Graph Theory Theorems, Lemmas, and Corollaries

Week 1

Theorem 1

Let G be a graph of size m, then $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

中文解释

设 G 是一个边数为 m 的图，则所有顶点的度数之和为 $2m$。

Corollary 1

In any graph, the number of vertices of odd degree is even.

中文解释

在任何图中，奇数度顶点的数量是偶数。

Theorem 2

Let G be a graph with $\delta(G) \geq 2$. Then G contains a cycle.

中文解释

设 G 是一个最小度数不小于 2 的图，则 G 包含一个环。

Theorem 3

Any simple graph G with $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$ contains a quadrilateral.

中文解释

任何简单图 G 如果满足 $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$，则 G 包含一个四边形。

Proposition 1

Let $G[X, Y]$ be a bipartite graph without isolated vertices such that $d(x) \geq d(y)$ for all $xy \in E(G)$, where $x \in X$ and $y \in Y$. Then $|X| \leq |Y|$, with equality if and only if $d(x) = d(y)$ for all $xy \in E(G)$.

中文解释

设 $G[X, Y]$ 是一个没有孤立顶点的二分图，且对于所有 $xy \in E(G)$ 有 $d(x) \geq d(y)$，其中 $x \in X$，$y \in Y$。则 $|X| \leq |Y|$，且当且仅当对于所有 $xy \in E(G)$ 有 $d(x) = d(y)$ 时取等号。

Theorem 4

If T is a tree, then $e(T) = v(T) - 1$.

中文解释

如果 T 是一棵树，则 T 的边数等于顶点数减一。

Theorem 5

A graph is connected if and only if it has a spanning tree.

中文解释

图是连通的当且仅当它有一个生成树。

Theorem 6

A graph G is bipartite if and only if it contains no odd cycle.

中文解释

图 G 是二分图当且仅当它不包含奇数长度的环。

Proposition 2

In a tree, any two vertices are connected by exactly one path.

中文解释

在一棵树中，任意两个顶点之间恰好有一条路径。

Week 2

Theorem 7

Let T be a BFS-tree of a connected graph G， with root r. Then 1. For any $v \in V(G)$， $\ell(v) = d_T(v,r)$。 2. For any $uv \in E(G)$， $|\ell(u)-\ell(v)| \leq 1$。

中文解释

设 T 是连通图 G 的一个BFS树，根为 r。则： 1. 对于任何 $v \in V(G)$，$\ell(v) = d_T(v,r)$。 2. 对于任何 $uv \in E(G)$， $|\ell(u) - \ell(v)| \leq 1$。

Theorem 8

Let T be a BFS-tree of a connected graph G， with root r， and $\ell(v)$ be the level function by BFS algorithm. Then $\ell(v) = d_G(v,r)$ for all $v \in V(G)$.

中文解释

设 T 是连通图 G 的一个BFS树，根为 r，且 $\ell(v)$ 是BFS算法的层次函数。则对所有 $v \in V(G)$，有 $\ell(v) = d_G(v,r)$。

Theorem 9

Let T be a DFS-tree of a connected graph G. The root r of T is a cut vertex of G if and only if it has at least two children. Any other vertex v of

T is a cut vertex of G if and only if it has a child no descendant of which is adjacent to a proper ancestor of the vertex v.

中文解释

设 T 是连通图 G 的一个DFS树。T 的根 r 是 G 的割顶，当且仅当它至少有两个子节点。对于 T 的其他顶点 v，当且仅当它有一个子节点，其所有后代都不与 v 的适当祖先相邻时，v 才是 G 的割顶。

Theorem 10 (Cayley’s Formula)

The number of labelled trees on n vertices is n^{n-2}.

中文解释

有 n 个顶点的标记树的数量是 n^{n-2}。

Proposition 3

Let u and v be two vertices of G， with $f(u) < f(v)$。 1. If $uv \in E(G)$, then $\ell(v) < \ell(u)$。 2. u is an ancestor of v in T if and only if $\ell(v) < \ell(u)$。

中文解释

设 u 和 v 是图 G 的两个顶点，且 $f(u) < f(v)$。 1. 如果 $uv \in E(G)$，则 $\ell(v) < \ell(u)$。 2. u 是 T 中 v 的祖先，当且仅当 $\ell(v) < \ell(u)$。

Proposition 4

Let G be a graph and e an edge of G. Then $t(G) = t(G \setminus e) + t(G/e)$.

中文解释

设 G 是一个图，e 是 G 的一条边。则 $t(G) = t(G \setminus e) + t(G/e)$。

Week 3

Theorem 11

Every J-P tree is an optimal tree.

中文解释

每个J-P树都是最优树。

Theorem 12

Let G be a graph with a Hamilton cycle. Then for any $S \subseteq V(G)$，$\omega(G - S) \leq |S|$.

中文解释

设 G 是一个包含哈密顿环的图。则对于任意 $S \subseteq V(G)$，有 $\omega(G-S) \leq |S|$。

Theorem 13 (Dirac)

Let G be a simple graph of order $n \geq 3$. If $\delta(G) \geq n/2$， then G is Hamiltonian.

中文解释

设 G 是一个阶数为 $n \geq 3$ 的简单图。如果 $\delta(G) \geq n/2$，则 G 是哈密顿图。

Week 4

Theorem 14 (Ore's Theorem)

Let G be a simple graph of order n. If $\sigma_2(G) \geq n$， then G is Hamiltonian。 1. $\sigma_2(G) = \min\{d(u) + d(v) : uv \notin E(G)\}$。

中文解释

设 G 是一个阶数为 n 的简单图。如果 $\sigma_2(G) \geq n$，则 G 是哈密顿图。1. $\sigma_2(G) = \min\{d(u) + d(v) : uv \notin E(G)\}$。

Lemma 1

Let G be a simple graph and let u and v be nonadjacent vertices in G such that $d(u) + d(v) \geq n$. Then G is Hamiltonian if and only if $G + uv$ is Hamiltonian.

中文解释

设 G 是一个简单图，且 u 和 v 是图 G 中不相邻的顶点，满足 $d(u) + d(v) \geq n$。则 G 是哈密顿图当且仅当 $G + uv$ 是哈密顿图。

Lemma 2

The closure of a graph is well defined.

中文解释

图的闭包是良好定义的。

Theorem 15

A simple graph G is Hamiltonian if and only if its closure $\mathrm{cl}(G)$ is Hamiltonian.

中文解释

简单图 G 是哈密顿图当且仅当其闭包 $\mathrm{cl}(G)$ 是哈密顿图。

Lemma 3

Let G be a simple graph and let u and v be nonadjacent vertices in G such that $d(u) + d(v) \geq n - 1$. Then G has a Hamiltonian path if and only if $G + uv$ has a Hamiltonian path.

中文解释

设 G 是一个简单图，且 u 和 v 是图 G 中不相邻的顶点，满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$。则 G 有哈密顿路径当且仅当 $G + uv$ 有哈密顿路径。

Theorem 16 (Chvátal and Erdős's Theorem)

Let G be a simple graph of order at least 3. If $\alpha(G) \leq \kappa(G)$， then G is Hamiltonian。 1. $\alpha(G)$ is the independence number。 2. $\kappa(G)$ is the connectivity。

中文解释

设 G 是一个阶数至少为3的简单图。如果 $\alpha(G) \leq \kappa(G)$，则 G 是哈密顿图。 1. $\alpha(G)$ 是独立数。 2. $\kappa(G)$ 是连通度。

Week 5

Theorem 17

A graph G with at least three vertices is 2-connected if and only if any two vertices are connected by at least two internally disjoint paths.

中文解释

一个至少有三个顶点的图 G 是2-连通的，当且仅当任意两个顶点由至少两条内点不相交的路径连接。

Corollary 1

If G is 2-connected, then any two vertices of G lie on a common cycle.

中文解释

如果图 G 是2-连通的，则 G 的任意两个顶点都在一个公共的环上。

Theorem 18 (Brooks' Theorem)

Let G be a connected graph with $\Delta(G) = \Delta$. If G is neither an odd cycle nor a complete graph, then $\chi(G) \leq \Delta$.

中文解释

设 G 是一个连通图，且 $\Delta(G) = \Delta$。如果 G 既不是奇数环也不是完全图，则 $\chi(G) \leq \Delta$。

Proposition 6

Let G be a connected graph of order n. Then $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

中文解释

设 G 是一个阶数为 n 的连通图，则 $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$。

Theorem 19

If G is k-critical, then $\delta(G) \geq k - 1$.

中文解释

如果图 G 是 k-关键图，则 $\delta(G) \geq k - 1$。

Theorem 20

If G is k-critical, then G has no clique cut.

中文解释

如果图 G 是 k-关键图，则 G 没有团割集。

Corollary 2

If G is k-critical, then G has no cut vertices.

中文解释

如果图 G 是 k-关键图，则 G 没有割顶。

Proposition 7

Let G be a connected graph with clique number k， that is，the number of vertices of a maximum complete graph in G. Then $\chi(G) \geq k$.

中文解释

设 G 是一个团数为 k 的连通图，即 G 中最大的完全图的顶点数，则 $\chi(G) \geq k$。

Theorem 21

For any positive integer k，there is a triangle-free k-chromatic graph.

中文解释

对于任意正整数 k，存在一个无三角形的 k-色图。

Week 7

Theorem 21

If G is a bipartite graph with $\Delta(G) = \Delta$， then $\chi'(G) = \Delta$.

中文解释

如果 G 是一个二分图且最大度数为 Δ，则 $\chi'(G) = \Delta$。

Theorem 22 (Vizing's Theorem)

For any simple graph G with $\Delta(G) = \Delta$， $\chi'(G) \leq \Delta + 1$.

中文解释

对于任意简单图 G，如果最大度数为 Δ，则 $\chi'(G) \leq \Delta + 1$。

Lemma 4

Let G be a simple graph with $\Delta(G)=\Delta$， v a vertex of G， e an edge of G incident to v，and k an integer， $k\geq\Delta$。 Suppose that G has a k-edge-coloring c for which every neighbor of v in G has at least one available color. Then G is k-edge-colorable.

中文解释

设 G 是一个最大度数为 Δ 的简单图，v 是 G 的一个顶点，e 是 G 中与 v 相邻的边，且 k 是一个不小于 Δ 的整数。假设 G 有一个 k-边染色 c，其中 G 中 v 的每个邻居至少有一种可用颜色。则 G 是 k-边可染的。

Proposition 8

Let G be a connected graph with $\Delta(G)=\Delta$. Then $\chi'(G)\geq\Delta$.

中文解释

设 G 是一个最大度数为 Δ 的连通图。则 $\chi'(G)\geq\Delta$。

Week 8

Theorem 23 (Jordan Curve Theorem)

Any simple closed curve C in the plane partitions the rest of the plane into two disjoint arcwise-connected open sets.

中文解释

平面上的任何简单闭曲线 C 将平面的其余部分划分为两个不相交的弧连通开集。

Theorem 24

K_5 is nonplanar.

中文解释

K_5 不是平面图。

Theorem 25 (Kuratowski's Theorem)

A graph is planar if and only if it contains no subdivision of either K_5 or $K_{3,3}$.

中文解释

图是平面图当且仅当它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的任何细分。

Theorem 26 (Euler's Formula)

For a connected plane graph, $v(G) + f(G) - e(G) = 2$.

中文解释

对于连通平面图，顶点数与面数之和减去边数等于2。

Proposition 9

A graph G is planar if and only if every subdivision of G is planar.

中文解释

图 G 是平面图当且仅当 G 的每个细分都是平面图。

Proposition 10

If G is a plane graph of size m，then $\sum_{f \in F} d_G(f) = 2m$.

中文解释

如果 G 是一个大小为 m 的平面图，则所有面的度数之和为 $2m$。

Week 9

Theorem 27 (Kempe's Theorem)

Let G be a smallest counterexample to 4CC. Then G has no vertex of degree four.

中文解释

设 G 是四色问题的最小反例，则 G 中没有度数为4的顶点。

Theorem 28 (Heawood's Theorem)

Every loopless planar graph is 5-colorable.

中文解释

每个无自环的平面图是5-可着色的。

Proposition 11

Let G be a smallest counterexample to the 4CC. Then: 1. G is 5-critical; 2. G is a triangulation; 3. G has no vertex of degree less than four.

中文解释

设 G 是四色问题的最小反例，则： 1. G 是5-关键图； 2. G 是三角剖分图； 3. G 中没有度数小于4的顶点。

Corollary 12

Every loopless planar graph is 5-list-colorable.

中文解释

每个无自环的平面图是5-列表可着色的。

Corollary 13

Every loopless planar graph is 5-colorable.

中文解释

每个无自环的平面图是5-可着色的。

Week 10-11

Theorem 29 (Ramsey's Theorem)

For any two integers $p, q \geq 2$， the Ramsey number $R(p, q)$ is finite, and $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$.

中文解释

对于任意两个整数 $p, q \geq 2$，Ramsey数 $R(p, q)$ 是有限的，并且 $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$。

Theorem 30 (Erdős's Theorem, 1947)

For $p \geq 3$， $R(p, p) > 2^{p/2}$.

中文解释

对于 $p \geq 3$，Ramsey数 $R(p, p)$ 大于 $2^{p/2}$。

Theorem 31 (Erdős and Szekeres's Theorem, 1935)

$R(p+1, q+1) \leq \binom{p+q}{p}$.

中文解释

$R(p+1, q+1) \leq \binom{p+q}{p}$。

Theorem 32 (Graham and Rödl's Theorem, 1987)

$R(p+1, q+1) \leq \binom{p+q}{p} \log\log(p+q)$.

中文解释

$R(p+1,q+1) \le \binom{p+q}{p} \log\log(p+q)$。

Theorem 33 (Conlon's Theorem, 2009)

$R(p+1,p+1) \le p^{-\log p/\log\log p}\binom{2p}{p}$ for some constant c.

中文解释

对于某个常数 c，有 $R(p+1,p+1) \le p^{-\log p/\log\log p}\binom{2p}{p}$。

Theorem 34 (Sah's Theorem, 2023)

$R(p+1,p+1) \le e^{-c(\log p)^2}\binom{2p}{p}$ for some constant c.

中文解释

对于某个常数 c，有 $R(p+1,p+1) \le e^{-c(\log p)^2}\binom{2p}{p}$。

Theorem 35 (Campos, Griffiths, Morris, Sahasrabudhe, 2023)

$R(p,p) \le (4-\epsilon)^p$ for some constant ϵ and sufficiently large p.

中文解释

对于某个常数 ϵ 和足够大的 p，有 $R(p,p) \le (4-\epsilon)^p$。

Theorem 36 (General Form of Ramsey's Theorem)

For any two positive integers r, k and any $q_1, q_2, \ldots, q_k \ge r$，there is N such that for any $n \ge N$ and any k-colorings of $[n]^{(r)}$，there exists some i with q_i-set $S_i \subseteq [n]$ such that S_i are in color i.

中文解释

对于任意两个正整数 r, k 和任意 $q_1, q_2, \ldots, q_k \ge r$，存在一个 N，使得对于 $n \ge N$ 和任意 k-种颜色的着色，存在某个 q_i-集合 $S_i \subseteq [n]$ 中的元素都为颜色 i。

Theorem 37 (Schur's Theorem, 1916)

For any given integer k, there exists N, such that if $n \geq N$, then for any k-colorings of $[n]$, there exist $x, y, z \in [n]$ of the same color such that $x + y = z$.

中文解释

对于任意给定的整数 k，存在 N，使得如果 $n \geq N$，则对于 $[n]$ 的任意 k-种颜色的着色，存在 $x, y, z \in [n]$ 满足 $x + y = z$ 且颜色相同。

Theorem 38 (Van der Waerden's Theorem, 1928)

For any two positive integers ℓ, k, there exists a positive integer W such that for any k-colorings of $[W]$, there exists an arithmetic progression with ℓ terms of the same color.

中文解释

对于任意两个正整数 ℓ, k，存在一个正整数 W，使得对于 $[W]$ 的任意 k-种颜色的着色，存在一个长度为 ℓ 的等差数列，其所有项颜色相同。

Theorem 39 (Erdős-Szekeres Theorem, 1935)

Let m be a positive integer. Then there is a positive integer N such that for any N points lie in a plane so that no three points form a straight line, there have m points form a convex m-polygon.

中文解释

设 m 为正整数，则存在一个正整数 N，使得对于平面上任意 N 个点，如果没有任意三个点共线，则存在 m 个点组成一个凸 m-边形。

Theorem 40 (Chvátal's Theorem)

Let T_m be a tree of order m, and K_n a complete graph of order n, then $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1) + 1$.

中文解释

设 T_m 为阶数为 m 的树，K_n 为阶数为 n 的完全图，则 $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1)+1$。

Theorem 41 (Burr's Theorem)

If H is a connected graph，and $|H|$ is at least $s(G)$，then $R(G, H) \geq (\chi(G)-1)(|H|-1)+s(G)$.

中文解释

如果 H 是连通图，且 $|H|$ 至少为 $s(G)$，则 $R(G, H) \geq (\chi(G)-1)(|H|-1)+s(G)$。

Week 12

Theorem 42 (Turán's Theorem)

Let G be a simple graph which contains no K_k，where $k \geq 2$. Then $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$，with equality if and only if $G \cong T_{k-1,n}$.

中文解释

设 G 是一个不包含 K_k 的简单图，其中 $k \geq 2$。则 $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$，当且仅当 $G \cong T_{k-1,n}$ 时取等号。

Theorem 43 (Erdős' Theorem)

Let S be a set of diameter one in the plane. Then the number of pairs of points of S whose distance is greater than $\frac{1}{2}$ is at most $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$，where $n = |S| \geq 2$。Moreover，for each n，there is a set of n points of diameter one in which exactly $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ pairs of points are at distance greater than $\frac{1}{2}$。

中文解释

设 S 是平面上直径为一的点集。则 S 中距离大于 $\frac{1}{2}$ 的点对数最多为 $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$，其中 $n = |S| \geq 2$。此外，对于每个 n，存在一个由 n 个点组成的直

径为一的点集，使得恰好有 $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ 对点的距离大于 $\frac{1}{2}$。

Theorem 45 (Reiman's Theorem)

For all $n \geq 4$，$ex(n, C_4) < \frac{1}{4}n(1 + \sqrt{4n-3})$。

中文解释

对于所有 $n \geq 4$，有 $ex(n, C_4) < \frac{1}{4}n(1 + \sqrt{4n-3})$。

Theorem 46 (Füredi's Theorem)

For $q > 13$，$ex(q^2 + q + 1, C_4) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2$，and the equality holds for all prime power q。

中文解释

对于 $q > 13$，有 $ex(q^2 + q + 1, C_4) \leq \frac{1}{2}q(q+1)^2$，且对于所有素数次幂 q 取等号。

Week 13-14

Theorem 47

Let $\mathcal{F}$ be a decomposition of K_n into complete bipartite graphs. Then $k \geq n - 1$.

中文解释

设 $\mathcal{F}$ 是 K_n 分解成完全二分图的分解。则 $k \geq n - 1$。

Theorem 48 (The Friendship Theorem)

Let G be a simple graph of order n in which any two vertices have exactly one common neighbor. Then G has a vertex of degree $n - 1$.

中文解释

设 G 是一个阶为 n 的简单图，其中任意两个顶点有且只有一个公共邻居。则 G 至少有一个度为 $n-1$ 的顶点。

Theorem 49

Let A be the adjacency matrix of a graph G. The eigenvalues of A are the roots of the characteristic polynomial $P_G(x)$.

中文解释

设 A 是图 G 的邻接矩阵。A 的特征值是特征多项式 $P_G(x)$ 的根。

Lemma 1

A Moore graph is regular.

中文解释

Moore 图是正则图。