

Introduction à la Statistique

Espérance, variance et la distribution binomiale

Stéphane Guerrier, Mucyo Karemera, Samuel Orso & Lionel Voirol

Data Analytics Lab



Licence : CC BY NC SA 4.0

Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\text{tout } k} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

Interprétations :

Une moyenne pondérée par les probabilités

La moyenne à long terme de X

La valeur juste d'un pari

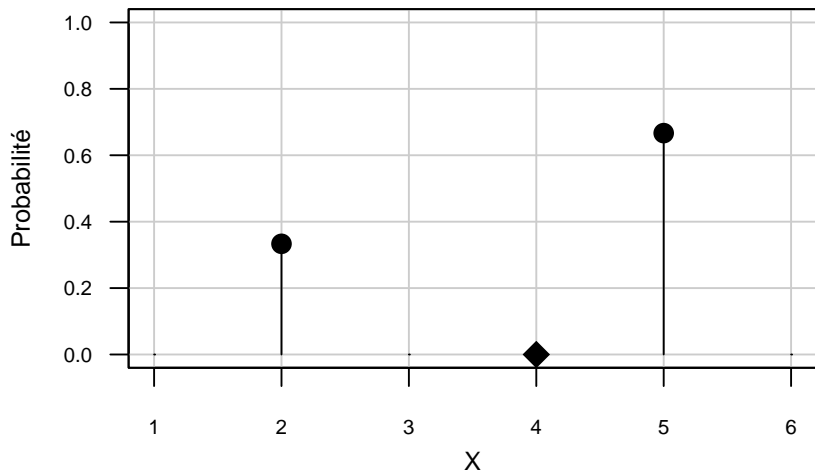
Le point d'équilibre pour un histogramme ou un diagramme en barres de probabilité

Comment calculer $\mathbb{E}(X)$

k	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	1/3	2/3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5) \\ &= 2 (1/3) + 5 (2/3) \\ &= 2/3 + 10/3 = 12/3 = 4\end{aligned}$$

C'est une *moyenne pondérée* des valeurs de X , où les *poids* correspondent aux probabilités associées à ces valeurs.



Exemple : pari équitable

Vous payez 100 CHF pour un pari.

Si vous gagnez, vous recevez 210 CHF, et si vous perdez, vous recevez 0 CHF.

X = votre gain/perte

$X = 110$ CHF, si vous gagnez

$X = -100$ CHF, si vous perdez

Supposons que les probabilités de gagner/perdre sont

$$\mathbb{P}(\text{gagner}) = 0.55$$

$$\mathbb{P}(\text{perdre}) = 0.45$$

Ce pari est-il équitable ?

Exemple : pari équitable

La fonction de masse de probabilité (FMP) de X est :

k	110 CHF	-100 CHF
$\mathbb{P}(X = k)$	0.55	0.45

Pour vérifier si le pari est équitable ou non, calculez l'espérance de votre gain/perte :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 110 \mathbb{P}(X = 110) - 100 \mathbb{P}(X = -100) \\ &= 110 (0.55) - 100 (0.45) \\ &= 15.5 \text{ CHF}\end{aligned}$$

Est-ce un pari équitable ?

Ce n'est pas un pari **équitable**, puisque l'espérance n'est pas nulle... **mais devriez-vous jouer ?**

Qui veut gagner des millions ?

Quitter = 100 000 CHF

Bonne réponse $X = 250\,000$ CHF

Mauvaise réponse $X = 32\,000$ CHF



Deux cas :

Choisir au hasard parmi les 4 réponses possibles.

$\mathbb{P}(\text{"bonne réponse"}) = 1/4$

$\mathbb{E}(X) = (250\,000)(1/4) + (32\,000)(3/4) = 86\,500$ CHF

Utiliser l'option 50-50, et choisir au hasard entre 2 réponses.

$\mathbb{P}(\text{"bonne réponse"}) = 1/2$

$\mathbb{E}(X) = (250\,000)(1/2) + (32\,000)(1/2) = 141\,000$ CHF

Ajout d'une constante

$$\mathbb{E}(X + \alpha) = \mathbb{E}(X) + \alpha$$

Fonctions d'une variable aléatoire

k	10	12	15
$\mathbb{P}(X = k)$	0.4	0.5	0.1

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.4) + 12(0.5) + 15(0.1) = 11.5$$

Doubler la valeur de X

k	20	24	30
$\mathbb{P}(2X = 2k)$	0.4	0.5	0.1

$$\mathbb{E}(2X) = 20(0.4) + 24(0.5) + 30(0.1) = 23$$

$$\mathbb{E}(2X) = 2 \mathbb{E}(X)$$

$$= 2(11.5) = 23$$

Multiplication par une constante

$$\mathbb{E}(b X) = b \mathbb{E}(X)$$

Propriétés de $\mathbb{E}(X)$

① $\mathbb{E}(X + \alpha) = \mathbb{E}(X) + \alpha$

② $\mathbb{E}(b X) = b \mathbb{E}(X)$

③ $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

④ Si X et Y sont **indépendants**, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

Soit X et Y des variables aléatoires et a_1 , a_2 , b_1 et b_2 des constantes,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[b_1 X + a_1 + b_2 Y + a_2] \\ &= b_1 \mathbb{E}[X] + a_1 + b_2 \mathbb{E}[Y] + a_2 \end{aligned}$$

Exemple : *dé bleu et dé vert*

Deux dés *équilibrés* sont lancés, un bleu et un vert.

Y = face sur le dé bleu, Z = face sur le dé vert

X = sommes des deux faces, W = produit des deux faces

Déterminez l'espérance de Y et

L'univers pour chaque dé bleu ou vert est

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La fonction de masse de probabilité (FMP) de Y et Z est

y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$	$Y = 6$
$\mathbb{P}(Y = y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Exemple : *dé bleu et dé vert*

FMP :

y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$	$Y = 6$
$\mathbb{P}(Y = y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

De manière similaire, $\mathbb{E}(Z) = 3.5$

Exemple : *dé bleu et dé vert*

Quelle est l'espérance de X ?

$$X = Y + Z$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) = \frac{21}{6} + \frac{21}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Quelle est l'espérance de W ?

$$W = YZ$$

Puisque le résultat d'un dé ne dépend pas de l'autre, les variables aléatoires Y et Z sont *indépendantes*.

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = \frac{21}{6} \cdot \frac{21}{6} = 12.25$$

Questions : Quel devrait-être le prix d'un jeu équitable où on gagne X ? Et pour W ?

Mesurer la variabilité

La variance = Mesure de l'étendue de la FMP.

La variance = Espérance de la distance au carré de l'espérance :

Espérance : $\mathbb{E}(X)$

Distance de l'espérance : $X - \mathbb{E}(X)$

Distance au carré de l'espérance : $(X - \mathbb{E}(X))^2$

Espérance de la distance au carré de l'espérance :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(\{X - \mathbb{E}(X)\}^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

Remarque :

$\mathbb{E}(X^2)$ n'est pas la même chose que $\{\mathbb{E}(X)\}^2$!

Comment calculer $\text{Var}(X)$

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2	0.6	0.2

$$\mathbb{E}(X) = 1(0.2) + 2(0.6) + 3(0.2) = 2.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$$

k^2	1	4	9
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2	0.6	0.2

$$\mathbb{E}(X^2) = 1(0.2) + 4(0.6) + 9(0.2) = 4.4$$

Calculer la variance :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}\{X\})^2 \\ &= 4.4 - 2^2 = 0.4\end{aligned}$$

Écart type

L'écart-type (noté σ) mesure la **dispersion** des valeurs autour de la moyenne. Il correspond à la racine carrée de la variance, ce qui permet de conserver les mêmes unités que les données.

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Remarque : Par exemple, si X est en CHF, alors $\mathbb{E}(X)$ est en CHF, $\text{Var}(X)$ est en CHF² et $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ est en CHF

Propriétés

① $\text{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \text{Var}(X)$

② $\text{Var}(\alpha + X) = \text{Var}(X)$

③ Si X et Y sont **indépendants**, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Exemples :

$$\text{Var}(3 \cdot X) = 3^2 \cdot \text{Var}(X) = 9 \cdot \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(3 + X) = \text{Var}(X)$$

Événements indépendants

Si A et B sont *indépendants* :

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

Si A_1, A_2, \dots, A_n sont *indépendants* :

$$\mathbb{P}(A_1, A_2, \dots, \text{ et } A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n)$$

Lancers de pièces équilibrées

Chaque lancer a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de tomber sur Pile. Les issues sont indépendantes.

$$\mathbb{P}(\text{"n Piles"}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(\text{"16 Piles"}) = \frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{65536} = 0.00001526$$

$$\mathbb{P}(\text{"10 Piles puis 6 Faces"}) = \frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{65536} = 0.00001526$$

Et compter les Piles

Lancer une pièce équilibrée 4 fois

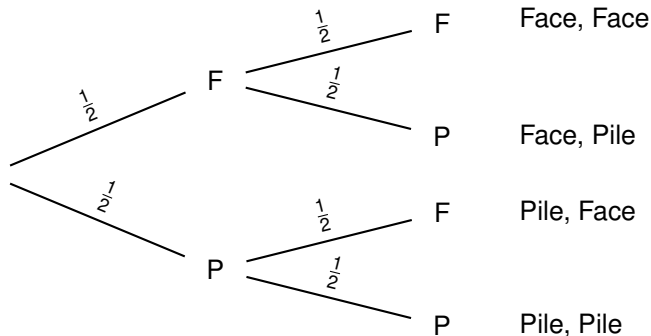
X = nombre de Piles

$$\mathbb{P}(X = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(4 \text{ Faces}) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = ???$$

Si on jette la pièce 2 fois



Si on jette la pièce 4 fois

FFFF	FPFF	PFFF	PPFF
FFFP	FPFP	PFFP	PPFP
FFPF	FPPF	PFPF	PPPF
FFPP	FPPP	PFPP	PPPP

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$					

FFFF	FPFF	PFFF	PPFF
FFFP	FPFP	PFFP	PPFP
FFPF	FPPF	PFPP	PPPF
FFPP	FPPP	PFPP	PPPP

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	1/16				1/16

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{16}$$

FFFF	FPFF	PFFF	PPFF
FFFP	FPFP	PFFP	PPFP
FFPF	FPPF	PFPP	PPPF
FFPP	FPPP	PFPP	PPPP

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	1/16	1/4			1/16

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

FFFF	FPFF	PFFF	PPFF
FFFP	FPFP	PFFP	PPFP
FFPF	FPPF	PFPF	PPPF
FFPP	FPPP	PFPP	PPPP

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	1/16	1/4		1/4	1/16

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

FFFF	FPFF	PFFF	PPFF
FFFP	FPFP	PFFP	PPFP
FFPF	FPPF	PFPF	PPPF
FFPP	FPPP	PFPP	PPPP

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

En général

- Lancez une pièce n fois
- 2^n résultats dans l'espace des échantillons
- $\mathbb{P}(\text{une séquence}) = (1/2)^n$
- $\mathbb{P}(X = k) = (1/2)^n$ (# de séquences avec k Faces)

Comment comptons-nous ces combinaisons ?

Principe fondamental du comptage

Supposons que r actions (choix, expériences) doivent être effectuées dans un certain ordre :

ACTION	NOMBRE DE RÉALISATIONS POSSIBLES
Action 1	m_1
Action 2	m_2
...	...
Action r	m_r
TÂCHE ENTIÈRE	$m_1 \cdot \dots \cdot m_r$

Choisir un ordre

Considérons toutes les possibilités pour une séquence de 5 chiffres

1



2



3



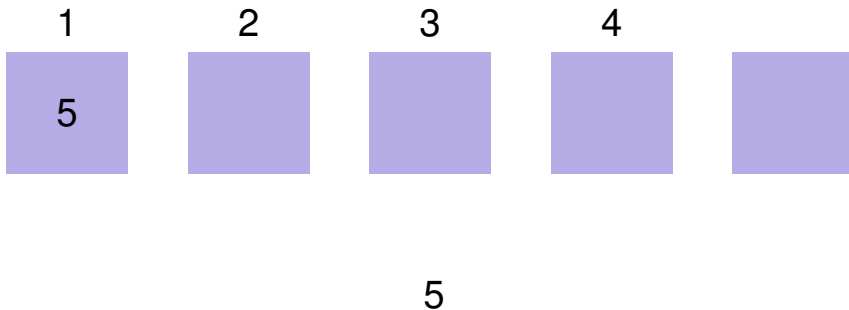
4



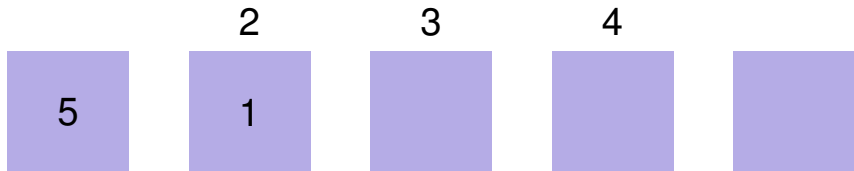
5



Choisir un ordre

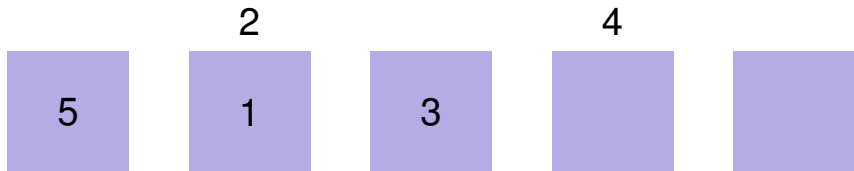


Choisir un ordre



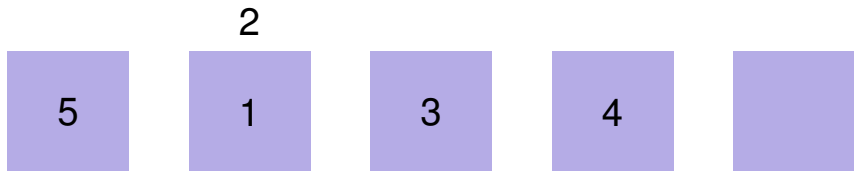
$$5 \times 4$$

Choisir un ordre



$$5 \times 4 \times 3$$

Choisir un ordre



$$5 \times 4 \times 3 \times 2$$

Choisir un ordre

5

1

3

4

2

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Choisir un ordre

5

1

3

4

2

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Comptage des séquences

Dans l'exemple ci-dessus :

$$(5) (4) (3) (2) (1) = 5!$$

Plus généralement, n factoriel est noté par :

$$n! = n (n - 1) (n - 2) \dots (3)(2)1$$

Par exemple, $30! = 30 (29) (28) \dots (2)1 = 2.65 \times 10^{32}$

Par définition

$$0! = 1$$

Exemple : séquence (sans ordre)

2 parmi 5



Joueur 1

Joueur 2

Exemple : séquence (sans ordre)

2 parmi 5

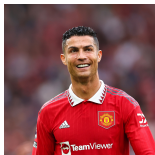


Joueur 2

5

Exemple : séquence (sans ordre)

2 parmi 5



$$(5 \times 4)/2 = 10$$

Question : Pourquoi /2 ?

k parmi n

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- $n = 5, k = 2$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5(4)(3)(2)1}{2(1) \times (3)(2)1} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$$

- $n = 6, k = 4$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6(5)(4)(3)(2)1}{(4)(3)(2)(1) \times (2)1} = \frac{720}{48} = 15$$

- $n = 52, k = 3$

$$C_{52}^3 = \frac{52(51)50}{(3)(2)1} = \frac{132\,600}{6} = 22\,100$$

Probabilité d'obtenir 6 Faces sur 10 lancers

$$\mathbb{P}(\text{"6 Faces en 10 Lancers"}) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

de combinaisons



probabilité de chaque combinaison



Probabilité d'obtenir 6 Faces sur 10 lancers

$$\mathbb{P}(\text{"6 Faces en 10 Lancers"}) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

de combinaisons



probabilité de chaque combinaison

$$\frac{10!}{6! 4!} \left(\frac{1}{1024}\right) = \frac{10(9)(8)(7)}{4(3)(2)1} \left(\frac{1}{1024}\right) = \frac{210}{1024} = 0.2051$$

Suite d'événements indépendants

A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants avec

$$\mathbb{P}(A_i) = p$$

$$\mathbb{P}(A_i^c) = 1 - p$$

Alors,

$$\mathbb{P}(A_1, A_2^c, \text{ et } A_3) = p (1 - p) p = p^2 (1 - p)$$

Autres probabilités

Lancé d'une pièce déséquilibrée 5 fois

$$\mathbb{P}(F) = 0.2 \text{ and } \mathbb{P}(P) = 0.8$$

$$\text{Alors, } \mathbb{P}(FP) = 0.2 (0.8) = 0.16$$

$$\mathbb{P}(FPPFP) = 0.2(0.8)(0.8)(0.2)(0.8) = (0.2)^2(0.8)^3 = 0.02048$$

$$\mathbb{P}(PPFPF) = 0.8(0.8)(0.2)(0.8)(0.2) = (0.2)^2(0.8)^3 = 0.02048$$

$$\mathbb{P}(PPPFF) = 0.8(0.8)(0.8)(0.2)(0.2) = (0.2)^2(0.8)^3 = 0.02048$$

$$\mathbb{P}(\text{"2 Faces"}) = C_5^2(0.2)^2(0.8)^3 = 10(0.02048) = 0.2048$$

Expérience binomiale

n essais

Les essais sont indépendants

Deux issues possibles : “Succès” (encodé par 1) ou “Échec” (encodé par 0)

$\mathbb{P}(\text{“Succès”}) = p$ et $\mathbb{P}(\text{“Échec”}) = 1 - p$

Exemple : Votation d'une loi

Échantillon de 100 votants ($n = 100$)

Hypothèse : les individus sont indépendants

“Soutien au projet de loi” correspond à un “Succès”

$$p = 0.44$$

X = # de personnes en faveur de l'initiative

Probabilité binomiale

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

n = nombre total d'essais, p = probabilité de succès

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 40) &= C_{100}^{40} (0.44)^{40} (0.56)^{60} \\ &= (1.3746 \times 10^{28}) (5.47151 \times 10^{-15}) (7.78541 \times 10^{-16}) \\ &= 0.0586\end{aligned}$$

Distribution Binomiale

Expérience binomiale :

n essais

Les essais sont indépendants

Deux issues possibles $\mathbb{P}(\text{“Succès”}) = p$

Probabilité binomiale

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k! (n - k)!} p^k (1 - p)^{n-k}\end{aligned}$$