第一章 图的基本概念

定义1.图G是一个有序对(V(G), E(G)) ,由顶点集V(G)和与V(G)不相交的边集E(G)以及与G的每个边关联的关联函数ψG组成

G的一对无序顶点（不一定不同）。

如果e是一条边,且u和v是连接u和v 的顶点,则顶点u和v称为e 的端点。$\psi G(e) = uv$, 那么e就被说成

我们用v(G)和e(G)表示G中顶点和边的数量。

这两个基本参数分别称为G的阶和大小。

例1.

$$G = (V(G), E(G)) \quad ,$$

在哪里 V（G） = {u， v,w， x， y} E,（G） = {a， b， c， d， e， f， g， h},

并由ψG定义

$$\psi G(a) = uv, \psi G(b) = uu, \psi G(c) = vw, \psi G(d) = wx,$$

$$\psi G(e) = vx, \psi G(f) = wx, \psi G(g) = ux, \psi G(h) = xy \text{。}$$

示例2.

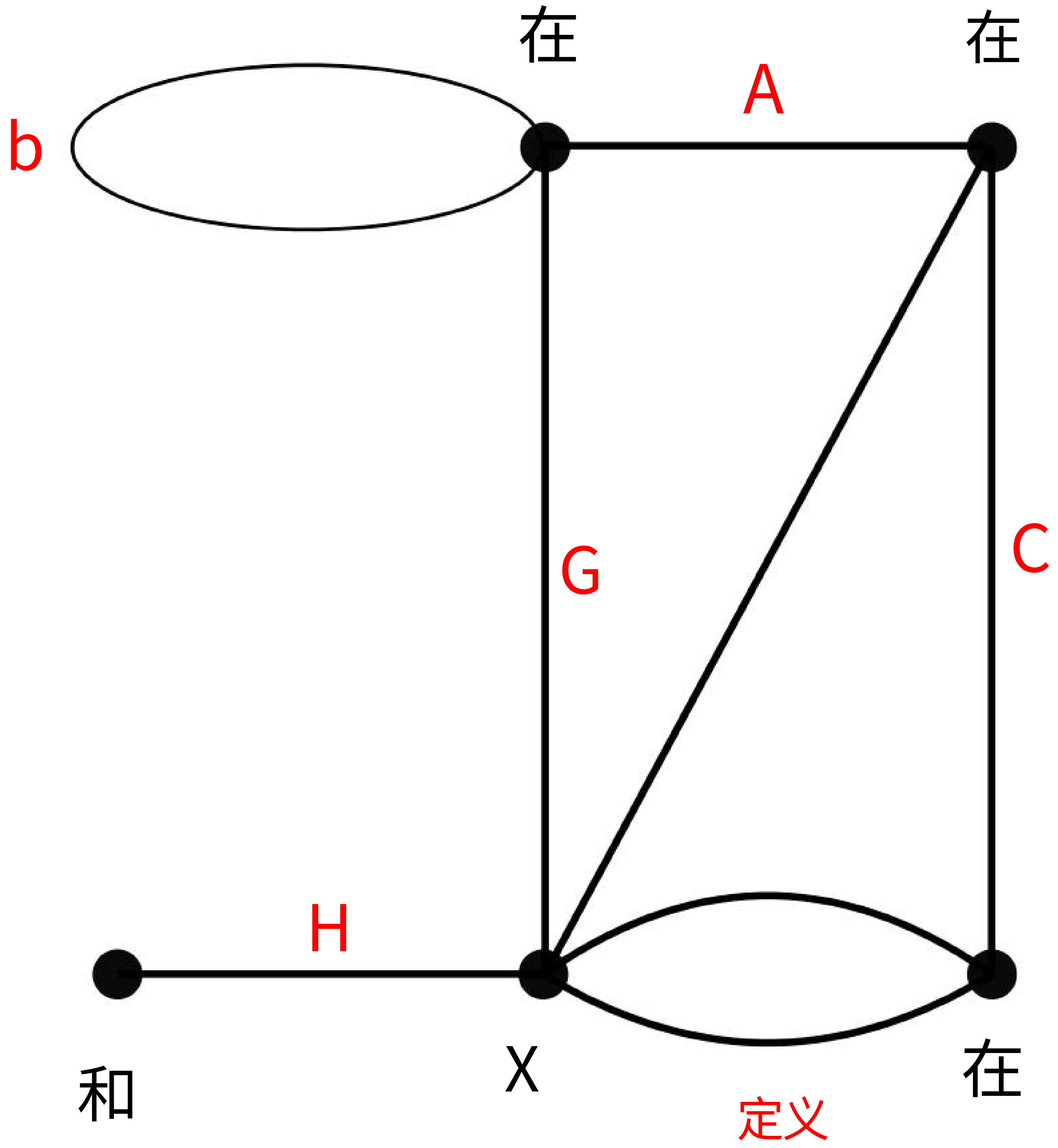
$$H = (V(H), E(H)) \quad ,$$

在哪里 $V(H) = \{vi \mid 0 \leqslant i \leqslant 5\}$ $E(H) =,\{ei \mid 1 \leqslant i \leqslant 10\}$,

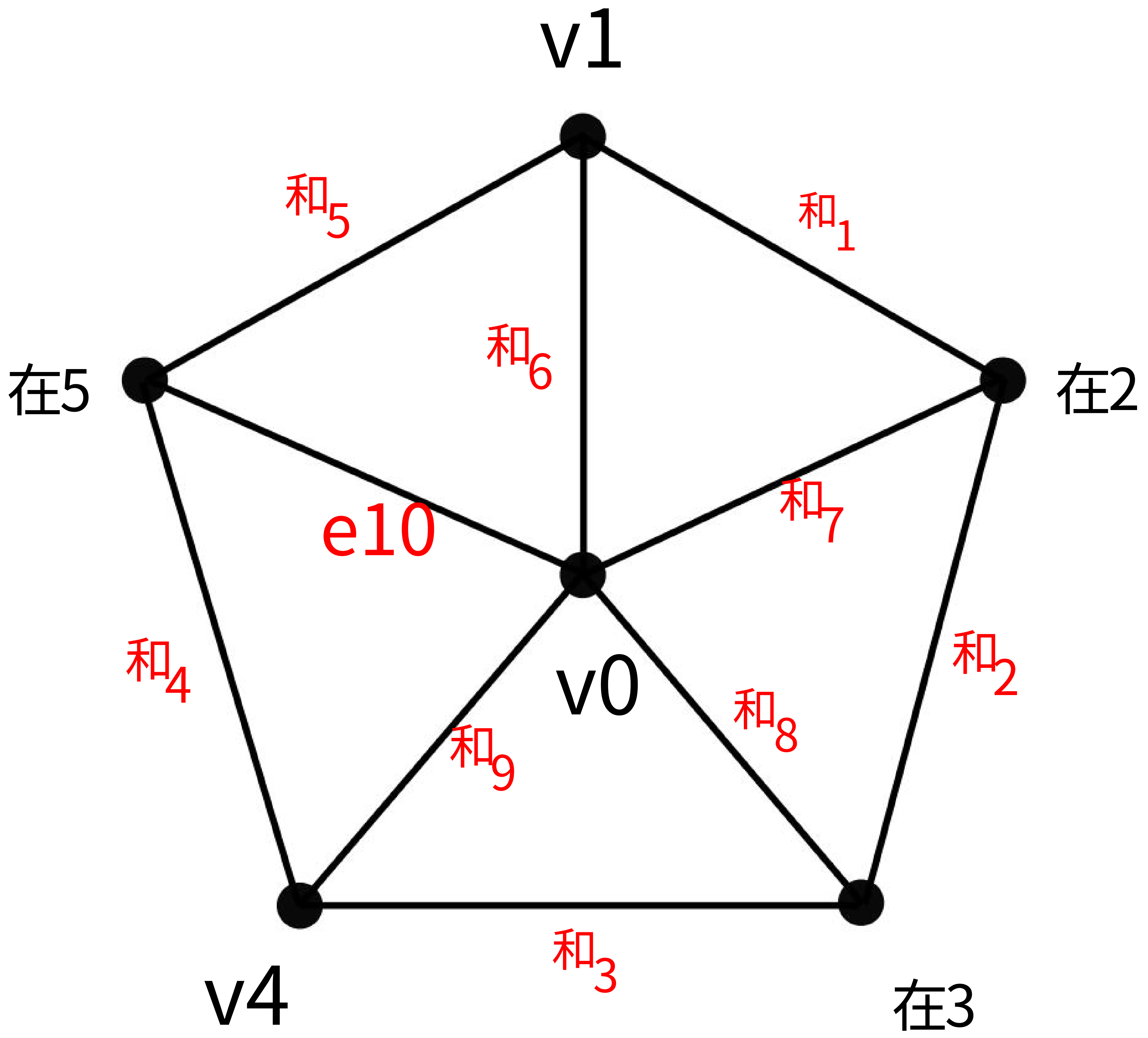
并定义为ψH

$$\psi H(e1) = v1v2, \psi H(e2) = v2v3, \psi H(e3) = v3v4, \psi H(e4) = v4v5, \psi H(e5) = v5v1,$$

$$\psi H(e6) = v0v1, \quad \psi H(e7) = v0v2, \quad \psi H(e8) = v0v3, \quad \psi H(e9) = v0v4, \quad \psi H(e10) = v0v5 \text{。}$$



G



H

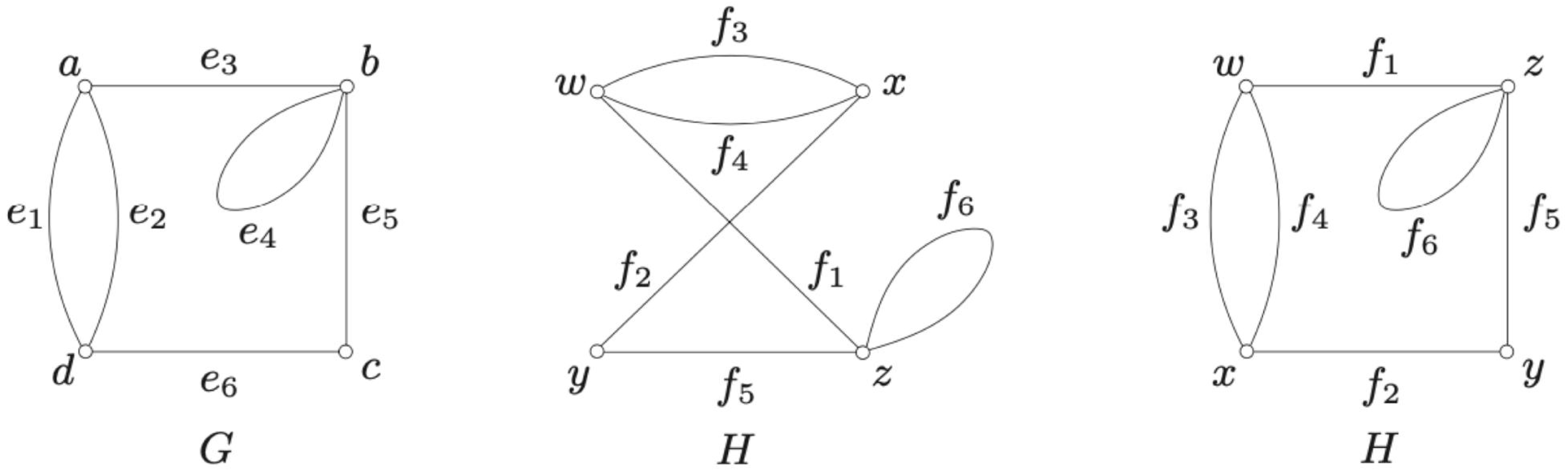
同构:给定两个图和θ V(G) V(H) E(G) 生长激素 E(H) ，

如果存在双射:和:使得

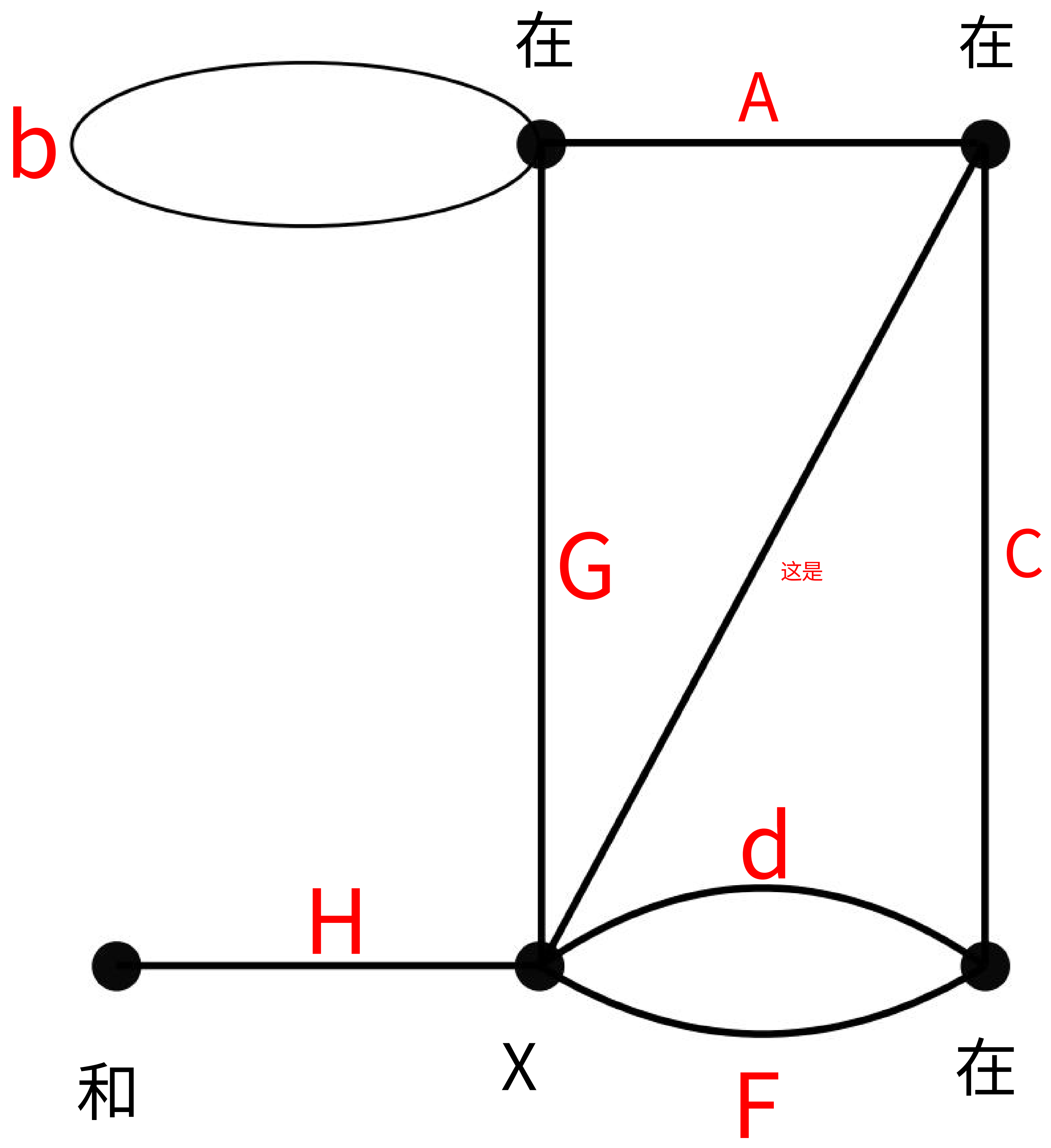
$$\psi G(e) = uv \quad \psi H(\psi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$ ，

那么我们说G同构 H ，写为 $G \cong H$ 。

这样的一对映射称为和之间的同构 生长激素 。



图的邻接矩阵和关联矩阵



	a	b	c	d	e	f	g	h
u	1	2	0	0	0	0	1	0
v	1	0	1	0	1	0	0	0
w	0	0	1	1	0	1	0	0
x	0	0	0	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	0	1

关联矩阵

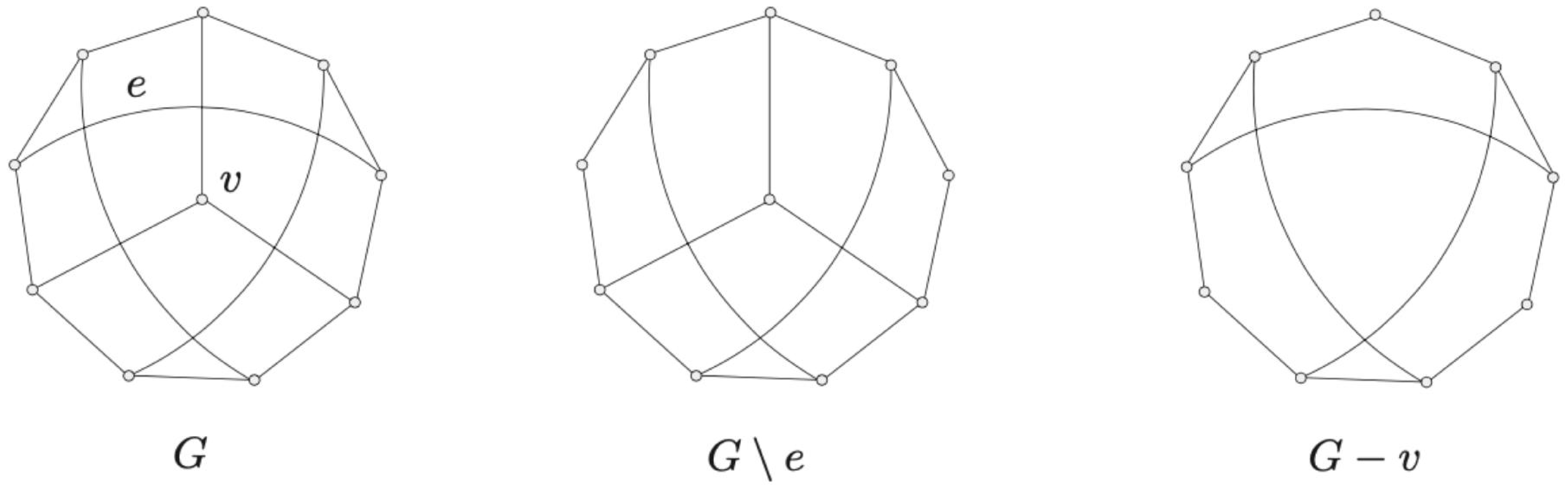
	u	v	w	x	y
u	2	1	0	1	0
v	1	0	1	1	0
w	0	1	0	2	0
x	1	1	2	0	1
y	0	0	0	1	0

邻接矩阵

如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 和 $E(H) \subseteq E(G)$，则 H 是 G 的子图。

此外，如果 $V(H) = V(G)$，则 H 是 G 的生成子图。

边删除子图和顶点删除子图：



如果图上没有环路或平行边,则该图是简单的。

如果e = uv 是图G 中的一条边,则两个由公共边连 与. u, v重合 这是

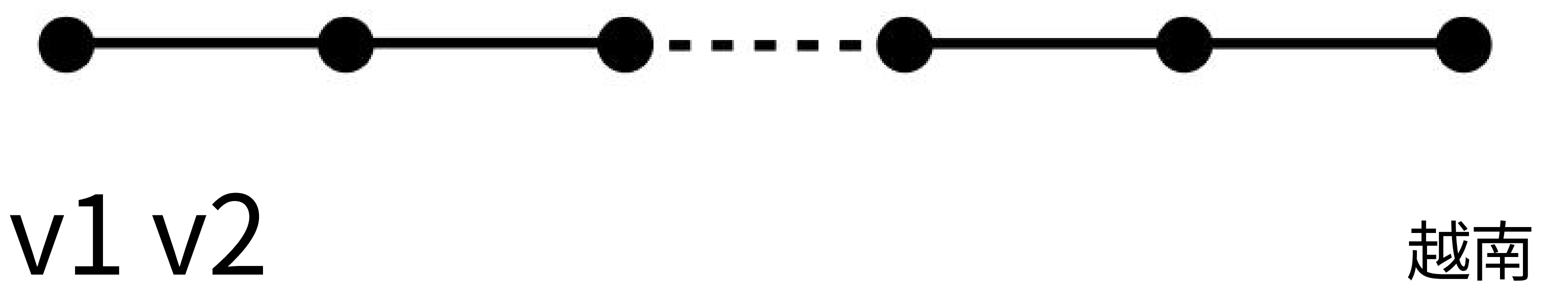
接的不同顶点相邻。

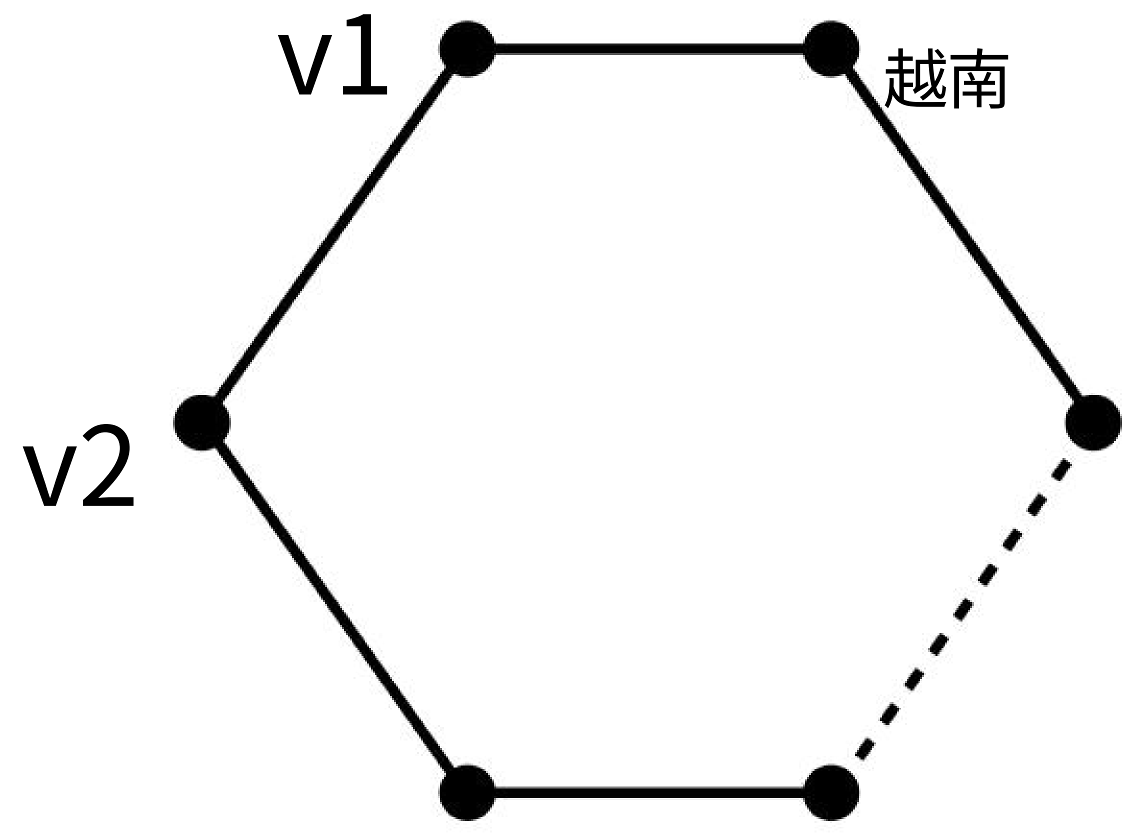
两个不同的相邻顶点是邻居。

图中一个顶点的邻居集表示为 在 G 异常（v） 。

路径是一个简单的图,其顶点可以按线性序列排列,这样,如果两个顶点在序列中连续,则它们是相邻的,否则是不相邻的。

同样,具有三个或更多顶点的环是简单图,其顶点可以按循环序列排列,使得如果两个顶点在序列中连续,则它们是相邻的,否则是不相邻的。





如果图的每个顶点集都划分为两个非空集,并且

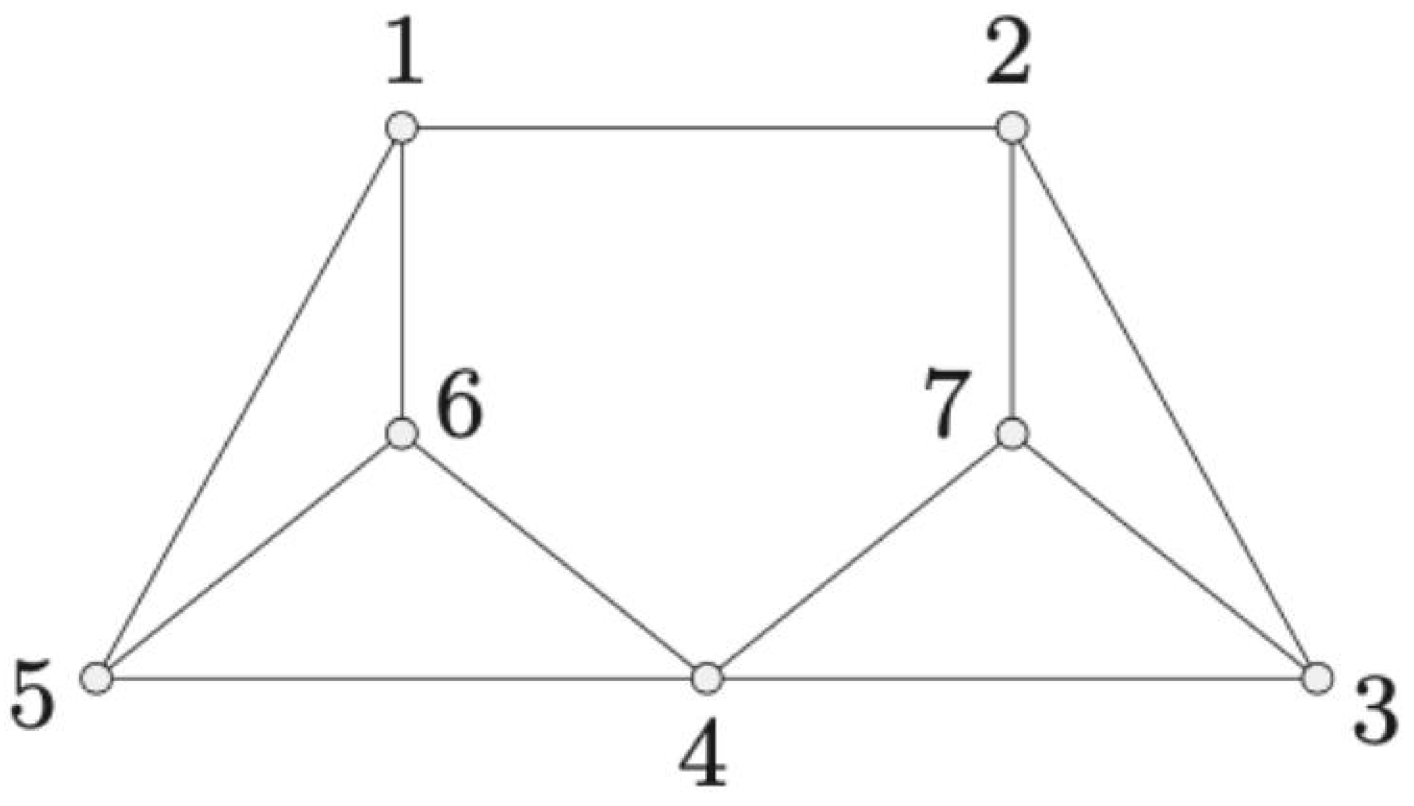
XY

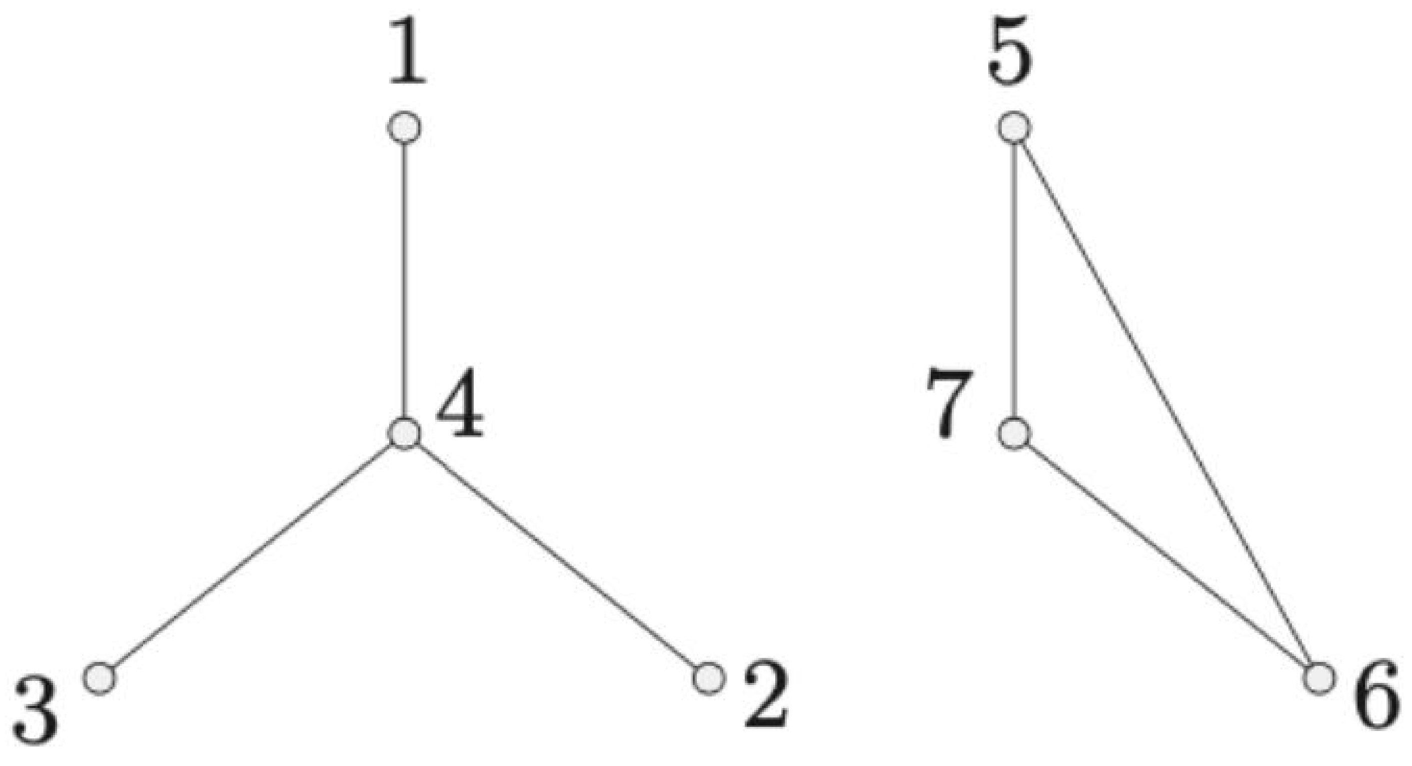
，存在一条边,一端在 ,另一端在 ;否则

X

和

图表已断开。





一些图类

完全图是任意两个顶点相邻的简单图,而空图是任意两个顶点都不相邻的简单图。

如果一个图的顶点集可以划分为两个子集,并且YXY ,则该图为二分图 X

使得每条边都有一个端点在 中,还有一个端点在 中。这样的划分(X, Y)

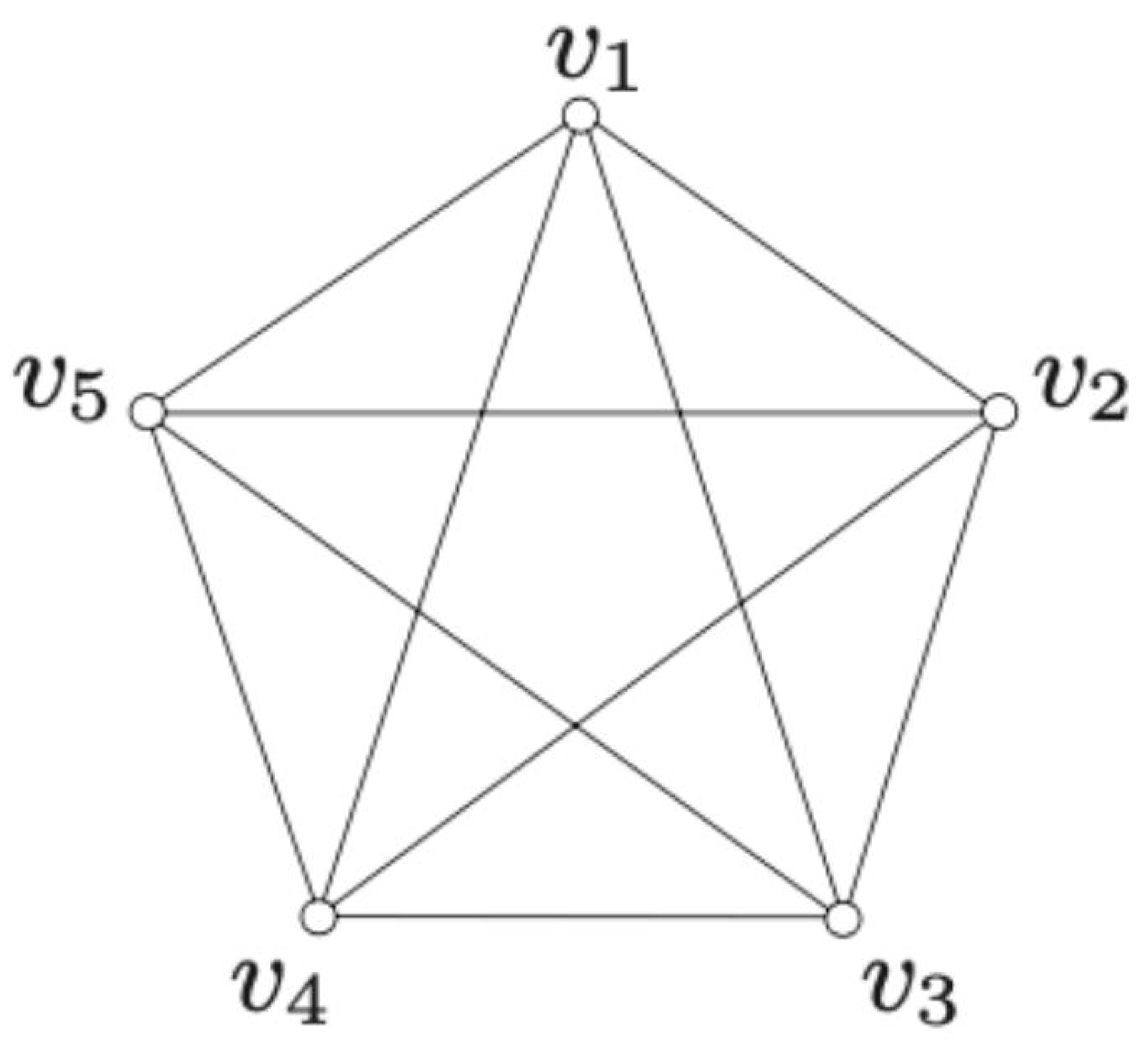
称为图的二分图,表示二分图为简单图,并且 中的每个顶点 称为完全二分图。A | X|G= 1 |Y|

的每个顶点相连,则是Y用G[X, Y]表示完全二分图G[X, Y],并且 k 分图 如果Y与G[X, Y]中 = 1 X

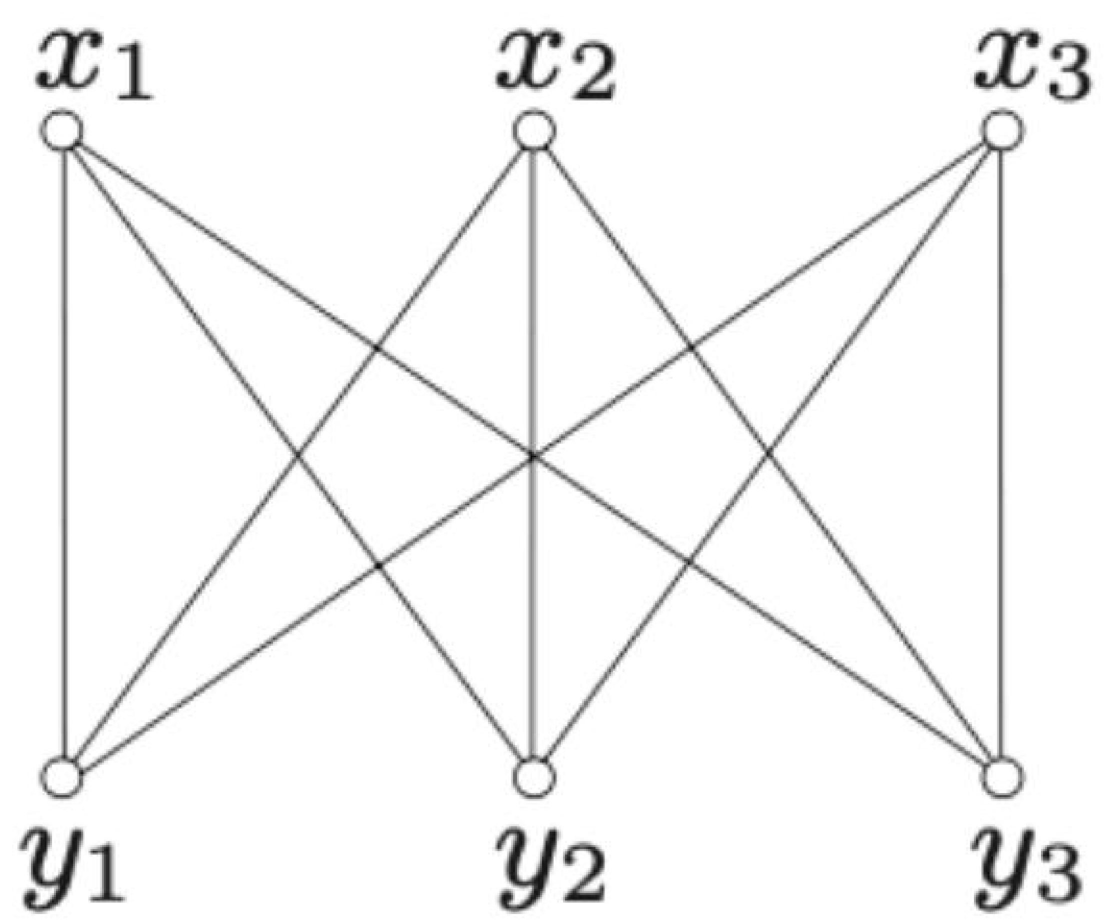
顶点集可以分成k个子集或部分,这样 的 , G

部分。 任何边的两端都不在同一 或者 。

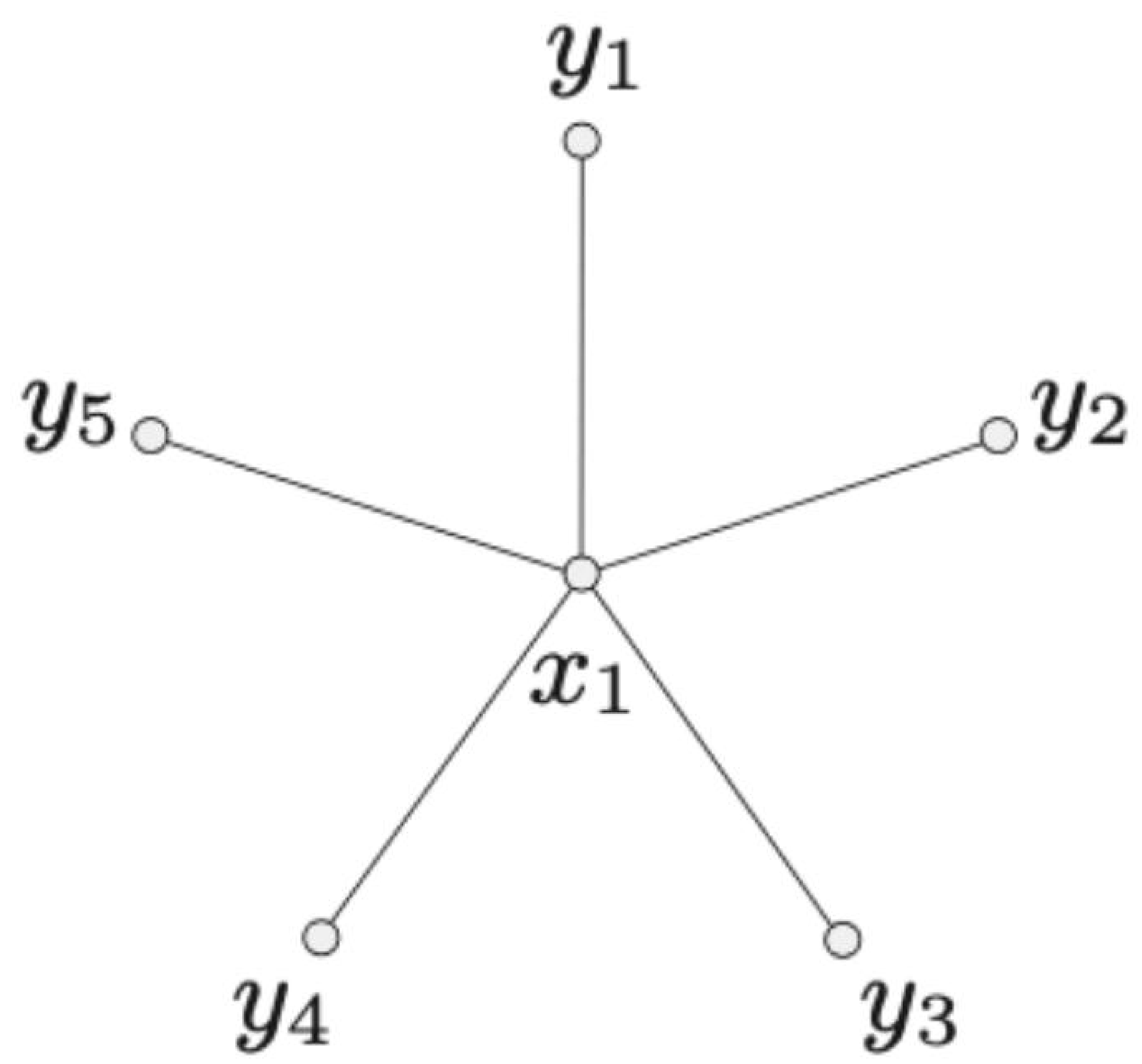
例3.



K5



K3,3



K1.5

完全图 完全二分图

一个明星

顶点度数

图中顶点的度,用每个环算作两条边来表示。 G dG(v) ,

是与dG(v)关联的边的数量 G 在,

特别地,如果 是一个简单的图, 是G中的邻居的数量 G 在

。零度顶点称为孤立顶点。δ (G) Δ(G)

分别为G顶点的最小和最大度数

, 分别。

定理1. 设G为大小为 m 的图,则

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2米$$

。

证明。考虑 G 的关联矩阵：

	e1	不是	在
v1		*	
我们	*	*	*
越南		*	

第 i 行对应v 的元素之和恰好为 我 d（我们）。

对于每个 e ,第 j 列中与e对应的条目的总和为2 。 杰 杰

推论1. 任何图中,奇数度的顶点数是偶数。

命题1. 设是一个没有孤立顶点的G[X, Y]二分图,使得|X| ⩽ |Y|

$d(x) \geqslant d(y)$ $xy \in E(G)$且对于所有 ，其中 和 。则 $x \in X$ $y \in Y$ $d(x) = d(y)$ $xy \in E(G)$ ，

当且仅当对所有人来说都平等 。

证明。考虑G[X, Y]的二分邻接矩阵：

	y1	yj	在
x1		a1j	
+—	艾1	艾吉	目的
陳		安杰	

米

	y1	劉建	在
x1		$\frac{\text{a1j}}{d(x1)}$	
+—	$\frac{\text{艾1}}{d(xi)}$	$\frac{\text{艾吉}}{d(xi)}$	$\frac{\text{目的}}{d(xi)}$
陳		$\frac{\text{安杰}}{d(xn)}$	

M1

对于矩阵M : 1

1 x对应的第 i 行元素的和恰好为 。 我

y对应的第 j 列条目的总和为 杰

$$\sum_{y_j x_i \in E} \frac{a_{ij}}{d(x_i)} \leqslant \sum_{y_j x_i \in E} \frac{a_{ij}}{d(y_j)} = \frac{d(y_j)}{d(y_j)} = 1。$$

所以，

$$|X| = n = \sum_{我=1}^{n} \sum_{x_i y_j \in E} \frac{a_{ij}}{d(x_i)} = \sum^{米} \sum_{x_i \in E} \frac{a_{ij}}{} \leqslant m = |Y| \,.\, d(x_i)\ j=1\ y_j$$

定理2.设G为一个图,且δ(G) ⩾2 ,则G包含一个环。

证明。如果 有环,则它包含一个长度为 1 的循环,如果 有平行边,则它包含一个长度为 2 的循环。所以我们可以假设 G G

这很简单。 G

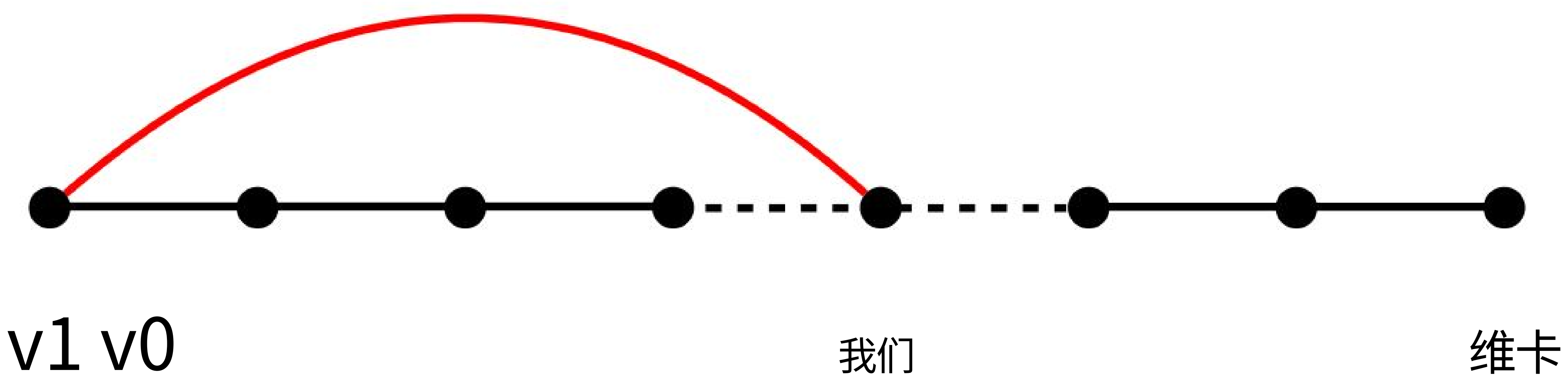
度至 P = v0v1⋯vk − 1vkG 是 中的最长路径 设因为 的 。

少为 2,所以它有一个不同于 的邻居。v1 在

如果不在v 磷 , 则路径长于 v0 P v0v1⋯vk − 1vk P , 这与

选择 。

因此,对于某个v = vi i 2 ⩽ i ⩽ k , 并且是v0v1⋯vi v0中的一个循环 G 。



定理3. 任何简单图 G

$$\sum_{v\in V} \binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$$

包含一个四边形。

证明。设这样的路径有 为 2 的路径数。显然， G p2(v)是 和 中长度 这 p2个，其中心顶点是 在

$$p2(v) = \binom{d(v)}{2}。$$

由于每条长度为 2 的路径都有一个唯一的中心顶点，

$$p2 = \sum_{v\in V} p2(v) = \sum_{v\in V} \binom{d(v)}{2}。$$

另一方面,由于每条这样的路径也有一对唯一的端点,因此所有长度为 2 的路径集合可以划分为

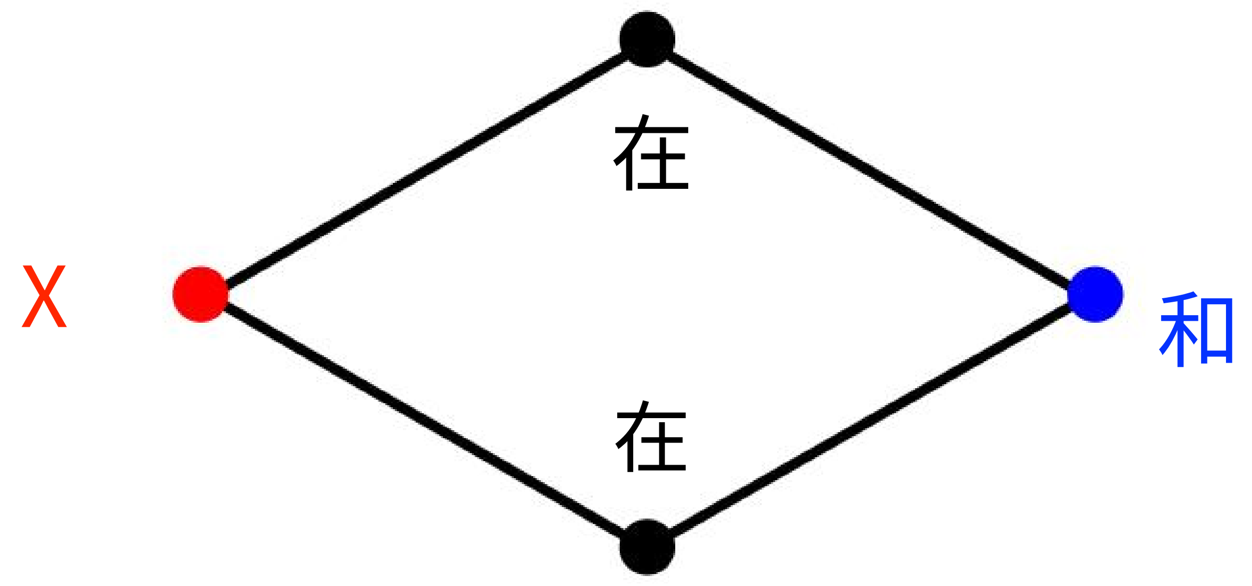
（注2）

根据其目的划分子集。

根据假设,其中一个子集包含两条或多条路径。

也就是说,存在两条长度为 2 且具有相同两端的路径。

这两条路径的并集是一个四边形。



树木和树枝

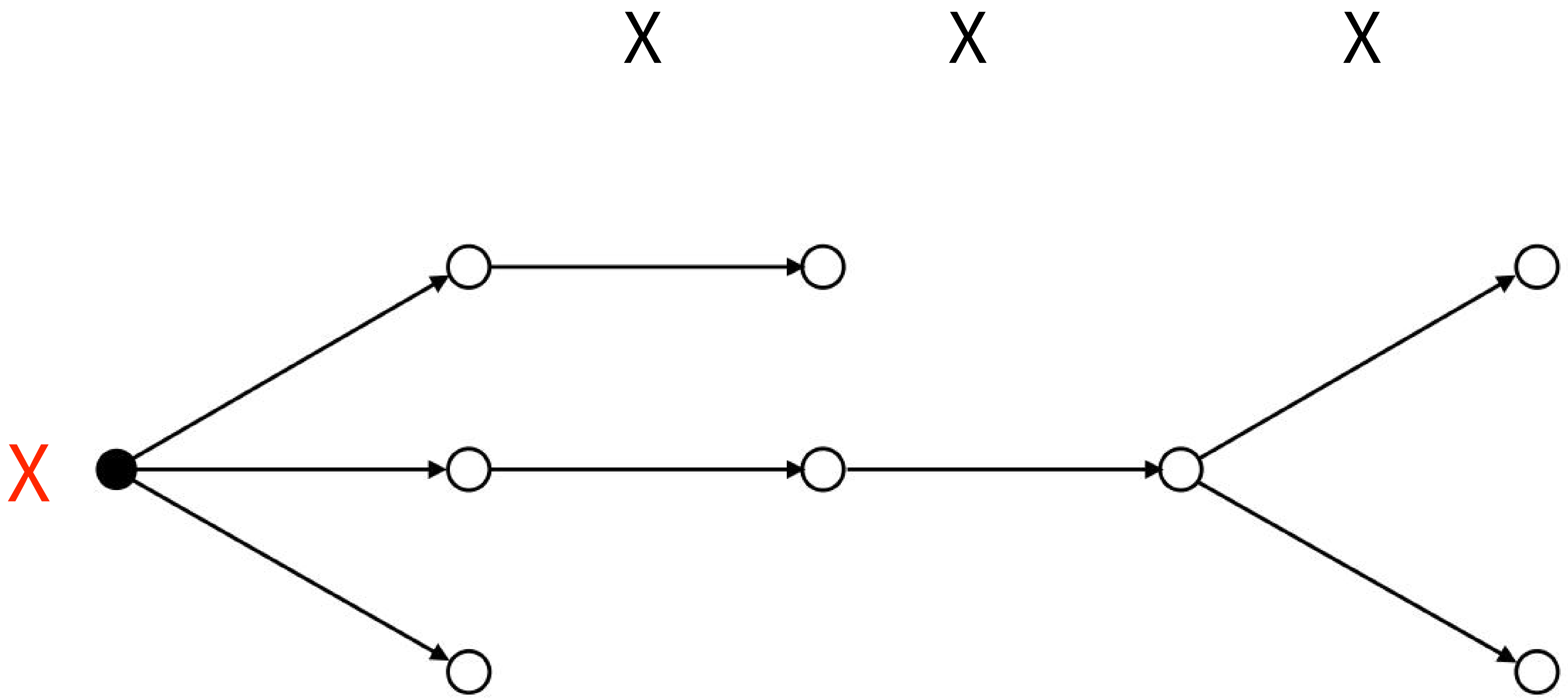
如果图上没有环,则该图为无环图。

树是连通的无环图,森林是无环图。

有根树是具有指定顶点(x)的树 X，称为的根。 电视

有根树的方向

除根之外的每个顶点的入度为 1,称为分支。我们将有根树或有根的分支分别称为 -树或 -分支。



命题2. 在一棵树中,任意两个顶点都由一条路径连接。

证明相反,假设u, v ∈ V(T)且

$$P = ux1x2\cdots xsv,$$

$$Q = uy1y2\cdots ytv$$

是两条不同的路径连接和 在 在。

考虑一下图表 H = E（P） ∪E （Q） -E （P） ∩E （Q） 。

E(P)为E的(Q) − E (P) ∩E (Q) 帕金森病

（称为对称差）

设为H1 H ,那么我们必须 δ(H1) ⩾2 。

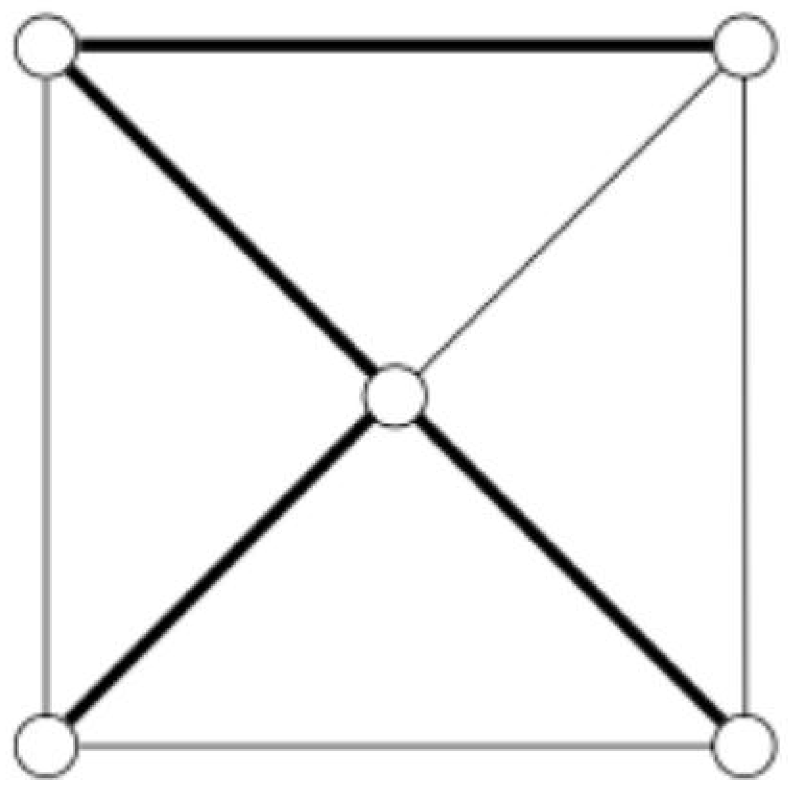
这意味着 H1包含一个循环,所以 电视, 矛盾。

定理4. 如果T是一棵树,则$e(T) = v(T) - 1$。

生成树

图的子树是树的子图。

如果这棵树是生成子图,则称其为图的生成树。



定理5. 当且仅当一个图具有一棵生成树,则该图是连通的。

定理6. 图G为二分图当且仅当它不包含奇数环。

证明:只需考虑连通的二分图即可。

(⇒) G[X, Y] 是一个二分图。很容易看出,设|C|的每个循环 CG

形式为$x_1y_1x_2y_2 \cdots x_\ell y_\ell x_1$,偶数。 $x_i \in X$ $y_i \in Y$其中 且 且为,

(⇐) 根据定理 3,图具有生成树。设是中的任意顶点 TXT 。

根据命题2,对于任何的 ,都有唯一的路径连接且Y = V(G) X 电视 十五 。 让

X是该路径长度为偶数的顶点集, uv在∈ E(G) E(T) P = uTv (u, v) 。

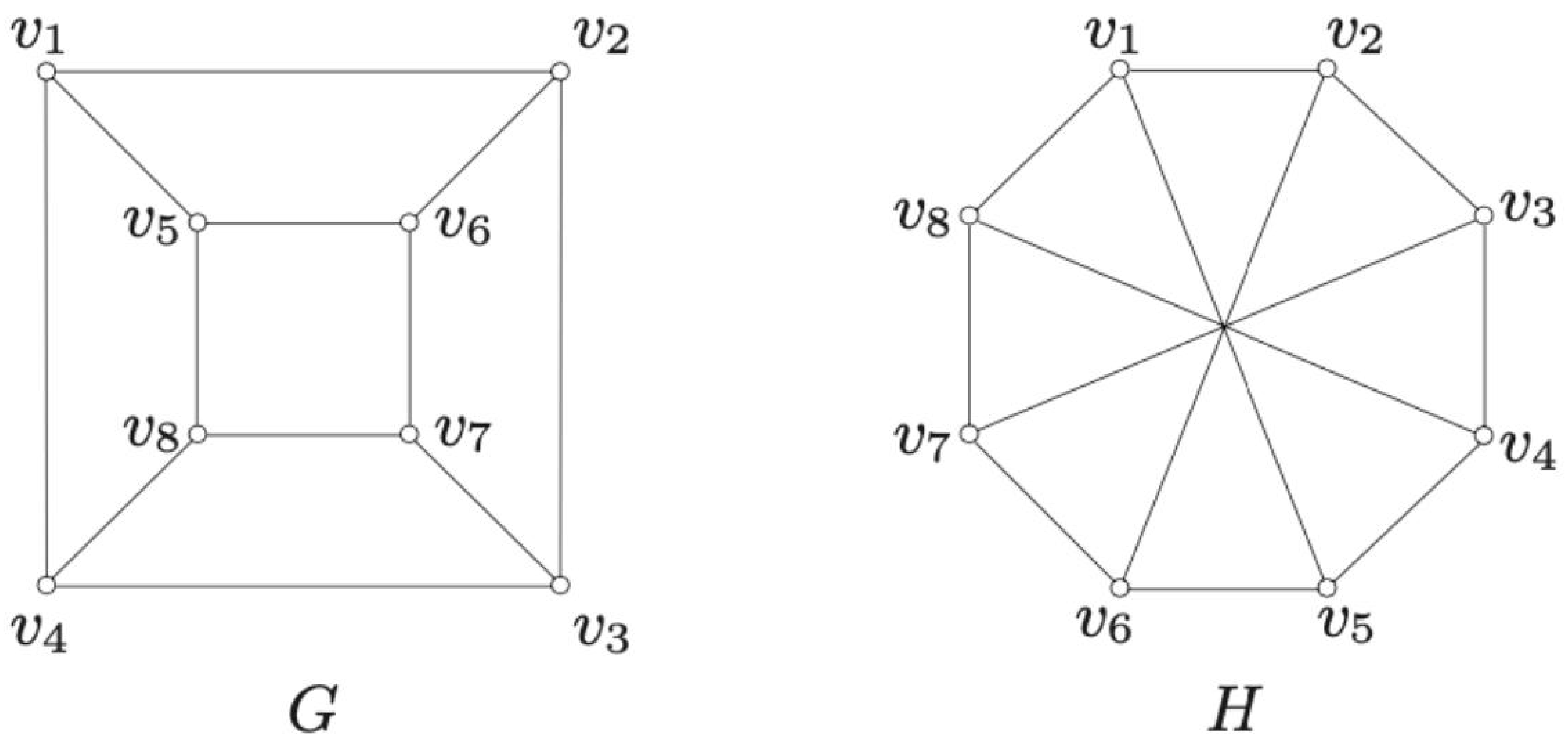
对于任何边,都是T中唯一的 -路径 , 让 。

P + uv是偶数循环,长度为奇数,因此必须属于由于u、 v

不同部分 X、 Y 。 由此可见,确实是的二分。 (X, Y) G

练习 1.

1. 证明下列两个图不同构,即G H 。



2. 设是阶G数和大小的简单图。证明如果m ⩾ n n ※ ,然后
G 包含一个循环。

3. 证明任何简单图G都有一条阶至少为δ(G) + 1 的路径。