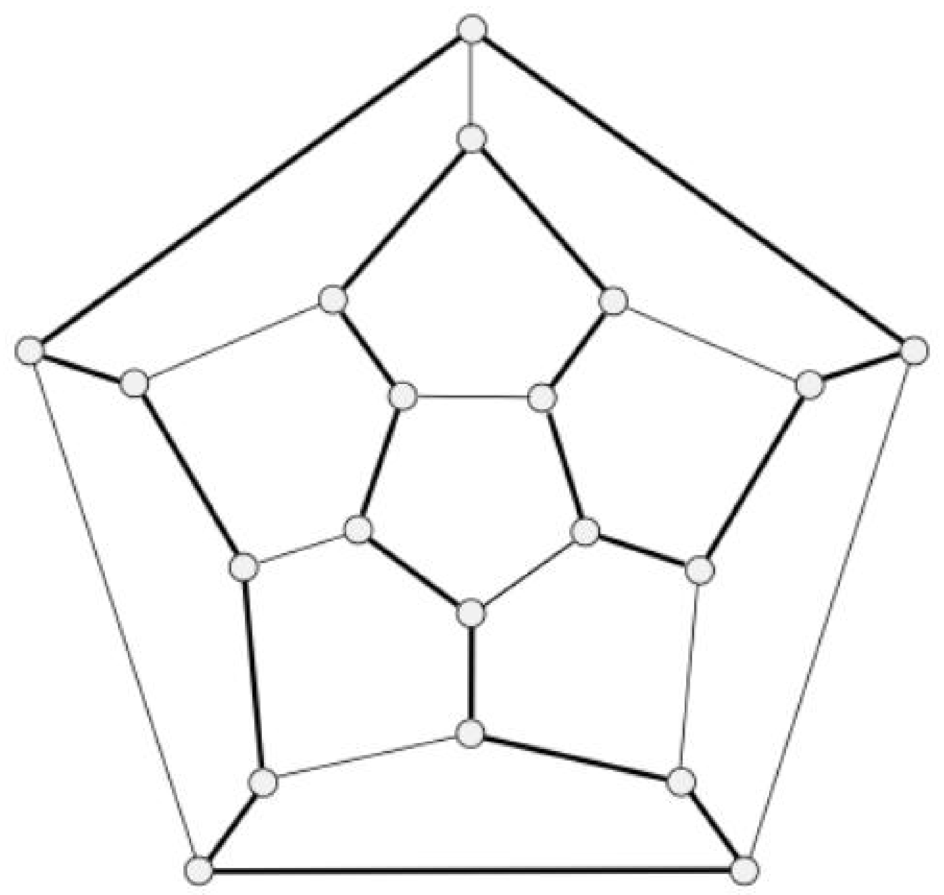
汉密尔顿问题

图中包含图的每个顶点的路径或循环称为图的汉密尔顿路径或汉密尔顿循环。

这种路径和循环以威廉·罗恩·汉密尔顿爵士的名字命名,他在 1856 年写给他的朋友格雷夫斯的一封信中描述了一种十二面体上的数学游戏,其中一个人将大头针插入任意五个连续的顶点,另一个人需要完成这样形成的路径以形成一个跨越循环。

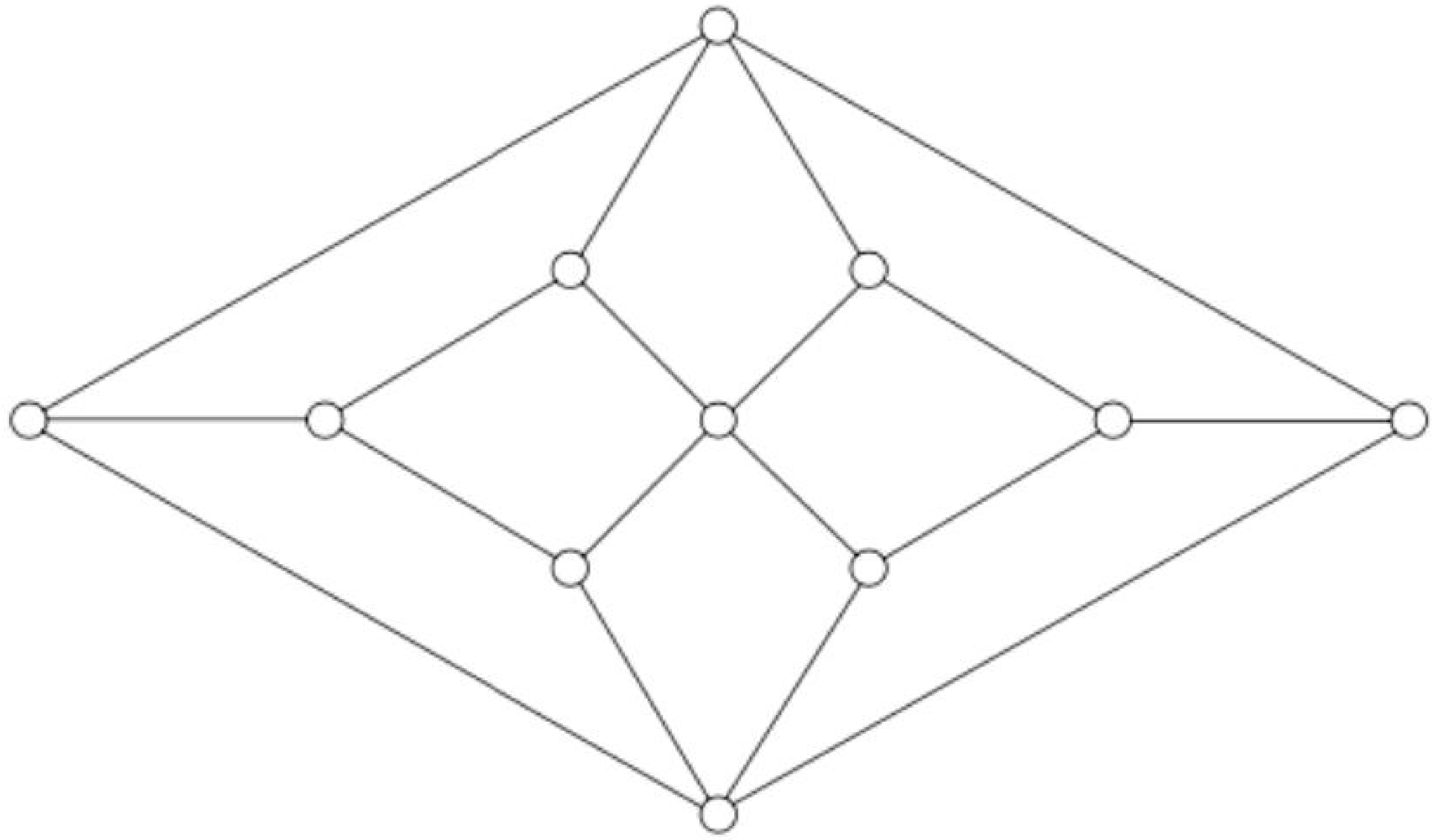


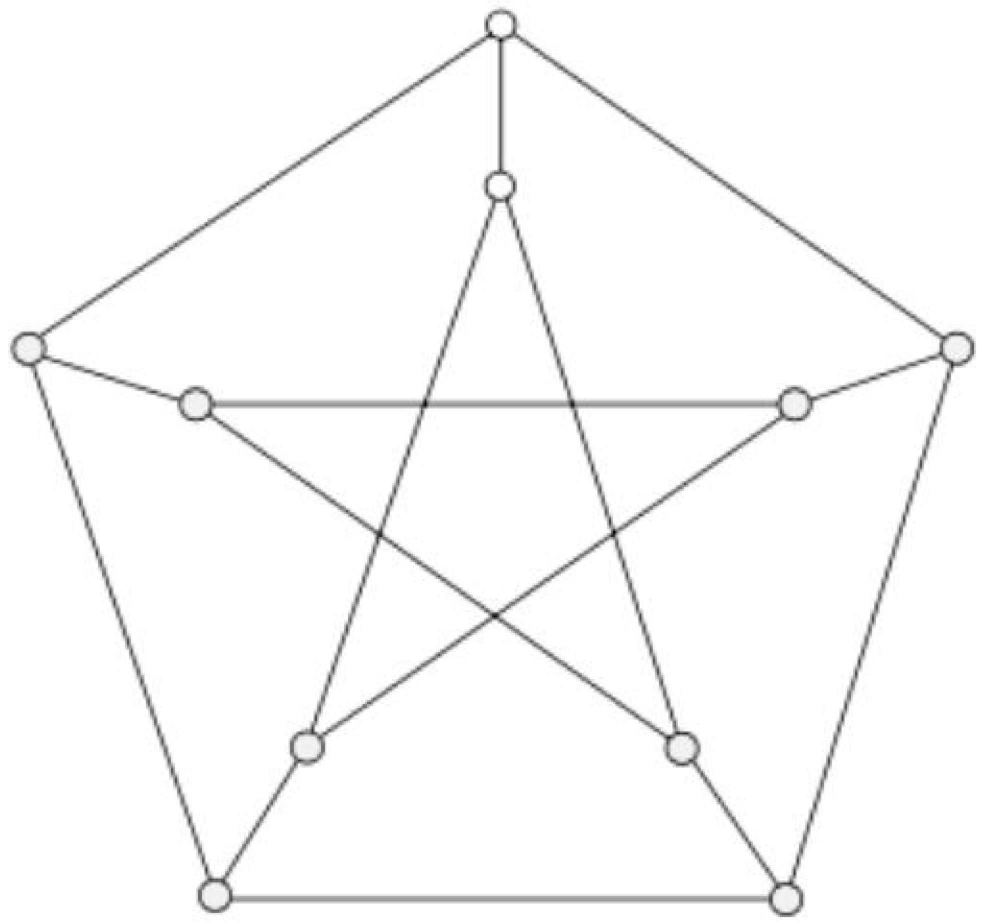
设是图G，$\omega(G-S)$ $S \subset V(G)$ 。

我们用 表示组件的数量 $G-S$。

定理 12.设G为有哈密顿回路的图. 则对任意$S \subset V(G)$, $\omega(G-S) \leqslant |S|$.

定理12是图为哈密顿图的必要条件。





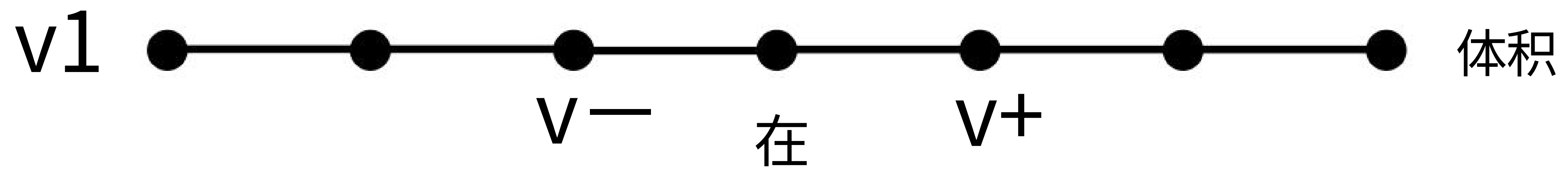
定理13（狄拉克）。设是阶简单图，若G G $n \geqslant 3$。$\delta(G) \geqslant n/2$ ，

则是哈密顿量。

证明。不难证明是连通的（实际上是2连通的）。 G

v+设 为P 的前身和后继 中的一条最长路径 设 。对于任何v－， G $v \in V(P)$ ，

在， 分别。

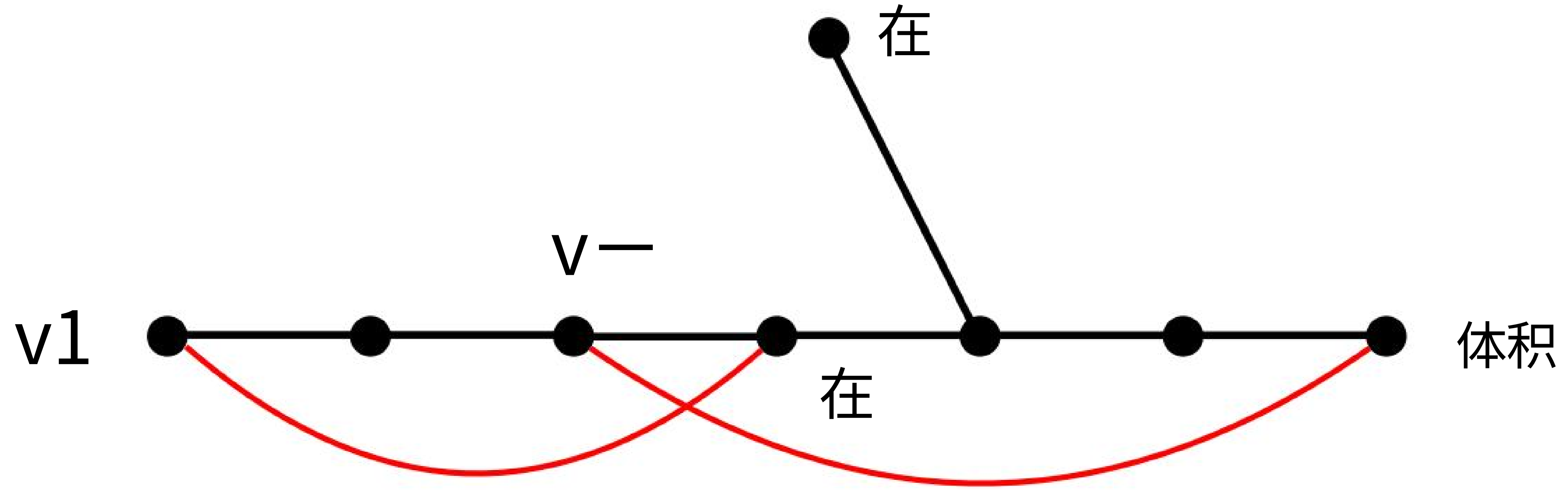


让

$$N^+_{磷}\ (v\ell) = \{ v+ :\ v \in N_P\ (v\ell) \}。$$

不难看出， $N^+_{磷}\ (v\ell) \subseteq V\ (P)$ 。

如果 $NP(v1) \cap N_{磷}^{+}(v\ell) \neq \varnothing$,假设 $v \in NP(v1) \cap N_{磷}^{+}$ 体积,然后 $C = v1Pv^{-}v\ell \overleftarrow{P} vv1$ 必须是汉密尔顿循环,否则,



如果N那么因为 $P(v1) \cap N_{磷}^{+}(v\ell) = \varnothing$, $\delta(G) \geqslant n/2$,我们有

$$|P| \geqslant |NP(v1)| + |N_{磷}^{+}(v\ell)| + 1 \geqslant n/2 + n/2 + 1 = n + 1,$$

这是不可能的。

令G为图,定义

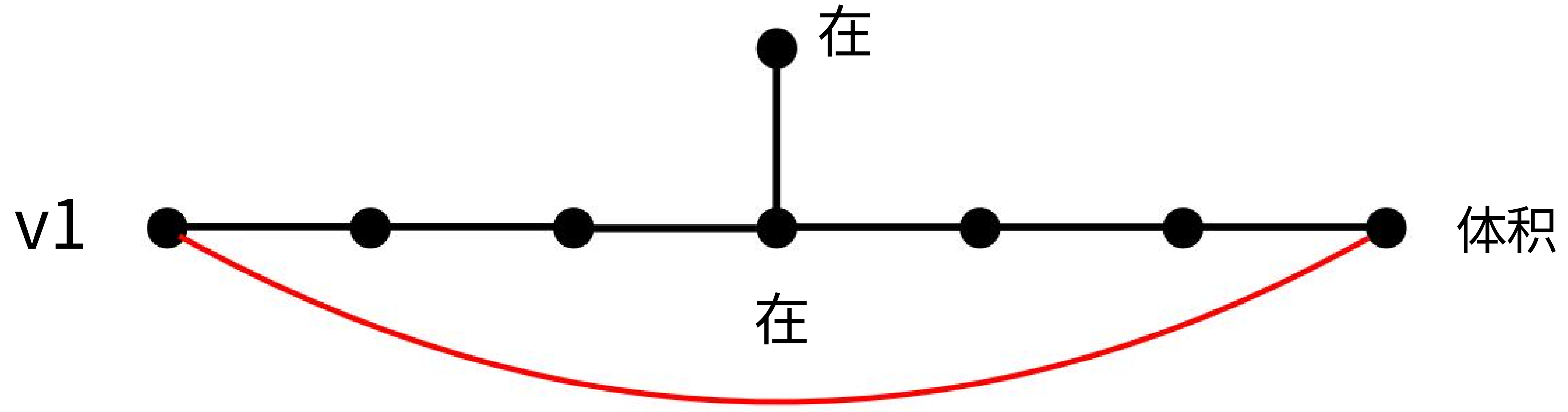
$$\sigma_2(G) = 最小\{d(u) + d(v) : uv \notin E(G)\}。$$

定理14(Ore)。设是阶简单图,若$n \geqslant 3$ G $\sigma_2(G) \geqslant n$ 。 ,然后 G 是汉密尔顿的。

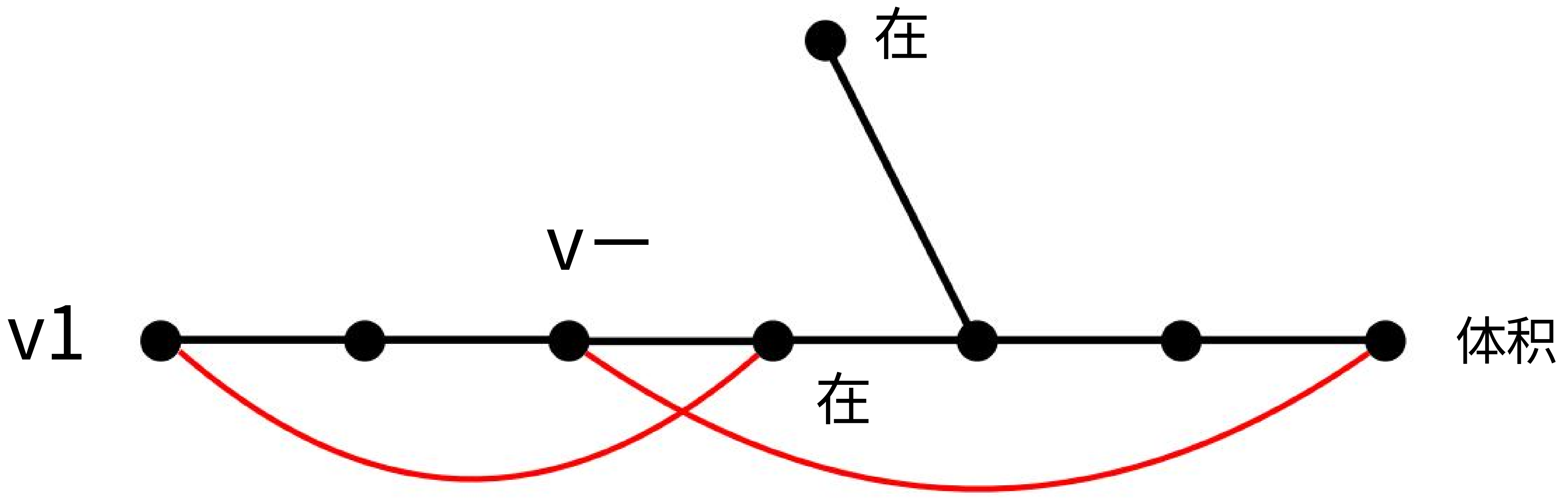
证明。不难证明是连通的（实际上是2连通的）。G

$P = v_1v_2 \cdots v_\ell$是 中的最长路径。我们仍然使用 G 中的符号定理13。

如果$v_1v_\ell \in E(G)$ 那么 $C = v_1v_2 \cdots v_\ell v_1$ 必须是汉密尔顿循环,否则,



设C = v1Pv v1vℓ ∈ E (G) .如果 $NP(v1) \cap N^+$ 磷 $(v\ell) \neq \varnothing$,假 $v \in NP(v1) \cap N^+$ 磷 体积 ,
然后 ← 必须是汉密尔顿循环,否则,



如果N $P(v1) \cap N^+$ 磷 $(v\ell) = \varnothing$, 然后因为 $d(v1) + d(v\ell) \geqslant \sigma2(G) \geqslant n$,我们有

$$|P| \geqslant |NP(v1)| + |N^+ \text{磷} (v\ell)| + 1 \geqslant n + 1,$$

矛盾。

引理1. 设是简单图,设和是$d(u) + d(v) \geqslant n$ G G G + uv中的不相邻顶点 在 在

这样 。那么 是哈密顿性的当且仅当 是哈密顿性的。

证明。 (⇒) 如果是哈密顿量,那么也是(⇐) 。 G G + 紫外线

假设有一个汉密尔顿循环。 G + 紫外线 C

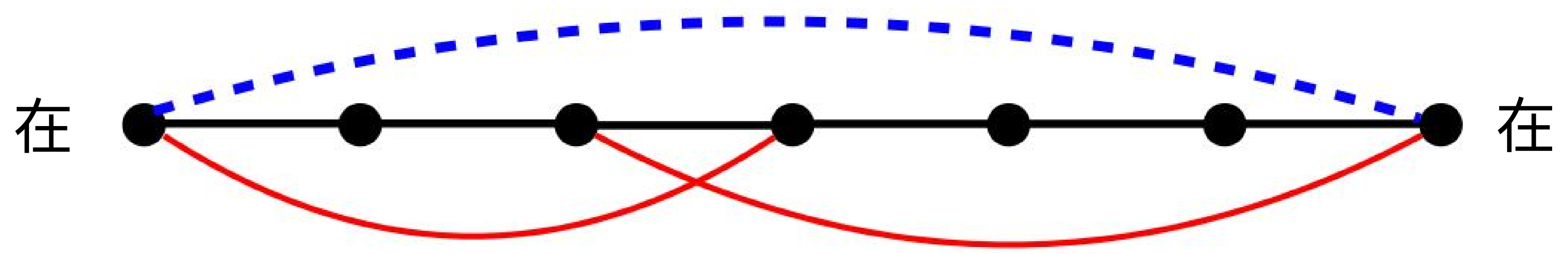
紫外线 C G

如果不包含边,则C uv P = C − uv G 则为的哈密顿循环。

如果确实包含边,那么就是G的汉密尔顿路径,始于 ,止于$d(u) + d(v) \geqslant n$

在 在 显然,是一条最长的路径,并且 P 在 在

不相邻且满足 。



然后,如定理14的证明一样,我们可以证明G是哈密顿量的。

设是阶为 的图。GG的闭包 n ，写为 $cl(G)$ ，是图表

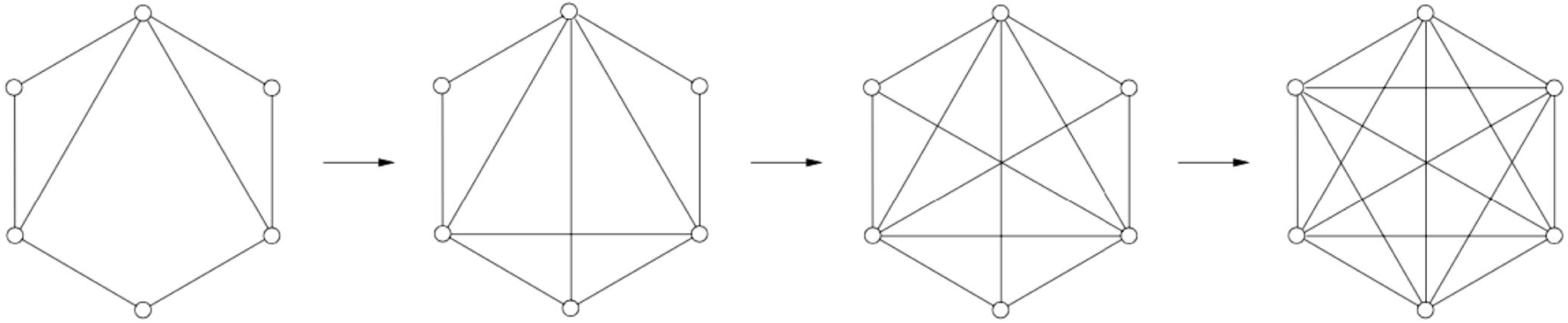
通过递归连接不相邻顶点对获得，其度数总和至少为，直到不再存在这样的对。

n,

引理2.图的闭包是定义明确的。

定理15.一个简单图是汉密尔顿图当且仅当它的闭包是汉密尔顿图。 G $cl(G)$

G



$cl(G)$

引理3. 设是简单图,设和是d(u) + d(v) ⩾ n − 1 G中的不相邻顶点,且 。则当且仅当G + uv有汉密尔顿路径 G

有一条哈密顿路径。

证明。 (⇒) 如果G有哈密顿路径,那么也有(⇐) 。

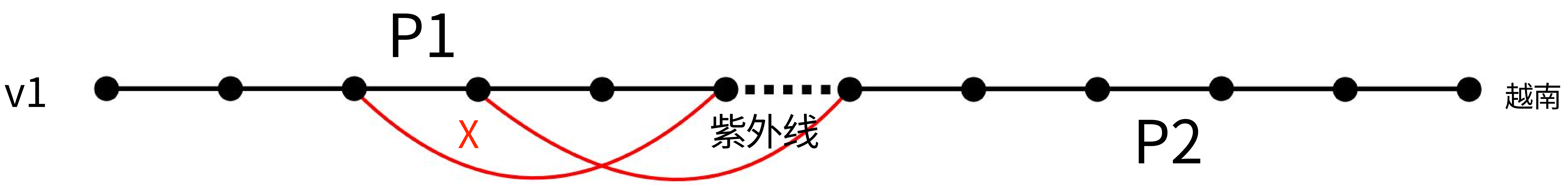
假设G G + uv有一条哈密顿路径P = v1v2⋯vn 。

P uv P如果 不包含边,则是 的汉密尔顿路径。

如果P包含让且v = vi+1,P1 = v1⋯vi P2 = vi+1⋯vn ， 和 。

如果 NP1 (v) ∩ NP1 (u) ≠ ∅,例如 P1 (在)

然后 P′ = v1Px ←uPxvPv n 是汉密尔顿路径 G ，因此结果如下。

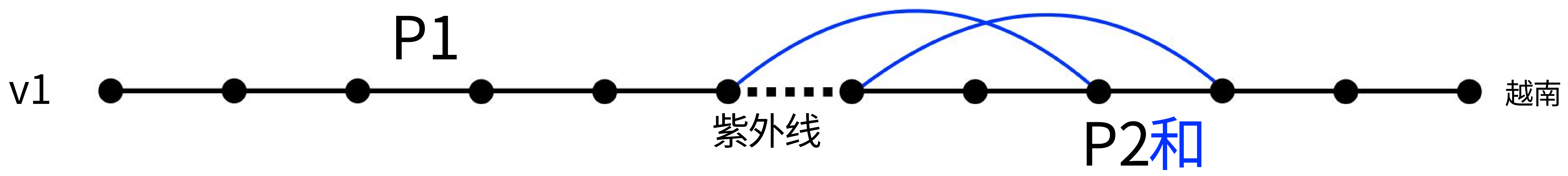


如果$N_{P1}(v) \cap N^+_{P1}(u) = \varnothing$,则注意到 $v1 \notin NP1(v) \cup N^+_{P1}$（在）,我们有

$$dP1(u) + dP1(v) = |NP1(v)| + |N^+_{P1}(中)| \leqslant |P1| - 1.$$

如果 $NP2(u) \cap N^-_{P2}(v) \neq \varnothing$,比如说 $y \in NP2(u) \cap N^+_{P2}$(在),

然后 $P'' = v1Pu \overleftarrow{yPv}y^+Pv_n$ 是汉密尔顿路径 G,因此结果如下。



如果N则注意 $P2(u) \cap N^-_{P2}(v) = \varnothing$, $vn \notin NP2(u) \cup N^-_{P2}$（在）,我们有

$$dP2(u) + dP2(v) = |NP2(u)| + |N^-_{P2}(五)| \leqslant |P2| - 1.$$

因此,我们有$d(u) + d(v) \leqslant |P_1| + |P2| - 2 \leqslant n - 2$,矛盾。

G为图。设若且对于任意两个顶点S $S \subset V(G)$ $vv' \notin E(G)$ $v, v' \in S$ ，

则称为独立集。定义

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S\text{是 G 的独立集}\},$$

called independence number (独立数) of . G

定理16（Chvátal 和 Erd s）。设是至少为 3 阶的G简单图。$\alpha(G) \leqslant \kappa(G)$

如果 ，则是哈G密顿量。

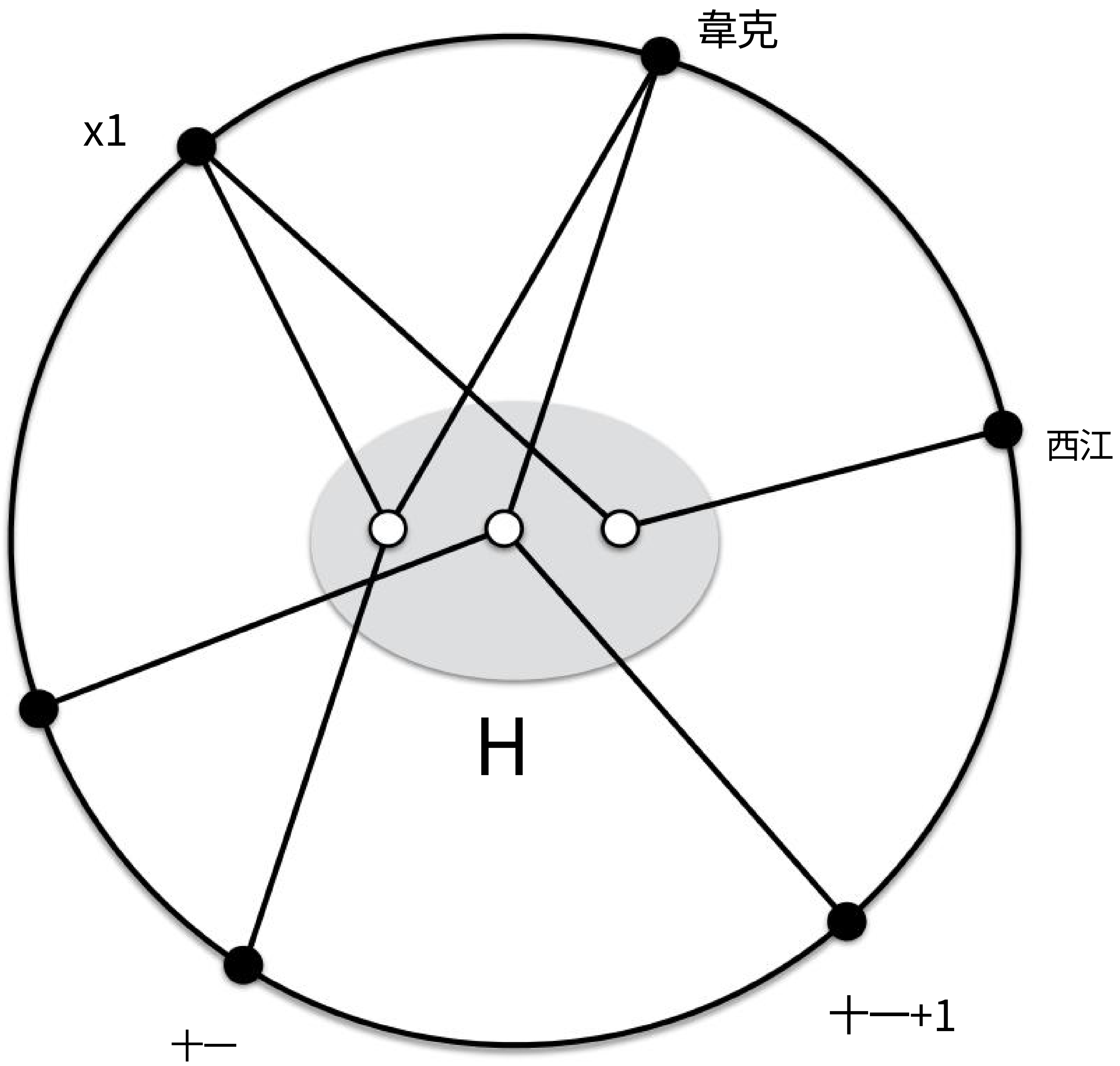
设不是汉密尔顿的。GG证明。设是的最长环路。相反假 C

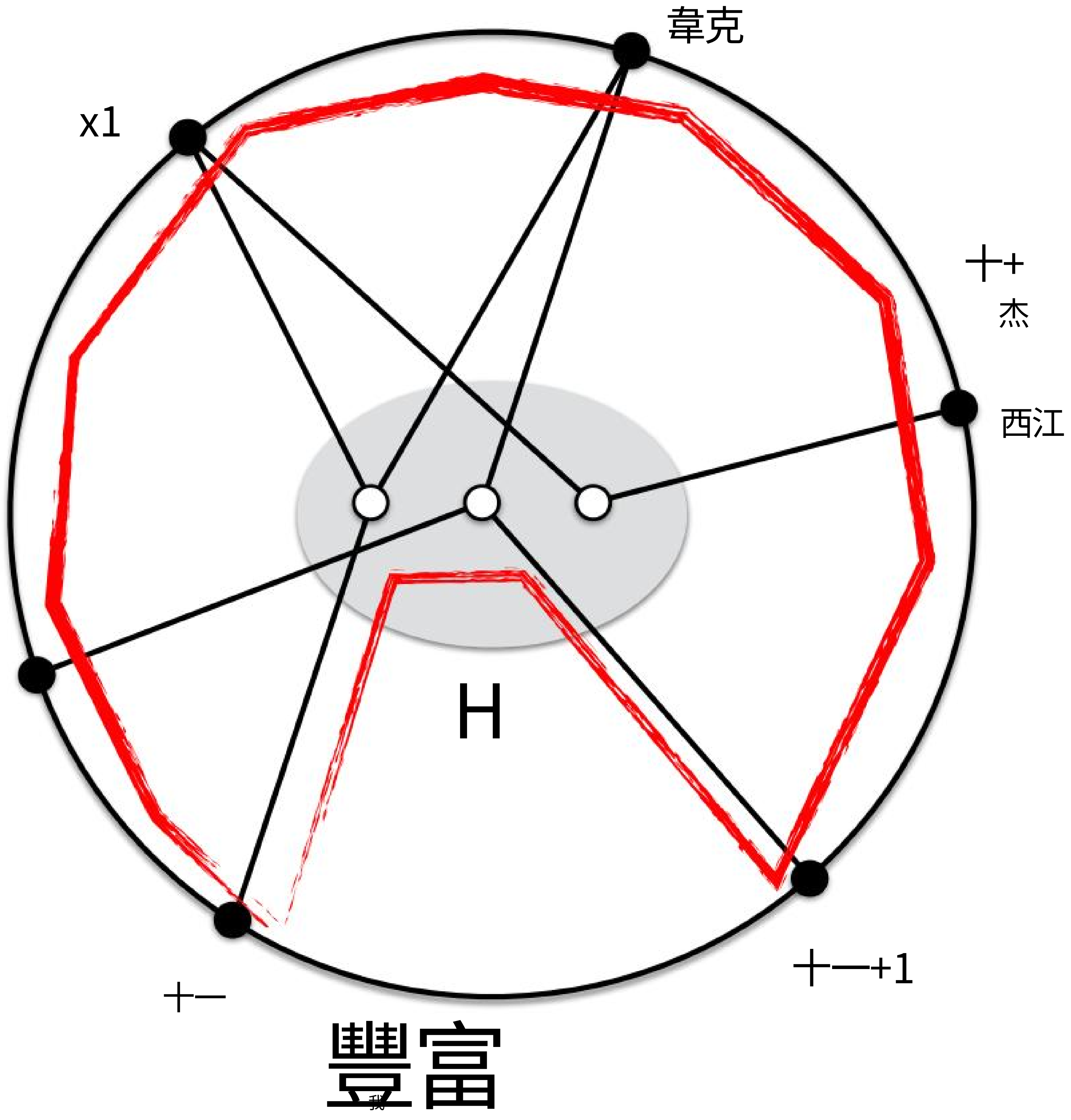
H为 设的任何分量,且 中的所有邻居均为 $G - V(C)$ ， HC

x1， x2， …， ，沿着给定的方向发生。对于任何 C $v \in V(C)$，

设 为 xk 沿 C 给定方向的后继。 在

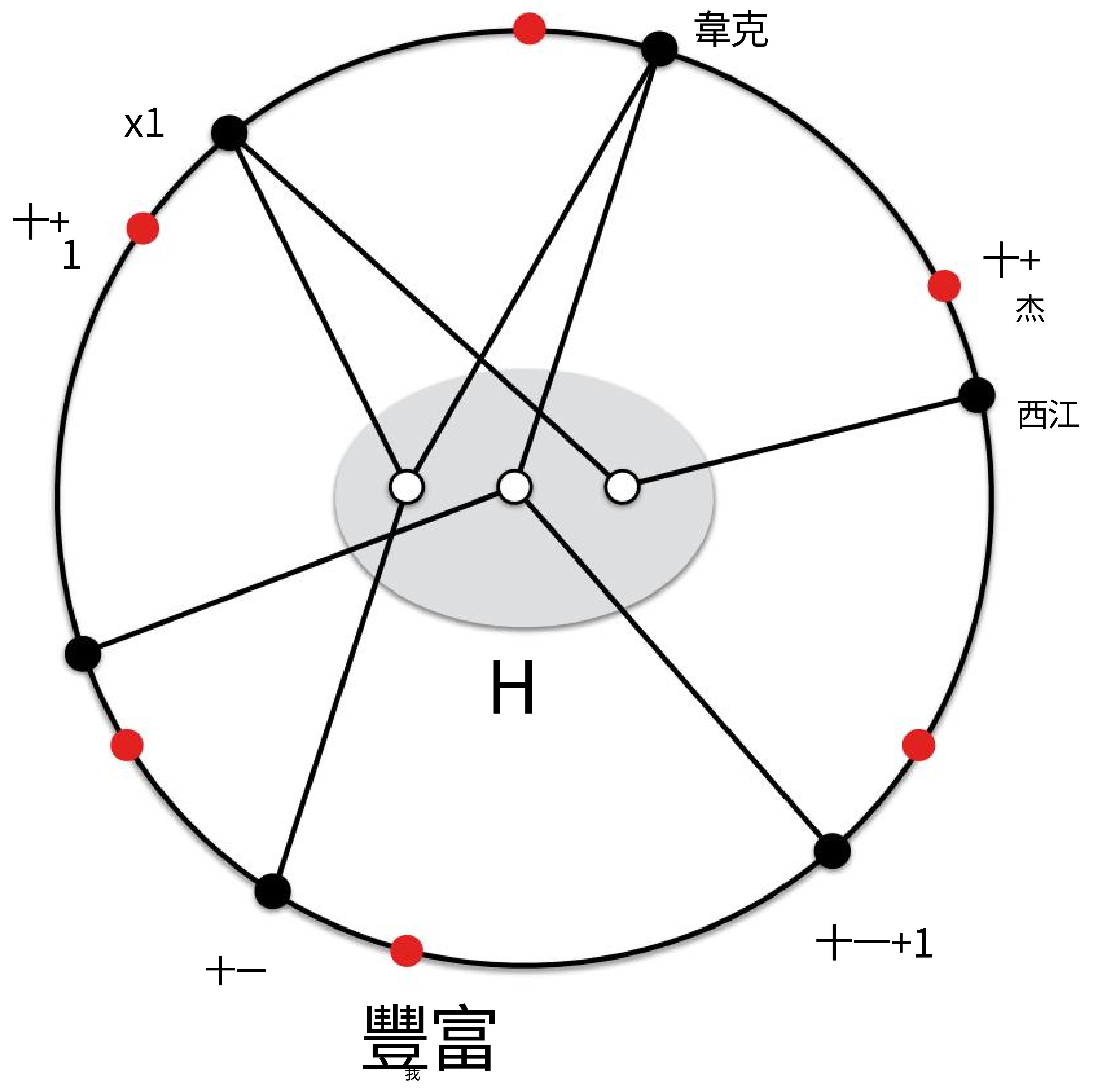
让 xiHxj是H中具有内部顶点的最长路径(xi,xj) 。

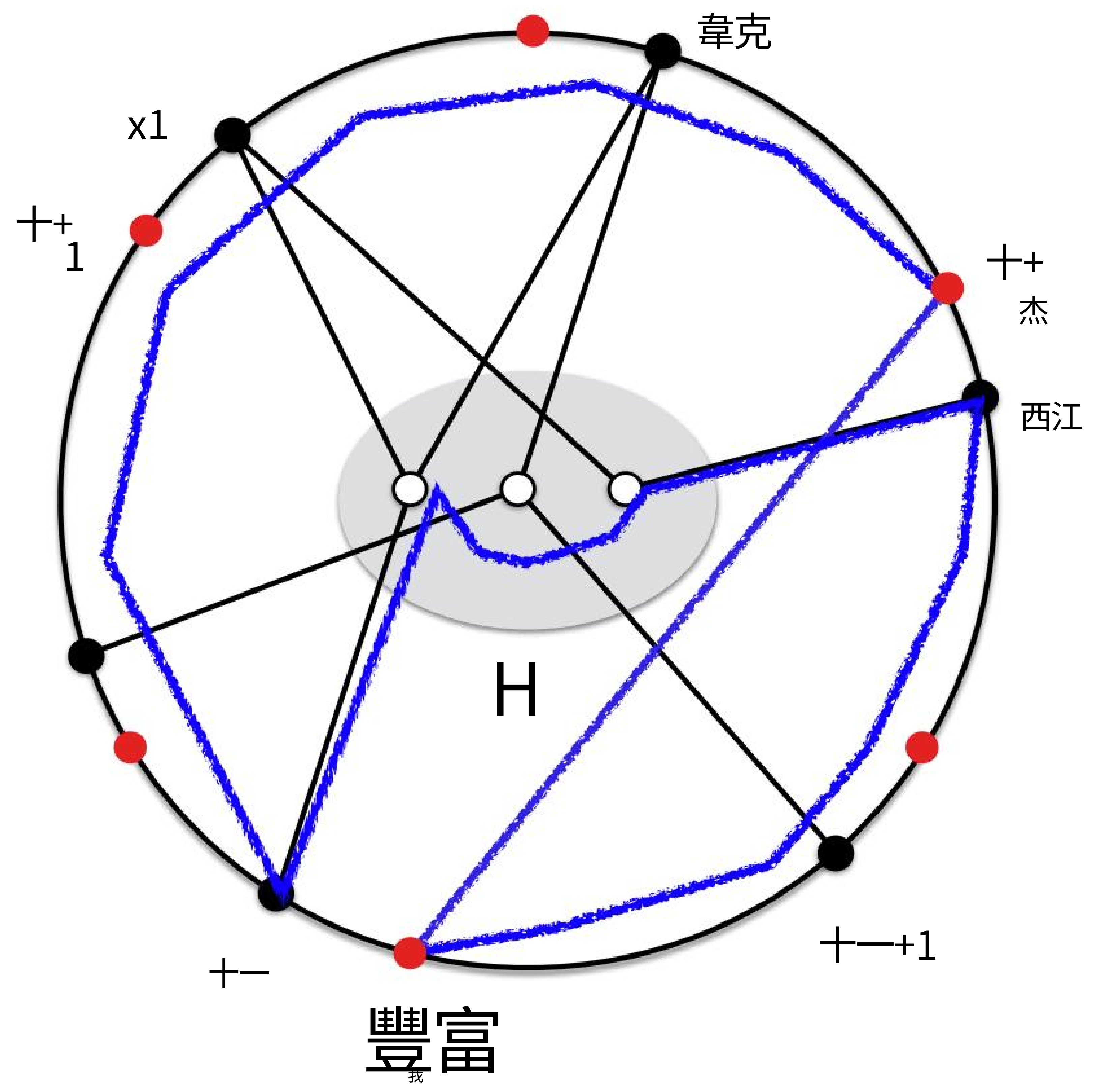




因为是的最长循环并且不能是连续的顶点xi+1 Gxi

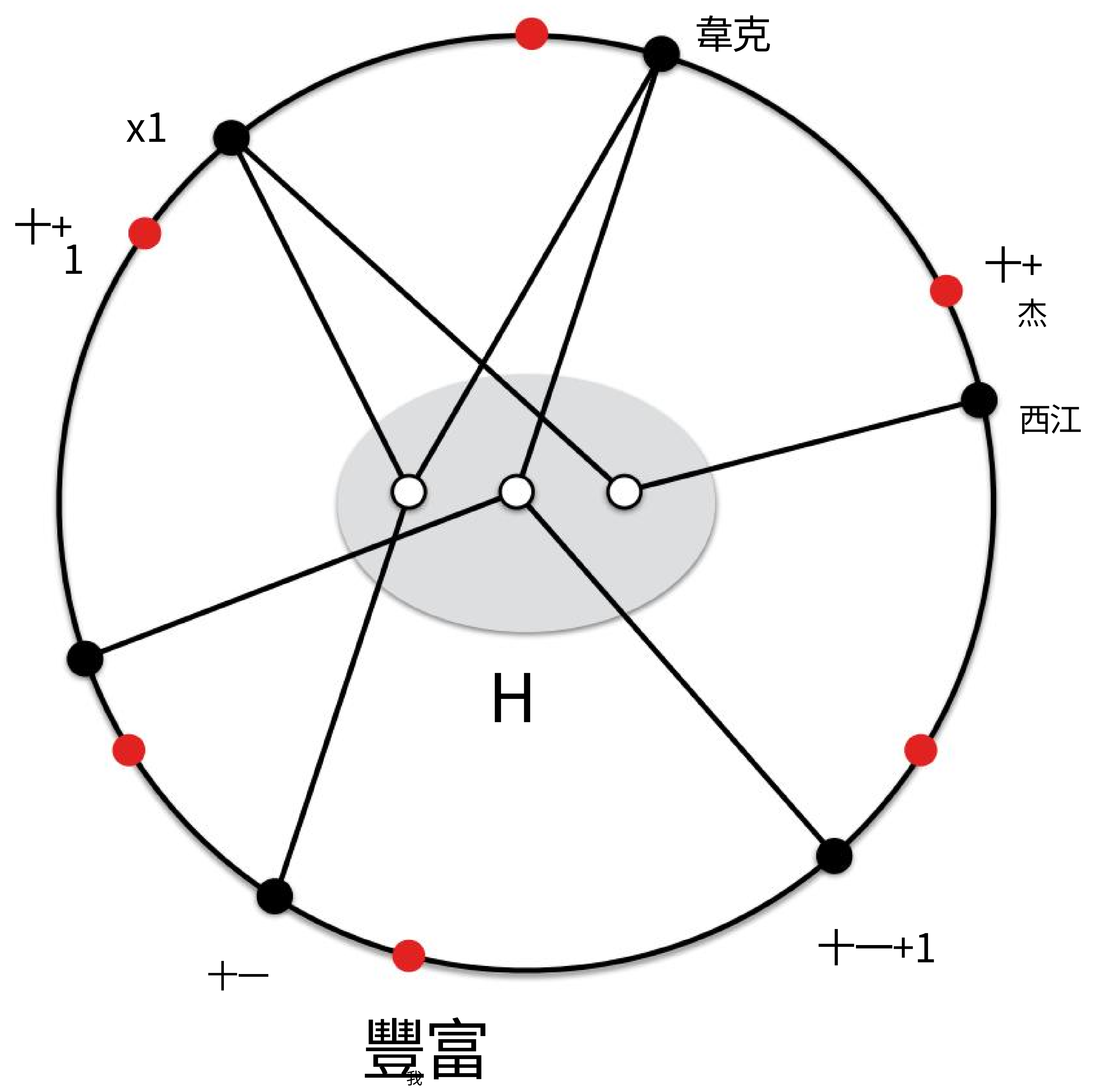
中，否则，一些Hxi+1Cx 我 周期长于 C。





通过x+的最大值 C，我们可以看到 十+ 1、十+ 2、。。。，十+ 钾 是独立集 G。

如果 我 十+ ∈E (G)，然后 十+ 我 慢性 杰 氢键+ 杰 十+ 我 周期长于 C。



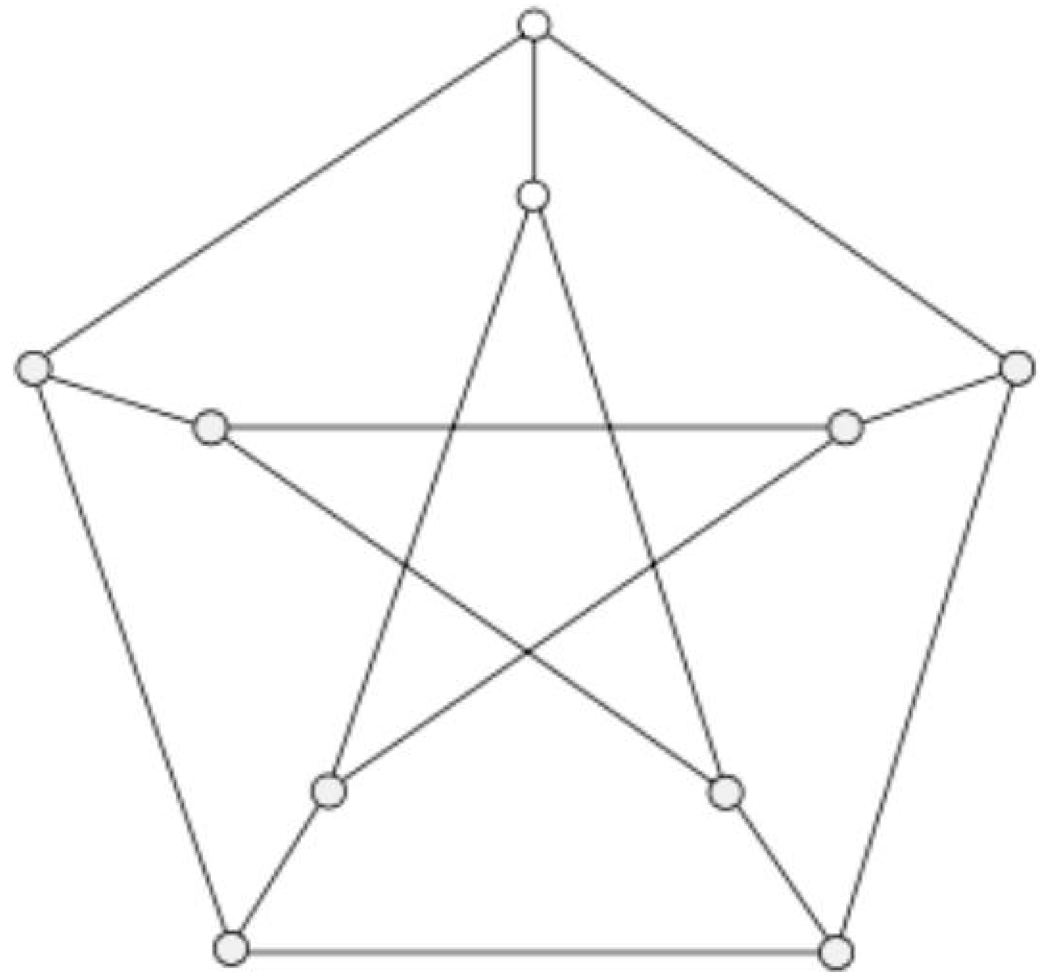
显然,对于任意的h ∈ V(H)独立集 ,是割集,这与以下假设相矛盾 S = {x1, x2, ..., xk} G , 和 {h, x+ 1 、十+ 2、。。。, 十+ 钾 } 是一个

。这意味着α(G) ⩽ κ(G) κ(G) ⩽k α(G) ⩾k + 1

。

练习 4。

1. 证明Petersen图没有Hamilton回路。



G H G

2. 设 为图,设 为通过添加新的GJ顶点并将其连接到 的每个顶点而得到的图。证明 为哈密顿图,若 且G

H

仅当具有汉密尔顿路径时。