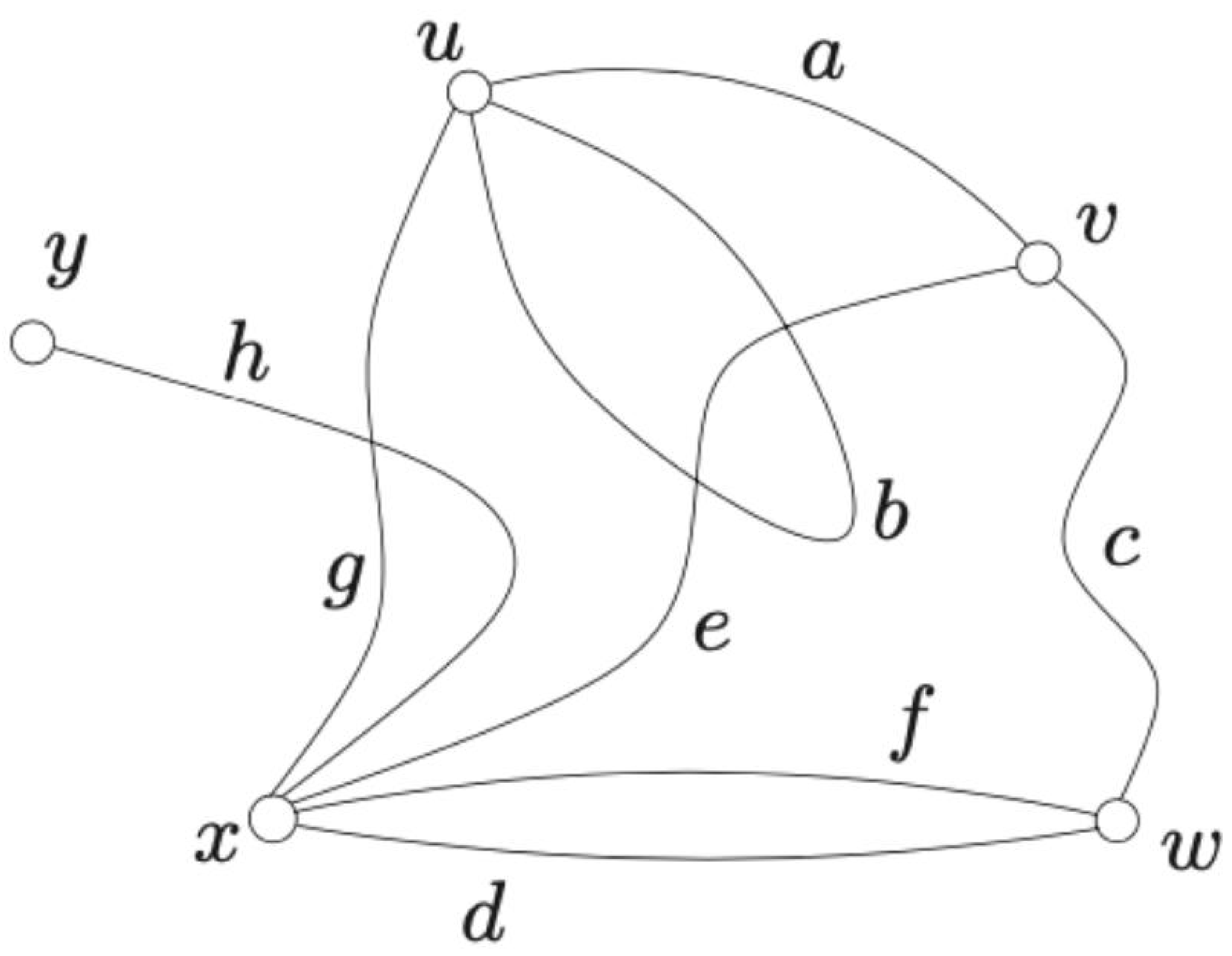
图论中的代数方法

设有G一个图,其顶点集为A = A(G) = {v1， v2， ...， vn}。

邻接矩阵,每个环算作 2 条边。(aij)n×n ,回想一下它的 ，aij在哪里

连接顶点和vj 的边数 我们 ，



	u	v	w	x	y
u	2	1	0	1	0
v	1	0	1	1	0
w	0	1	0	2	0
x	1	1	2	0	1
y	0	0	0	1	0

图中的一次行走是一个序列 G $W = v_0e_1v_1 \cdots v_{\ell-1}e_\ell v_\ell$ ，

其项交替为顶点和边（不一定不同）， e_i $1 \leqslant i \leqslant \ell$ $W \ell$ G

端点 ， 的长度使得和是 v_{i-1} v_i 的 。

定理 46.设是一个具有顶点集的图 G ,且 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ A^k $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

邻接矩阵 (v_i, v_j) k G 。然后 (i, j)项是

-步行长度 。

证明.显然,当k = 1时结果成立。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & & v_n & & v_j \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \\ \text{越南} \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\
a_{21} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

假设结果对k − 1成立。那么

v1 v2 b11 vn

v1 b12 ⋯ b1n

....

并且=直播播 Ac−1

bi1 bi2 ⋯ bin

....

越南 bn1 bn2 ⋯ bnn

v1 vn a11 ⋯vj a1j ⋯ a1n

a21 ⋯ a2j ⋯ a2n v1

v2

....

an1 ⋯ anj ⋯ ann 越南

是

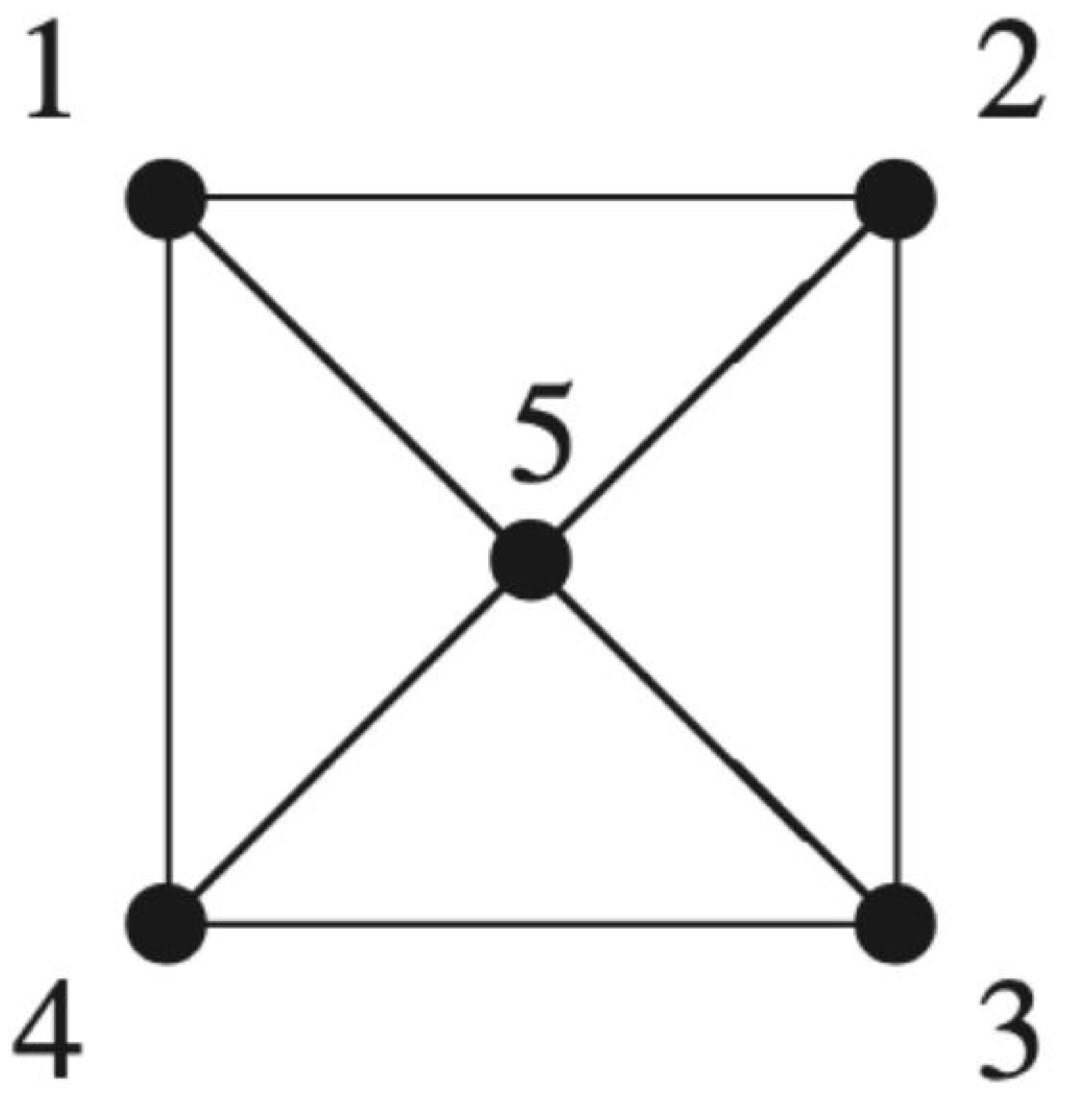
$$bi1a1j + bi2a2j + \cdots + binanj ,$$

结果如下。

假设G是一个简单图,其顶点集为$A = A(G) = \{v1, v2, \ldots, vn\}$,

那么它的邻接矩阵是 $(aij)n \times n$ ，在哪里

$= 1$,若a ij $vi\, vj \in E(G)$, 和 $\alpha i = 0$ 否则。



$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$

因此 $A = A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个具有零对角线的对称矩阵。

的特征值是特征多项式A的根 n

$$\left| \lambda I - A \right| 。$$

它们与 G 顶点的标签无关，

因为相似的矩阵具有相同的特征多项式： $A' = P^{-1} AP$

如果标签被置换,我们得到一个(0,1) -邻接矩阵P ，

其中 是置换矩阵。

因此我们称 G 为特征多项式,记为$P_G(x)$

，以及G的谱,由 G的 n 个特征值组成：

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n 。$$

的特征值是满足 A 我

$$AX = \lambda x$$

中λ为非零向量 $x \in Rn$其。每个这样的向量称为特征向量

矩阵A的对应于特征值。

该关系可以解释 $AX = \lambda x$ 如下: $x = (x1, x2, . . . , xn) T$

如果 ，然后

$$A \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \cdots \\ 陳 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \cdots \\ 陳 \end{pmatrix},$$

$$\lambda xi = \sum_{en\ vj \in E(G)} xj \ (i = 1,2,\cdots,n)\text{。}$$

命题 12.如果图的最大度$|\lambda| \leqslant \Delta$ G $\Delta(G) = \Delta$ ，然后

对于 的每个特征值。 升G

证明。设是λ的任意特征值 和 $A(G) = A\,x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 豆

A的特征值对应的特征向量。 $|x_i| = \max\{|x_j| : 1 \leqslant j \leqslant n\}$。

假设很明显，根据之前的论证，我们有 $x_i \neq 0$。

$$|\lambda||x_i| = \Sigma_{en\ v_j \in E(G)} \left| x_j \right| \leqslant \Sigma_{en\ v_j \in E(G)} |x_j| \leqslant \Delta |x_i|。$$

例如。对于图W_4，如前所示,我们有

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = x^2 (x+2)(x^2 - 2x - 4)。$$

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$, $x_1 = (-1,-1,-1,-1,-1+\sqrt{5})^T$; $x_2 =$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $(0,1,0,-1,0)^T$, $x_3 = (1,0,-1,0,0)^T$; $x_4 =$

$\lambda_4 = 1 - \sqrt{5}$, $(-1,-1,-1,-1,-1-\sqrt{5})^T$; $x_5 =$

$\lambda_4 = -2$, $(1,-1,1,-1,0)^T$;

命题 13.当且仅当所有-1 向量k都是 G 的特征向量（具有相应的特征值钾），则图是正则的（度为 ）。
G

证明。如果G是k 正则的，则A = A(G)的每一行恰好有k个 1，因此

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}。$$

另一方面，如果

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix},$$

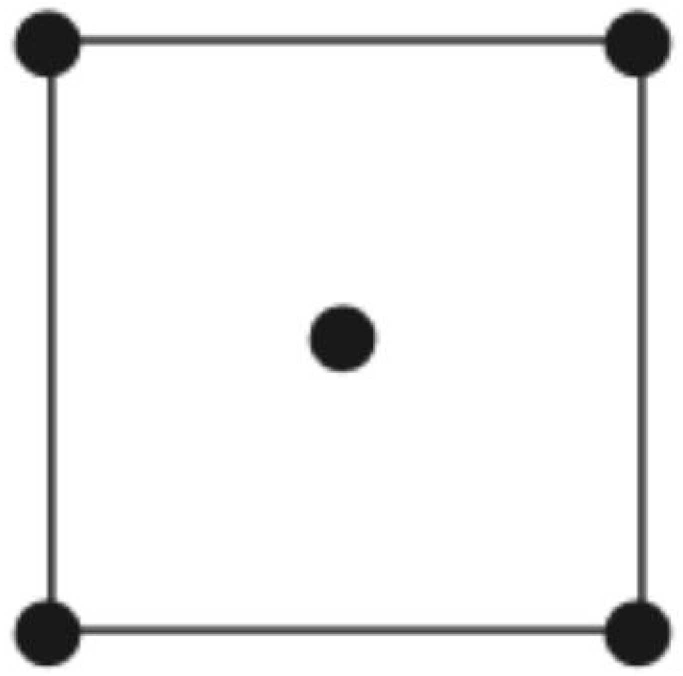
那么A = A(G)的每一行恰好有λ个 1，所以G是λ 度的正则矩阵。

例子。彼得森图的频谱是

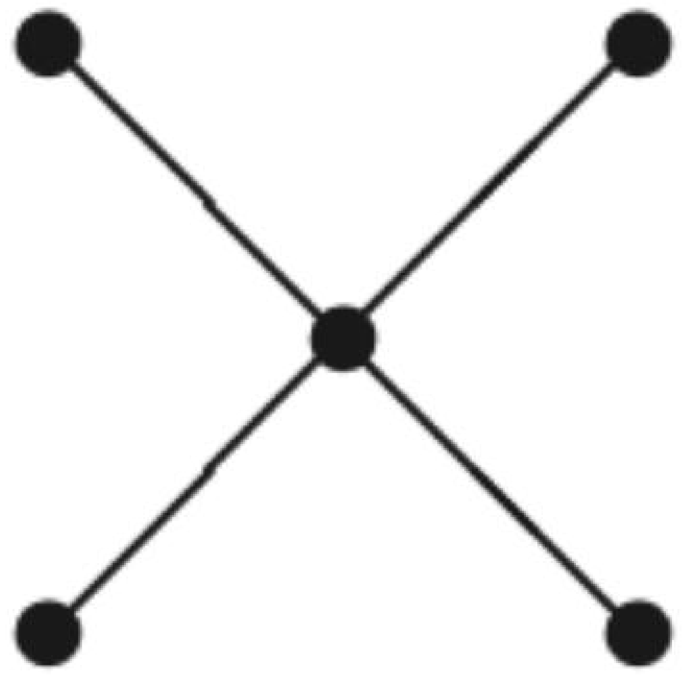
$$3,1,1,1,1,1, -2, -2, -2, -2。$$

如果两个图具有相同的谱,我们称它们为共谱的。

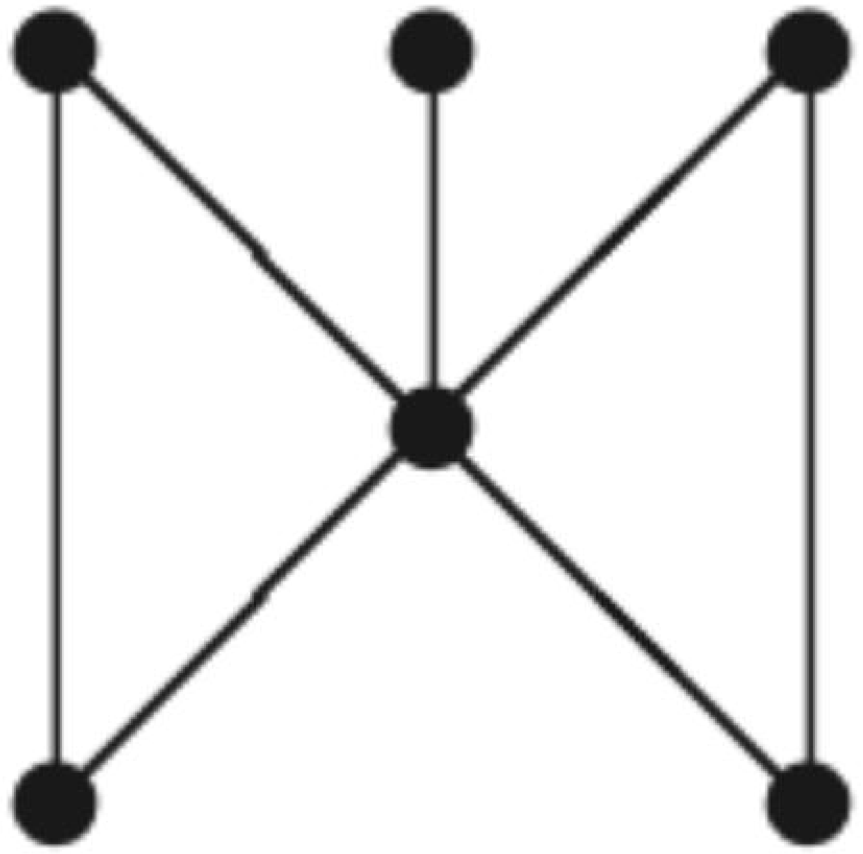
显然,同构图是共谱的（换句话说,谱是图不变量）。但是,共谱图不一定是同构的:

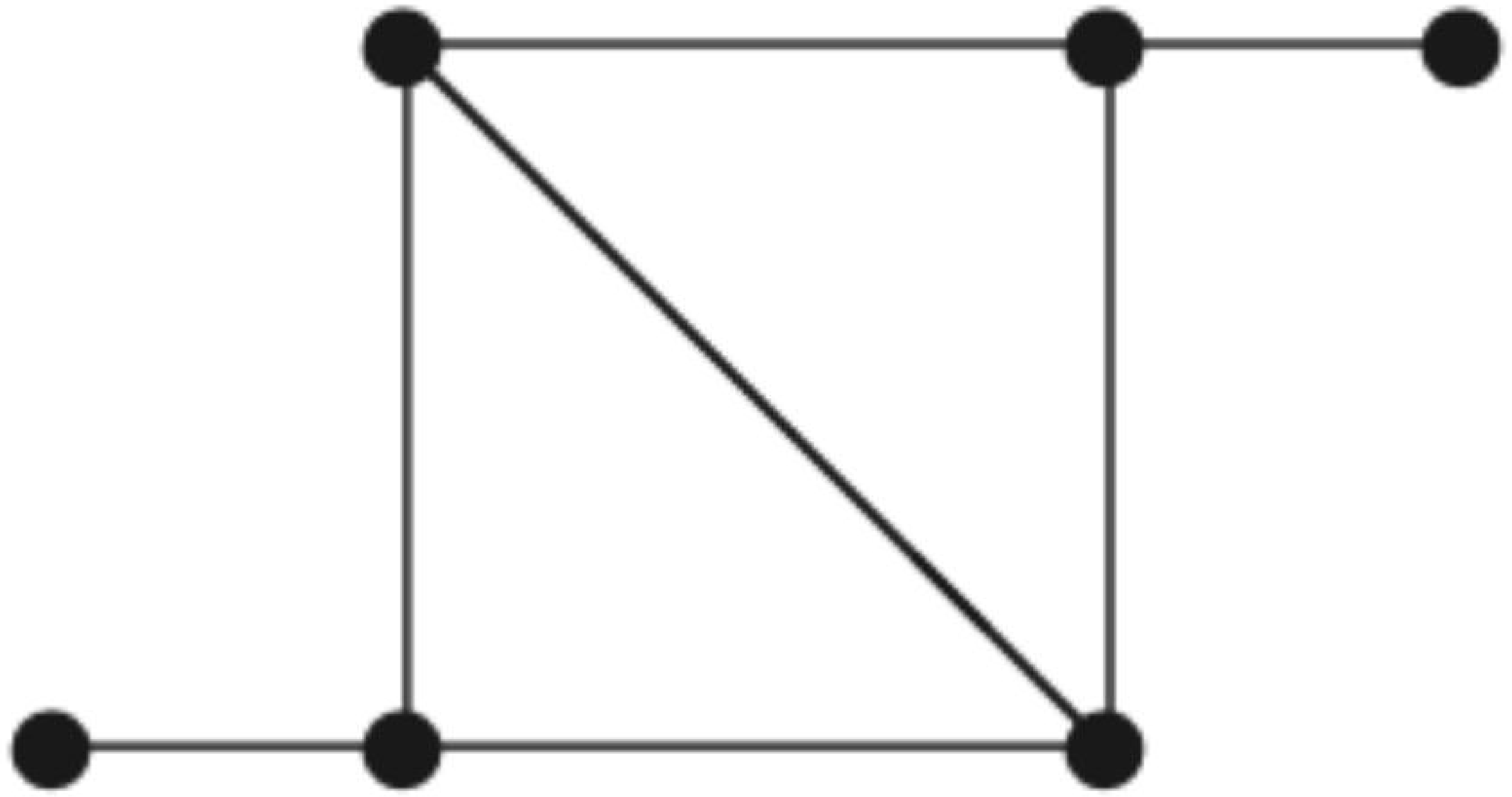


$$2,0,0,0,-2$$



例如,具有最少顶点的非同构同谱连通图。





$$(x-1)(x+1)^2(x^3-x^2-5x+1)$$

$=\{F_1,\ldots,F_k\}$分解为完整的定理 47。设$k \geqslant n-1$ 钾

二分图。然后 。

证明。设 $V = V(K_n)$ 和 是 有二分性 (X_i, Y_i)，$1 \leqslant i \leqslant k$.

一个变量都关联起来。$v \in V$每考虑以下线性方程： 十五

$$\sum_{v \in V} x_v = 0, \quad \sum_{v \in X_i} x_v = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k。$$

如果 $k < n-1$，那么这个线性方程有一个解$x_v = c_v$ $v \in V$ ， ，和

对于至少一个$v \in V$， $c_v \neq 0$ 。因此

$$\sum_{v \in V} c_v = 0, \quad \sum_{v \in X_i} c_v = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k。$$

因为是K的分解

, n

$$\sum_{uv\in E} \text{累积变异系数=} \sum_{我=1}^{钾} \left(\sum_{u\in X_i} 与 \right) \left(\sum_{v\in Y_i} \right) \text{简历。}$$

所以，

$$0 = \left(\sum_{u\in V} 与\right)^2 = \sum_{u\in V} c_{在}^2 + 2 \sum_{我=1}^{钾} \left(\sum_{u\in X_i} 其中 \right) \left(\sum_{v\in Y_i} cv \right) = \sum_{u\in V} c_{在}^2 > 0\text{。}$$

定理 48 （友谊定理）。设是一个简单的有序图,其中任意两个顶点只有一个共同邻居。则有n − 1 G n G

度顶点 。

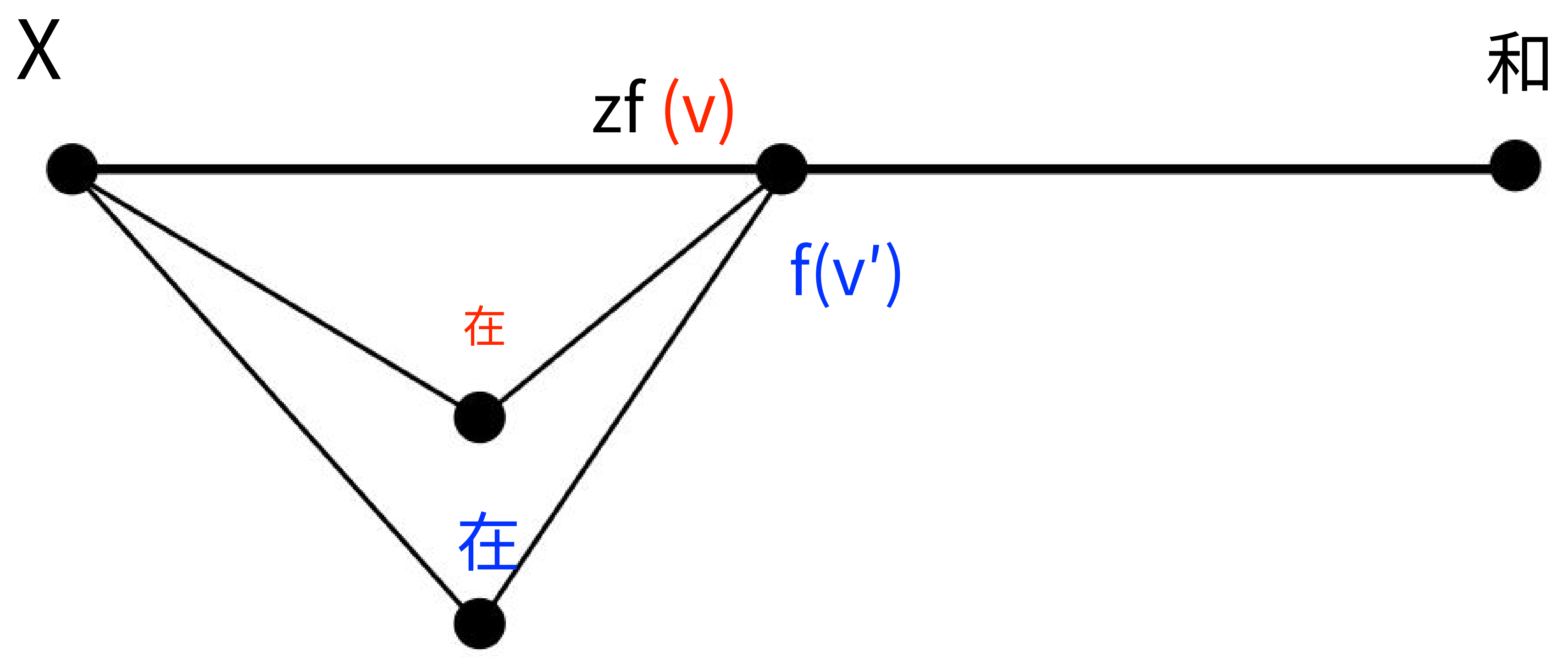
证明。相反假设考虑两个不相邻的顶点和xy $\Delta(G) < n - 1$ 。

。

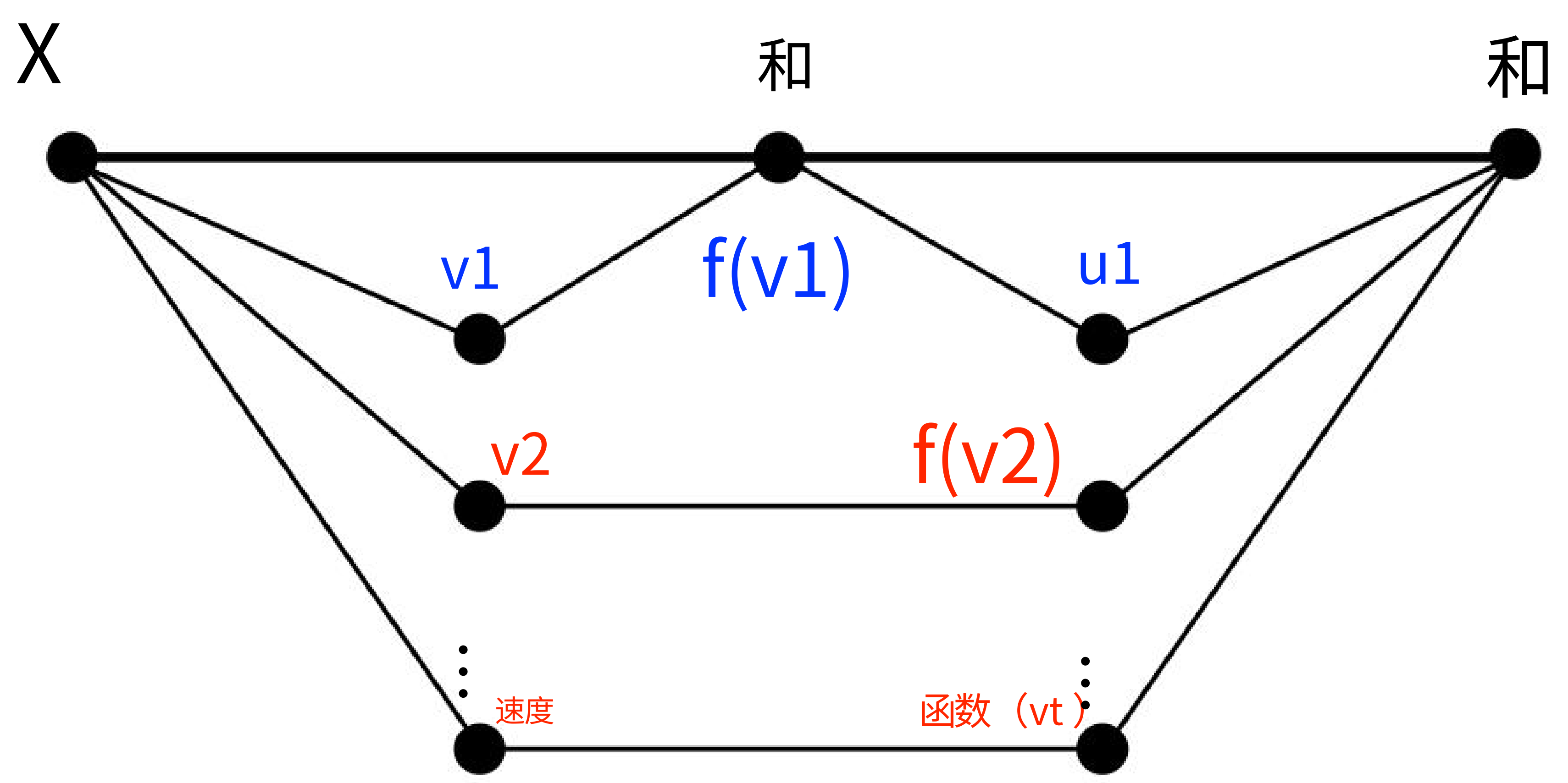
假设v ∈ $d(x) \geqslant d(y)$ 以及和和y的唯一共同邻居 。

对于任何最 $NG(x) \quad \{z\}$ ，为 和设的v唯一共同邻居 在 。

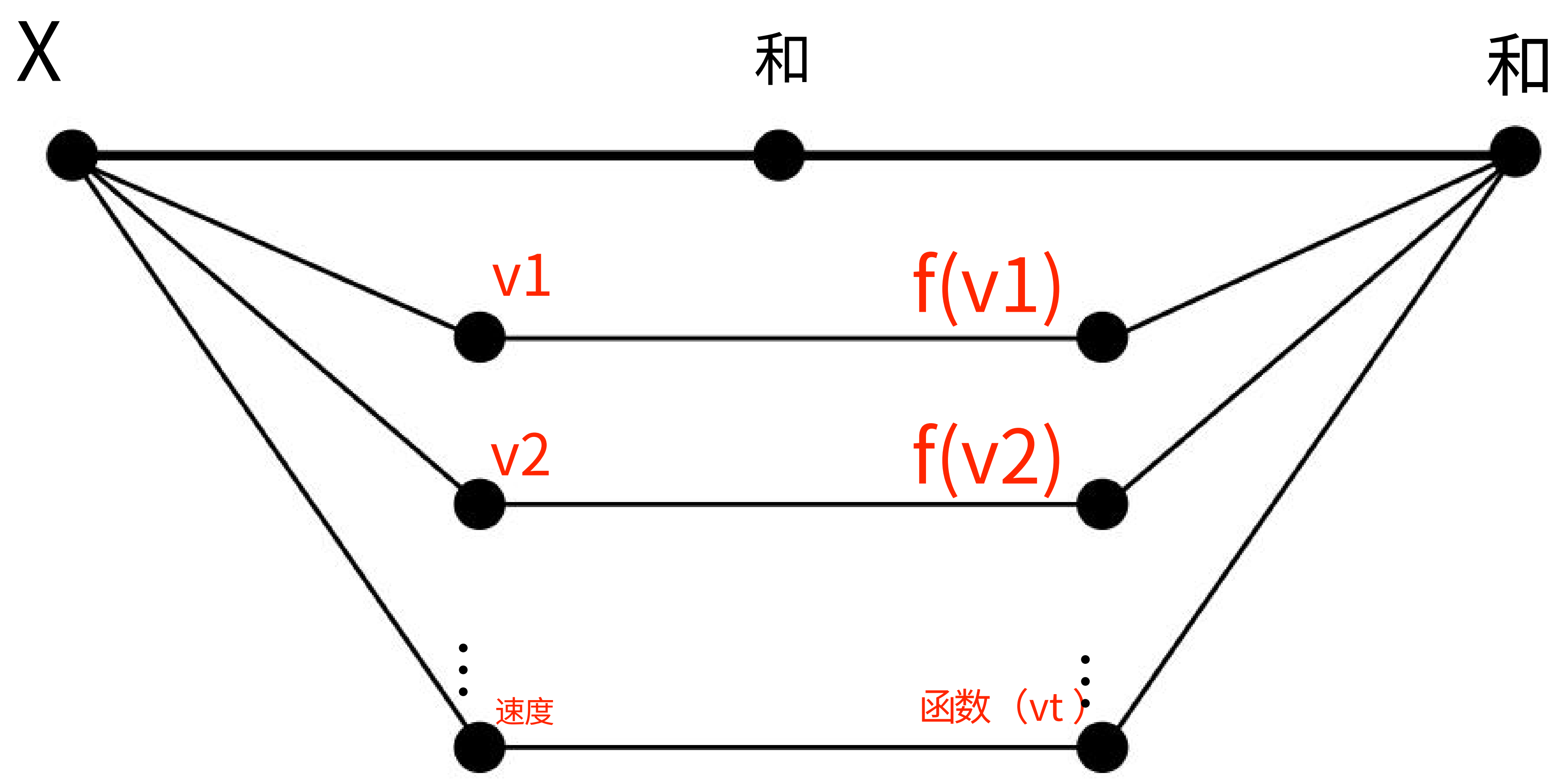
多有一个 $v \in NG(x) \quad \{z\}\ f(v) = z$ 否则， ，



有一个$v \in NG(x)$ $\{z\}$,假设v_1,使得 $f(v1) = z$ 。



不存在$v \in NG(x)$ $\{z\}$使得$f(v) = z$。



根据上述论证,对于任何不相邻的顶点和x,y $d(x)=d(y)$ 。

我们现在证明是正则的。G $\delta(\overline{G})$

足以证明是连通的。因为G $\overline{G}$ $= n - 1 - \Delta(G) > 0$,

每个组成部分至少有 2 个顶点。

若不连通,则有四边形,矛盾。$\overline{G}$ $\overline{C}G \subseteq C4$

对于某些整数来说,-正则也是如此。G k

用两种方法计算G中长度为 2 的路径的数量,我们有

$$n\binom{k}{2}=\binom{n}{2},$$

这意味着

$$n = k^2 - k + 1。$$

令 A 为 G 的邻接矩阵。则

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 & \\ 1千\cdots 1 & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 1 & 1\cdots千 \end{pmatrix} = J + (k -1)I 。$$

的特征值

J 是: 0 ( ),以及 n − 1 n (1) ,

A2 是: k − 1 n − 1 及( ),以 k2 (1) ,

A ±是: k − 1n − $\sqrt{1k}$) , 和 ((1) 。

因为tr(A) = 0,所以对于某个整数t,我们有t$\sqrt{k - 1}$ = k ,这意味着

$$k = 2, \quad n = 3。$$

练习 13。

1. 证明循环C的特征值为2πi

n

二 $\cos \frac{\quad}{n}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$。

摩尔图

摩尔图是直径为d 、周长为2d + 1 的图,其中d > 1。
5 循环和彼得森图是d = 2 的两个已知例子。

引理1. Moore 图是规则的。

证明。设是 Moore G图,其直径为。d (u) = d(v) d d

先证明,对于距离为 的任意两个顶点。 u, v G我们首

P(u, v) d为长度从 到 的唯一路径 紫外线 , 并让任意P(u在, v) d(u,w)

的邻居不在 上。则 并且路径包括w d' P(u, w) w'

u的邻居'不在 上。不同的决定不同的' 在 , 所以

d(v) ⩽ d(u) d(u) ⩽ d(v)相似地, 。

接下来,设是长度为的循环,是C的相邻顶点,如果x、 C $2d+1$ G y d(x,z) = 。

d(y,z) = d度数相同。 , 那么存在一个顶点,使得 気

, d(x) = d(y)因此 。因此,所有顶点都有 C

最后,考虑不在 C 上的顶点d − ℓ u C到 。我们可以添加C 在 ,最短路径的长度为 ℓ

的连续边到达该路径以达到u′ C d(u) = d(u′)

的顶点与 的距离为d 。然后 在 , 并且所有

G的顶点具有相同的度。

45.定理 如果是直径阶为 2 的 G k 正则 Moore 图,则我们 n

有 k∈ {2,3,7,57}。

定义 1.一个强正则图,其顶点参数为k -正则,其中任意两个相邻顶点恰好有公共邻居, (n, k, p, q)是一个

任意两个不相邻顶点n恰好有pq 个

共同的邻居。

命题 14.直径为 2 的 -正则 k Moore 图强(n, k,0,1) G n

带参数的正则 。

定理 45 的证明。对于任何两个不相邻的顶点,和AG之间都有唯一长度为 2 的步行 紫外线, 存在一个

在 在。因此,邻接矩阵

满足

$$A2 + A - (k - 1)I = J 。$$

因为是$\xi = (1,1,\ldots,1)$的多项式 美国医学杂志，并具有一组共同的特征向量。

其中一个特征向量是$J\xi = n\xi$, $A\xi$ 电视 。因此，我们有

$$= k\xi。$$

令η为特征值λ对应的任意其他特征向量，则

$$J\eta = 0, A\eta = \lambda,$$

这意味着

$$\lambda^2 + \lambda - (k - 1) = 0。$$

因此A有另外两个不同的特征值：

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4k - 3}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{4k - 3})。$$

如果 是,且 和 不是有理数,则每个 λ_1, λ_2 都有多重性 $(n-1)/2$,因为 是有理数的。因此, ,

A

$$\mathrm{tr}(A) = k + \frac{n-1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = k - \frac{k^2}{2} = 0$$

这意味着 $k = 0$ 且 $n = 1$,或者 $k = 2$ 且 $n = 5$,即 $G = C_5$.

如果 是,且 和 是有理数,则由于 λ_1, λ_2 的任何有理特征值也是积分的, λ_1 ℓ

$\sqrt{4k-3}$ 是一个平方整数,比如 $\sqrt{4k-3} = t$. 假设

的多重性为 。那么

$$\mathrm{tr}(A) = k + \ell\frac{t-1}{2} + (n-\ell-1)\frac{-t-1}{2} = 0。$$

注意到$n = k^2 + 1$ k和（$t^2 + 3$）/4，我们有

5 4吨 +吨 3 2 + 6t − 2t + （$9 - 32\ell$）$t - 15 = 0$。

由于上述等式要求整数解，因此t的唯一候选者是 15 的因数。解为

$t = 1$，	$\ell = 0$，	$k = 1$，	$n = 2$；
$t = 3$，	$\ell = 5$，	$k = 3$，	$n = 10$；
$t = 5$，	$\ell = 28$，	$k = 7$，	$n = 50$；
$t = 15$，	$\ell = 1729$，	$k = 57$，	$n = 3250$；

图论中的概率方法

（有限）概率空间由有限集组成 （哦， P)哦 ，称为样本空间和概率函数：满足 P Ω [0,1]

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1。$$

我们可以将顶点上的所有标记图的集合（或等效地， Kn 的所有生成子图的集合）作为有限（n， P)概率空间的样本空间，按照概率函数选样本空间中一个元素的结果称为随机图。 G

磷

这种概率空间的最简单的例子是

当所有图 $G \in$ $_n$ 被选中的概率相同。因为

$_n$ $| = 2N |$,在哪里 $N = (n\ 2)$,在这种情况下,概率函数是：

$$P(G) = \frac{1}{2N} \text{ 对于所有}G \in \quad _n\text{。}$$

观察这个概率空间的一个自然方式是想象Kn的边

被考虑逐一纳入,每条边以一半的概率被选中（例如,通过抛一枚公平硬币）,这些选择

彼此独立地进行。

这个过程的结果是 克 ，

且所有 $G \in$ $_n$ 是等概率的。

可以通过固定 0 和 1 之间的一个实数并以概率p选择每条边来获得集合上n更精细的概率空间

页

这些选择再次相互独立。因为是任何特定边未被选择的概率，因此得到的概率P

$1 - p$

函数表示为

$$P(G) = p^m(1 - p)$$ 对于每个G ∈

n，

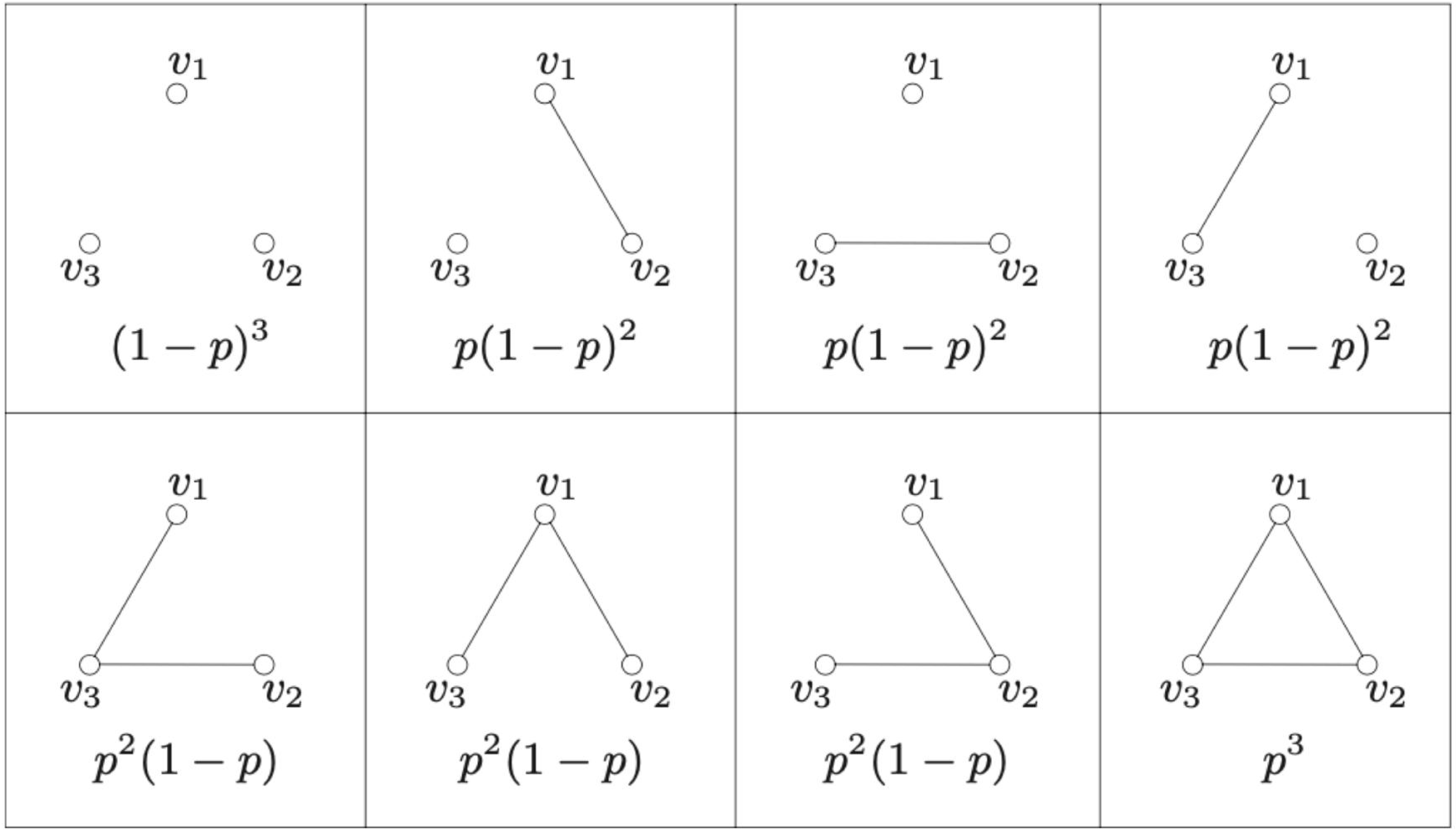
其中$m = e(G)$。该概率空间表示为

n,p。

例子。

率 具有下图3,p作为样本空间，并标明概 $2^{\binom{3}{2}} = 8$ 生成的子图如图所示 K3

函数。



概率空间3,p

注意p值越小 ，获得稀疏图的概率越高。我们感兴趣的是计算或估计随机图具有特定属性的概率。

对于每个图属性，例如连通性，都对应有一个子集，即具有给定属性的成员。

n n

随机图具有此特定属性的概率就是这些图的概率的总和。

例子。对于 $3p2\ (1 - p) + p3 = p2\ (3$ G $_{3,p}$，

它是连通的概率就是它是二分图的概率为2p)中的随机图；

$+ 3(1 - p)\ 2p + 3(1 - p)p2 = 1 - p3$；

$(1 - p)^3$

并且它既是连通的又是二分的概率是 $3p2\ (1 - p)$。

回想一下经典对角拉姆齐数R(p, p)的下界：

Erd s 的下限(1947):

第

2 页

当p≥3 时,R(p, p)>2 。

K的所有红蓝边着色的数量为

n

2（n2）

。

单色K的染色数量最多为

页

。

（n p） 2 2（n 2） −（p 2）

如果

$< 2^{\binom{n}{2}}$,

$\binom{n}{p}$ $2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}+1}$

那么存在

是红蓝着色,使得K没有单色。 n Kp

根据R(p, p)的定义,有R(p, p)>n 。

不难证明,如果n ⩽ 2 ,则 $\frac{}{p2}$,

例如

$$(np) < \frac{}{1 \leqslant 22p - 1} \quad \frac{p2}{2} - p+$$

$$= 2^{\frac{1}{2}p(p-1)-1} \quad 2-p\,2+2 \leqslant 2(p\,2)-1 \text{。}$$

因此,

$$< 2(n\,2) \text{。}$$

$$(n\,p) \quad 2(n\,2)-(p\,2)+1$$

根据上面的论证,我们有

$$R(p, p) > 2^{\frac{页}{2}} \text{。}$$

使用概率方法证明:

随机为完全图的边着色。 KN

即,以 1/2 的概率将每条边染成红色,以 1/2 的概率将每条边染成蓝色。

由于给定副本的所有边都是红色的概率是 钾

2—（第2页）

,

K的红色副本的预期数量是

页

2—（p2） （Np）。

类似地， K的蓝色副本的预期数量是

页

2−（p2）（Np）。

因此， K的单色副本的预期数量为

页

21−（p2）（Np）。

自从

页

$$21-(p\,2)\,(N\,p) \leqslant 21-(p\,2)\,\overline{(eN}\,p),$$

拿

$$N=(1-o(1))\frac{\text{页}}{\sqrt{2e}}(\sqrt{2})^{\text{页}},$$

我们有

$$21-(p\,2)(N\,p) \leqslant 21-(p\,2)(eN\,p)^{\text{页}} < 1.$$

这意味着

$$R(p,p) \geqslant (1-o(1))\frac{\text{页}}{\sqrt{2e}}(\sqrt{2})^{\text{页}}。$$