平面图的着色

1852 年,奥古斯都·德·摩根 (Augustus De Morgan) 在写给威廉·罗恩·汉密尔顿 (William Rowan Hamilton) 的一封信中,传达了弗朗西斯·格思里 (Francis Guthrie) 提出的以下四色问题。

> 我的一个学生（弗朗西斯的兄弟弗雷德里克·格思里)今天请我解释一下这个事实,而我当时并不知道这个事实是事实　而且到现在我也不知道。
> 他说,如果一个图形被任意划分,并且每个部分的颜色不同,以至于任何部分有共同边界线的图形都会被涂上不同的颜色　可能需要四种颜色,但不能更多　以下是需要四种颜色的情况。疑问,难道不能发明五种或更多颜色的必要性吗……

这个推测被称为四色猜想（4CC）。

为了将四色问题转化为图论语言,我们需要平面图面着色的概念。k

平面钾图的A面着色是对其面的分配颜色。

如果没有两个相邻面被分配相同的颜色,则着色是正确的。kk

如果平面图具有适当的 -面着色,则该图是 -面可着色的。

猜想 1 (4CC,面版本)。每个没有切边的平面图都是 4 面可着色的。

猜想2 （4CC,顶点版本）。

每个无环平面图都是四色的。

1977 年,四色猜想由阿佩尔 (Appel) 和哈肯 (Haken) 验证。

如果4CC为假,则存在一个非 4 色平面图。 G

选择尽可能小的这样的 G $v(G) + e(G)$

我们调用4CC的最小反例。 G

命题 11.设是4CC 的最小反例。则 G

(1)G 为 5-关键;

(2)G 是一个三角剖分。

(3)没有小于四度的顶点。 G

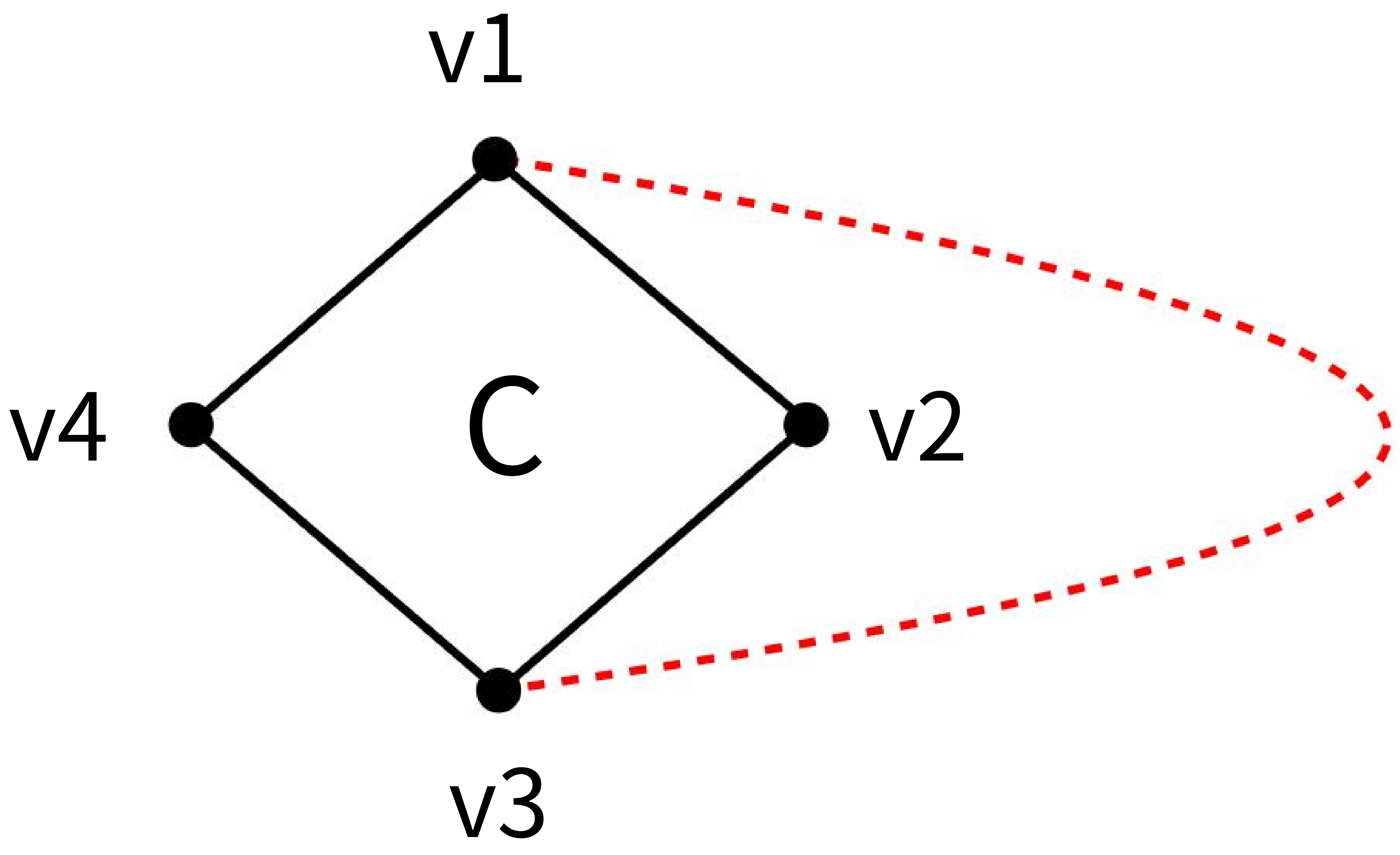
证明。容易看出 (1)和 (3)都成立。

(2)为了看出是三角剖分,假设它有一个面,其边界为C G

是长度大于三的循环。

因为是平面的 G，所以必须存在两个顶点和 坐标

不相邻 G。



将和确定为单个顶点所获得的图是xy G/{x, y} G 和

顶点数少于的平面图有 4 种着色。 通过分 ，并且边数相同，

配 c (z)得出 的着色 C G C

颜色，然后是xy的 4 着色 G，矛盾。

定理 27 (Kempe)。设是 4CC 的最小反例。则G G

没有四度顶点。

证明。假设是四度顶点，并让在G − v G G ， {V1， V2， V3， V4}

是 的 4-着色；由于 是 5-临界的，所以存在这样的着色。

因为不是 4 色的，所以必须与每种颜色的顶点相邻。G 在

因此，我们可以假设按顺时针顺序排列的邻居为1 ⩽ i ⩽ 4。 在 在

是 v1、 v2、 v3，和v4 ，其中对于vi ∈ Vi

让 Gij = G[Vi ∪ Vj] . 则和属于我们的同一个分量 . vj Gij如果不是，则考虑包含 的分量 . vi 你

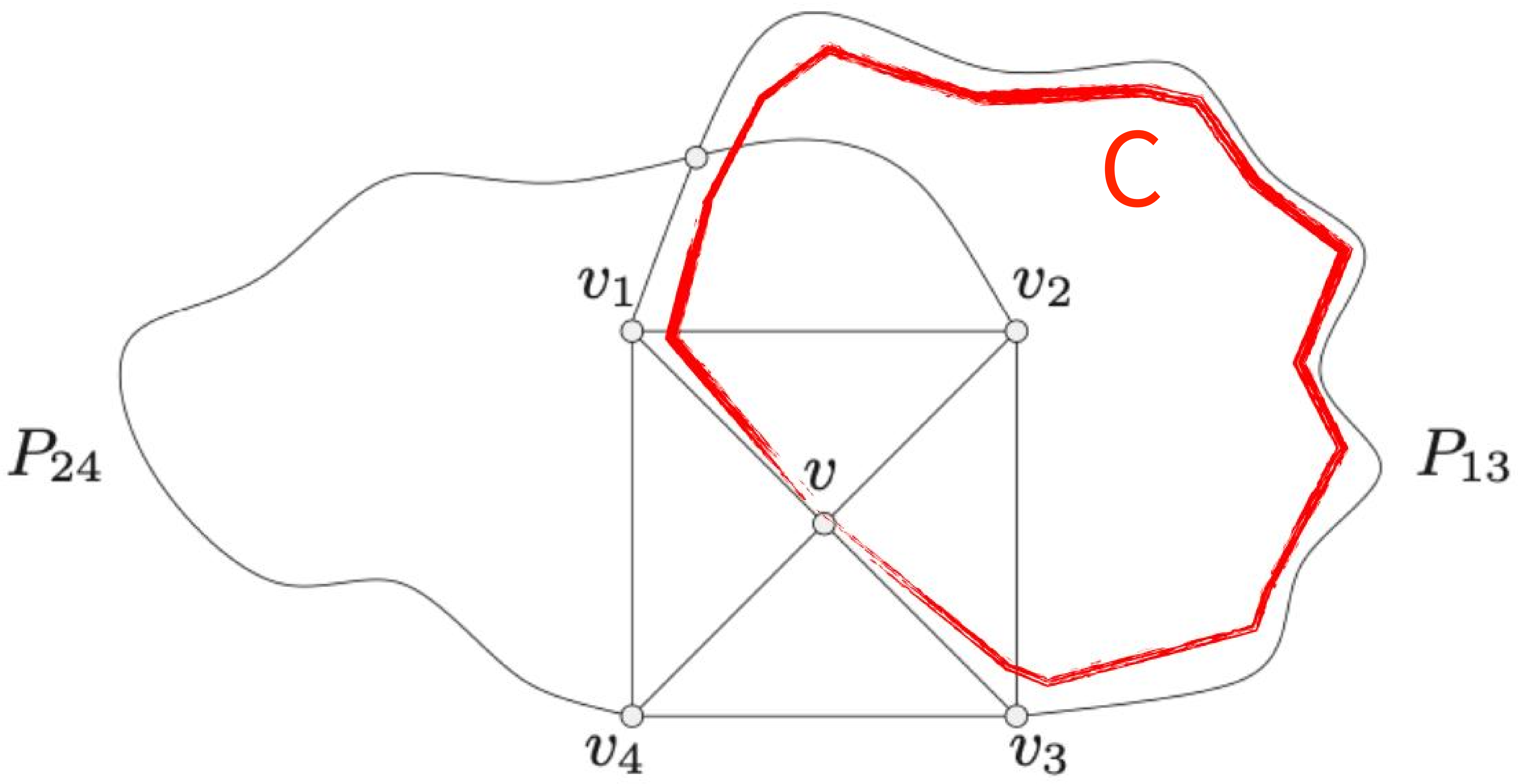
通过交换此组件中的颜色和，我们获得了一个新的我 4-杰

着色，其中只有三种颜色（除 外）被分配给G G − v 我

的邻居。 在 这意味着它是四色的，一个矛盾的。

因此,和确实属于的同一个组成部分。设是vi vj (vi , vj) 你 喝

-path 并让表示循环如下所示: 你 C vv1P13v3v



因为分离和 C v2 v4 , 根据乔丹曲线定理

路径在某个点相交。P24 C 由于是平面图,因此该点必须是顶点。但这是不可能的,因为P24 的顶点 有颜色 2 C

和 4,而 的任何顶点都不具有这两种颜色。

Kempe (1879) 对4CC的错误证明

假设有一个五度顶点，G 在 $N(v) = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$ 。

通过最小化 G ，图有 4 种着色 G − v子 {V1， V2， V3， V4}。

Kempe 的目标是找到这样一种 4 着色方法，其中最多有三种颜色被分配给 的邻居；然后顶点可以用G之一进行着色 在 在

其余颜色，从而得到 4 种着色。

因为不是 4 色G的，所以必须与 1、2、3、4 四个颜色中的每个顶点相邻。

因此，我们可以假设的邻居按顺时针方向围绕并且并且v5∈V2 在

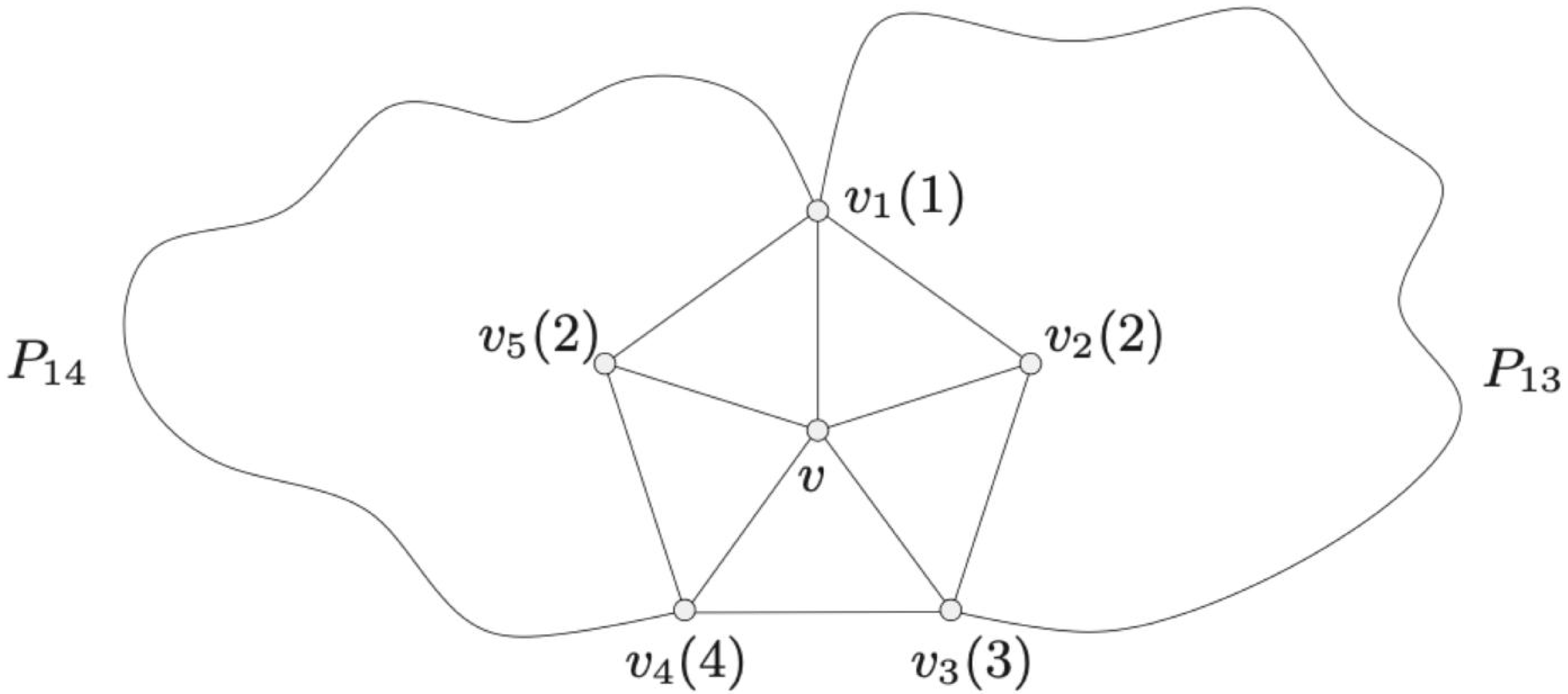
v是 v1、 v2、 v3、 v4， v5，中$v_i \in V_i$ $1 \leqslant i \leqslant 4$，其 。

让 $G_{ij} = G[V_i \cup V_j]$ 。

我们可以假设和属于的同一组成部分，否则颜色可能会 v3 G13，然后

含 的组件，属于 v1 v4 G13 G14 的同一组件，分别切换至包 v1 G14 ，

给 的邻居。从而产生 4 着色，其中仅将三种颜色分配 v1 在



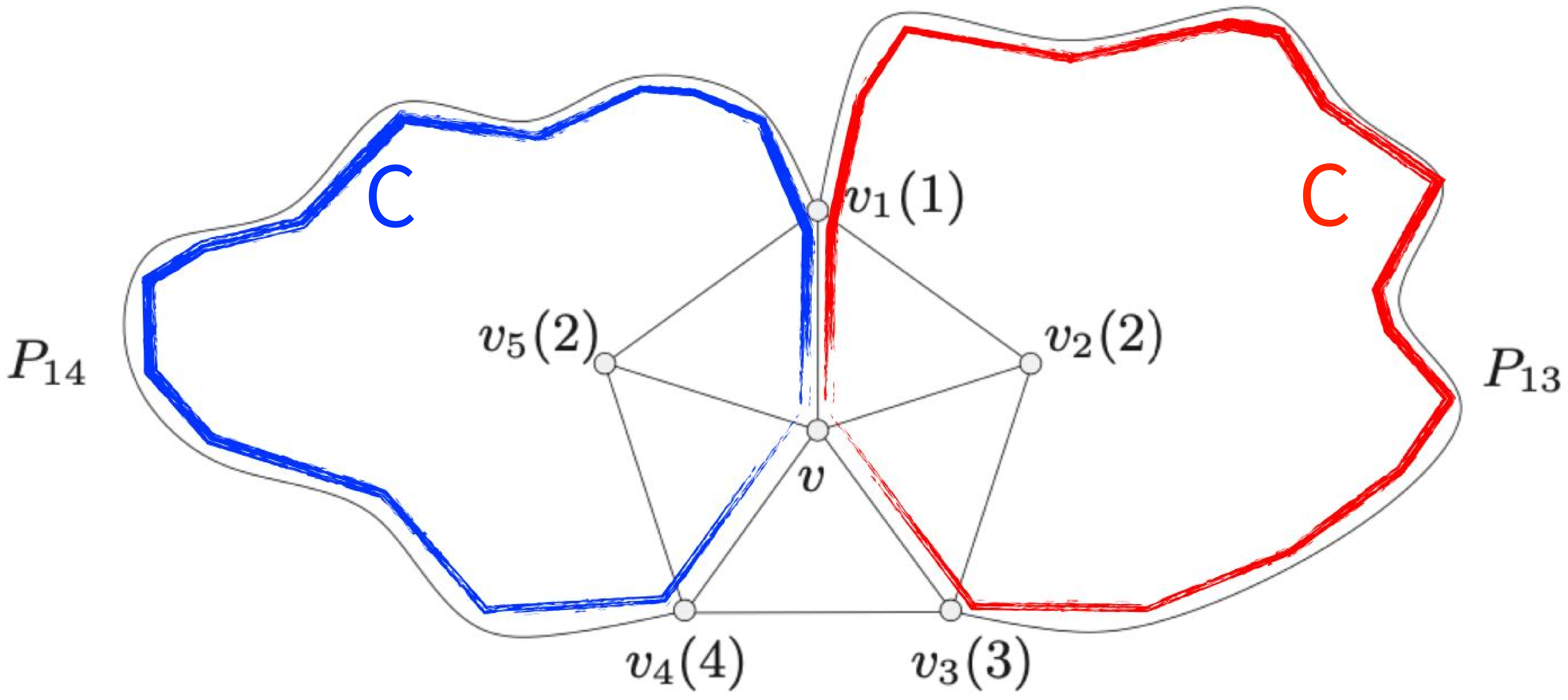
让成为 P13和 -path 中的 -path 中的 (v1, v3) G13 P14 A(v1、 v4) G14。

该环将顶点和分开;因此和属于 v4 v2 v2 分算机模型 C' = vv1P13v3v v4

的不同组成部分 G24。

类似地,循环分离, v3 v5 C' = vv1P14v4v ,所以属于v3 v5

的不同组成部分 G23。

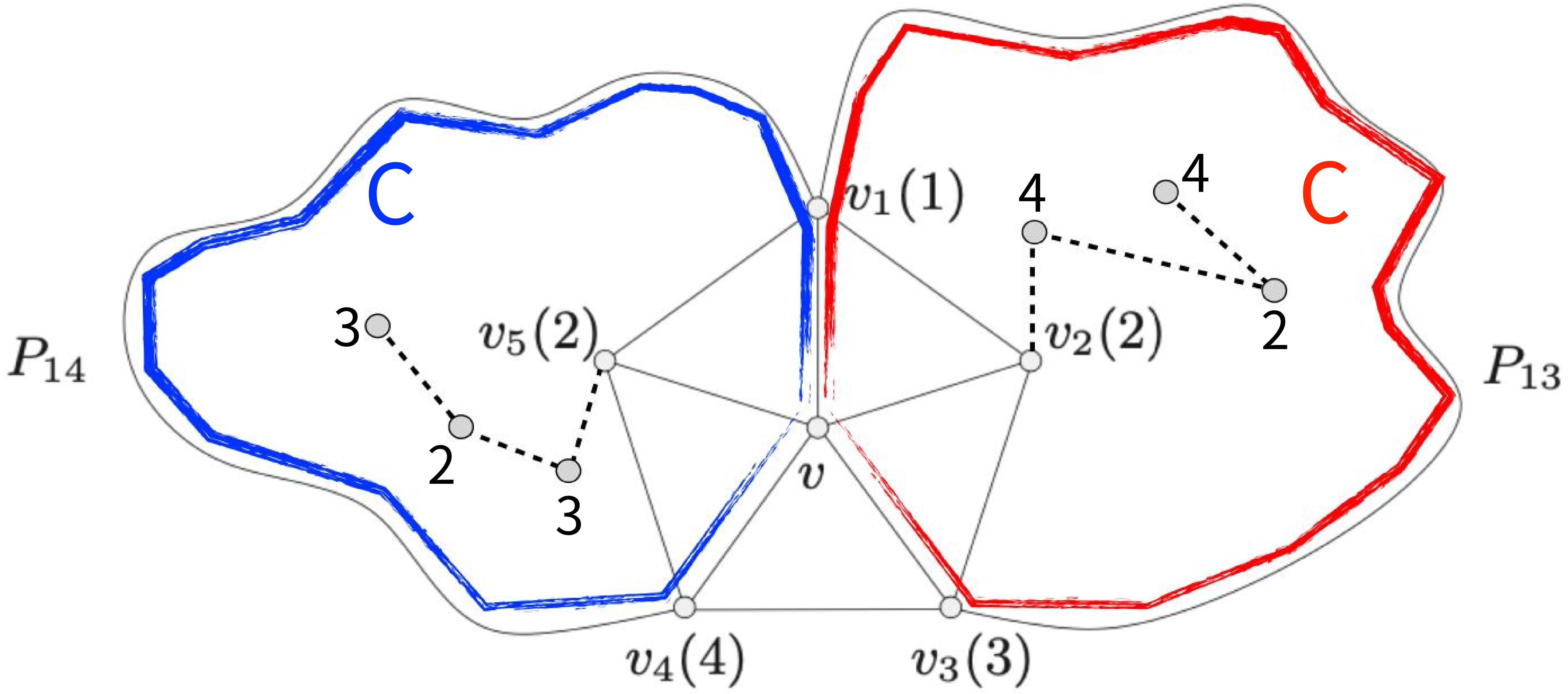


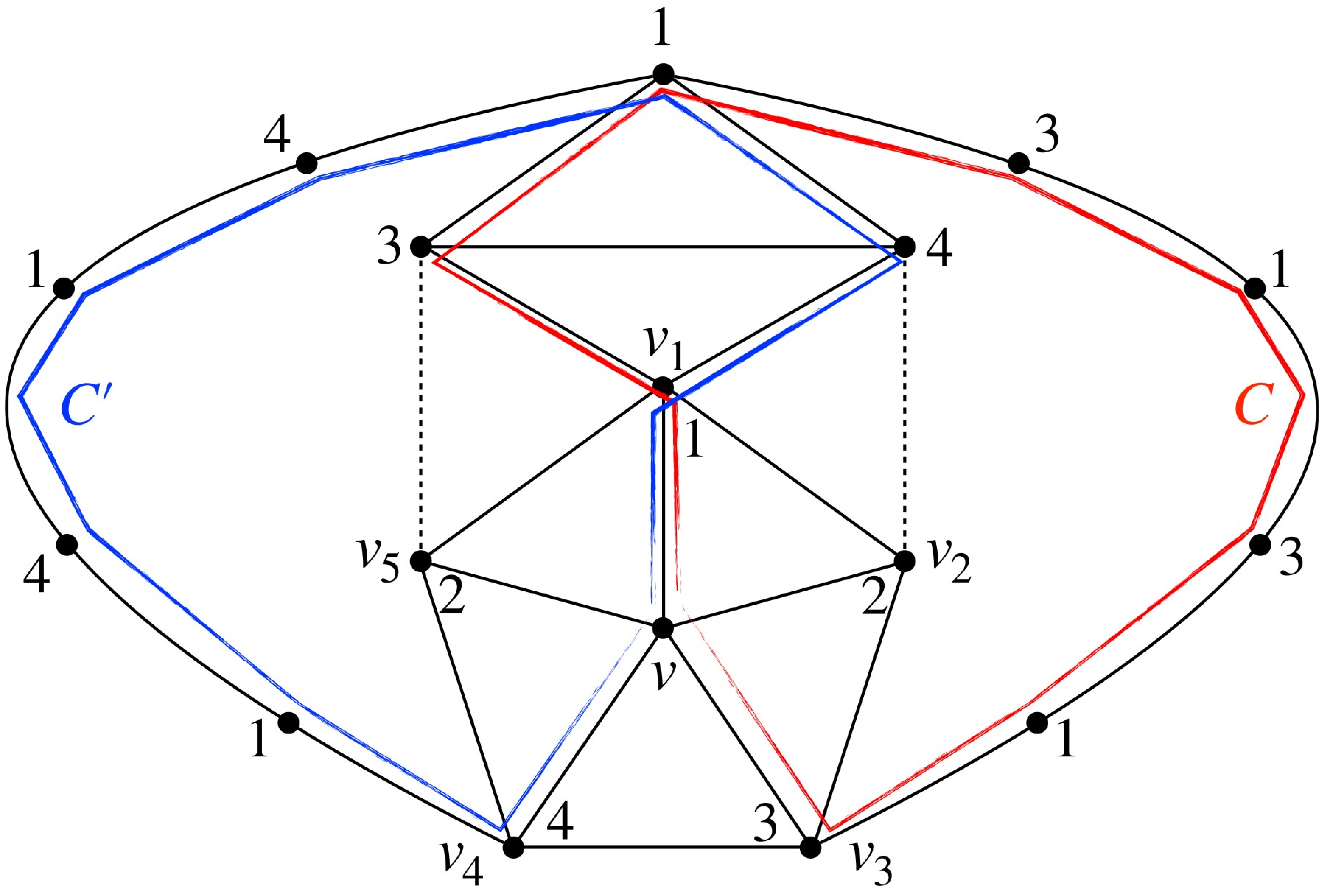
根据这些观察,肯普认为,包含的G24分量中的颜色 2 和 4,以及v2分量中的颜色 2 和 3

G23G 包含 ,可以互换以产生v5中的 4 着色,其中只有三种颜色 1､3 和 4 被分配给 的邻居。在G上

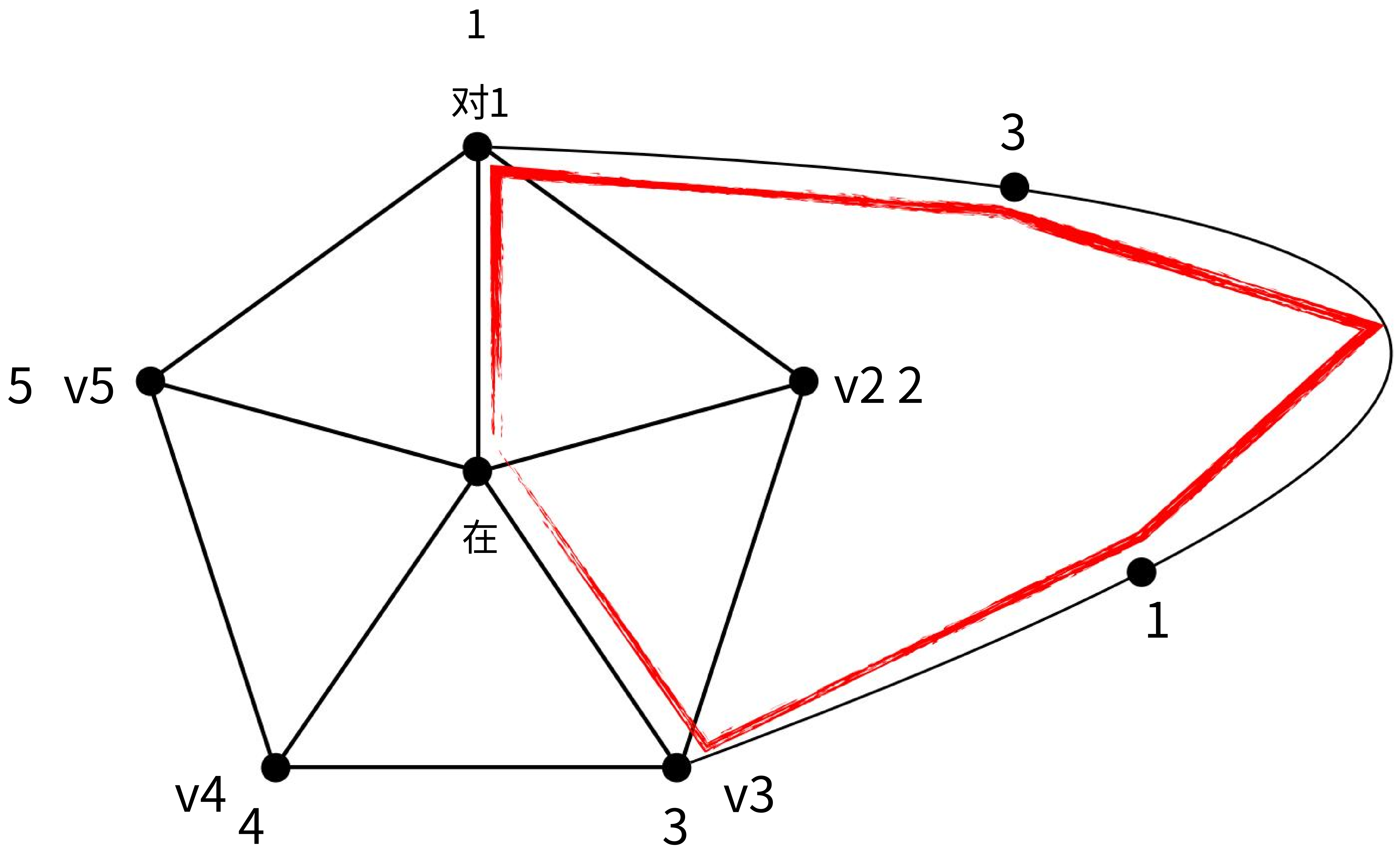
在

将颜色 2 分配给 在 , 然后就可以得到 4 种着色。




1
4
3
3
4
1
1
v_1
C'
C
1
v_5
v_2
4
3
2
2
v
1
1
4
3
v_4
v_3

定理 28 (Heawood)。每个无环平面图都是 5 色的。



列出平面图的着色

Thomassen (1994) 给出了平面图五色定理的另一种证明,非常优雅。要理解这一点,我们需要以下概念。

近三角剖分是所有内面都是度数为 3 的平面图。

定理 28 (Thomassen)。设是近三角剖分,其外表面为C G由环 界定,设和 是 的连续顶点。假设xy L : V 2是将颜色列表分配给顶点,使得: |L(x)| = |L(y)| = 1 (i)的 C

G

, 其中v ∈ L(x) ≠ L(y),

(二)|L(v)| ⩾ 3 对于所 V(C) {x, y},

(三)|L(v)| ⩾ 5 对全部有v ∈ V(G) V(C) 。

那么就是G L colorable。

如果v(G) > 3 v(G) v(G) = 3证明。通过归纳，然后，语句是定

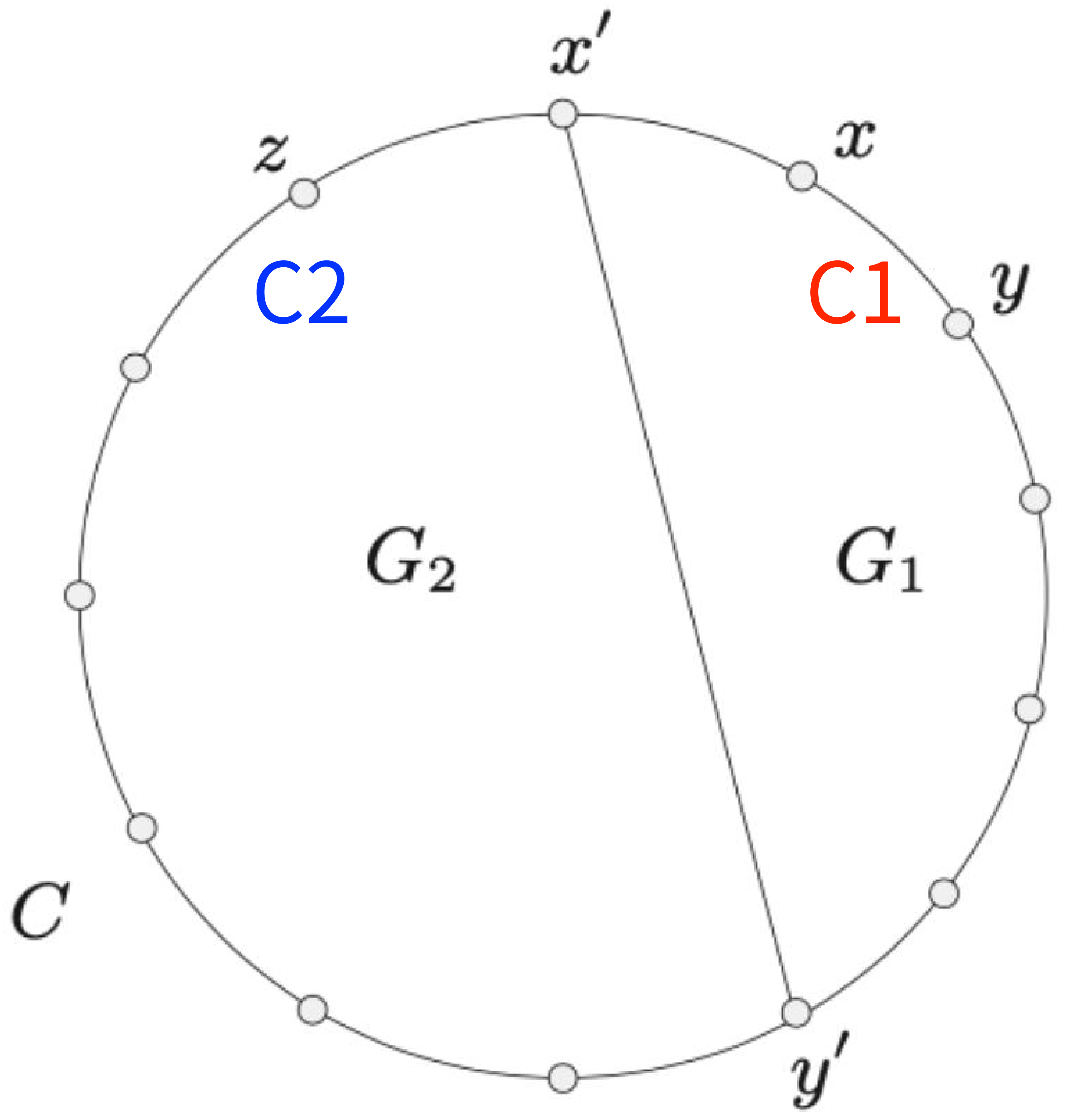
微不足道。所以我们可以假设 。

设和是上的直接前驱。y′C首先考虑在除和之外还有一个邻居的情况

X 碳

X 西泽 。

碳2 = x′zCy′x′



C1 = x′xCy′x′

G2：

近三角测量C2

及其内部组成。

G1：

近三角测量C1

与其内部组成。

设限制为L1通过归纳,有 -着色 . c1 L1 左室(G1) 。

G1

现在让L成为2(x′)={c1(x′)} L2(y′)={c1(y′)}定义的函数 2 上(G2)

大号 , ,和 L2(v)=L(v) v ∈ V(G2) 为了 {x′ , y′}。

法（和 分别充当 和 的角色），有 通过归纳 x′ y′ x y

是 的L2个 -着色。c2 G2

根据定义 L2着色并将相同的颜色分配给和 c2 c1 X

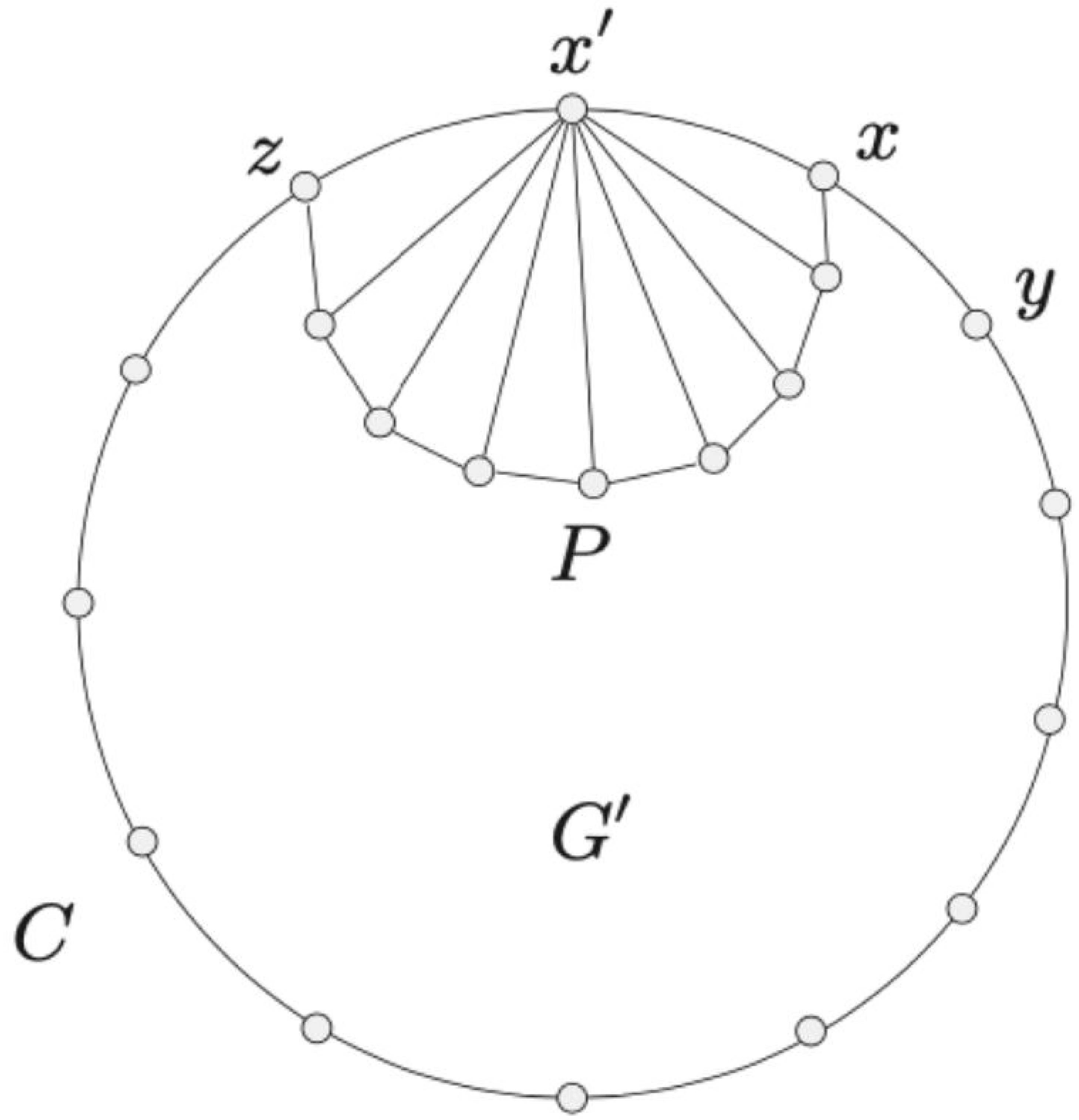
和，和 的两个共同顶点 G1 G2 。

因此,对于v ∈ V(G2) V(G1),定义函数为 c c(v) = c1(v) v ∈ V(G1) ，和 c(v) = c2(v)

其中L是 的一个 -着色。 G

假设的邻居位于路径xPz上 x' 内部与C不相交

，如下所示。



在这种情况下，是一个近三角剖分，其外表面有界 $G' = G - x'$

通过周期 $C' = xCzPx$ 。

设和为两种不同的颜色 α $L(x')$ $L(x)$。

考虑上定义的函数 L' $V(G')$

其中， $v \in V(P)$ $\{x,z\}$， $L'(v)=L(v)$ $\{\alpha, \beta\}$,否则$L'(v) = L(v)$。

根据归纳， G'有一个L'-着色c'。

由于其中一种颜色和不同于,通过分配该颜色c' c G a b $c'(z)$

至 x' ,着色扩展为的着色。 大号

推论12.每个无环平面图都是5列表可着色的。

推论13.每个无环平面图都是5色可色的。

练习 9。

1. 证明任何哈密顿平面图都是4面可着色的。