图的边着色

设G为图。G的k 边着色是一个映射

$$c : E(G) \quad \{1,2,\ldots,k\}.$$

如果没有两条相邻边被赋予相同的颜色,则边着色是适当的。如果图具有适当的 -边- G k k G着色,则该图是-边可染的(-边可染的) 。 钾

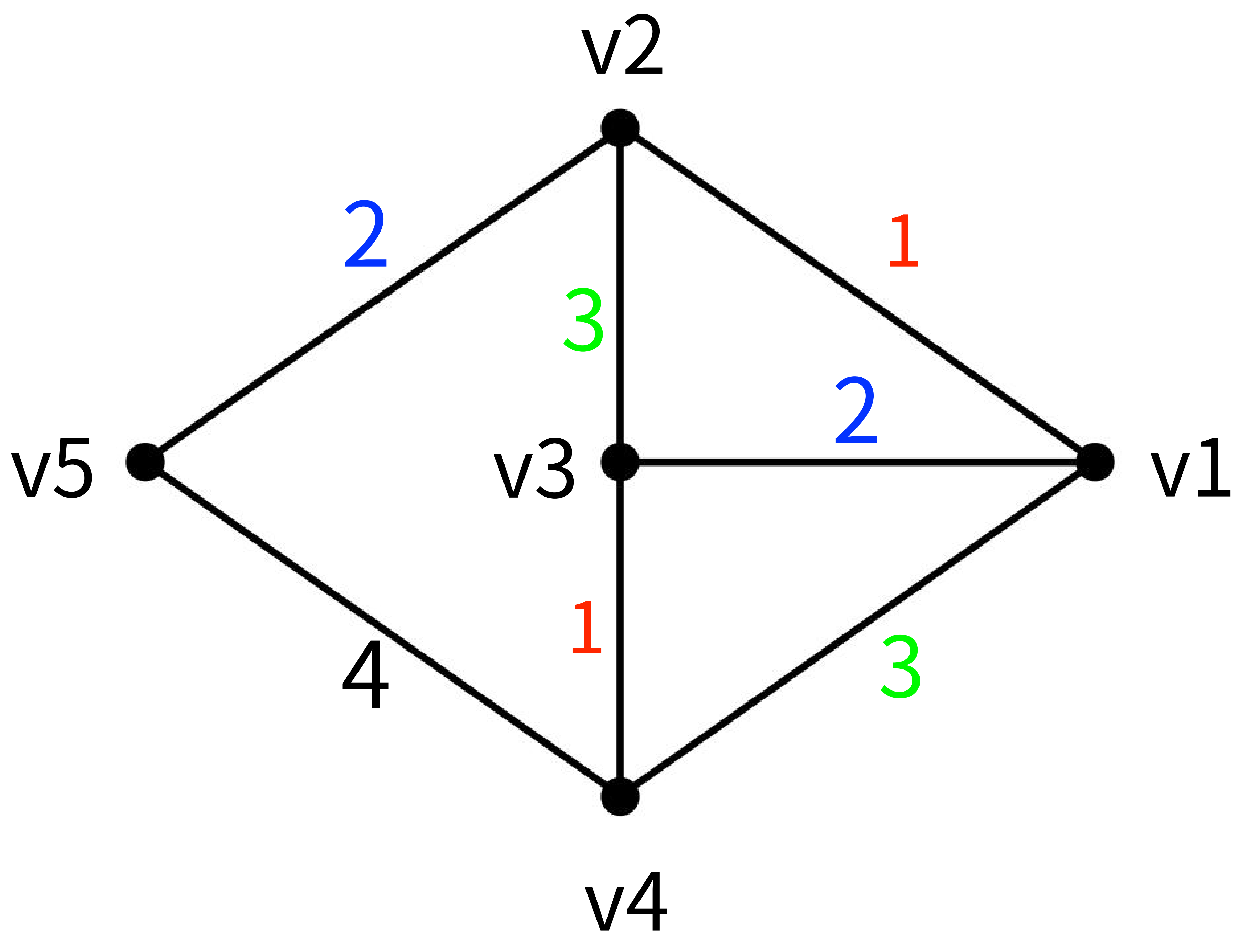
使图为 -边可着色的最小整数称为G的边色数(边色数),则该图被称为-边色的(-边色的) 。 钾 G k

, 并表示 $\chi'(G)$ 。

如果 $\chi'(G) = k$, G 钾 钾

命题8. 设G为连通图,且$\Delta(G) = \Delta$。则

$\chi'(G) \geqslant D$ 。



4 边色图

二分图的边着色

定理 21.如果G是二分图且Δ(G) = Δ,则χ′(G) = Δ 。

证明。通过对大小的归纳。设 我= uv 是 的边缘。 G

个-边着色 H = G e Δ我们假设有一 {M1, M2, ..., MΔ}。

如果某些颜色可用于 ,

可以将该颜色分配给 ,从而得到 的 -边着色。Δ因此我们可以假设每种颜色都表示在 或u G

G e Δ − 1 在 在。

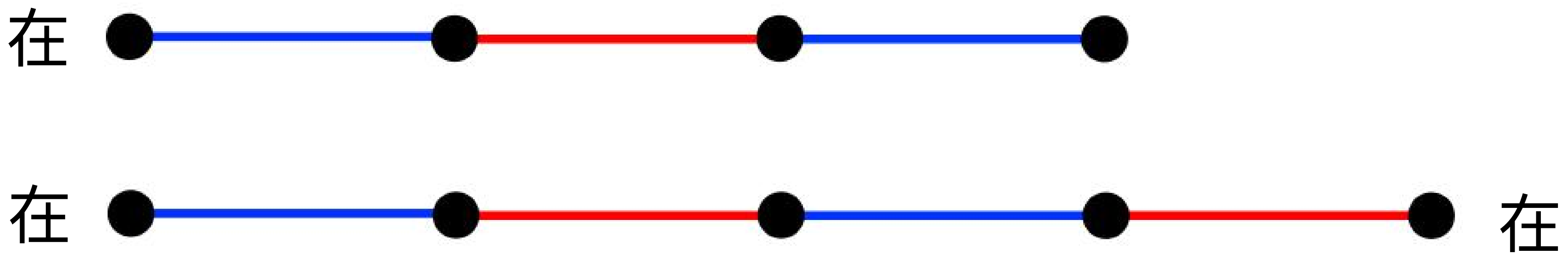
因为的度最多为 ,

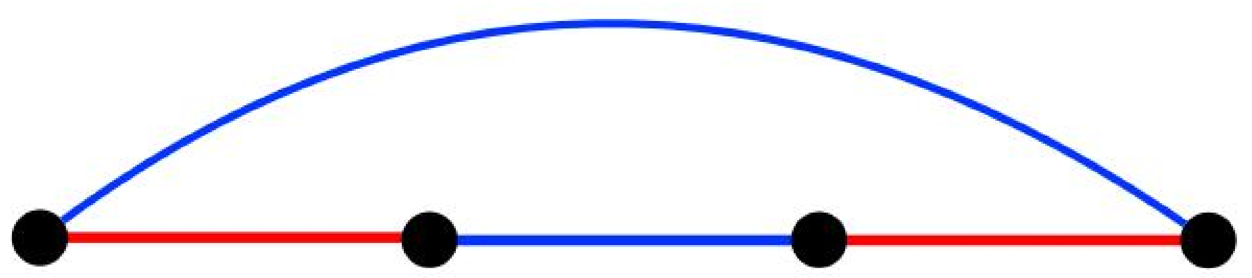
我至少有一种颜色可供选择 , 因此代表 在。

同样,至少一种颜色可在 杰 在 在。

考虑子图 $He = G[Mi \cup Mj]$ 。

因为在u'中有在一次 他，包含的组件是一个 -path 。 在 点





不会终止j P止因为如果终止,它将是偶数长度,以颜色为 在。

G 的边开始 杰

以边色结束且i P + e将是G中奇数长度的循环 ， ，

与二分假设相矛盾。

交换上的颜色,我们得到一个新的-边着色,其中P是颜色,并且将颜色分配给j e D H

在 在。

，我们获得了 的 -边D着色。 G

Machine Translated by Google

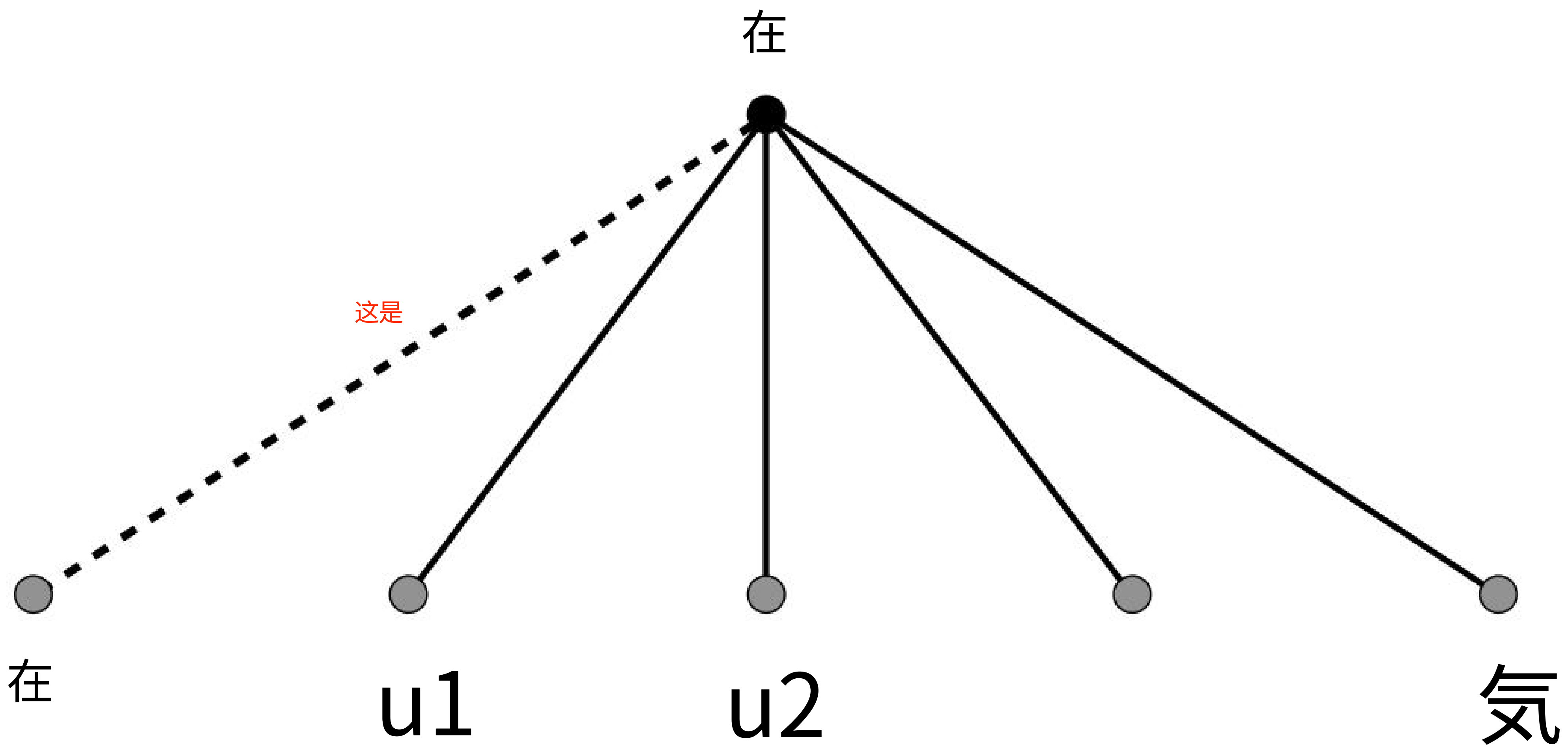
定理22 (Vizing).对于任何简单图G ,且$\Delta(G) = \Delta$， $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$。

引理4. 设是一个简单图G,其顶点为kk ⩾ Δ $\Delta(G) = \Delta$ v G e， ， 一个

的边与G G e相关,假设有一个 在，和一个整数k 。

色,其中v G中的每个邻居 C

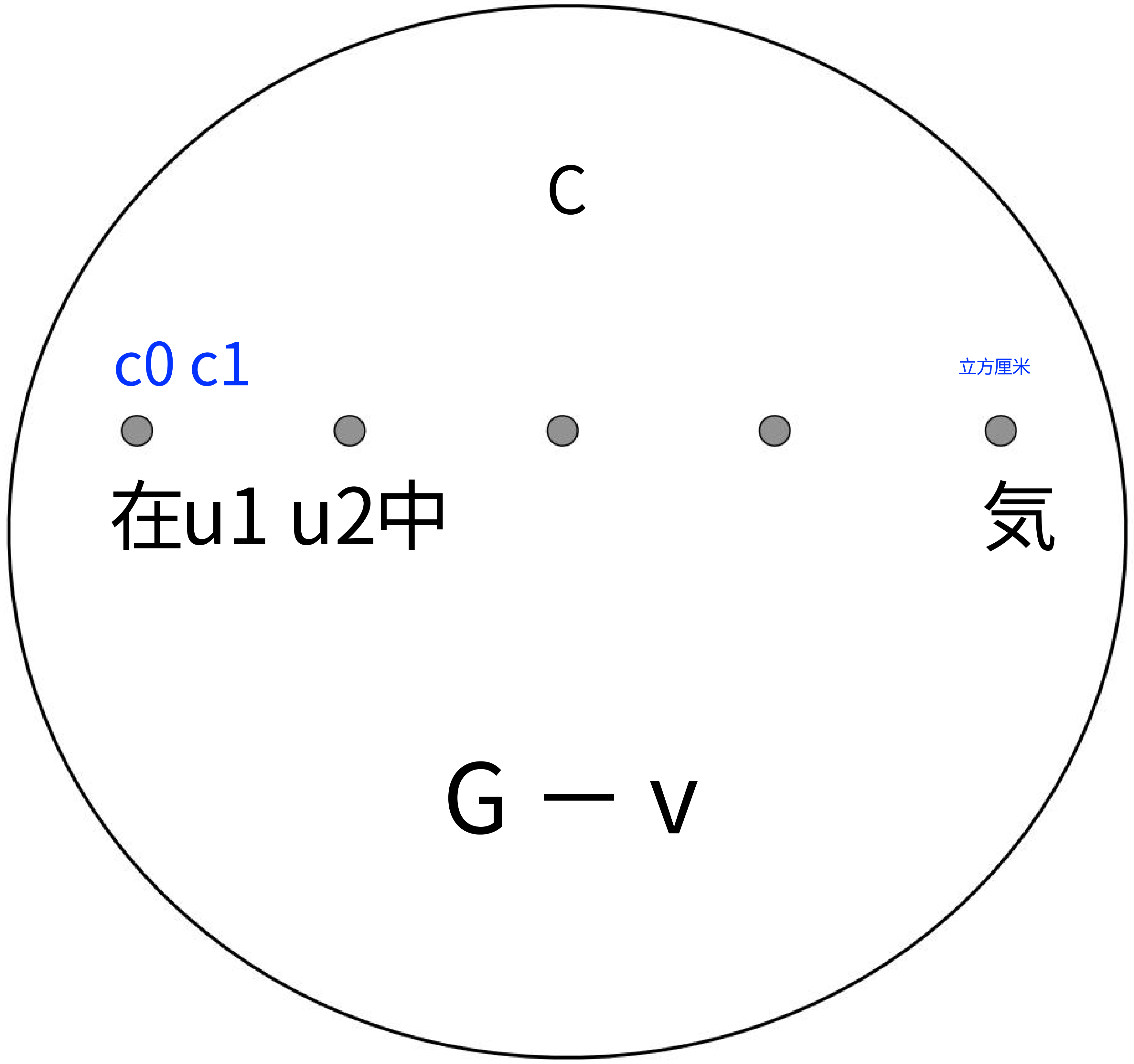
至少有一个可用颜色。则为 -edge-colorable。 Gk

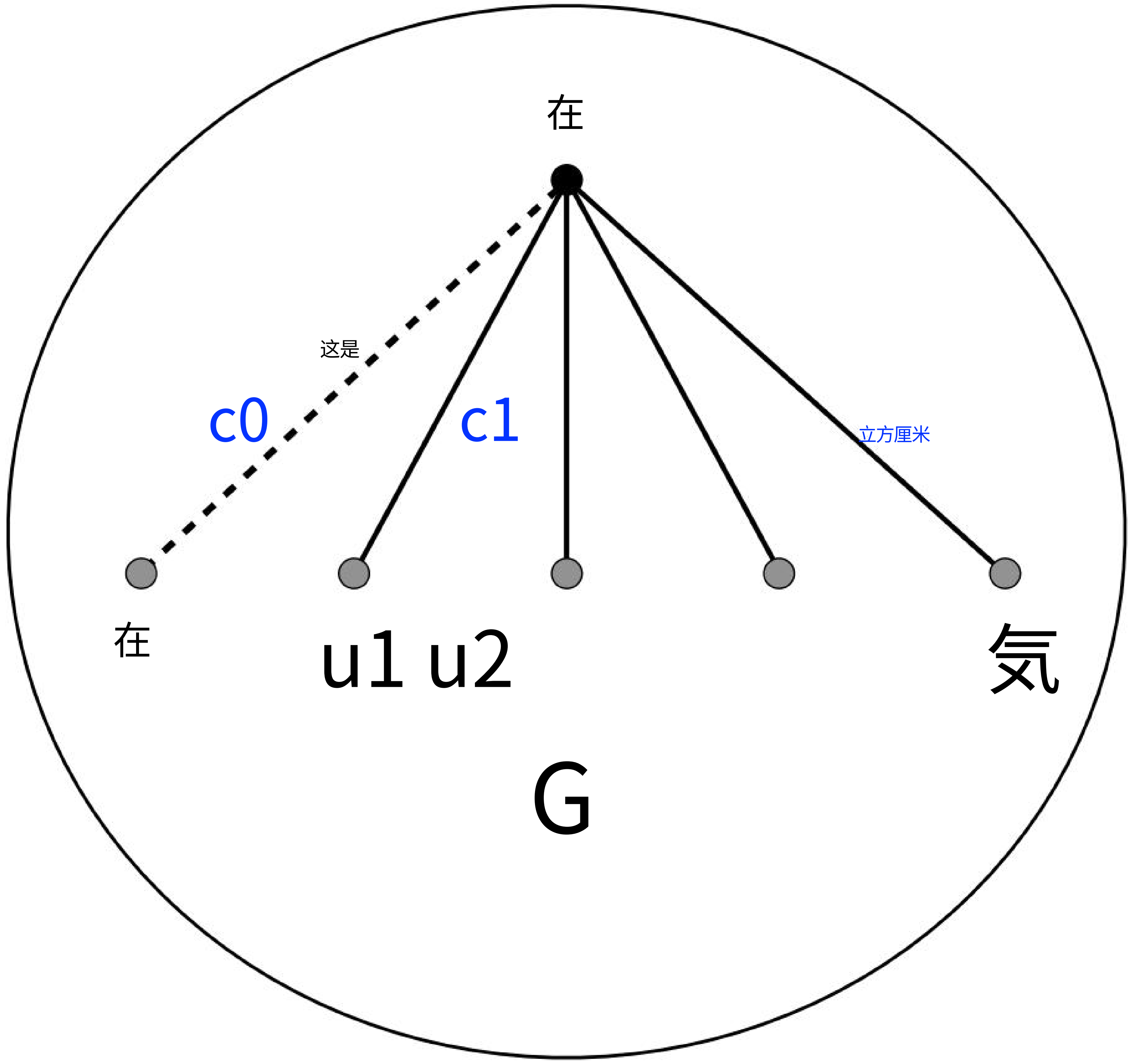


证明。考虑对的限制 c cG − v 。

如果c0在 有空且在 有空，则ci 在 用户界面 $c_i \neq c_j$ 为了 $0 \leqslant i < j \leqslant \ell$ ，

然后





为了方便起见,研究二分图H[X, Y] ，在哪里 X = NG(v) 和

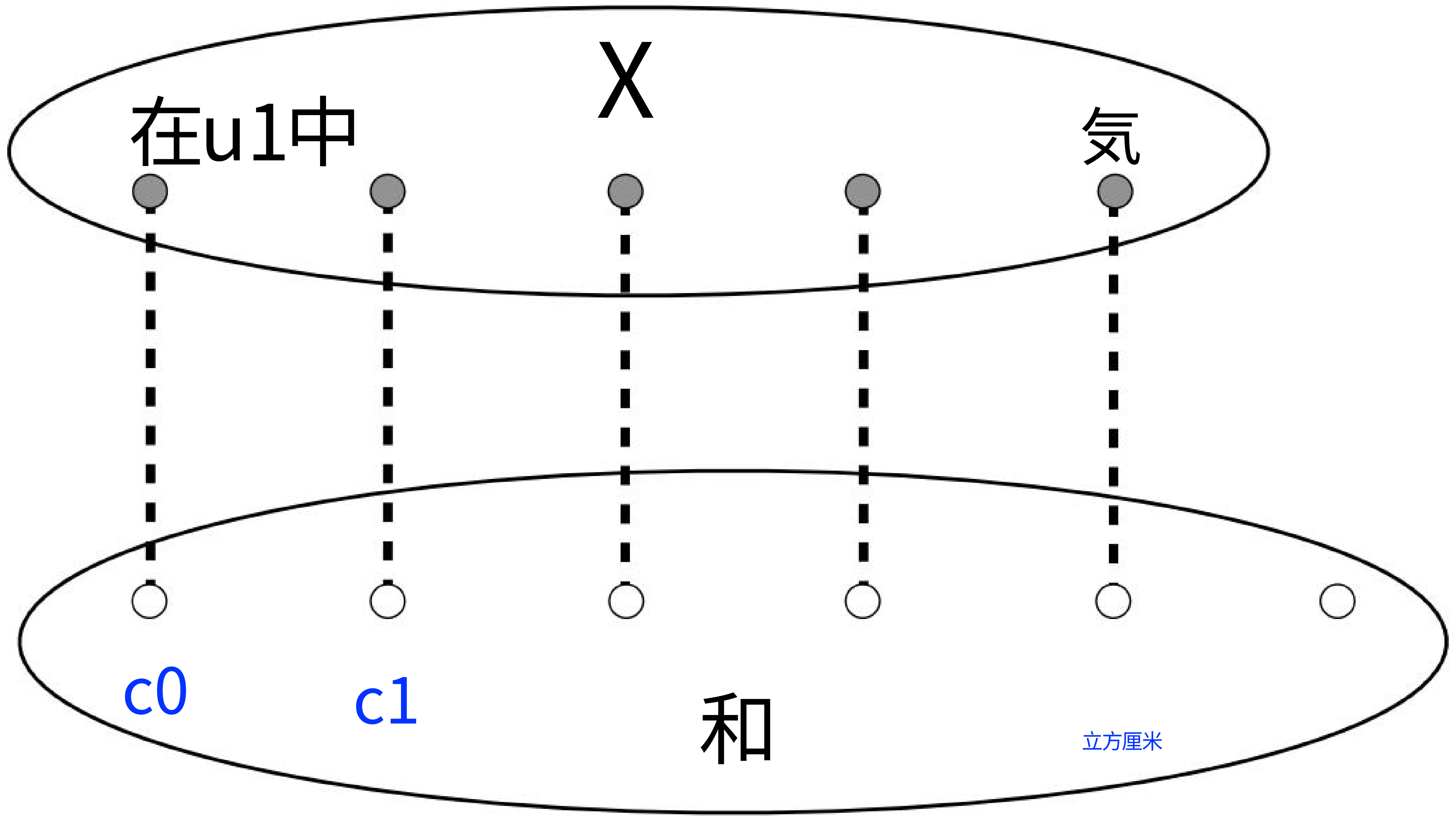
Y = {1,2,...,k}在限制 ，并且顶点x ∈ X和颜色i ∈ Y相邻,如果颜色为 我

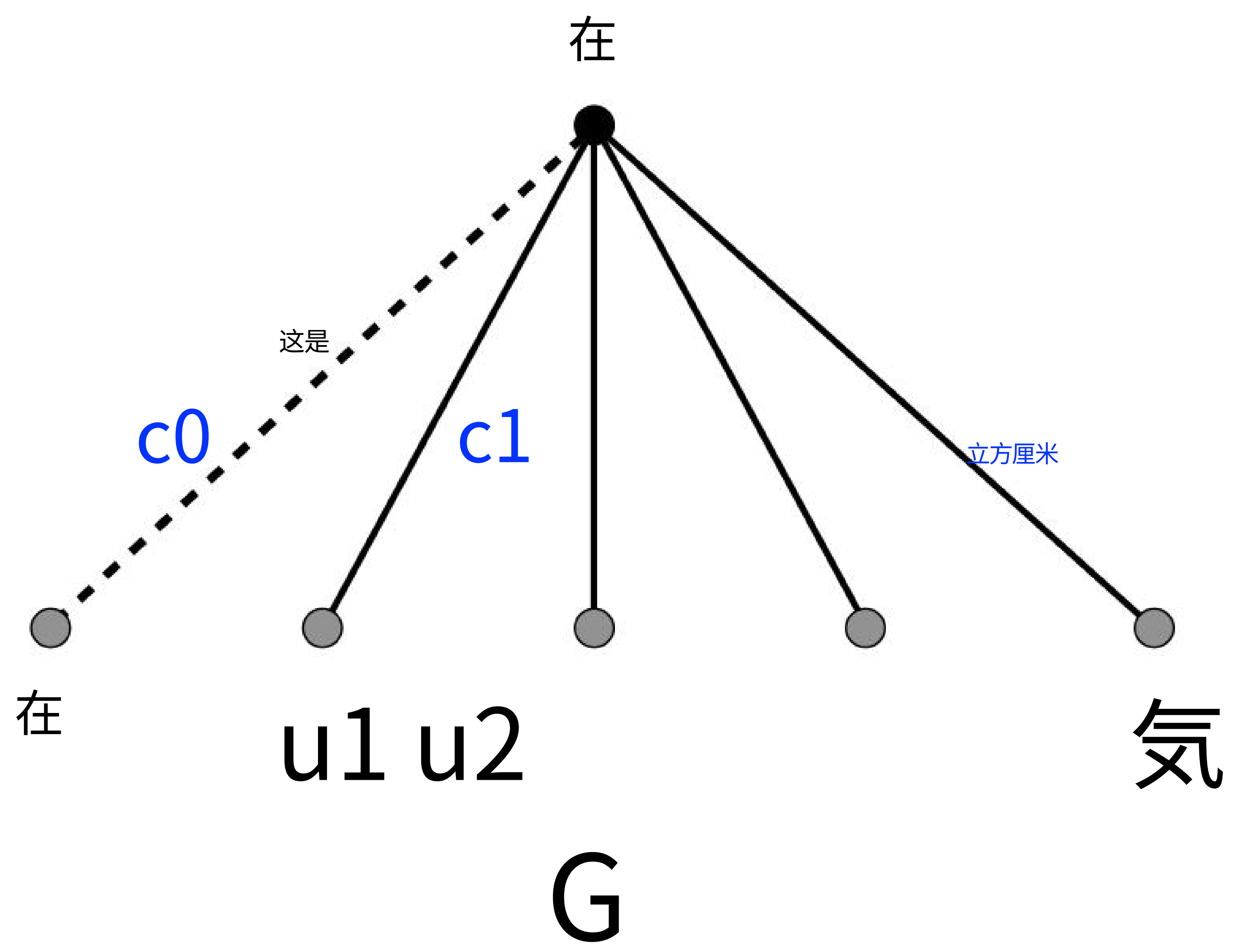
为c G − v的顶点处可用 X C 。

H X 钾 G

如果有匹配覆盖,那么我们可以通过将其与结合来获得边着色:

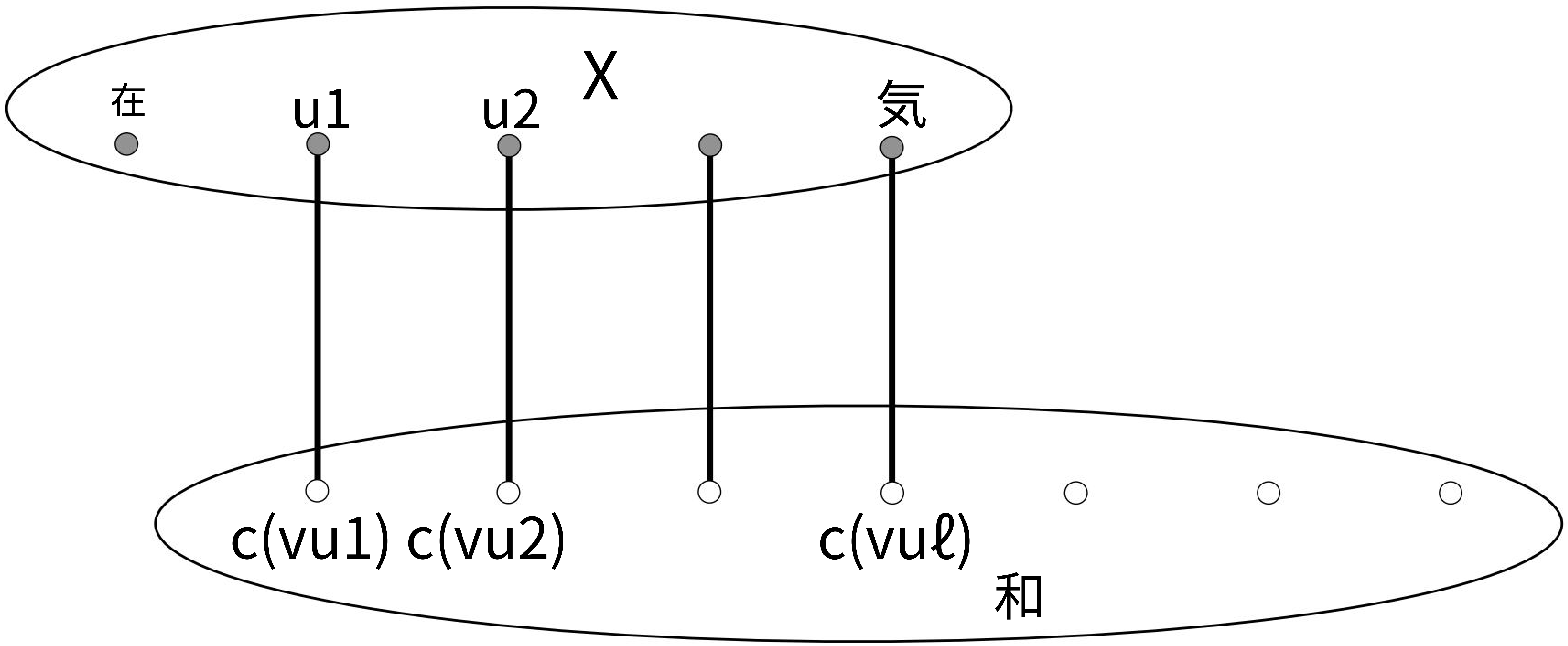
C





特别地,对于任何的 ,边的颜色在 $u_i v u_i$ 包含匹配 $G - v, H$ 所以

$$M = \{(u_i, c(fun)) : 1 \leqslant i \leqslant \ell\}。$$



我们可以假设没有匹配的覆盖H。 X

我们的目标是将着色修改为相应的X C C

二分图确实包含匹配H覆盖。

根据假设,每个顶点都与该顶点的至少一条边相关,并且该顶点也与至少一条这样的边相 M , 和

关,因为 在

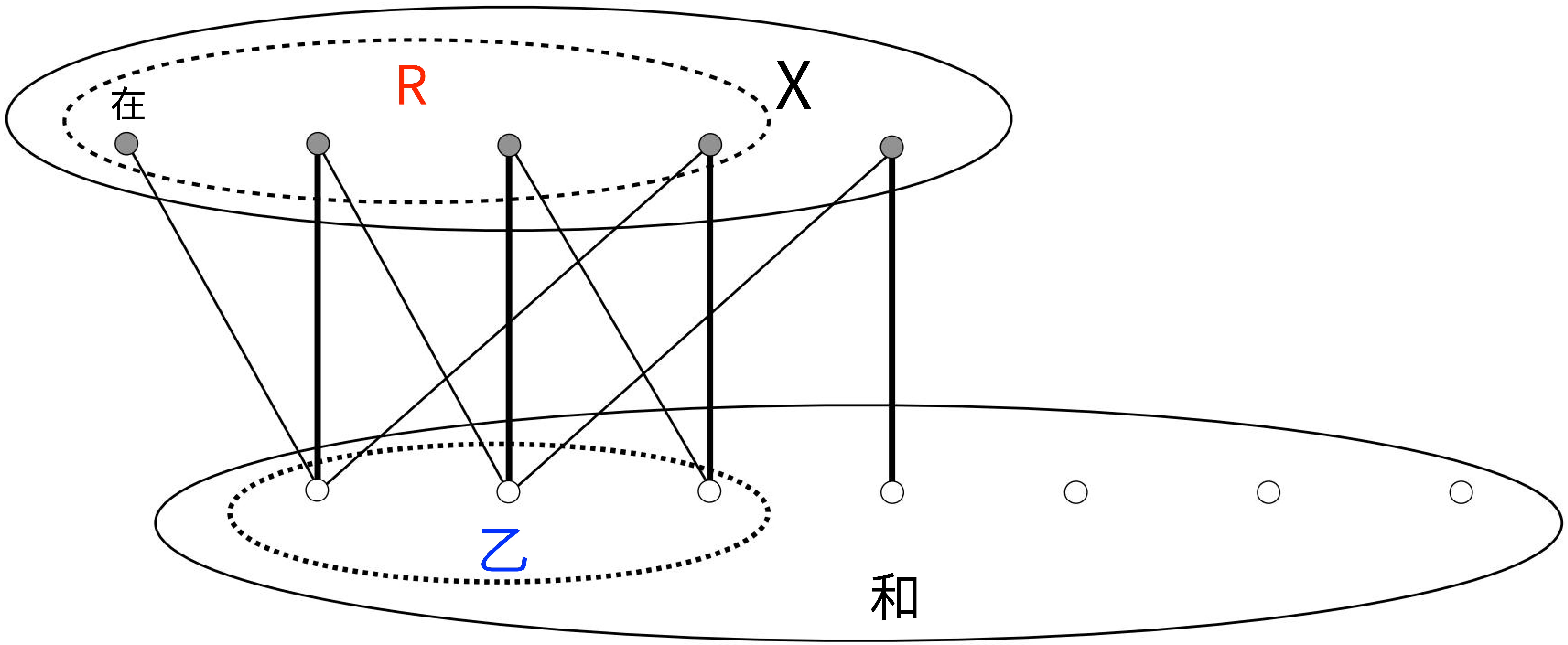
$$dG \quad e(u) = dG(u) - 1 \leqslant \Delta(G) - 1 \leqslant k - 1。$$

因此, X的每个顶点都与H M的至少一条边相关。

表示为 和 休姆 可通过 -交替到达

$R = X \cap Z$ $B = Y \cap Z$ 。 就像霍尔定理的证明一样,路径、集合和

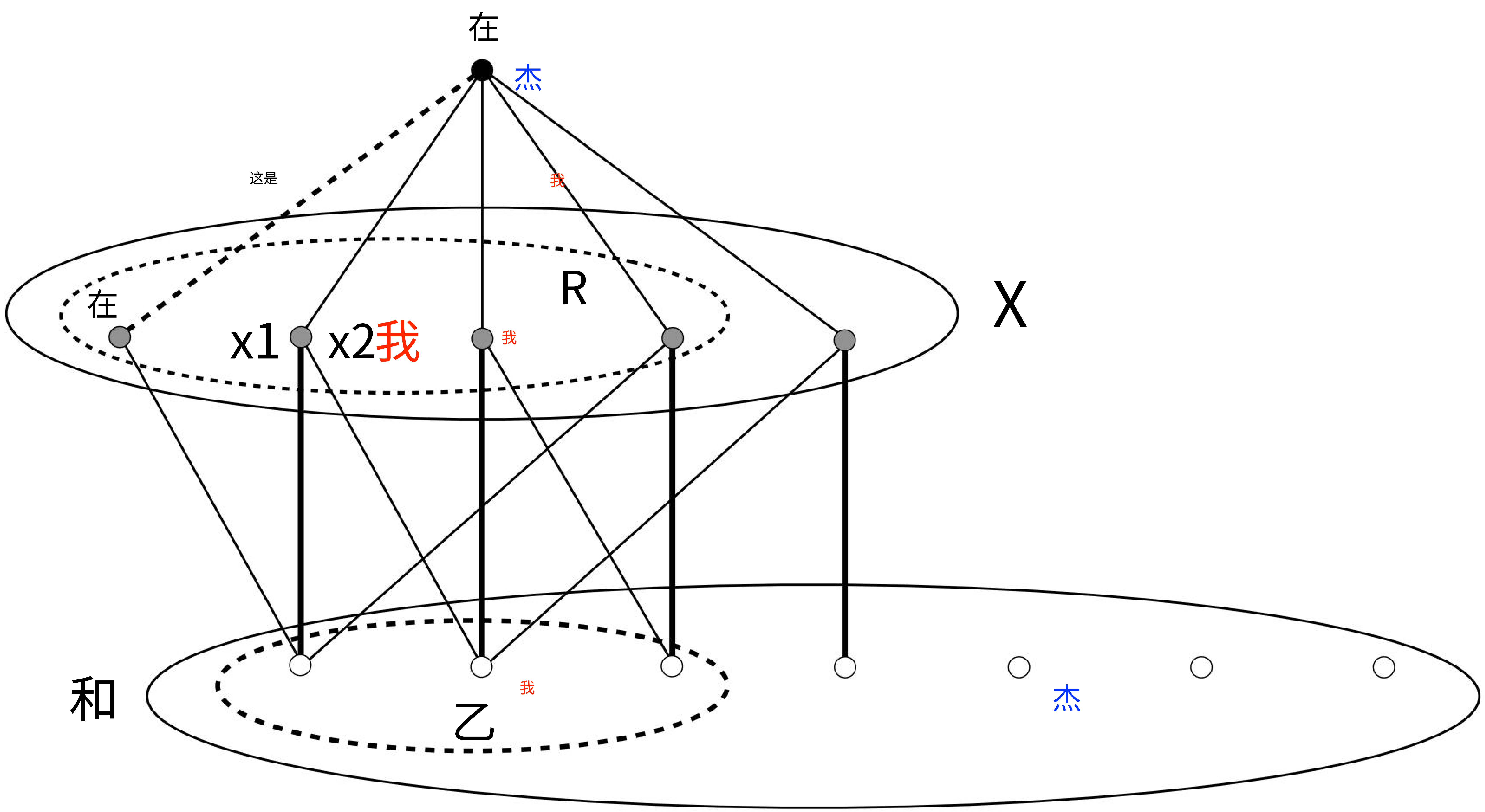
$N_H(R) = B$ B并且与 M R {u} , 所以 $|B| = |R| - 1$ 。



因为每个顶点至少有一种颜色可用,并且某个颜色i ∈ B在两个顶点x1, x2 R上可用R |B|=|R| − 1 ,
的。

请注意,每种颜色都表示为 乙 在,因为在M下匹配B

其中R {u} i具体来说,颜色代表 在。



因为

dG e(v) ⩽ k − 1 ，颜色可供选择v j有 。

注意到 不在，因为j中的每个颜色都表示在 Z 乙 在。

因此，在每个顶点都表示 杰 R ，特别地，在和x1 x2 。

让我们回过头来考虑图。根据上述观察， G ee

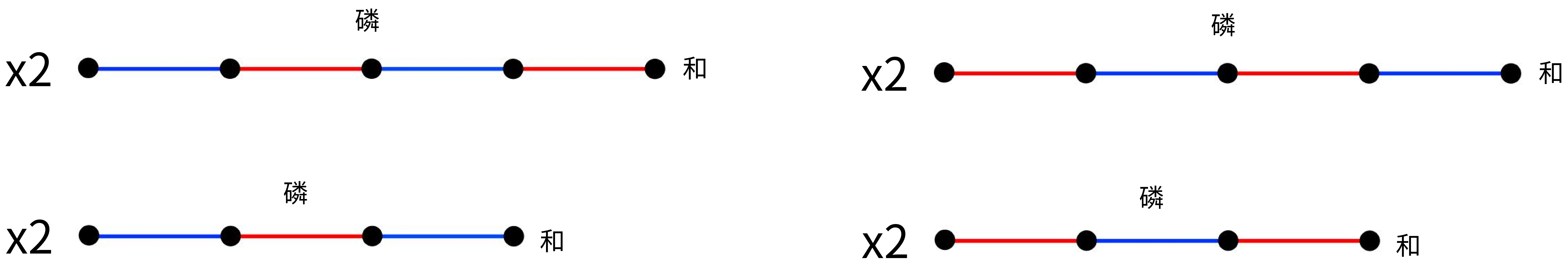
三个顶点和v x1 x2 , ，是 -path 的结尾 ij 。

考虑从 伊 在。显然，这条路径不能同时终止于

和。我们可以假设从开始的路径不会终止于x1 x2 x2 在 ，

x2开始的 -路径的终端顶点 ij P ，设为从 。

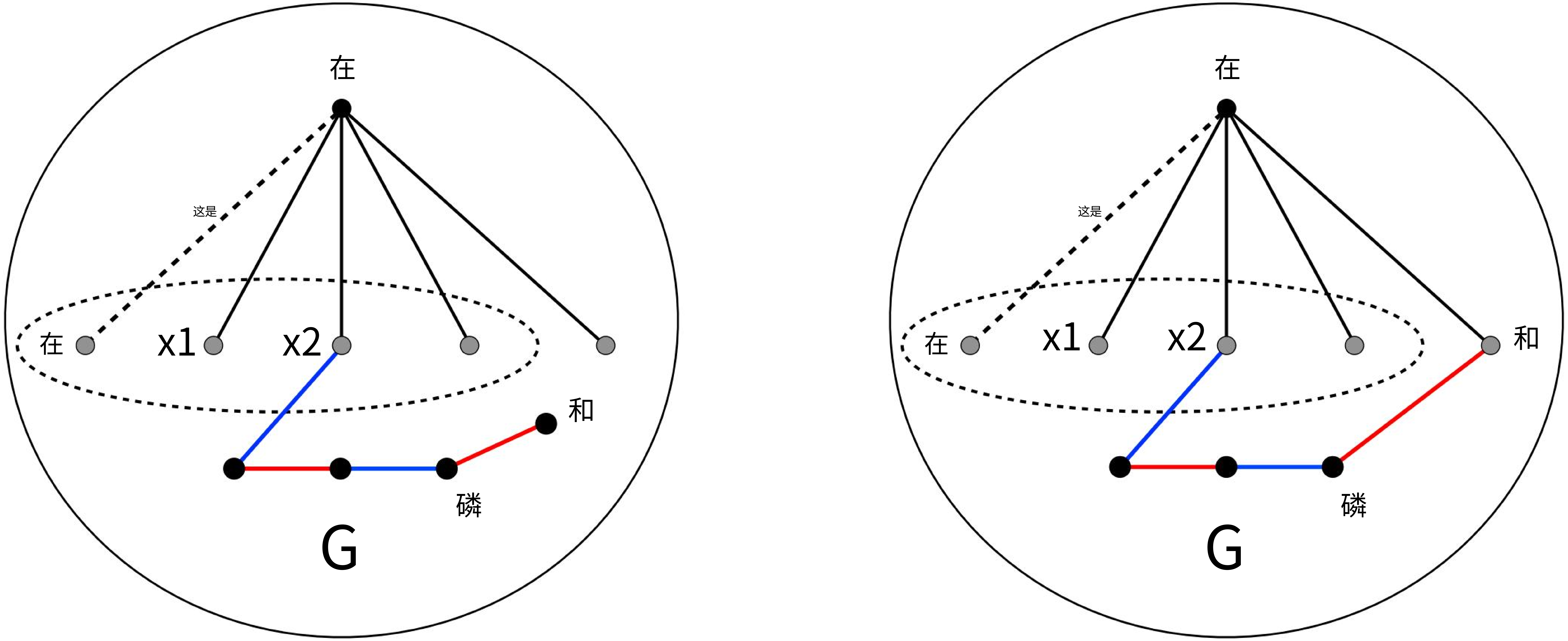
交换颜色并打开j P i ，我们得到了一种新的颜色 c′G e 。



H′[X, Y] c′ 是对应于 的二分图。 唯一的区别让H H′在 和的边集中出现在 和 可能出现处（如果zz ∈ X

)此外， x2 H′

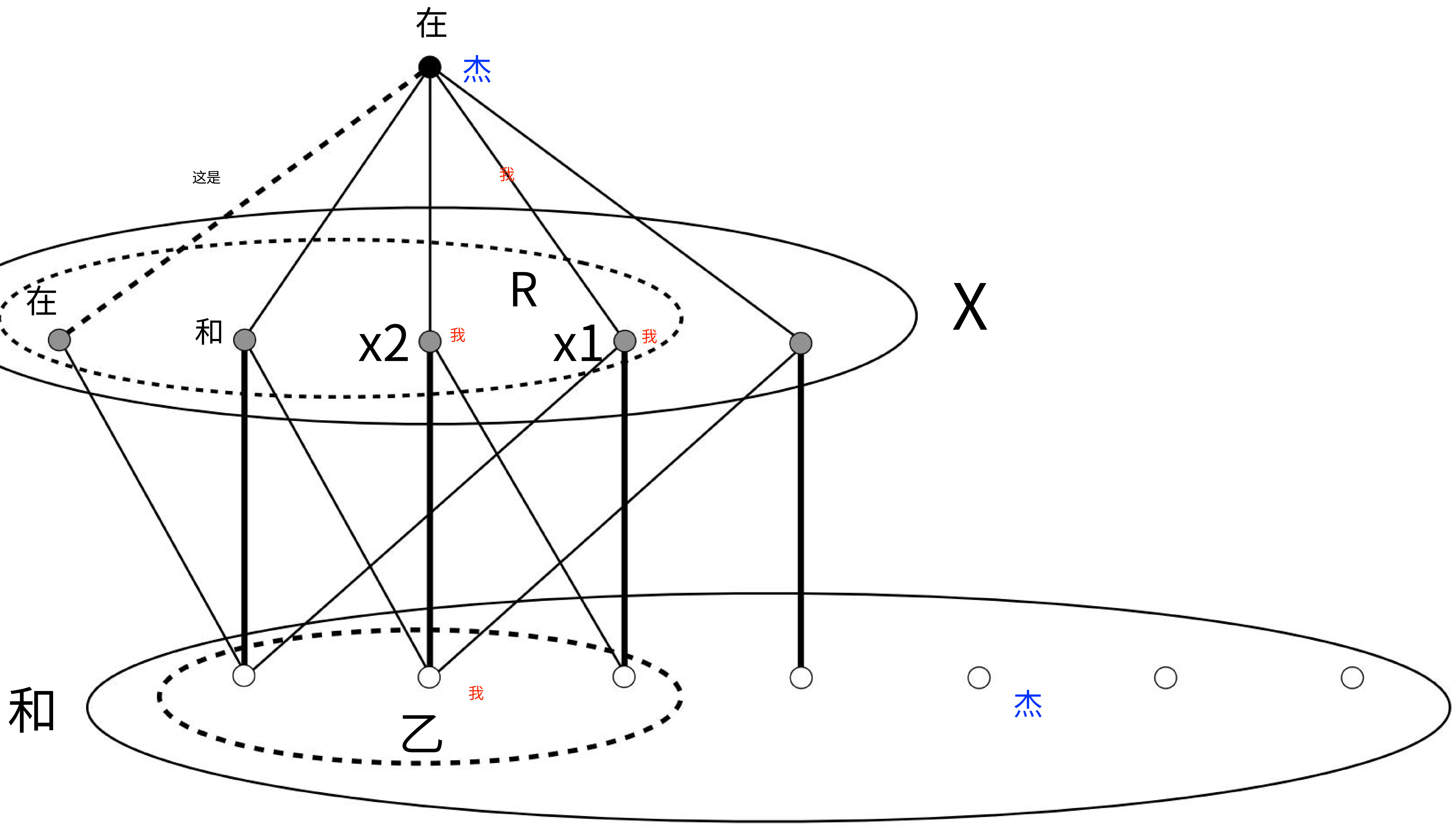
因为不位于PM′上，所以匹配仍然是匹配 ， 。



右 右 Q z ∈ R uQz H′ ux2 QH 。

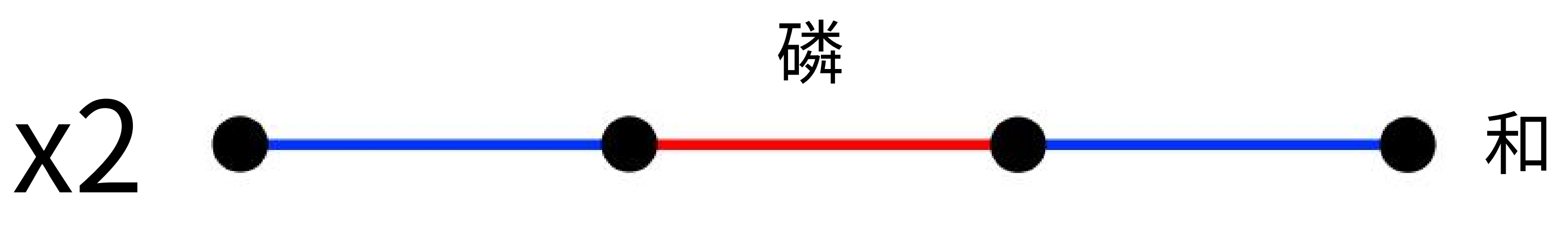
如果位于 仍然是 中的-交替路径,则路径z M 米 ,

因为它以 的边缘终止。

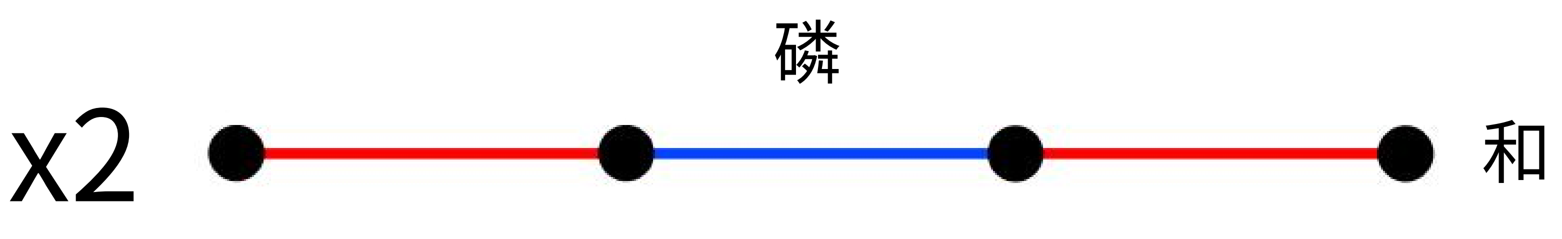


此外,由于不在 j 乙,路径最初必须在i处终止 磷 和

颜色为j的边 ,现在终止于色彩的边缘。



底色c



着色c′

关于着色,因此颜色在z处可用 ′ j ,

并且是Q′ = uQzj M H 。

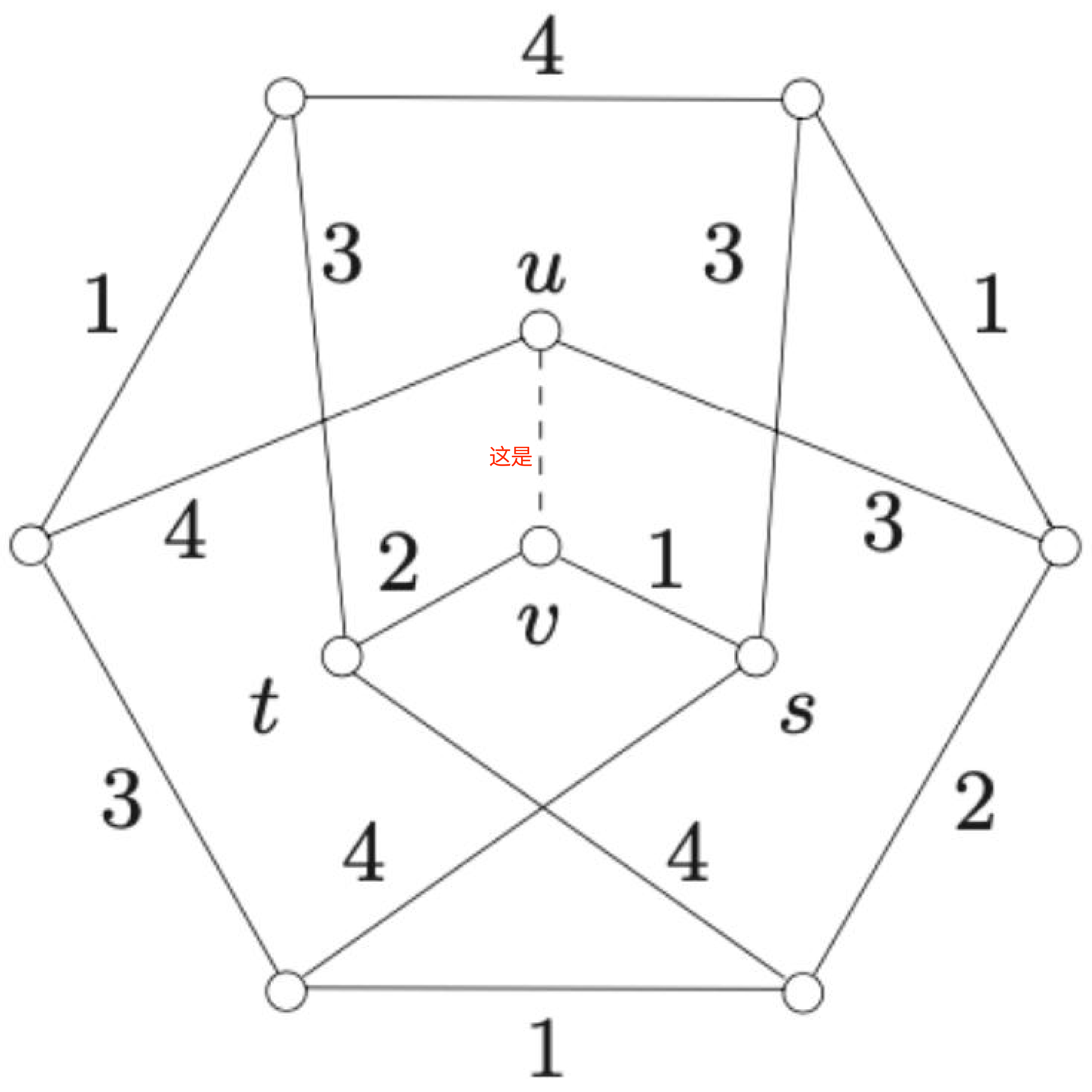
如果不位于 问,那么是Q′条增广路径 uQx2 j 1M 和 H 。

放 $M' = M \,\Delta\, E(Q')$ 。

然后是匹配,覆盖了 M′ H X 。

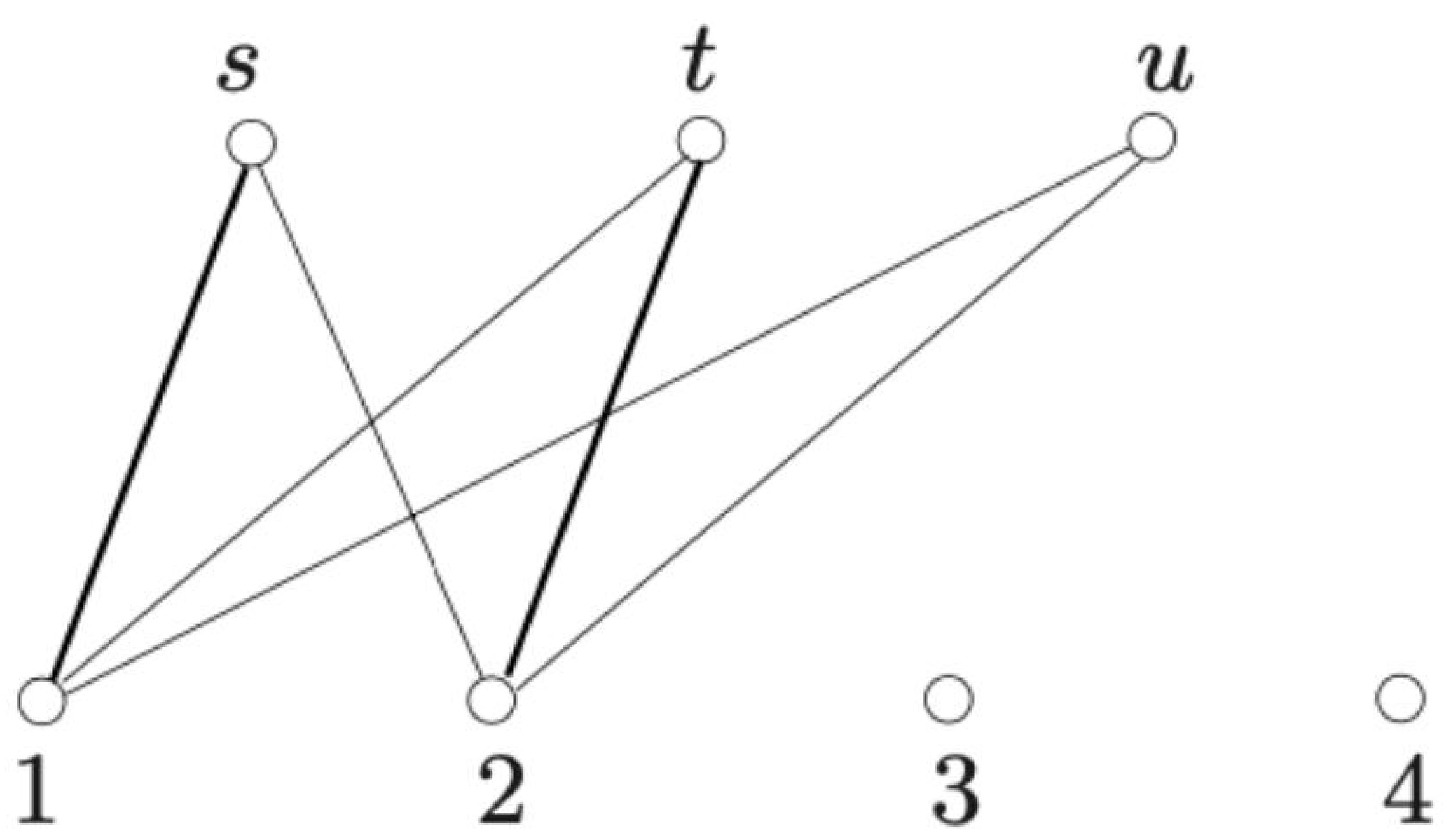
例4. 彼得森图的 4 边染色

G e的4 边着色c



(a)

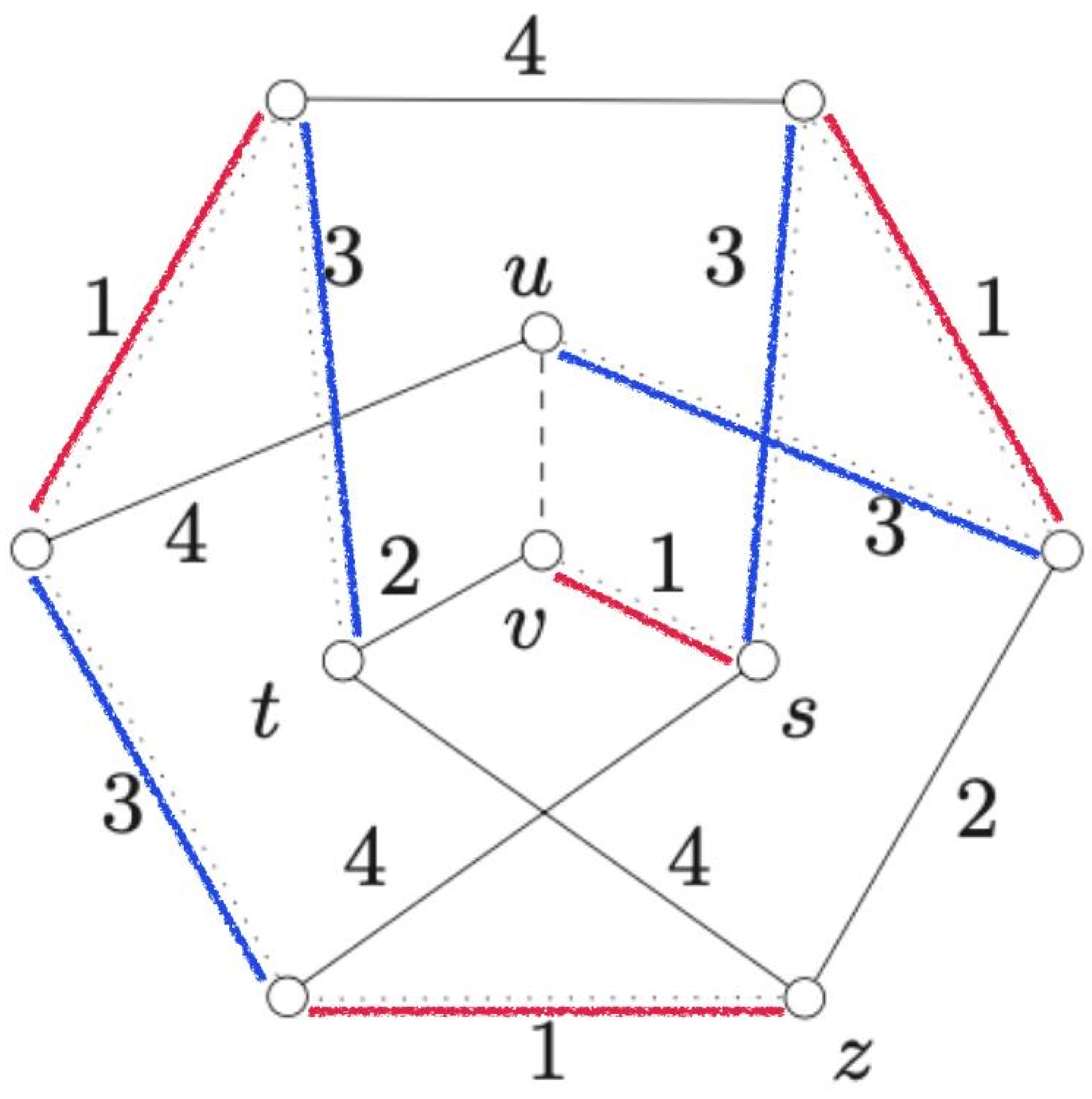
对应的二分图H



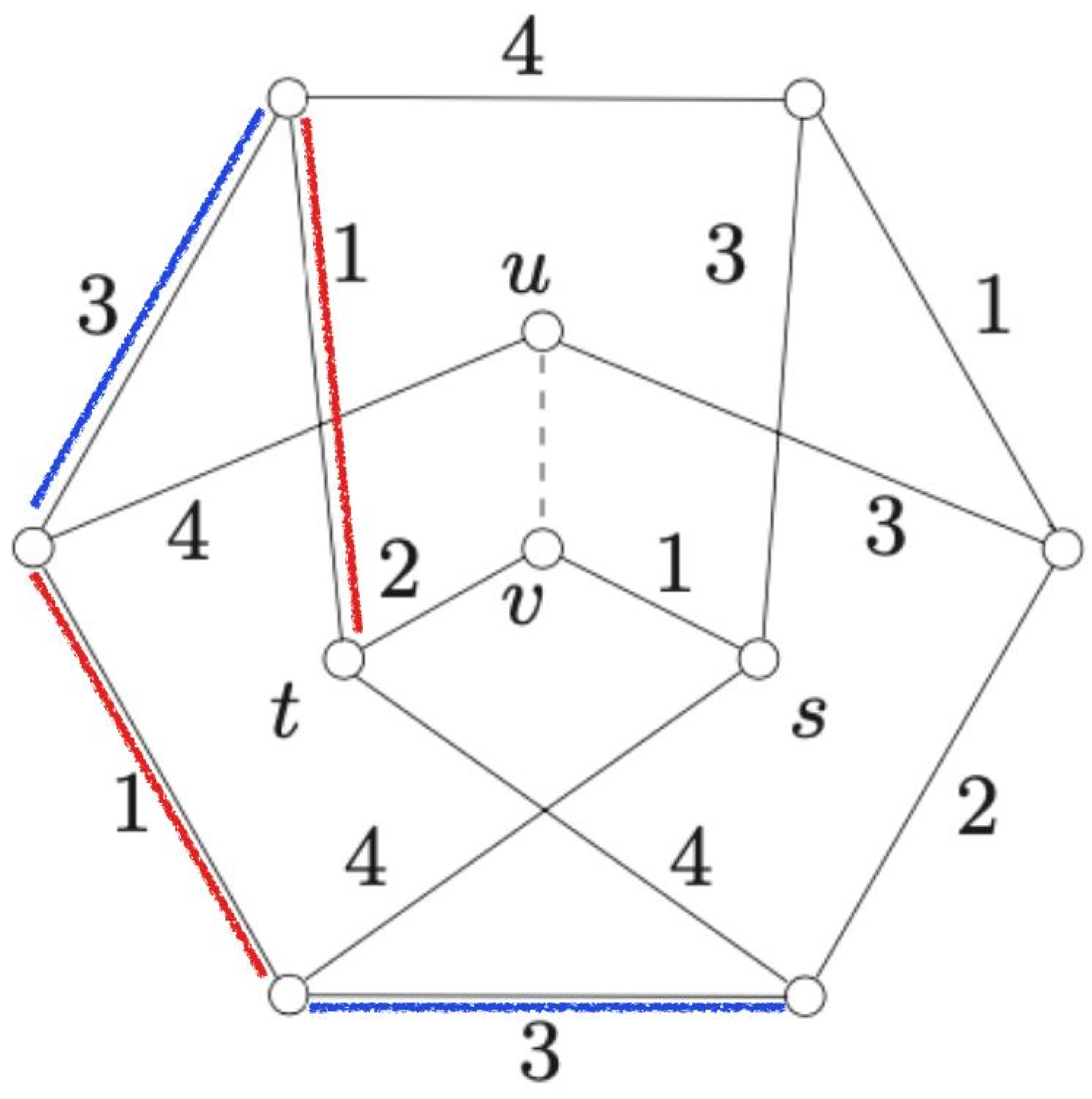
(b)

从 (到伊) 的 -路径和ij P tz从 到 的 -路径

G e的4 边着色c'



(c)

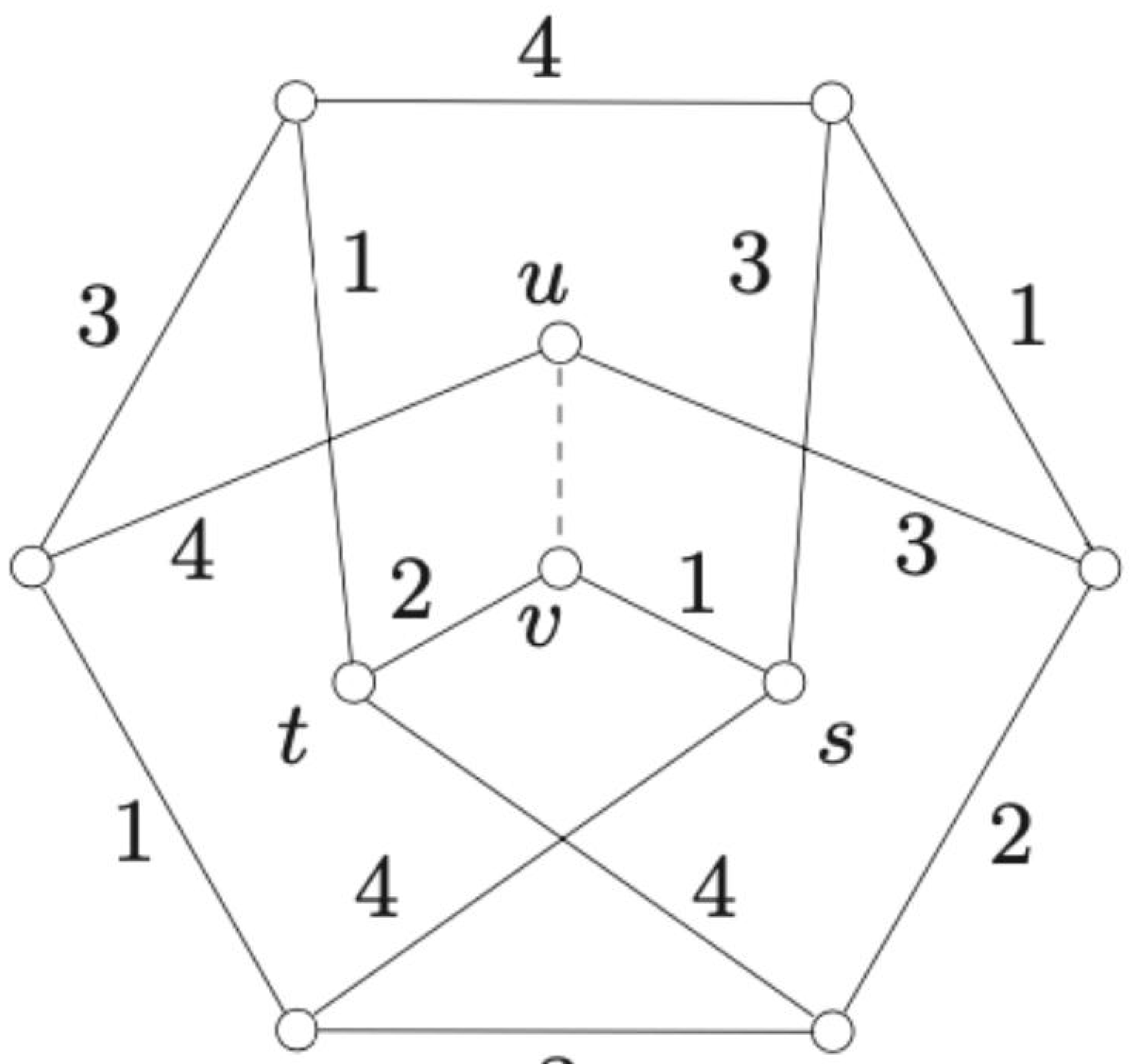


(d)

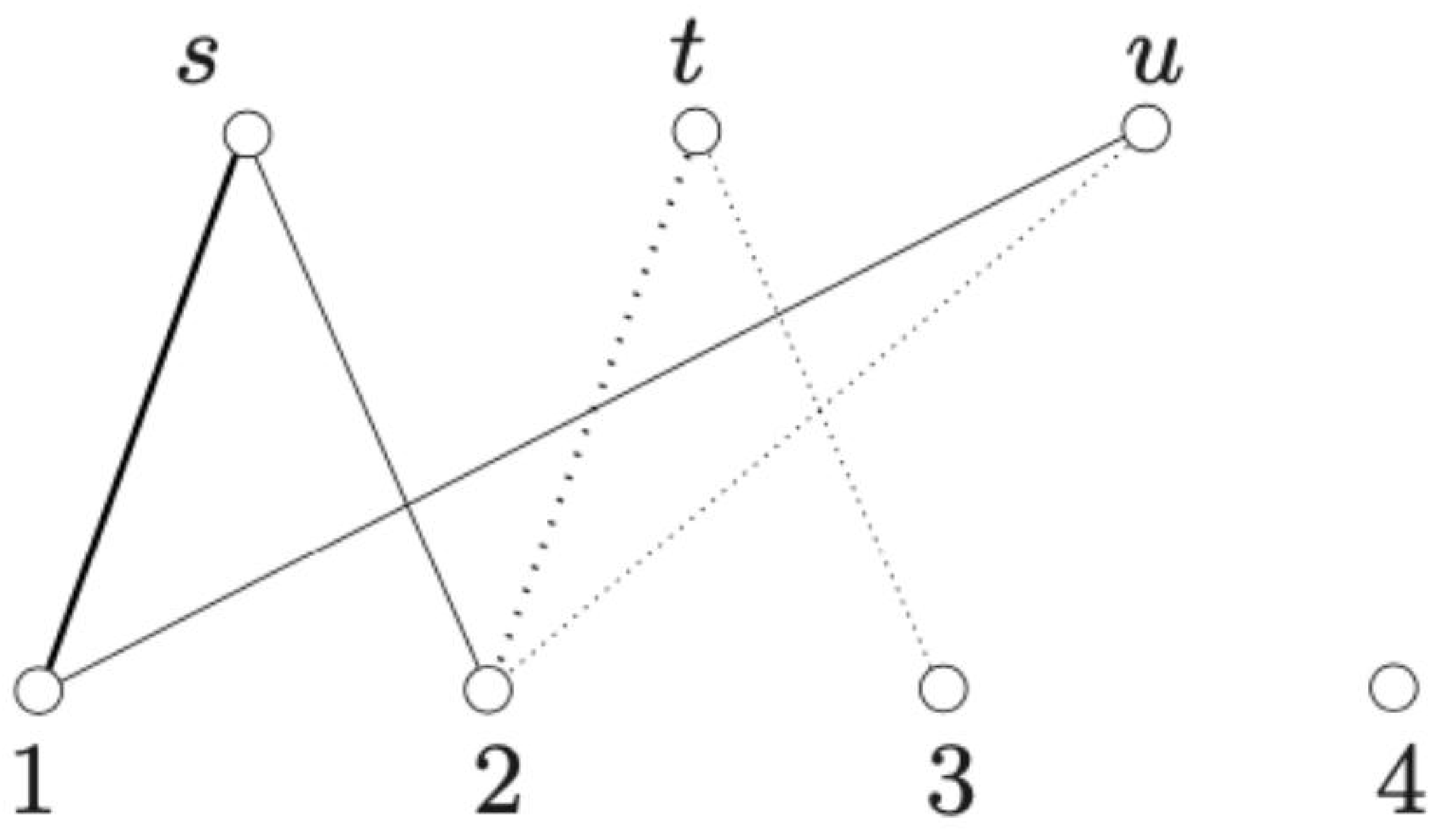
G e的4 边着色c′

对应的二分图，H

增广移路径

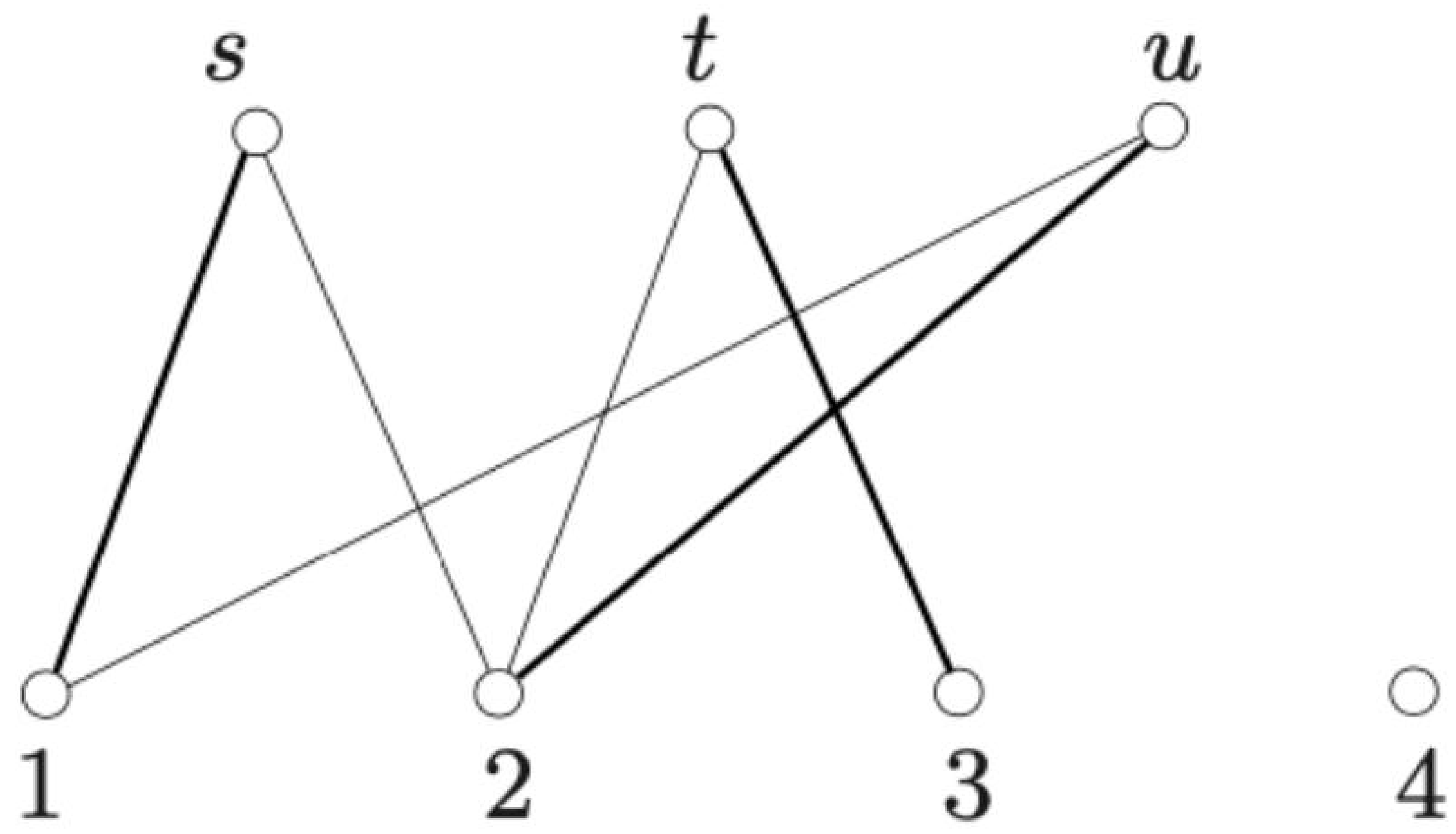


(d)

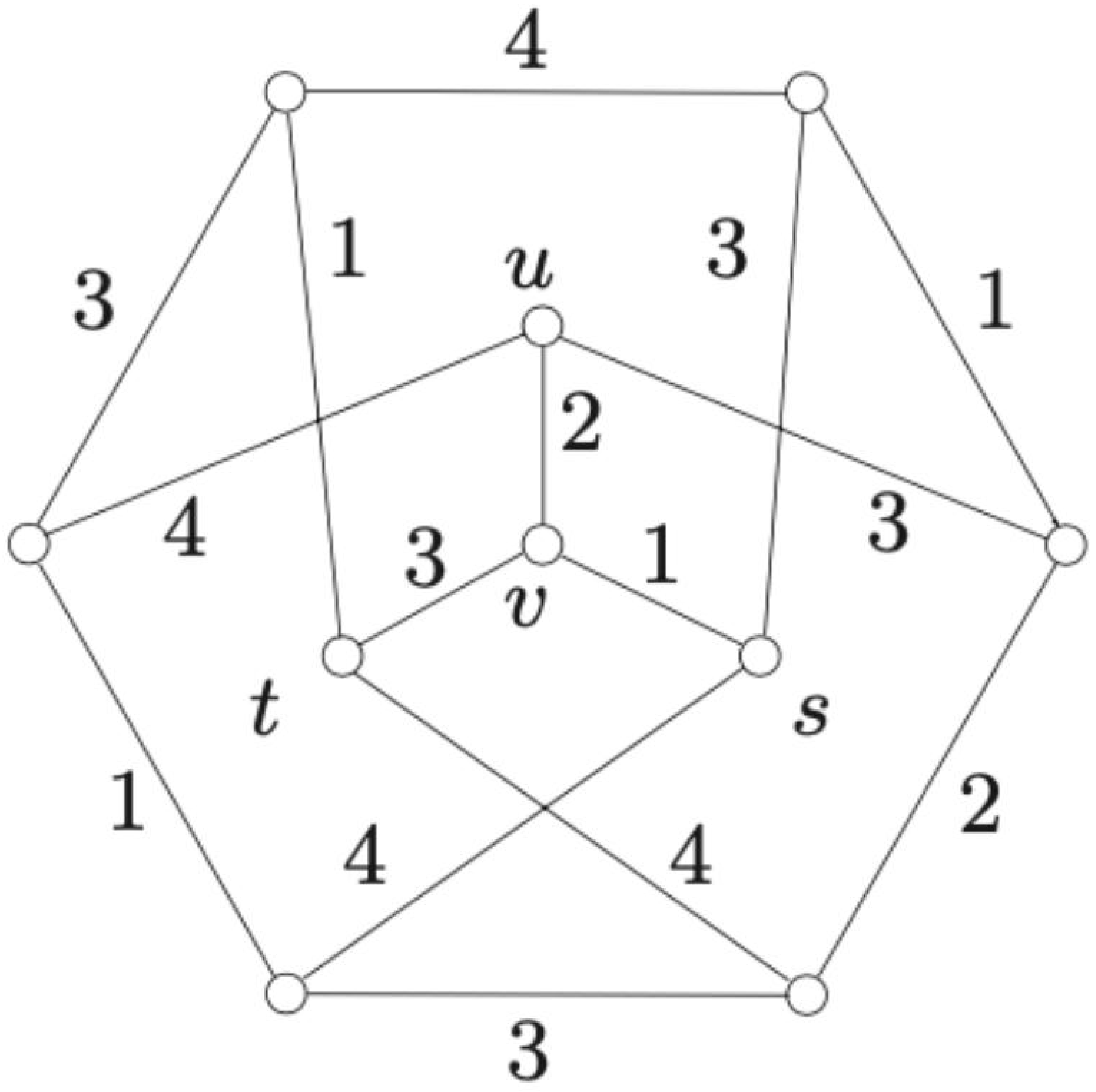


(e)

H′中的匹配覆盖X得到的G的 4 边着色



(f)



(g)

练习 7。

1.如果G是 Petersen 图，则证明$\chi'(G) = 4$。

2. 设是阶数为 、大小为 的图，最大度为 。证明 $m >$ $n/2\Delta$ 米 $\chi'(G) = \Delta + 1$ D
如果那么 G n , 。