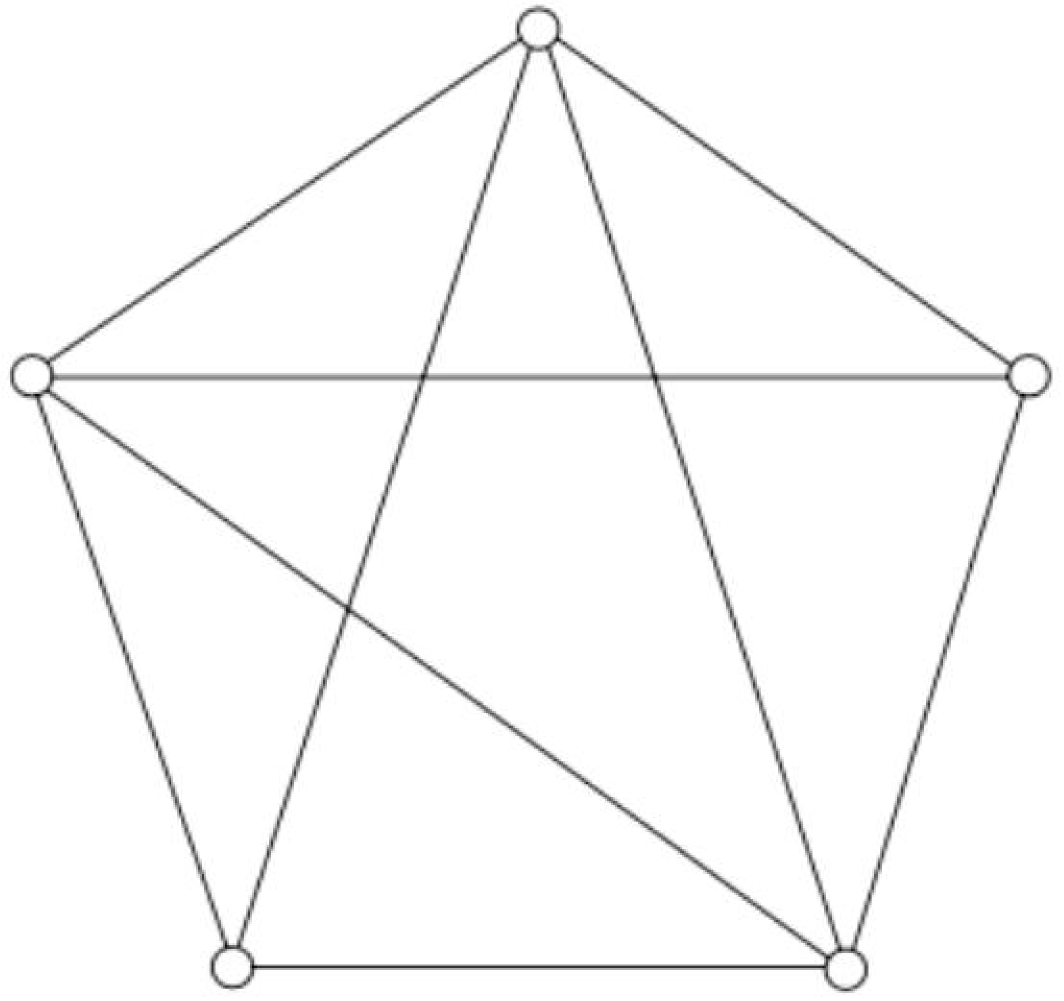
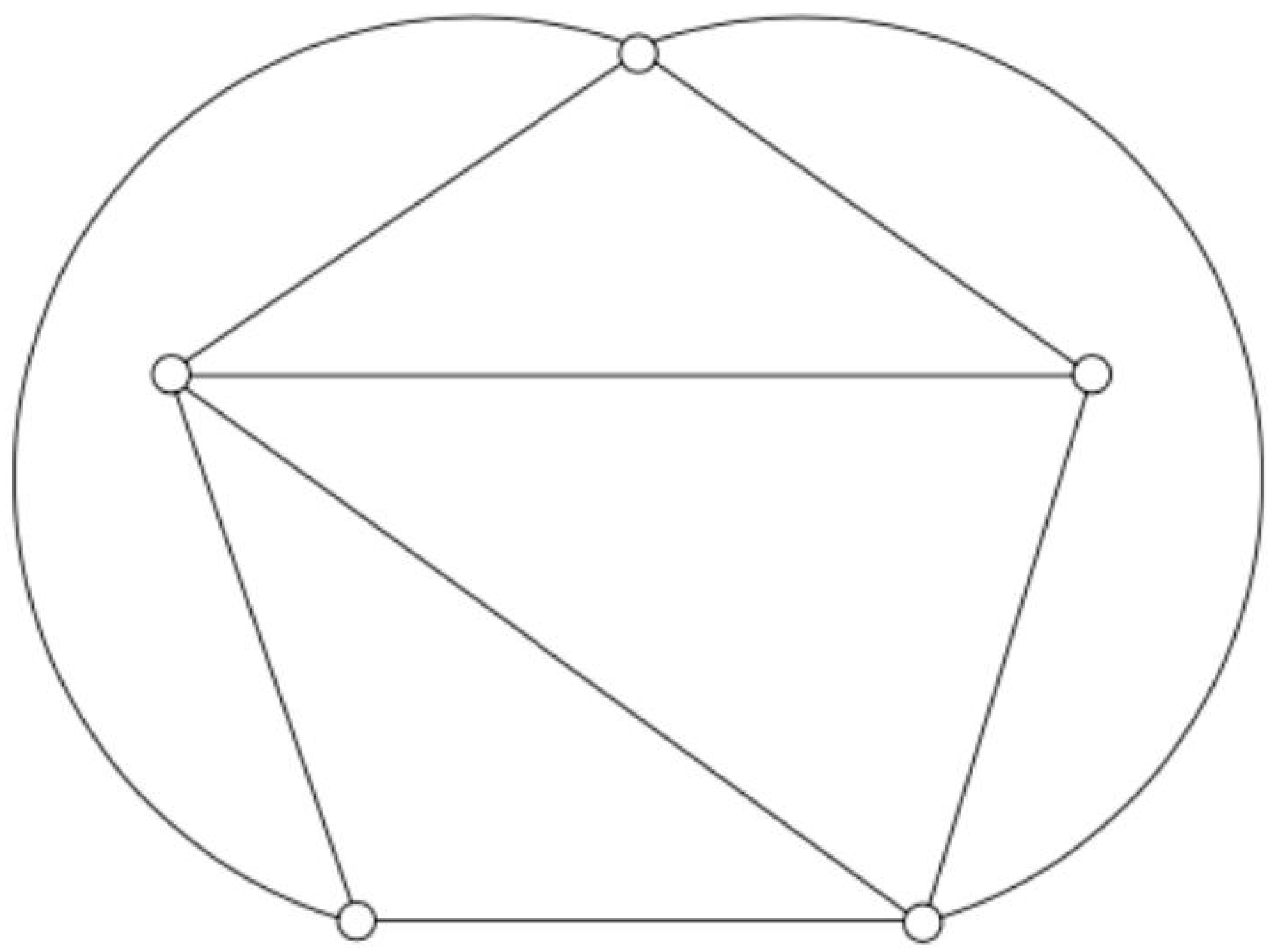
# 平面图

如果一个图能够被画在平面上,使得它的边只在端点相交,那么这个图就被称作可嵌入平面,或者是平面的（可平面的）。
这样的绘制称为图的平面嵌入。





5　e平面图K　.

K的平面嵌入　。5　e

曲线是指封闭单位线段的连续图像。
闭合曲线是圆的连续图像。
如果曲线或闭合曲线不自相交（换句话说,如果映射是一对一的）,则它是简单的。

由于平面图中的环是简单的闭曲线,因此此类曲线的性质在平面图的研究中发挥了作用。

如果平面的子集中的任意两点可以通过一条完全位于子集内的曲线连接,则该子集是弧连通的。

我们需要的拓扑学基本结果是若尔当曲线定理。

定理23(Jordan).平面上任何简单的闭曲线都将平面的其余部分分割成两个不相交的弧连通开集。

Machine Translated by Google

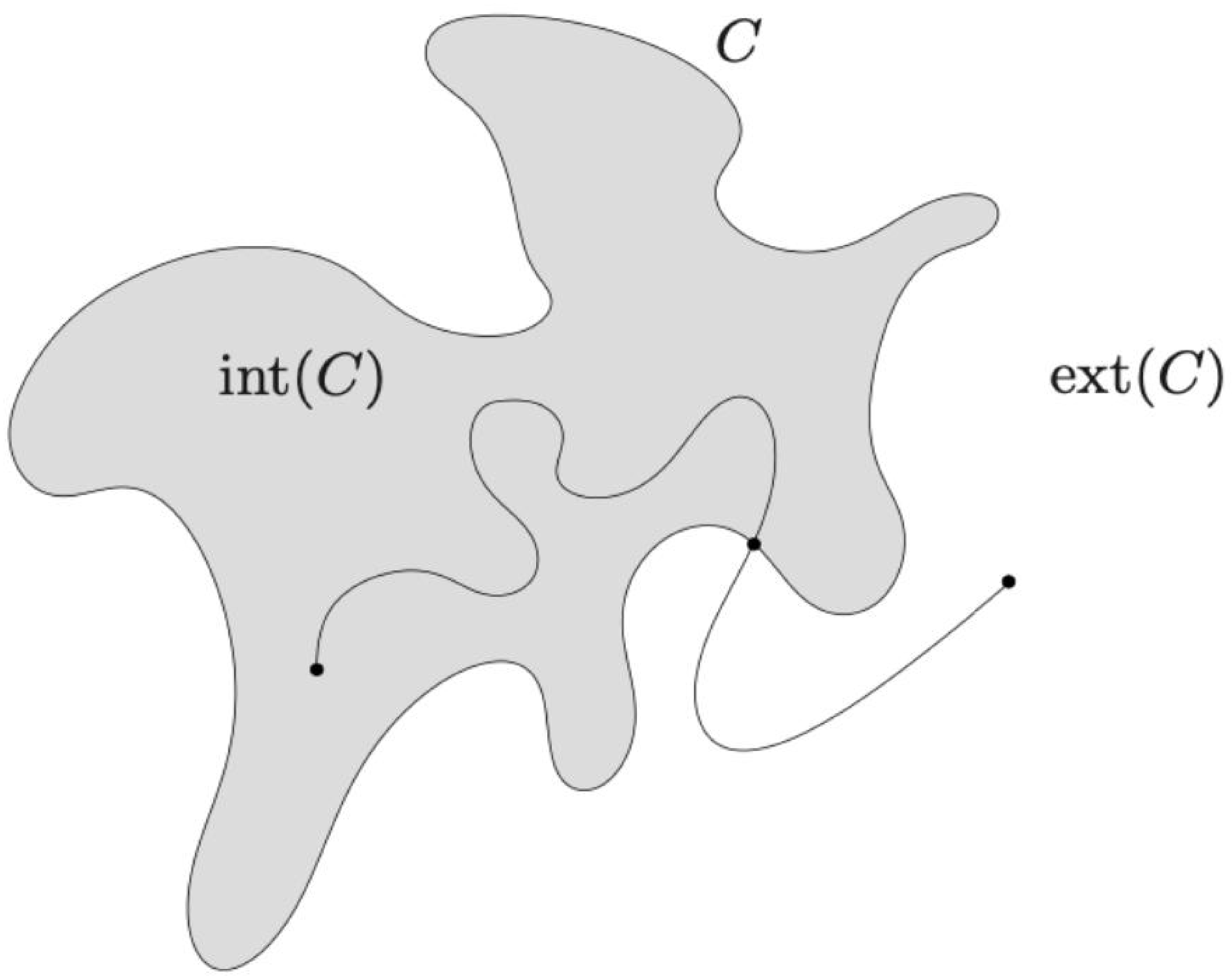
简单闭曲线将平面分割成的两个开集是 C

C，int (C) 称为内部和外部，用 Int(C) 表示，它们 分机(C)，

以及它们的闭包分别为 和 （）。int (C) 扩展(C) Int(C) ∩ Ext (C) = C

Jordan 曲线定理表明，连接ext(C)点的每条弧 到

一个点至少在一点相交。 C



## 定理24. K是非平面的5

证明。设是K5 G的平面嵌入 G ，顶点为v1、 v2、 v3、 v4、 v5 。

因为是完整的，所以它的任意两个顶点都有一条边连接。

特别是周期 向量表 是平面上的一条简单闭曲线，且int(C) ext(C)

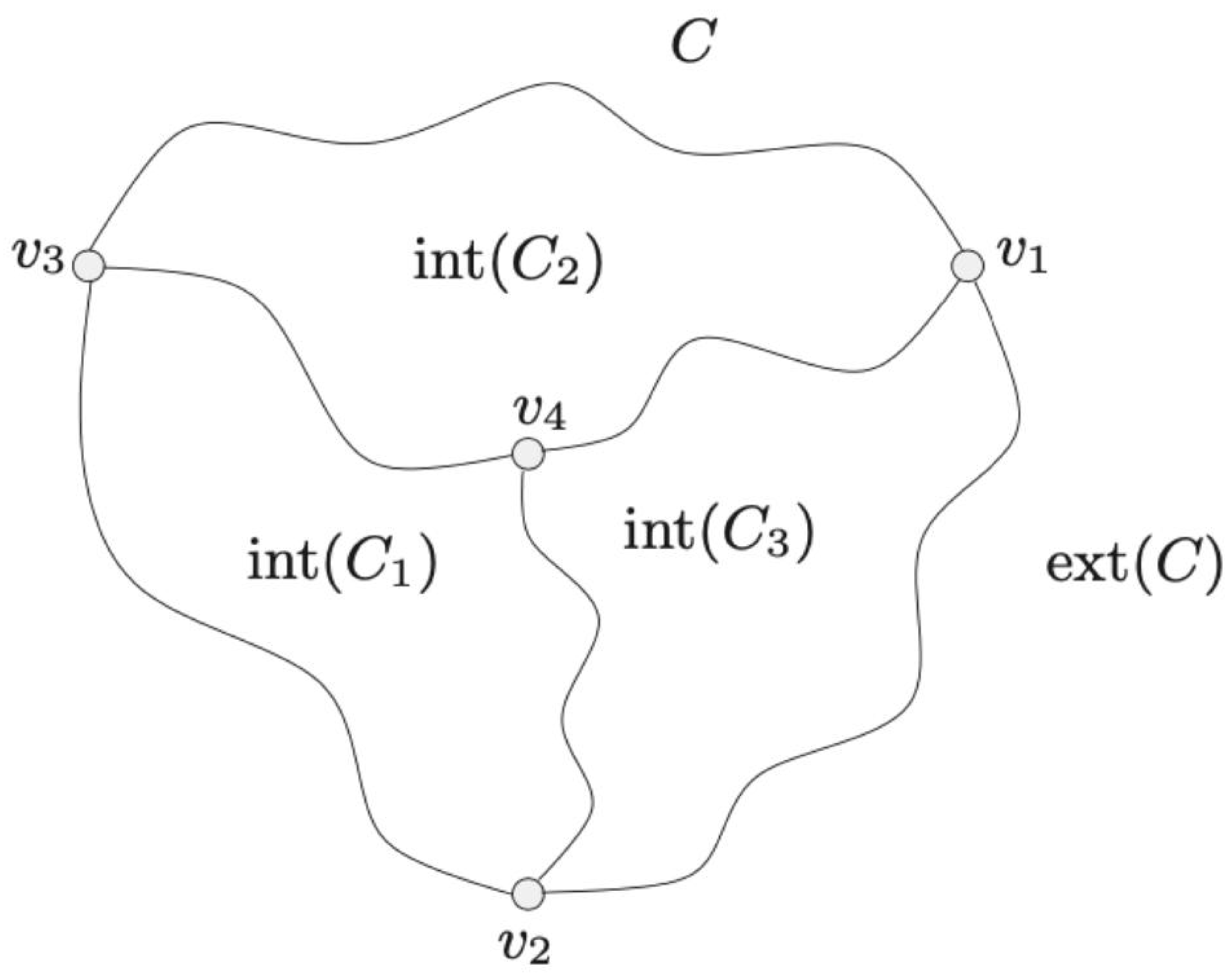
顶点必须位于 或 内 v4 。

不失一般性，我们可以假设 。那么边也是如此（除了它们的末端） v4∈int （C）

v3v4中 部位于v1v4, v2v4, int(C)全， v1、 v2、 v3

C1 = v2v3v4 C2 = v3v1v4令vi ∈ ，和 C3 = v1v2v4。

观察 ext(Ci ) i = 1,2,3。




vi v5 ∈ E(G) G 并且是平面图,由定理23可知,因为v5∈ext ( Ci ) i =1,2,3,所以v5∈ext (C)

那也是。因此,但现在边缘v4v5 G 。

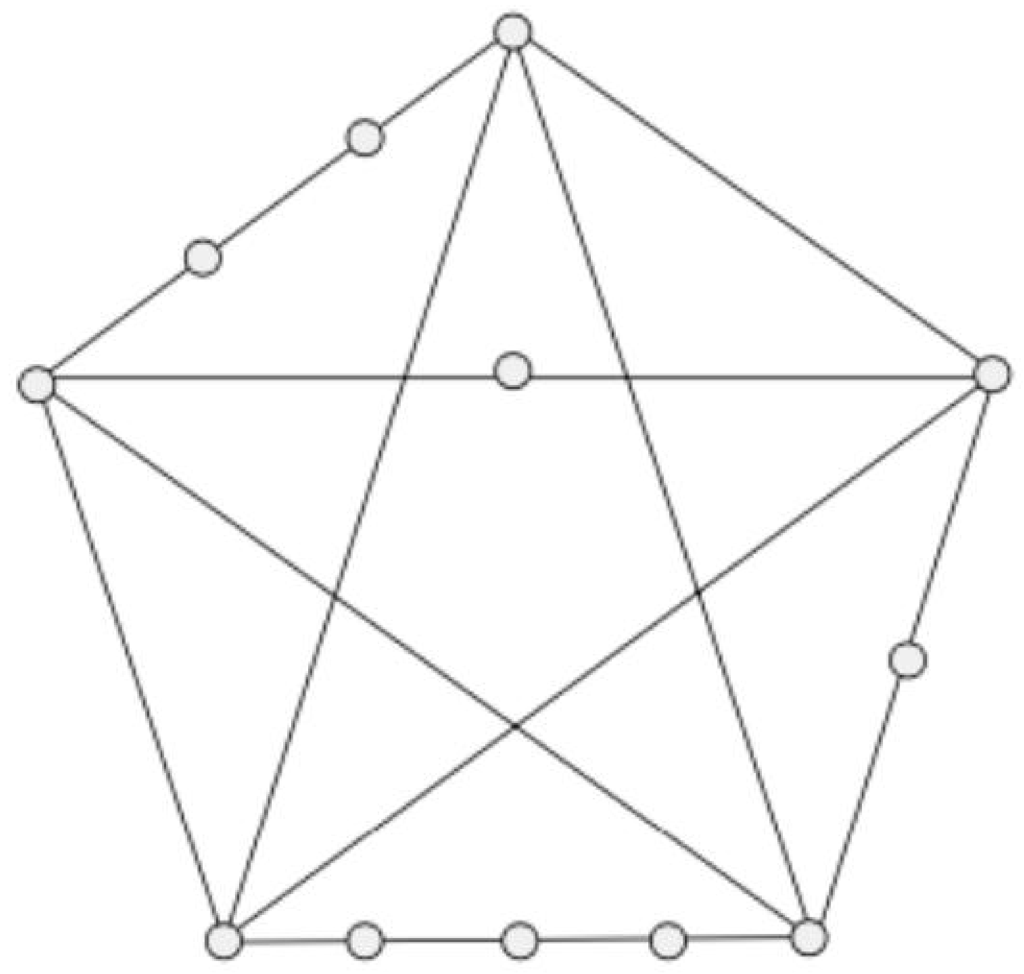
十字架 C ,再次根据定理 23,

这与嵌入的平面性相矛盾。

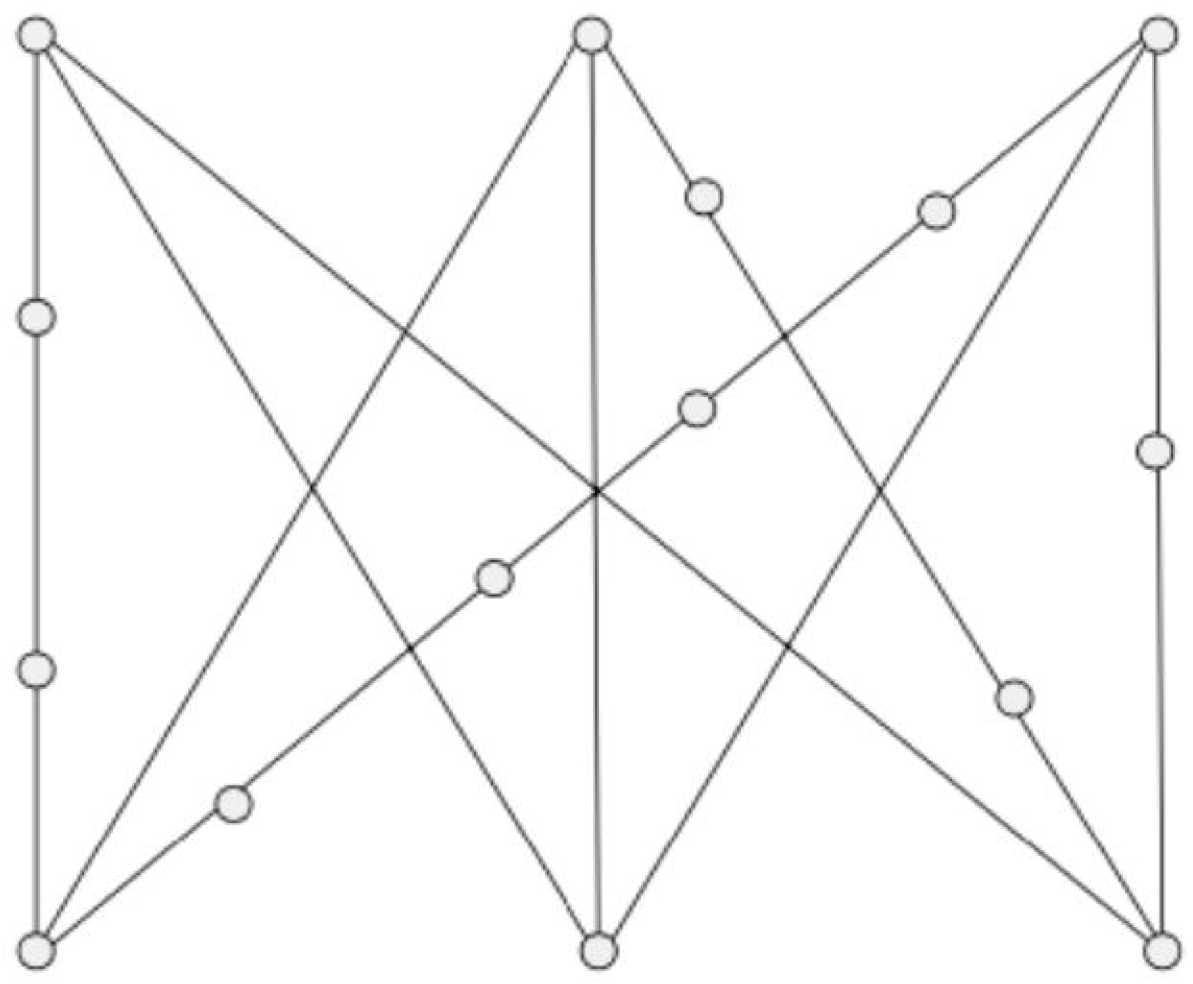
# Subdivisions (细分)

通过一系列边细分得到的图都是GG　　G

称为的细分或 -细分。



K.5的一个分支



K的一个分支。3,3

命题9. 当且仅当 的每个细分都是平面的,则图是平面的。 G G

通过与定理 24 相同的方法,可以证明K3,3 是非平面的。

哪些图是平面的?

平面性是如此基本的属性,判断给定图是否为平面的问题显然非常重要。

库拉托夫斯基 (1930) 对平面图的以下表征为实现这一目标迈出了重要一步。

定理 25 (Kuratowski)。当且仅当一个图不包含K或5 K3,3的细分时,该图才是平面图

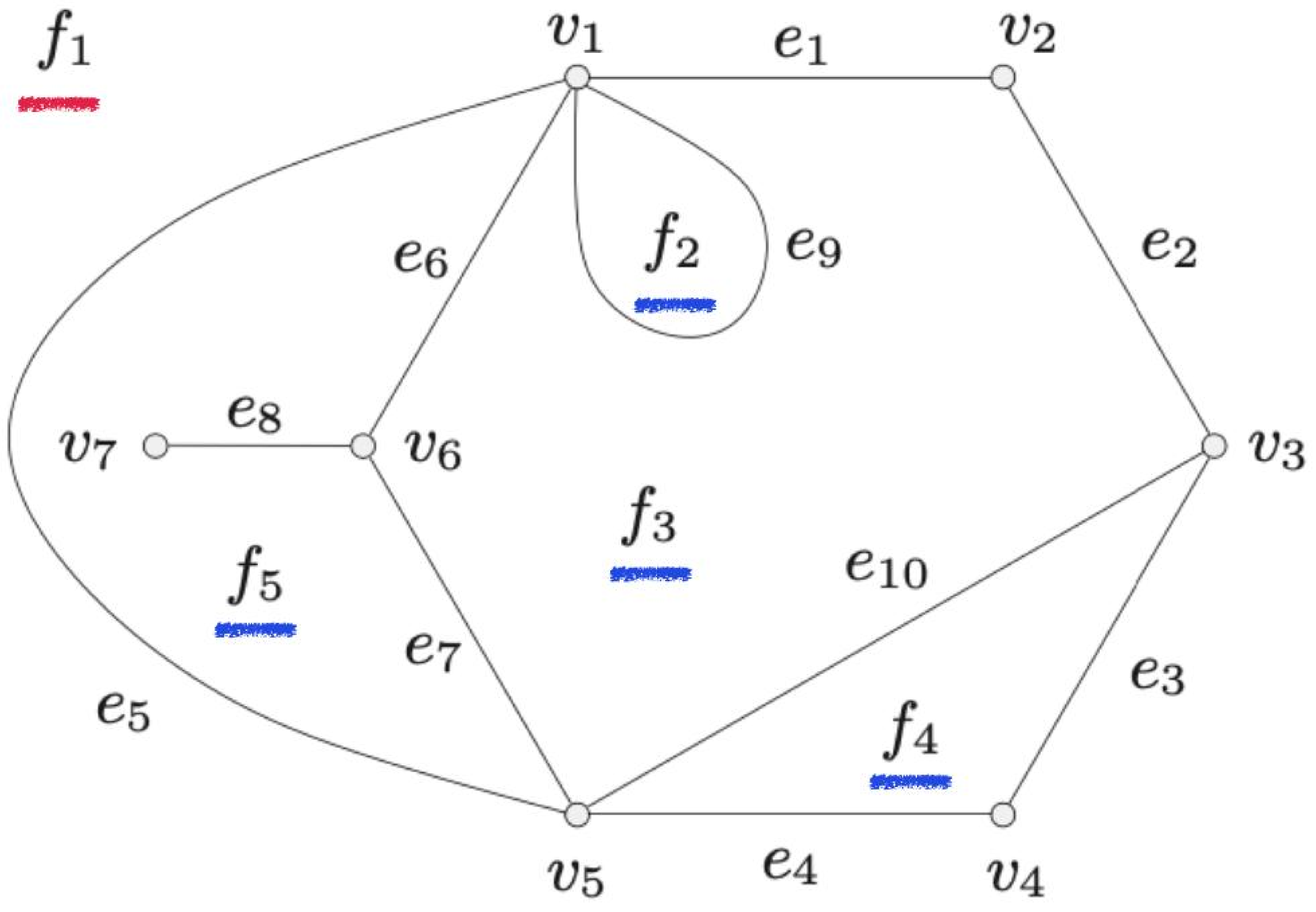
。

# Duality (对偶)

平面图将平面的其余部分划分为若干个G

弧连通开集。这些集合称为的面。

每个平面图均只有一个无界面,称为外面。

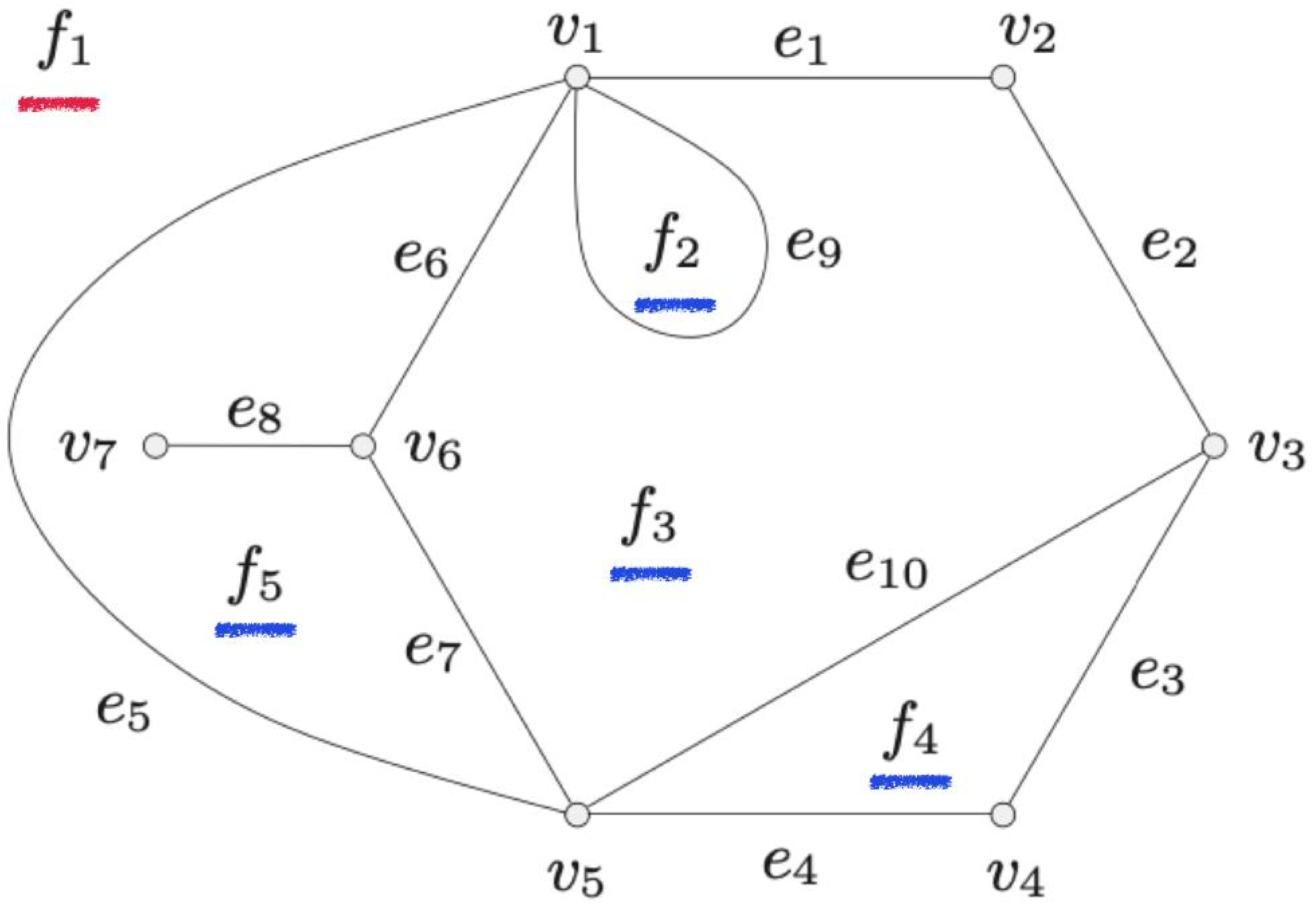


# 面f的边界　　　　　F

是通常拓扑意义上的开集的边界。

一个面被认为与其边界上的顶点和边重合,如果两个面的边界有一条共同的边,则这两个面相邻。f ∂ (f)

我们用以下方式表示脸部的边界　　　　　　　　　　　　。



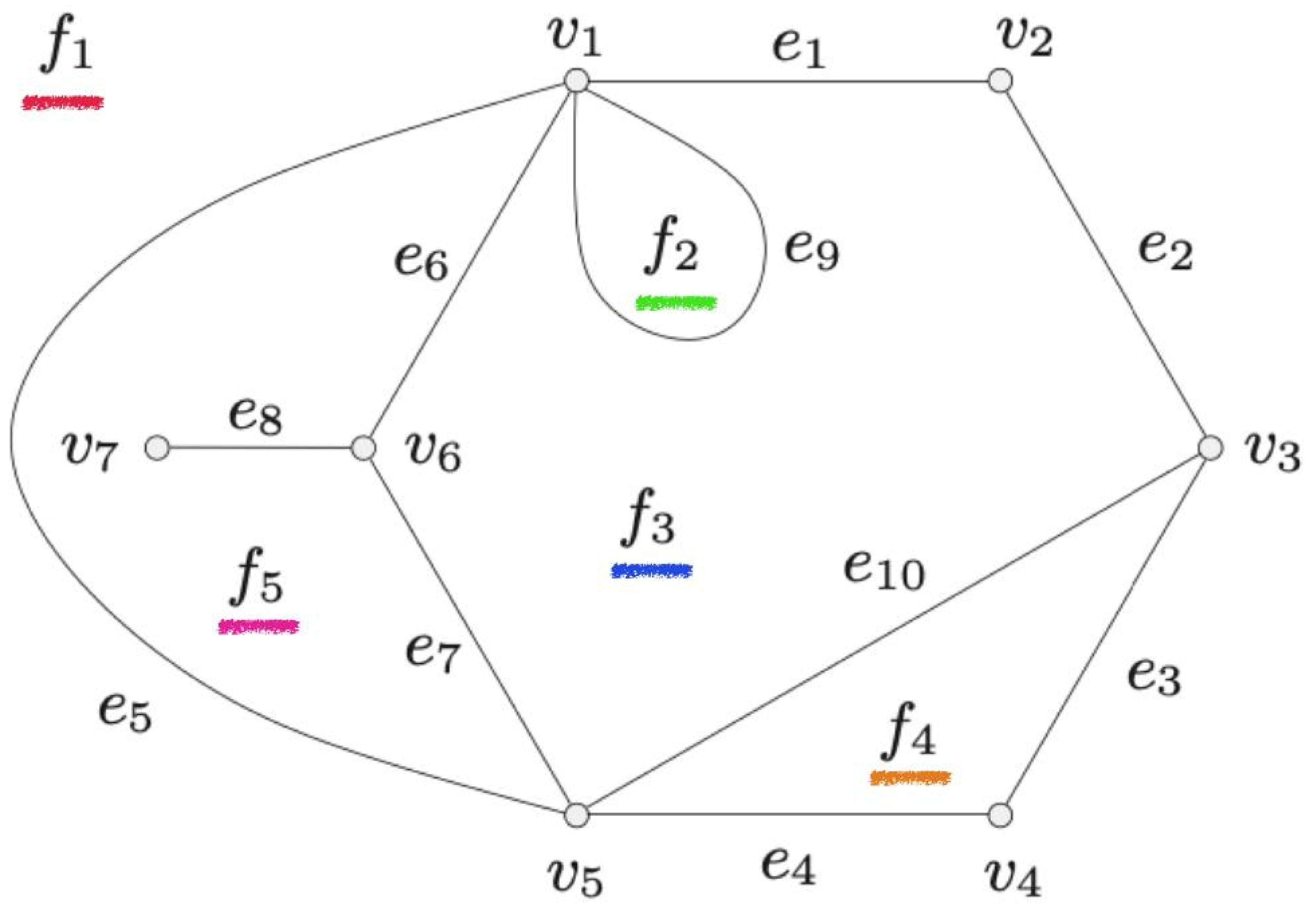
DUAL :给定一个平面图,可以定义第二个图如下。f G f* G* G G*

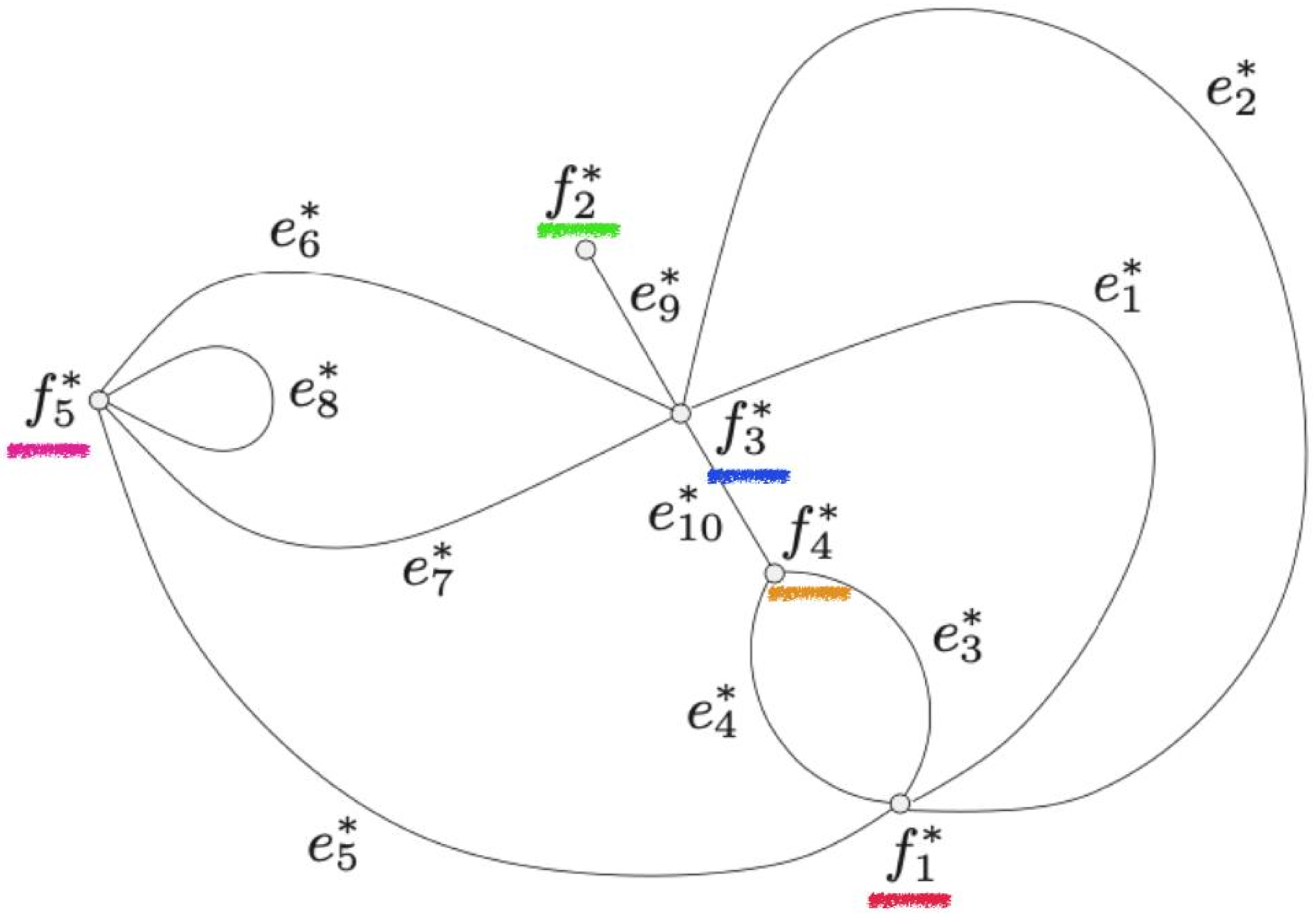
对应于的每个面都有一个顶点和e G e* G* ,

与 的每条边对应,都有 的一条边。

两个顶点和通过边连接,当且仅当它们的fge G 去线当围*

对应的面,并由边缘分开 。



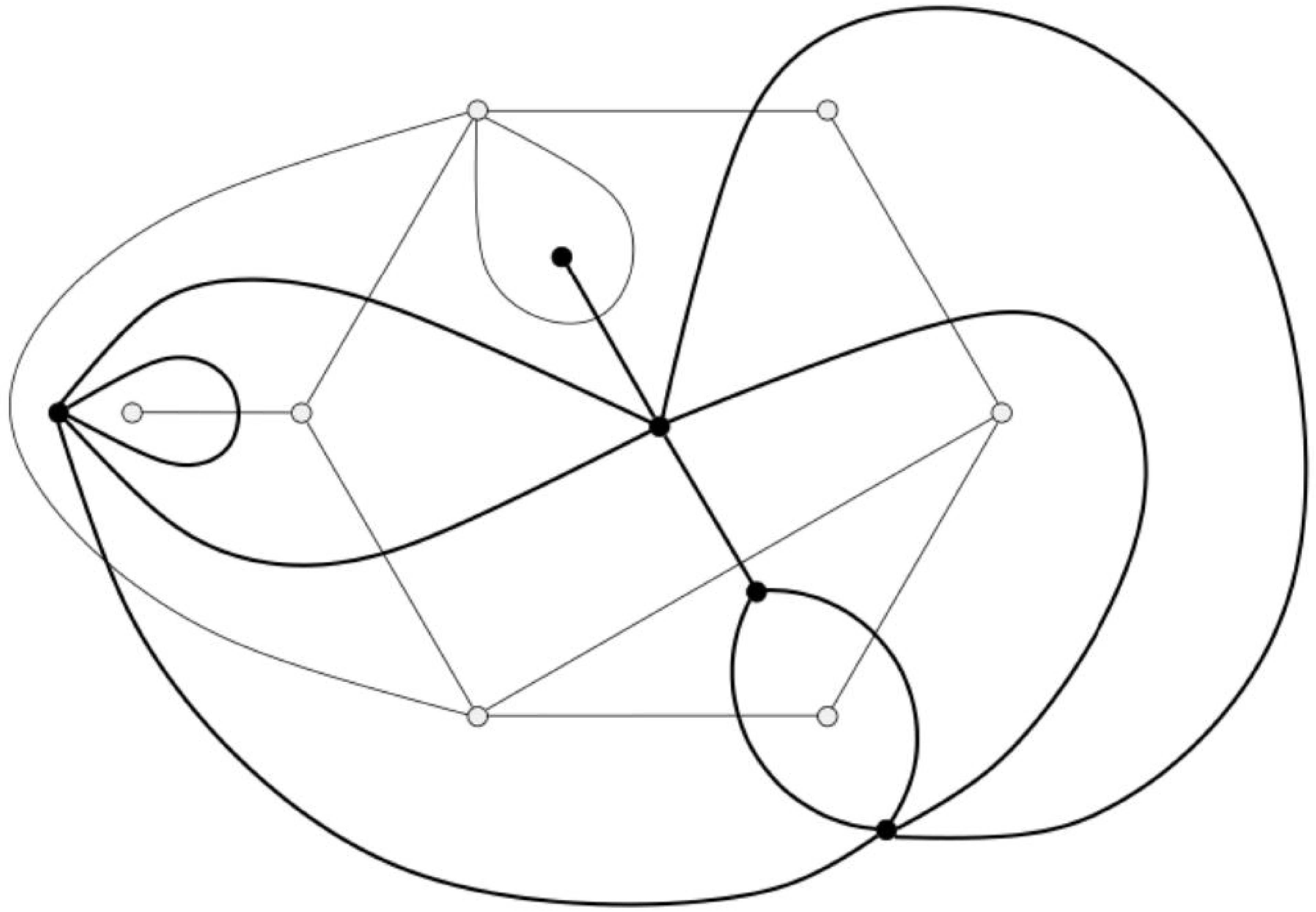
容易看出，平面图的对偶本身也是一个平面图。$G^*$ $G$

事实上，在平面上有一个自然的嵌入。$f^*$ $f$ $G$ $G^*$

将每个顶点放在相应的面上，然后绘制每个 $e$ $G$ ，

边，这样它就与G的对应边相交

一次（并且不跨越 的其他边）。

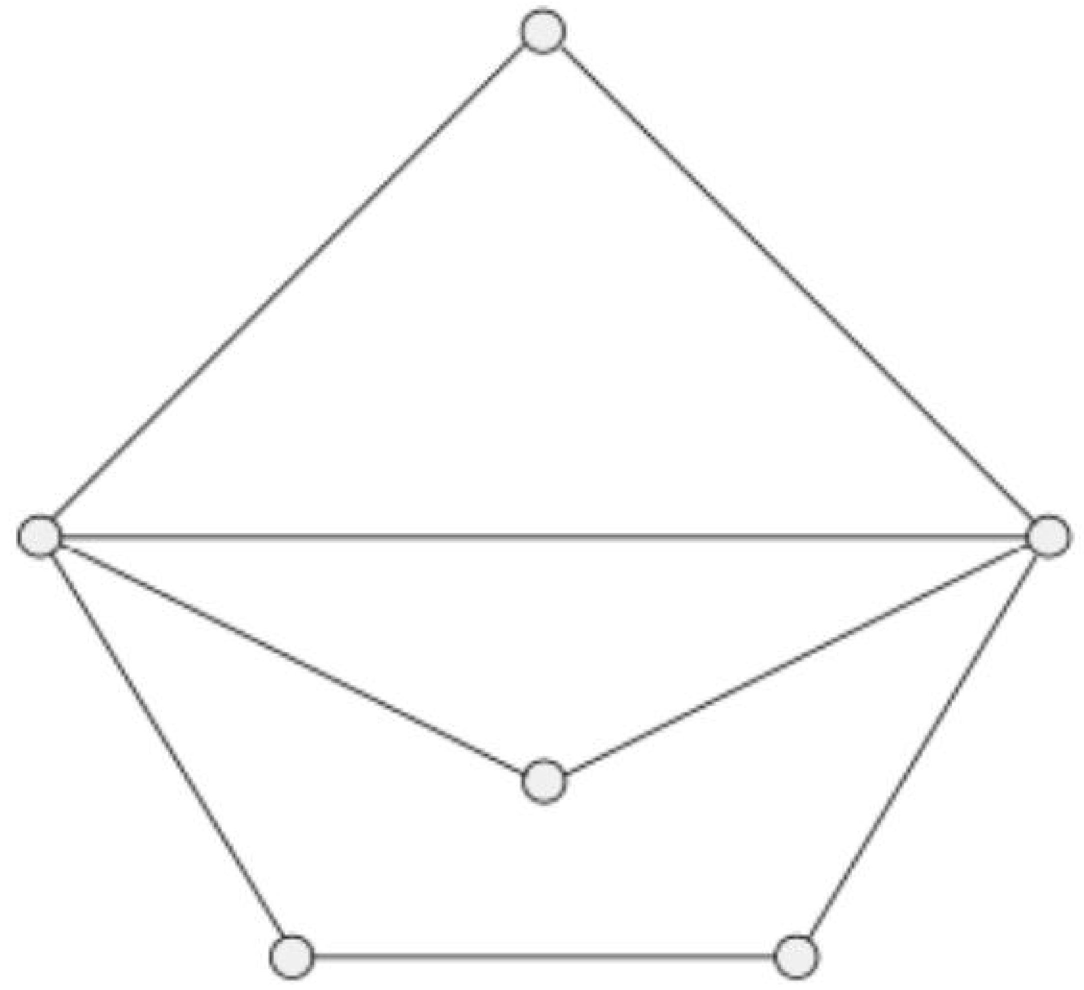


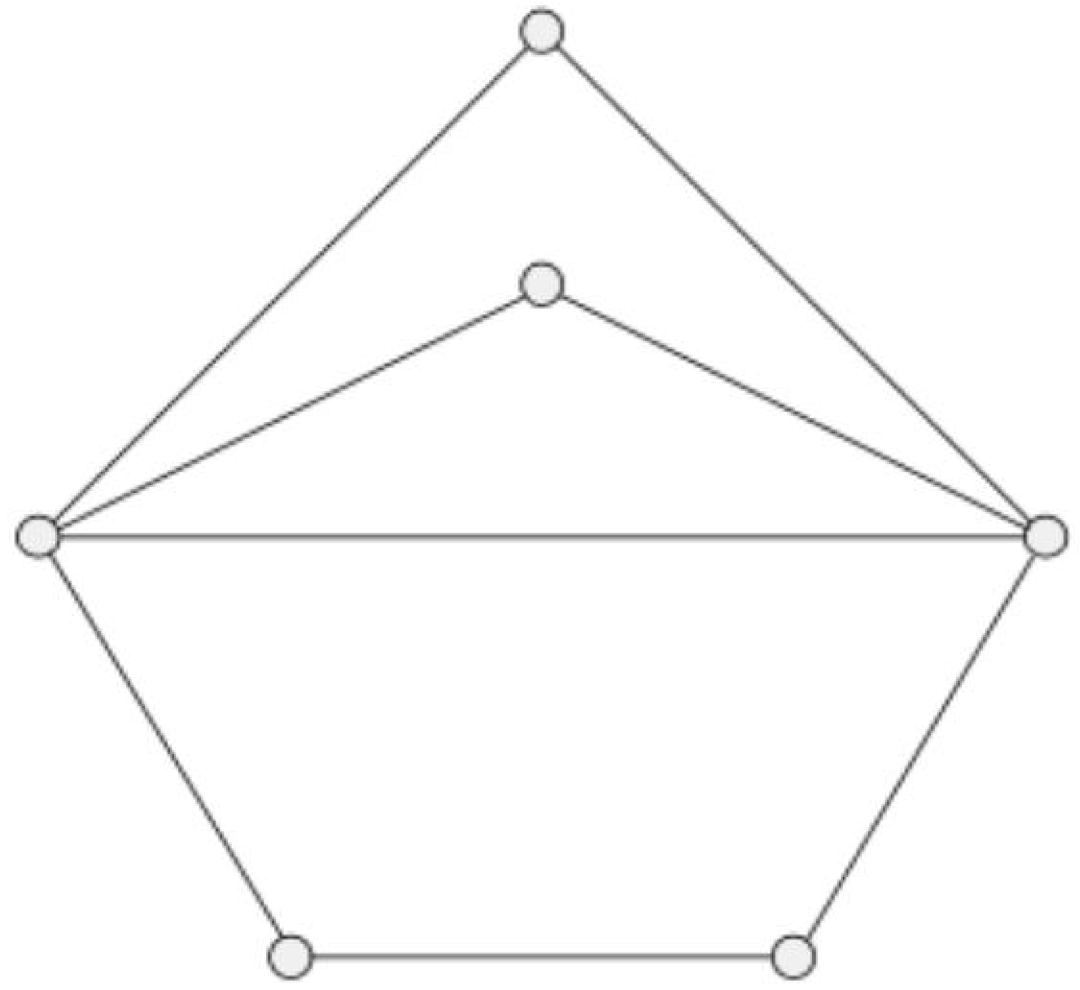
ff度 平面图中一个面的F dG(f)是与

和 ,边界上的切割边缘被计算两次。

$$v（G^*）=f（G），e（G^*）=e（G），dG^*（f^*）=dG（f）。$$

需要注意的是,两个同构平面图可能具有非同构对偶。





命题 10.如果G是大小为 m 的平面图,则

$$\sum_{f\in F} dG(f) = 2米 。$$

欧拉公式

定理26.对于连通平面图, $v(G) + f(G) - e(G) = 2.$

证明。通过对面数进行归纳 $f(G)$ 。

如 $f(G) = 1$ ，G的每条边都是一条切边,因此,连接起来就是一棵树。G

在这种情况下 $e(G) = v(G) - 1$ ，因此该断言成立。

假设对于所有面数少于 的连通平面图， $f \geqslant 2$ f F

其中e G ，并设 为具有面的连通平面图。G

选择非切割边缘。

则为一个有面的连通平面图， G e G e f − 1

因为 的两个面被 分开而合并形成 的一个面 根据归纳假设， G 。

$$v(G \quad e) + f(G \quad e) - e(G \quad e) = 2。$$

注意 $v(G \quad e) = v(G)$ $e(G \quad e) = e(G) - 1$ ，和 $f(G \quad e) = f(G) - 1$ ，

我们获得

$$v（G） + f（G） - e（G） = 2。$$

推论5.连通平面图的所有平面嵌入都具有相同数量的面。

推论6. 设是一个有n ⩾ 3 个顶点、大小为 . m 的简单平面图 G

然后。此外，当且仅当每个平面 m ≤ 3n − 6 m = 3n − 6

的嵌入是一种三角剖分。G

证明:显然,证明连通图的推论就足够了。

设 为任意平面嵌入. n ⩾ 3 d(f) ⩾ 3 f ∈ G G

因为简单而且相关,所以, G) F(G ， 。

$$2m = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geqslant 3f(G) = 3(m - n + 2). \tag{1}$$

等价地，

$$m \leqslant 3n - 6。 \quad (2)$$

等式成立当且仅当满足 （2）（1） ， 当且仅当 $d(f) = 3$

每一张脸 $f \in F(G)$。

推论7. 每个简单平面图都有一个度数最多为 5 的顶点。

图G的周长g(G)是G中最短环的长度。

8. 设是顶点和大小为 的简单平面图。G $n \geqslant 3$推论

如果那么k 公里，$g(G) = k \leqslant$ $\frac{钾}{}$ $(n - 2)$。

证明:显然,证明连通图的推论就足够了。

设是 $G$ 任意平面嵌入. $g(G) = k$ $d(f) \geqslant k$ $f \in F(G)$

因为 , 对所有的。因此,我们有 $G$ )

$$2m = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geqslant k \quad f(G) = k(m - n + 2)。$$

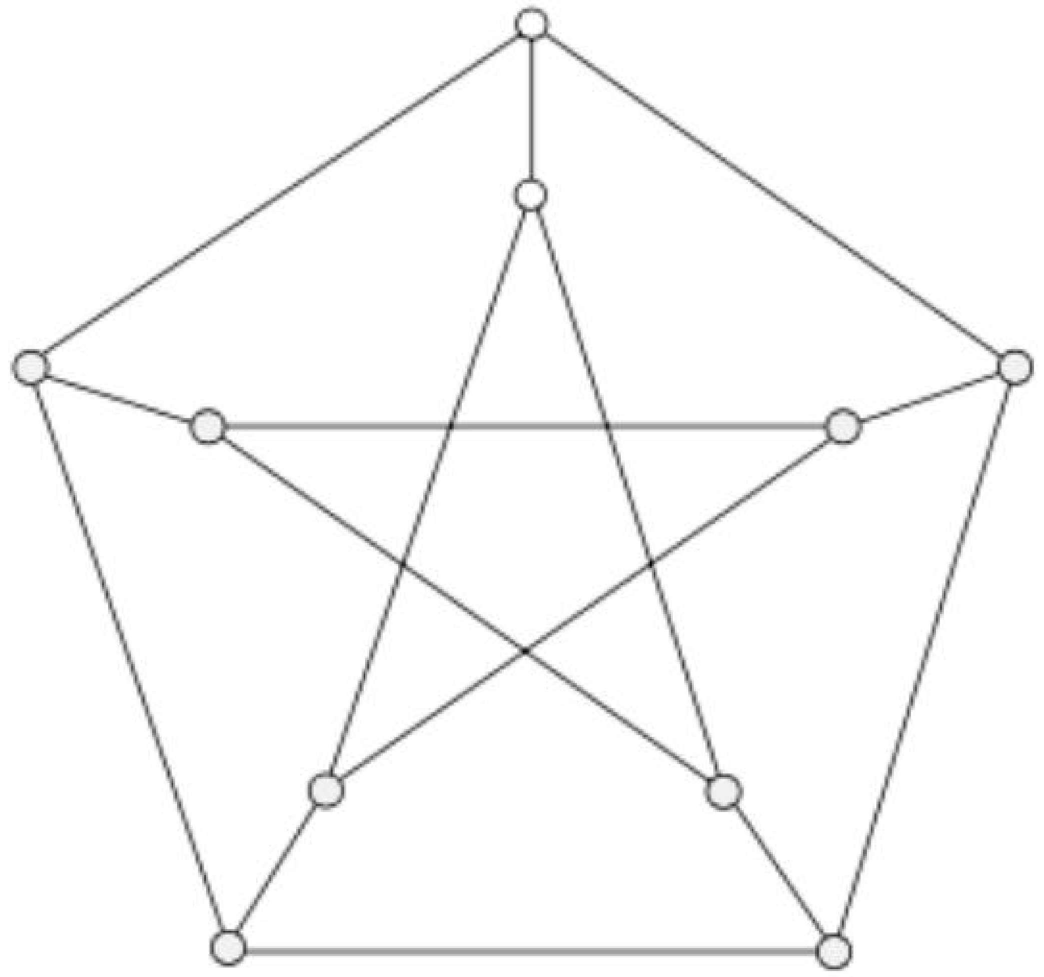
那是,

$$米 \leqslant \frac{钾}{k-2}(n-2) 。$$

推论9. K是非平面的。5

推论10.K是非平面的3,3

# 推论11.Petersen图是非平面的。



# 练习 8。

1. 证明任何平面图都是6色的。

2. 证明至少有 11 个顶点的简单平面图的补图
是非平面的。

3. 如果平面图的所有面都具有相同的度数,则该图是面正则的。
刻画既规则又面规则的平面图。