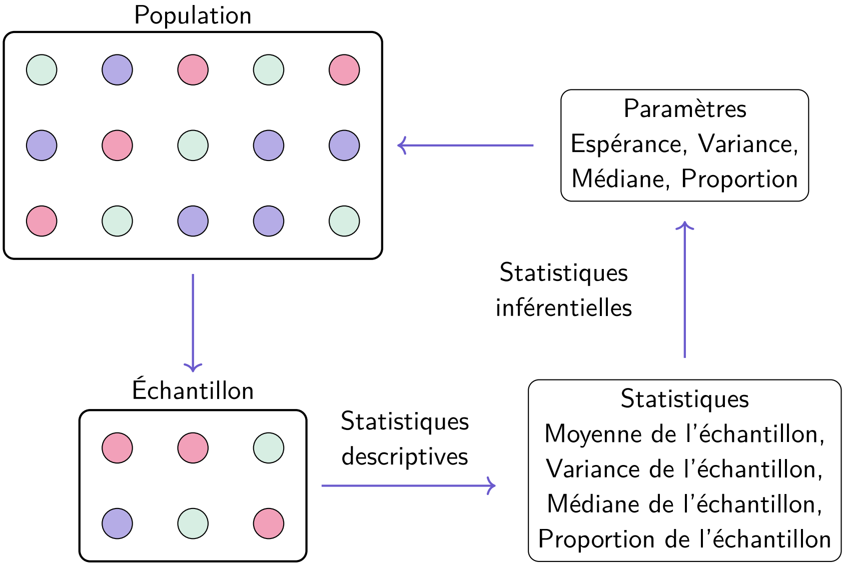
Introduction à la Statistique

Inférence statistique: intervalles de confiance pour une moyenne, test-z et test-t

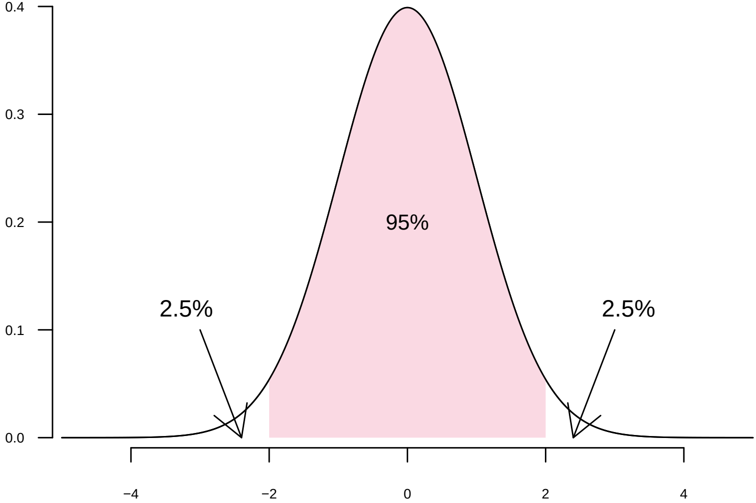
Stéphane Guerrier, Mucyo Karemera, Samuel Orso & Lionel Voirol

Data Analytics Lab

Inférence statistique



Intervalles de confiance



Niveau de signification α

Chaque niveau de confiance correspond à un niveau de signification

$$\alpha = 1 \ - \ \text{niveau de confiance}$$

Exemple : Un IC à 68% correspond à un niveau de signification

$$\alpha = 1 - 0.68 = 0.32$$

Niveau de signification α

IC pour un niveau de signification α

$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

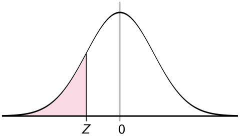
où α est le niveau de signification et $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est la valeur z correspondant à

$$\mathbb{P}\left(Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha/2.$$

Notez que, grâce à la symétrie,

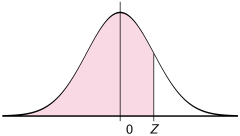
$$\mathbb{P}\left(Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha/2.$$

Table de la distribution cumulative pour des valeurs négatives de Z



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Table de la distribution cumulative pour des valeurs positives de Z



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Exemple : âge des véhicules

Dans une enquête menée auprès de 30 adultes, l'*âge moyen du véhicule principal d'une personne* est de 5.6 ans

En supposant que l'écart-type de la population est de 0.8 an,

Trouvez la meilleure estimation ponctuelle de la moyenne de la population et un intervalle de confiance à 90% pour cette moyenne

Exemple : âge des véhicules

La meilleure estimation ponctuelle de la moyenne de la population est $\bar{X} = 5.6$ ans
Comme on s'intéresse à un intervalle de confiance à 90% :

$$\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$$

D'après la valeur z :

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.1}{2}} = z_{0.95} = 1.65$$

$$\begin{aligned}
5.6 - 1.65\frac{0.8}{\sqrt{30}} < \quad & \mu \quad < 5.6 + 1.65\frac{0.8}{\sqrt{30}} \\
5.6 - 0.24 < \quad & \mu \quad < 5.6 + 0.24 \\
5.36 < \quad & \mu \quad < 5.84
\end{aligned}$$

Étapes pour calculer un intervalle de confiance pour μ avec σ connu

Étape 1 : Calculez (si nécessaire) la moyenne de l'échantillon. Parfois, cette donnée peut être directement fournie.

Étape 2 : Trouvez $\alpha/2$. Si on vous demande un intervalle de confiance à 95%, alors $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ et $\alpha/2 = 0.025$.

Étape 3 : Trouvez $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, la valeur z correspondante dans la table de distribution normale.

Étape 4 : Substituez dans la formule

$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Marge d'erreur et taille d'échantillon

À partir de l'IC

$$\bar{X} - \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{E} < \mu < \bar{X} + \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{E}$$

nous définissons la marge d'erreur comme

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La taille minimale d'échantillon nécessaire pour un intervalle avec un niveau de signification α pour la moyenne de la population avec une marge d'erreur E est

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

Exemple : quelle est la taille de l'échantillon ?

Le président d'une université demande au professeur de statistiques d'estimer l'âge moyen des étudiants de l'université.

En supposant que l'écart-type de la population est de 3 ans, quelle taille d'échantillon est nécessaire pour obtenir un intervalle de confiance à 99% pour l'âge moyen des étudiants avec une marge d'erreur $E = 1$?

Exemple : quelle est la taille de l'échantillon ?

$\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$

Nous savons déjà que $E = 1$ et $\sigma = 3$, donc en substituant dans la formule :

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2.58 \cdot 3}{1}\right)^2 = 59.9$$

Intervalle de confiance pour la moyenne μ de la population avec σ inconnue

Taille de l'échantillon grande ($n > 30$), population IID

Taille de l'échantillon petite ($n < 30$), population IID normale

Grande taille d'échantillon, population IID

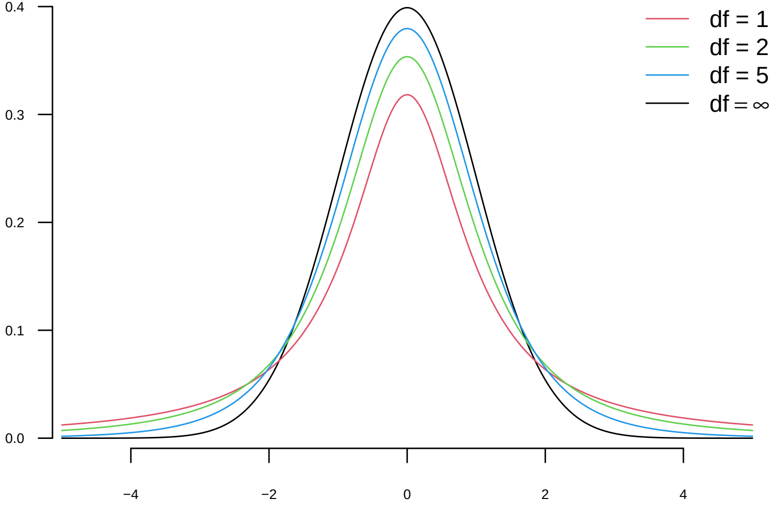
$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Remarque :

Même formule qu'auparavant, avec la différence que vous remplacez σ (l'écart-type de la population) par s (l'écart-type de l'échantillon).

Petite taille d'échantillon, population IID normale

Distribution de Student



Petite taille d'échantillon, population IID normale

Le degré de liberté (df) est le nombre de valeurs qui peuvent varier après qu'une statistique d'échantillon a été calculée. Il détermine quelle courbe spécifique utiliser et est défini par

$$df = n - 1,$$

où n est la taille de l'échantillon.
Intervalle de confiance

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\;\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

avec $df = n - 1$.

Exemple : âge des véhicules

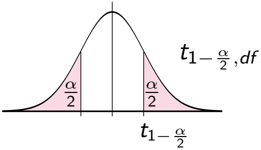
Dans une enquête menée auprès de 19 adultes, l'*âge moyen du véhicule principal d'une personne* est de 5.6 ans

L'écart-type de l'échantillon s est de 0.75

Calculer un intervalle de confiance à 95% pour cette moyenne

Trouver la valeur $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ pour un intervalle de confiance à 95% lorsque la taille de l'échantillon n est 22

Table de la loi de Student



df \ α	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453

Calcul de l'intervalle de confiance

On remplace ensuite dans la formule donnée pour l'intervalle de confiance

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\ \frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\ \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\bar{X} - t_{0.975,18}\ \frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + t_{0.975,18}\ \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(5.6 - 2.1009\,\frac{0.75}{\sqrt{19}}\ ,\ 5.6 + 2.1009\,\frac{0.75}{\sqrt{19}}\right)$$

$$\left(5.238512, 5.961488\right)$$

Étapes pour calculer un intervalle de confiance pour μ avec σ inconnu et $n \leq 30$

Étape 1 : Calculer la moyenne $(\bar{X})$ et l'écart-type (s) de l'échantillon

Étape 2 : Trouver $\alpha/2$

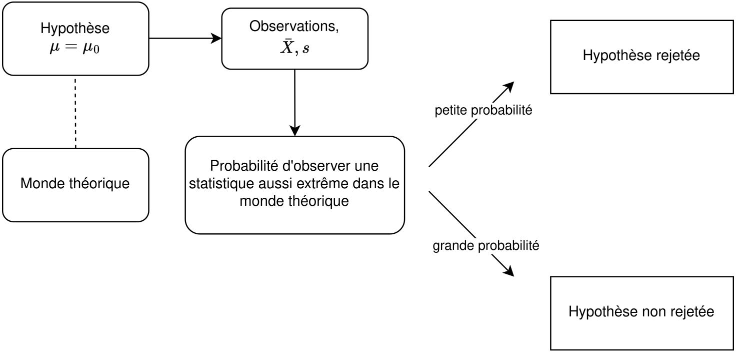
Étape 3 : Trouver $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ avec $df = n - 1$ dans la table de la distribution de Student

Étape 4 : Substituer dans la formule :

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Test d'hypothèse

Est-il possible de tester que l'espérance μ d'une variable aléatoire X soit égale à une certaine valeur μ_0 ?



Hypothèse nulle et alternative

Un test d'hypothèse est conçu pour évaluer la force des preuves contre une hypothèse de base appelée *hypothèse nulle* et en faveur d'une autre hypothèse appelée *hypothèse alternative*. Par exemple :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_\alpha : \mu \neq \mu_0$$

En général, l'hypothèse nulle signifie qu'il n'y a "aucun effet" ou "aucune différence".

L'hypothèse alternative est l'énoncé que nous espérons ou suspectons être vrai à la place de l'hypothèse nulle.

Hypothèse alternative

Trois types d'hypothèses alternatives

$$H_\alpha : \ \mu > \mu_0 \text{ : Test unilatéral}$$
$$H_\alpha : \ \mu \neq \mu_0 \text{ : Test bilatéral}$$
$$H_\alpha : \ \mu < \mu_0 \text{ : Test unilatéral}$$

Exemple : tester sur la taille des étudiants

On considère la taille des étudiants inscrits au bachelor en relations internationales. On considère que la distribution de leurs tailles est distribuée normalement.

On souhaite tester si la taille moyenne est de $\mu_0 = 1.75$m

Hypothèse nulle : La taille moyenne est effectivement de $\mu_0 = 1.75$m

$$H_0 : \mu = 1.75$$

Hypothèse alternative : La taille moyenne est differente de $\mu_0 = 1.75$m

$$H_\alpha : \mu \neq 1.75$$

On considère un échantillon de 20 étudiants pour lequel on mesure leur taille. La moyenne de l'échantillon est de $\bar{X} = 1.83$ et l'erreur standard de l'échantillon est de $\sigma = 0.4$

Exemple : tester un nouveau régime

On considère la variable aléatoire X qui correspond à la différence de poids au début et à la fin d'un régime (poids à la fin du régime moins poids au début du régime)

On souhaite tester si le régime fait effectivement perdre du poids, i.e., si l'espérance de X est bien négative

Hypothèse nulle : Le régime n'a aucun effet, $\mu = 0$ car aucun poids n'a été perdu

$$H_0 : \mu = 0$$

Hypothèse alternative : Le régime amène les personnes à perdre du poids

$$H_\alpha : \mu < 0$$

On considère un échantillon de 40 personnes. La moyenne de l'échantillon est de $\bar{X} = -0.4$kg et l'écart-type de l'échantillon est de $s = 0.12$

Statistique de test

Un test de signification est basé sur une *statistique de test* qui montre si les données fournissent ou non *des preuves contre l'hypothèse nulle*

Quand H_0 est vrai, on s'attend à ce que l'estimation prenne une valeur proche de celle spécifiée par H_0

Des valeurs de l'estimation éloignées de celle spécifiée par H_0 fournissent des preuves contre H_0. L'hypothèse alternative détermine dans quelle(s) direction(s) comptent les écarts contre H_0

Statistique de test pour la moyenne de la population

Population normale, σ connue, petit échantillon

i.e. $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
Statistique de test : moyenne échantillonnée standardisée (statistique de test-z)

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Distribution de z sous H_0

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Exemple taille :

$$z_{\text{obs}} = \frac{1.83 - 1.75}{0.4/\sqrt{20}} \approx 0.89$$

Statistique de test pour la moyenne de la population

Population IID, σ inconnue, grand échantillon

Statistique de test : moyenne échantillonnée standardisée (statistique de test-z)

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Distribution de z sous H_0

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Exemple régime :

$$z_{\text{obs}} = \frac{-0.4 - 0}{0.12/\sqrt{40}} \approx -2.53$$

P-valeur

Rejeter l'hypothèse nulle ou pas ?

Comparer la p-valeur avec une valeur fixe que l'on considère comme décisive

Cette valeur est le niveau de signification α, qui est généralement 0.05

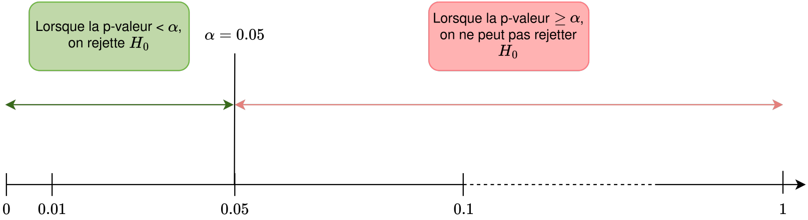
Sachant que $H_0: \ \mu = \mu_0$, nous avons :

H_α	p-valeur
$\mu > \mu_0$	$p = \mathbb{P}(Z \geq z_{\text{obs}}) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq z_{\text{obs}})$
$\mu < \mu_0$	$p = \mathbb{P}(Z \leq z_{\text{obs}})$
$\mu \neq \mu_0$	$p = \mathbb{P}(\|Z\| \geq \|z_{\text{obs}}\|) = 2\mathbb{P}(Z \geq \|z_{\text{obs}}\|)$

Donc, si la p-valeur est aussi petite ou plus petite que α, on dit que le test est statistiquement significatif au niveau α

Décision

En supposant que nous choisissions $\alpha = 0.05$



Test-Z : taille moyenne différente de 1.75m ?

Rappel : $n = 20$, $\bar{X} = 1.83$ m, $\sigma = 0.4$

Hypothèses : $H_0 : \mu = 1.75$; $H_\alpha : \mu \neq 1.75$

Niveau de signification : $\alpha = 5\%$

Statistique de test :

$$z_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.83 - 1.75}{0.4/\sqrt{20}} \approx 0.89$$

Calcul de la p-valeur :

$$\text{p-valeur} = 2 \times P(Z \geq 0.89) \approx 2 \times 0.1854 = 0.3708 = 37.08\%$$

Conclusion :

p-valeur $= 37.08\% \gg \alpha = 5\%$

On ne rejette pas H_0 (au niveau de signification 5%) : pas assez de preuve que la taille moyenne soit différente de 1.75m

Test-Z : le régime fait-il perdre du poids ?

Rappel : $n = 40$, $\bar{X} = -0.4$ kg, $s = 1$
Hypothèses : $H_0 : \mu = 0$; $H_\alpha : \mu < 0$
Niveau de signification : $\alpha = 5\%$

Statistique de test : $z_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{-0.4-0}{1/\sqrt{40}} \approx -2.53$

Calcul de la p-valeur :

$$\text{p-valeur} = P(Z \leq -2.53) \approx 0.0057 = 0.57\%$$

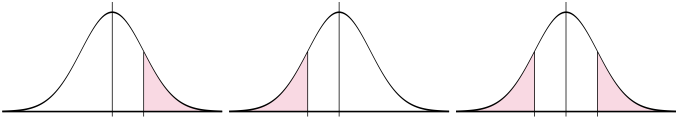
Conclusion :

p-valeur $= 0.57\% < \alpha = 5\%$

On rejette H_0 en faveur de H_α (au niveau de signification 5%) : le régime entraîne une perte de poids

Représentation graphique de la p-valeur selon H_α

$H_\alpha : \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_\alpha : \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_\alpha : \mu \neq \mu_0$



$\mathbb{P}(Z \geq z)$ $\quad$ $\mathbb{P}(Z \leq z)$ $\quad$ $\mathbb{P}(Z \geq |z|) + \mathbb{P}(Z \leq -|z|)$

P-valeur

La p-valeur est la probabilité, en supposant que H_0 soit vrai, que la statistique de test prenne une valeur au moins aussi extrême que celle effectivement observée

Plus la p-valeur est petite, plus les preuves contre H_0 fournies par les données sont fortes

Si α=0.05, nous exigeons que les données fournissent des preuves suffisamment solides contre l'hypothèse nulle pour que son rejet se produise au maximum 5 % du temps lorsque H_0 est vrai

Statistique de test pour la moyenne de la population

Population normale, σ inconnue, petit échantillon

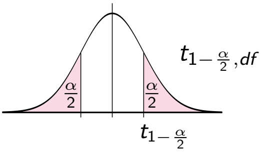
i.e. $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, σ inconnue

Statistique de test : statistique de test-t

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dans ce cas, le test-t suit approximativement la loi de Student. On compare alors la statistique de test avec la valeur critique correspondant à un quantile de la loi de Student

Table de la loi de Student



df \ α	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453

Décision basée sur la valeur critique

Lorsqu'on effectue un test-t basé sur la valeur critique à un niveau α pour un échantillon de taille n, la règle de décision dépend de l'hypothèse l'alternative

Hypothèse alternative	**Hypothèses**	**Règle de Décision**
Bilatérale	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_\alpha : \mu \neq \mu_0$	Rejetez H_0 si $\lvert t_{\text{obs}} \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$
Unilatéral (droite)	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_\alpha : \mu > \mu_0$	Rejetez H_0 si $t_{\text{obs}} > t_{1-\alpha,df}$
Unilatéral (gauche)	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_\alpha : \mu < \mu_0$	Rejetez H_0 si $t_{\text{obs}} < -t_{1-\alpha,df}$

ou $df = n - 1$

Exemple : test-t

On considère l'âge des étudiants inscrits au bachelor en relations internationales. On considère que la distribution de l'aĝe des étudiants est distribuée normalement.

On considère un échantillon de 20 étudiants pour lequel on mesure leur âge.

La moyenne de l'échantillon est de $\bar{X} = 21.42$ et l'erreur standard de l'échantillon est de $s = 2.91$

Vous chercher à tester si l'âge moyen des étudiants est supérieur à 18 ans à un niveau de significativé de $\alpha = 0.05$

Les hypothèses sont donc :

$$H_0 : \mu = 18$$

$$H_\alpha : \mu > 18$$

On calcule la statistique de test t donnée par

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

En remplacant on obtient :

$$t_{\text{obs}} = \frac{21.42 - 18}{2.91/\sqrt{20}} = 5.255912$$

On compare ensuite la statistique de test à la valeur critique dans la table de Student.

$$5.255912 > 1.7291$$

Ainsi, on rejette H_0 (au niveau de signification 5%) : la moyenne de l'échantillon est assez éloignée de 18 pour rejetter l'hypothèse nulle que $\mu = 18$ en faveur de H_α

Étapes pour effectuer un test d'hypothèse

Étape 1 : Formuler l'hypothèse nulle (H_0) et l'hypothèse alternative (H_α)

Étape 2 : Calculer la valeur de la statistique de test z_{obs} ou t_{obs}

Étape 3 : Comparer la statistique de test à la valeur critique ou trouver la p-valeur pour les données observées et comparer la p-valeur avec le niveau de signification désiré α.