加权图中的最小权重生成树

加权图是其中每条边与一个 G 非负w(e)实数相关联,该实数称为的权重。 这是

, 果e如则H 是 G ,

的权重定义为:

$$\sum_{e \in E(H)}$$ 我们)。

给定一个连通加权图, G

如何找到具有最小权重的连通子图?

也就是说,如何找到一棵权值最小的生成G树?

以下树搜索算法由 Jarník (1930) 和 Prim (1957) 提出。

JP 算法

1. 取任意顶点,例如,作为根,并设置v1 $y \in V(G)$ $V(T_k)$ $T_1 = v_1$;

对于 $k \geqslant 12$. ,一条边,且xy $x \in V(T_k)$选择 这样的

$T_k + xy$宽度(的所有边中最小的$V(T_k)$ $T_{k+1} =$ 和 $V(G)$ $V(T_k)$;

放 。

上述JP算法输出一棵树,称为JP树。

以下定理表明JP算法运行正确。

定理11.每个JP树都是最优树。

证明。设是根为 的 JP 树。电视

我们将通过归纳证明这是一电视棵最优树 $v(G)$ 。

假设添加到的第一条边是所有与 关联的边中权重最小的边$w(e) \leqslant w(e')$ 这是 e' ;换句话说,首先,我们证明某个最优树包含这条边。$e \notin E(T')$ T r r 。

这是

设 为最优树。我们可以假设 。显然， e' C有一个唯一的环 。设 为与 相连的另一条边。则r T' $T'+e$ C

$T'' = (T'+e) \quad e'$ $w(e) \leqslant w(e')$ 是 的生成树。此外,因为 G ,

$$w(T'') = w(T') + w(e) - w(e') \leqslant w(T')\text{。}$$

由于T'是最优树,因此T'' 也是最优树。此外， T''包含e。

让 $G^* = G/e$ r^* 以及由 收缩而产生的顶点。 这是

不难看出集合G^*之间存在一一对应关系

包含 的生成树的集合以及 G 的所有生成树的集合。这是

$T^* = T/e$ GT 。显示是最优树，设G* r* ，足以证明是一个 T*

具有根的最优树。

请注意 $\partial(T_{i+1}) = \partial(T^*_{我})$ $1 \leqslant i \leqslant n-2$ ，

我们可以看出，中权重最小的边也是 $\partial(T^*$ $\partial(T_{i+1})$

最低重量 $_{我})$。

因为最终的树是 JP 树 电视 G ，我们推断最终的树是 T*

有根的 JP 树。负責

因 为 w(G*) ≤ w(G)，根据归纳假设，是的最优树。 T*格*

回想一下，有一棵包含边的最优树，如前所示， 这是

我们得出结论，是的最优树。 树视 G

加权图中的最短路径

对于连通加权图,两个给定顶点(u, v)之间的距离d G (u, v)

在 是具有最小权重的-path的权重,写为S ⊂ V(G) d(u, S) = min {d(u, v) : v ∈ S} 。 。

为了 ，

对于给定的两个顶点和u0 v0 S ⊂ V(G)假设和 ∈ S u0 ， 如何寻找最短路径? （u0， v0）

P1 = u0···u′ (u0, u) V(G) S = S′ P = u0···u′v′ d (u0, u) u ∈ S。对于任何u0 S′来说,都是从 到 的

放 。 如果 最短路径 , 然后和u′∈S

是最短路径。因此,

$$d(u0, v') = d(u0, u') + w(u'v'),$$

和

$$d(u0, S') = 最小值_{u∈S,v∈S'} \{d(u0， u) + w(uv)\} 。$$

设$S_0 = \{u_0\}$。选择$u_1 \in S'_0$，这样

$$d(u_0, u_1) = d(u_0, S'_0),$$

$$d(u_0, S'_0) = \text{最小值}_{u \in S_0, v \in S'_0} \{d(u_0, u) + w(uv)\} = \text{最小值}_{v \in S'_0} \{w(u_0v)\}。$$

集合和$S_1 = \{u_0, u_1\}$ $P_1 = u_0u_1$。

假设和相应的最短路径是$S_k = \{u_0, u_1, ..., u_k\}$

P_1，P_2，…，峰。然后通过

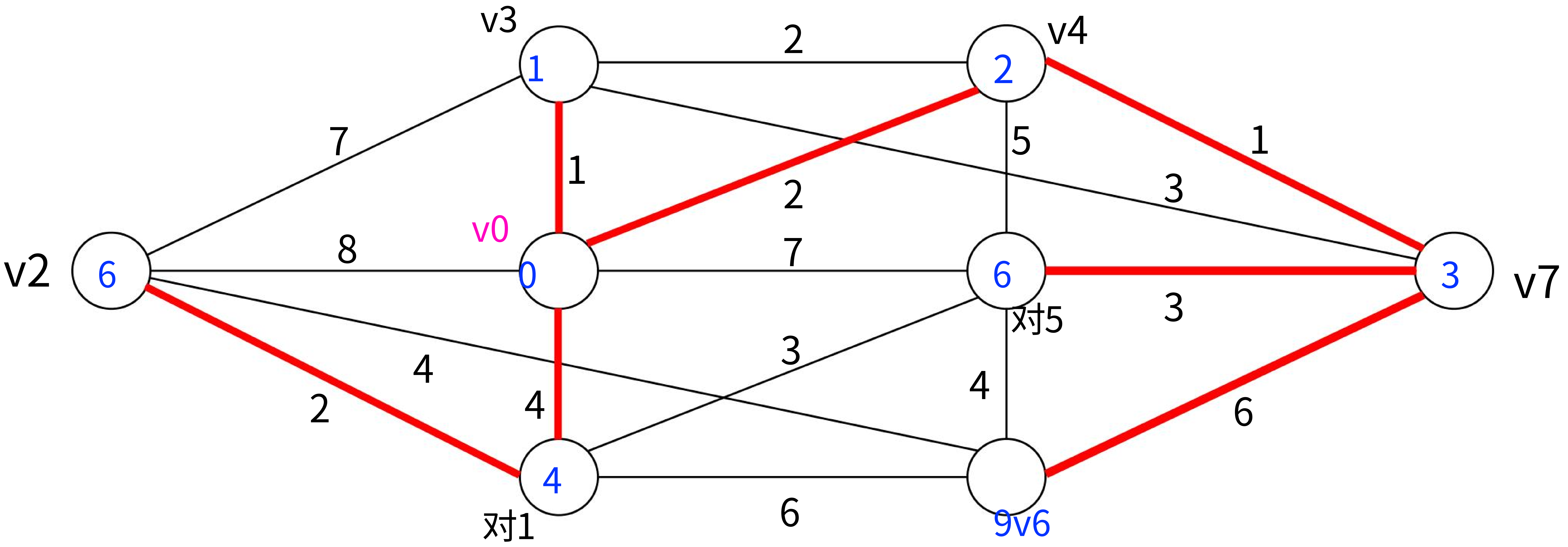
$$d(u_0, S'_k) = \text{最小值}_{u \in S_k, v \in S'_k} \{d(u_0, u) + w(uv)\},$$

我们可以选择$u_{k+1} \in S'_k$使得

$d(u0, uk+1) = d(u0, S'k)$。

设置 $Sk+1 = Sk \cup \{uk+1\}$ 。

假使,假设 $d(u0, uk+1) = d(u0, uj) + w(uj\ uk+1)$. 只是让 $Pk+1 = u0Pjujuk + 1$。



Dijkstra 算法

$\ell(u0) = 0$ $\ell(v) = \infty$ 1. 设 的， $v \neq u0$ 对于所有 设置 和 $\{\ell(v), \ell(u0) = w(u0, v)\}$ $S0 = \{u0\}$ 。$i = 0$。

2. 对于任何 ,用u∈Si代替 $v \in S'_{我}$ $\ell(v)$分钟 计算

$$\text{分钟}_{v \in S'_{我}} \{\ell(v)\}$$

并将达到最小值的顶点v表示为u 。设i+1

$$S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}。$$

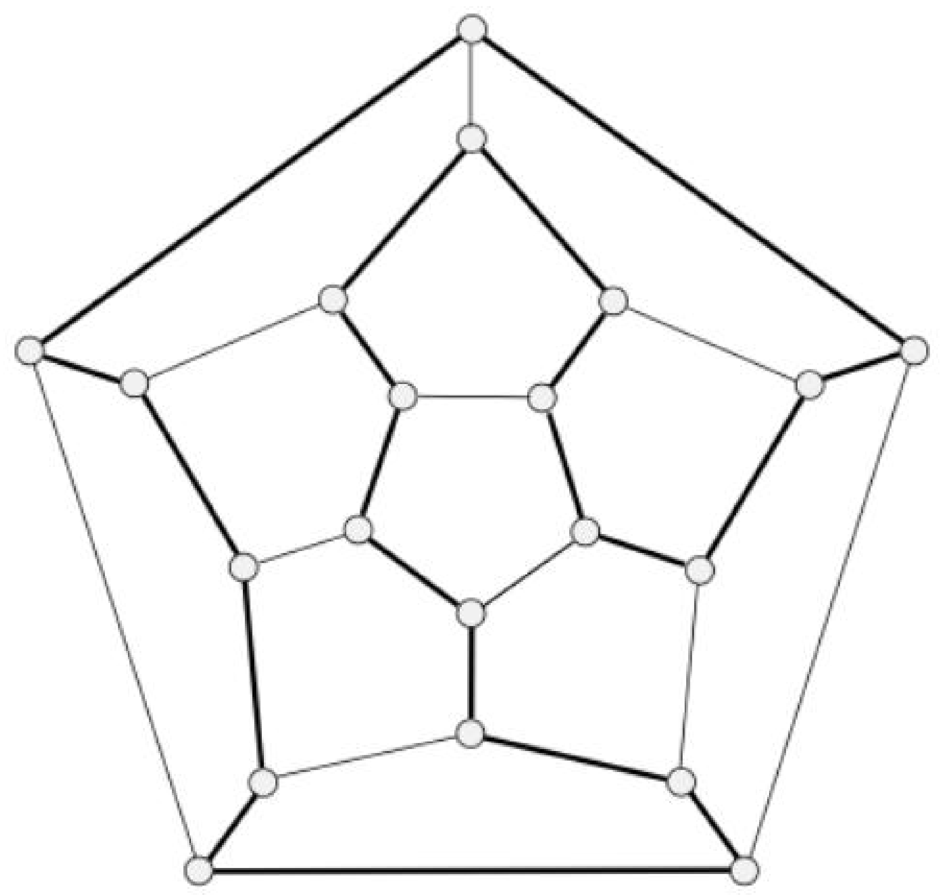
3. 当以下情况发生时,算法停止 我$= n - 1$ 。

如果 我$< n - 1$ ，然后我用 替换,转到步骤 2。我$+ 1$，

汉密尔顿问题

图中包含图的每个顶点的路径或循环称为图的汉密尔顿路径或汉密尔顿循环。

这种路径和循环以威廉·罗恩·汉密尔顿爵士的名字命名,他在 1856 年写给他的朋友格雷夫斯的一封信中描述了一种十二面体上的数学游戏,其中一个人将大头针插入任意五个连续的顶点,另一个人需要完成这样形成的路径以形成一个跨越循环。

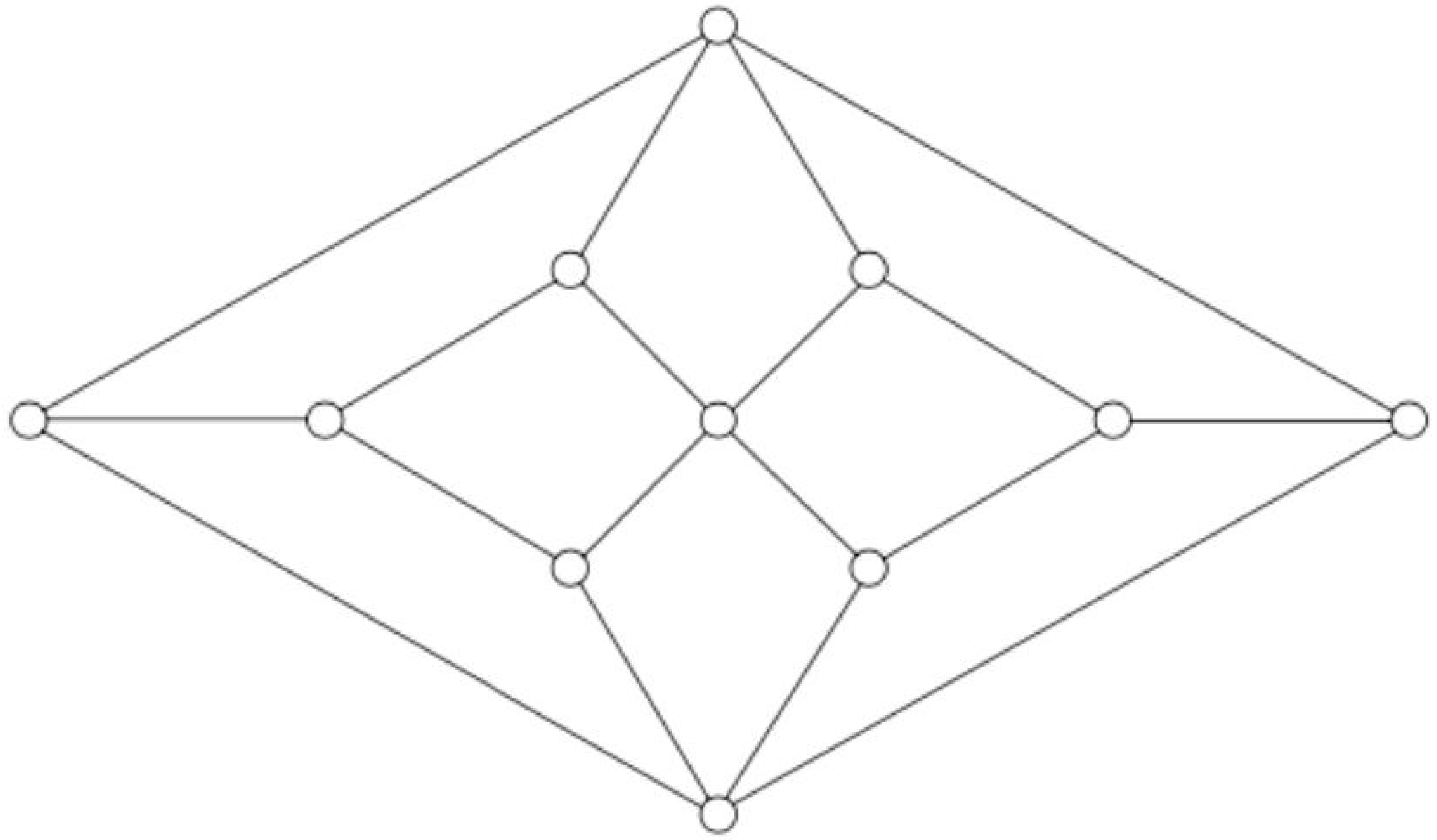


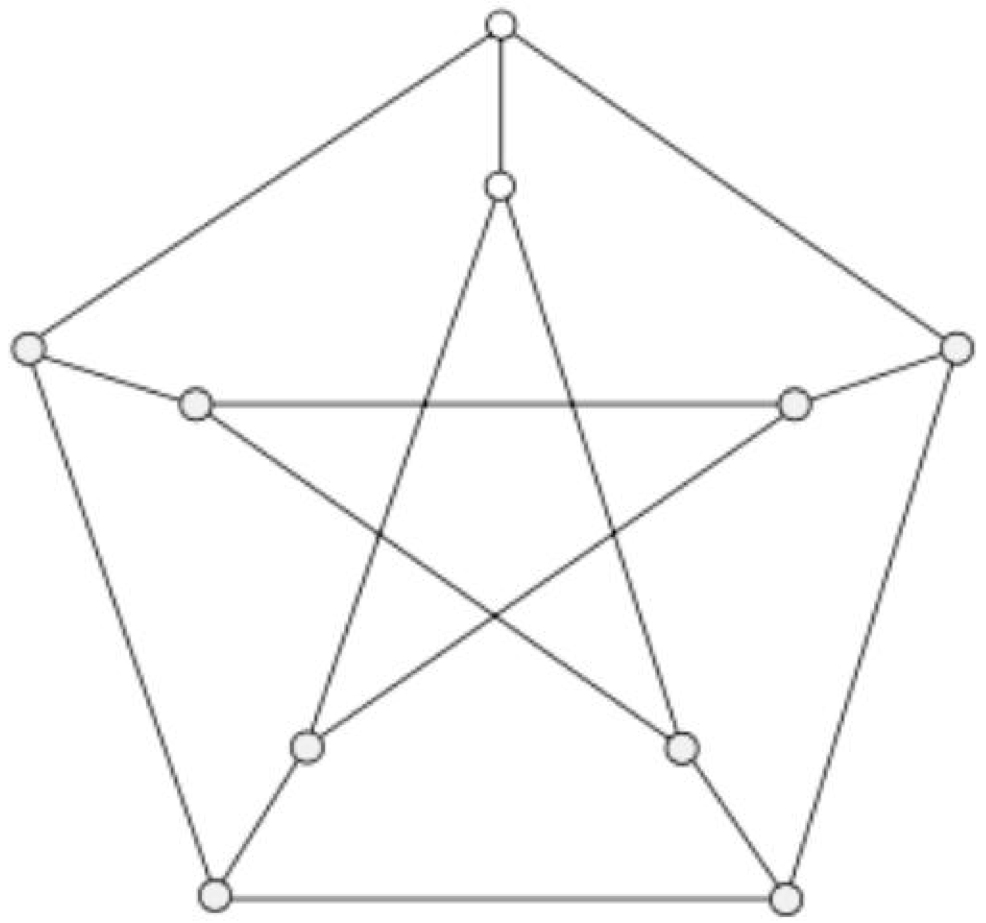
设是图G，$\omega(G-S)$ $S \subset V(G)$ 。

我们用 表示组件的数量 $G-S$。

定理 12.设G为有哈密顿回路的图. 则对任意$S \subset V(G)$, $\omega(G-S) \leqslant |S|$.

定理12是图为哈密顿图的必要条件。





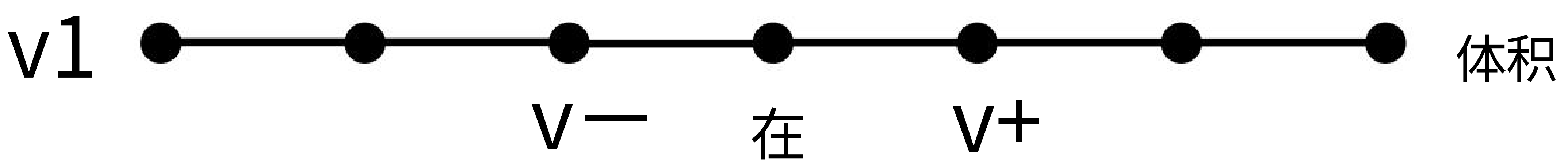
定理13（狄拉克）。设是阶简单图，若G G $n \geqslant 3$。$\delta(G) \geqslant n/2$ ，

则是哈密顿量。

证明。不难证明是连通的（实际上是2连通的）。 G

v+设 为P 的前身和后继 中的一条最长路径 设 。对于任何v−， G $v \in V(P)$ ，

在， 分别。

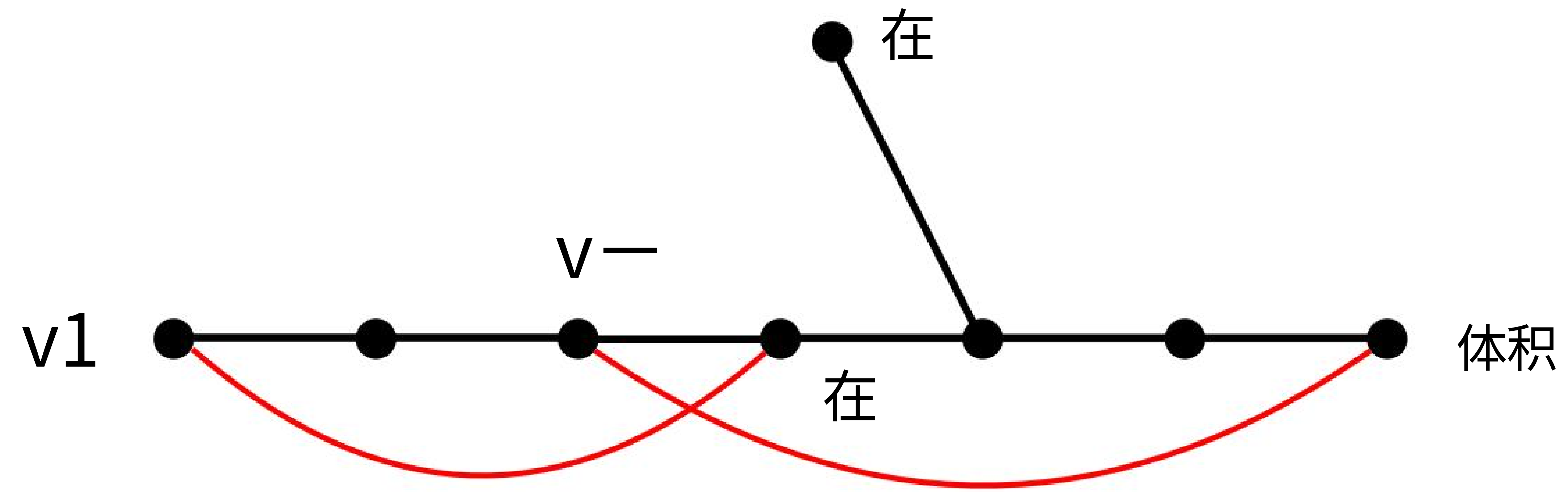


让

$$N^+_{磷}(v_\ell) = \{v^+ : v \in N_P(v_\ell)\}。$$

不难看出， $N^+_{磷}(v_\ell) \subseteq V(P)$ 。

如果 $NP(v1) \cap N^+_{磷}(v\ell) \neq \varnothing$,假设 $v \in NP(v1) \cap N^+_{磷}$ 体积,然后 $C = v1Pv^- v\ell \overleftarrow{P} vv1$ 必须是汉密尔顿循环,否则,



如果N那么因为 $P(v1) \cap N^+_{磷}(v\ell) = \varnothing$, $\delta(G) \geqslant n/2$,我们有

$$|P| \geqslant |NP(v1)| + |N^+_{磷}(v\ell)| + 1 \geqslant n/2 + n/2 + 1 = n + 1,$$

这是不可能的。

练习 3。

1. 使用 Dijkstra 算法,计算任意其他 的距离d(v 5, vi) 。