图的顶点着色

设G为图。G的k-着色是映射

$$c : V(G) \quad \{1,2,\ldots,k\}。$$

如果没有两个相邻的顶点被分配相同的颜色,则着色是正确的。

G

若图具有适当的 Gk -着色,则该图是-colorable 钾 (-可染的) G。 钾

图为 -可着色的最小整数称为G的钾色数(色数),则该图被称为-色度的 Gk (-色 的) 。

, 并表示 $x(G)$ 。

如果 $x(G) = k$, 斤 公 钾

示例1. 考试安排

大学里的学生每年都会参加所有课程的考试,如果课程中有共同的学生,那么不同课程的考试自然不能同时进行。

如何才能将所有考试安排在尽可能少的平行场次中进行?

为了找到这样的时间表,请考虑一个图,其顶点集是所有课程的集合,如果两门课程发生冲突,则它们由一条边连接起来。G

显然,独立的集合对应于无冲突的课程组。G

因此,所需的最小并行会话数是色度G的数量。

示例2. 化学品储存

一家公司生产化学品。这些化学品中的某些对是不相容的，如果相互接触会引起爆炸。作为预防措施，该公司希望将其仓库分成几个隔间，并将不相容的化学品存放在不同的隔间中。仓库应划分成的隔间数最少是多少？ {v1， v2， …， vn}

我们通过连接两个顶点Ai Aj得到顶点集上的图G

并且当且仅当化学物质和不相容时。vi

很容易看出，G 所处的隔间的最少数量

仓库应分割的个数等于的色数。

设为G一个图表。

如何用尽可能少的颜色找到合适的着色方式G?

贪婪着色启发式算法

1. 按线性顺序排列顶点: G

v1, v2, …, vn。

2. 按此顺序逐个着色顶点,分配给最小的 我们

正整数尚未分配给其已着色的邻居之一。

让 $\Delta(G) = \Delta$ 。可以检查贪婪算法$\Delta + 1$使用的颜色数量

启发式不超过,无论顶点的顺序如何

被提出。

2 连通图的性质

定理 17.具有至少三个顶点的图G是 2 连通的当且仅当任意两个顶点通过至少两条内部不相交的路径连接。

证明。如果任意两个顶点至少由两条内部不相交的路径连接，则G是连通的且没有割点。因此G是 2 连通的。

设为 2 连通图G。d (u, v)

我们将通过对和uv之间的距离进行归纳来证明 ，任何

两个顶点，并由至少两条内部不相交的路径连接。

如果 d(u, v) = 1 ，那么由于是 2 连通的，该边不是切边。 紫外线

因此，是连通的，并且存在一条连通路径，并且 G 一紫外线 在 在。

因此，和由两个内部不相交的路径连接 G 。

假设结果对于距离小于d(u, v) = k ⩾ 2 的任何两个顶点都成立 钾， 和
令k 。

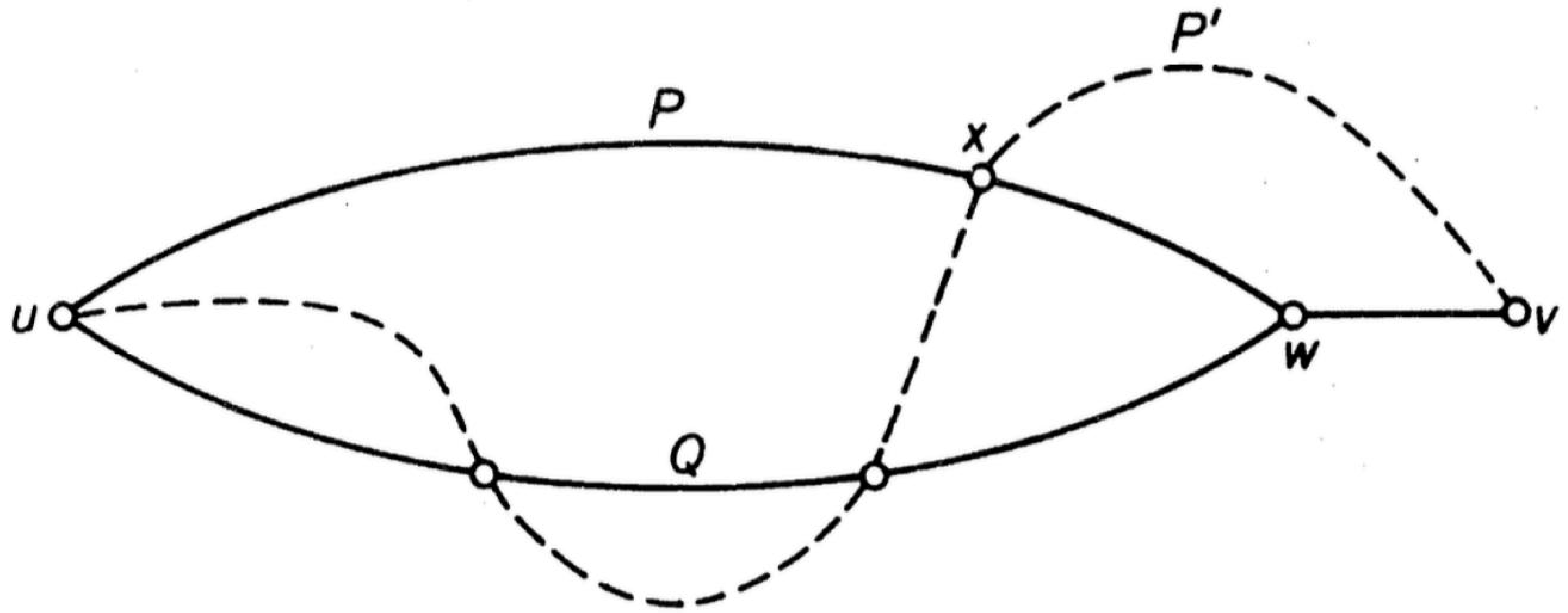
考虑(长度)为 的 -(u, v)路径，设 为d(u,w) = k − 1上的先行顶点 在 在

这条路径。由于 ，根据归纳假设，有两个(u,w)

内部不相交的 -路径和GG − w 聚酰亚胺 。

另外，由于是2连通的，是连通的，并且

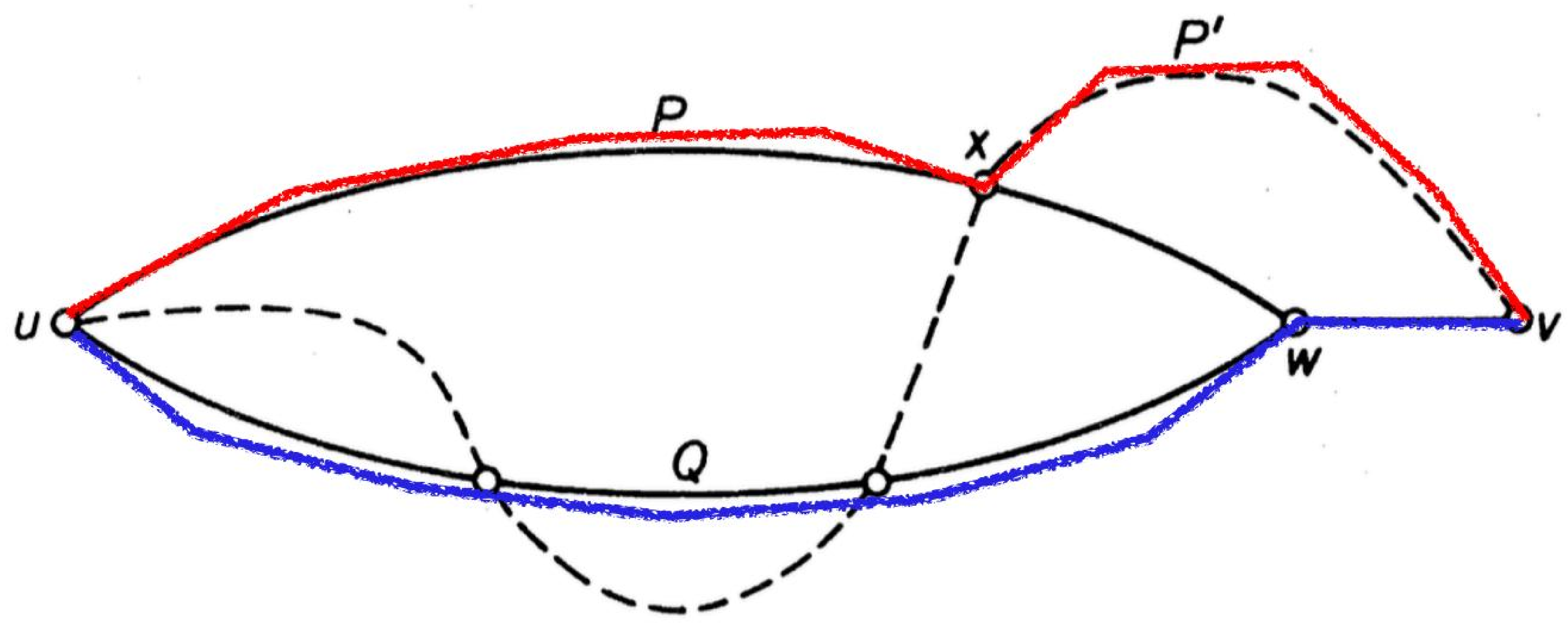
所以包含一个-路径。设是(最后)一个顶点也位于 P′ X P′P∪Q 。



由于在u P ∪ Q ，有这样一个（可能 X x = u ）。

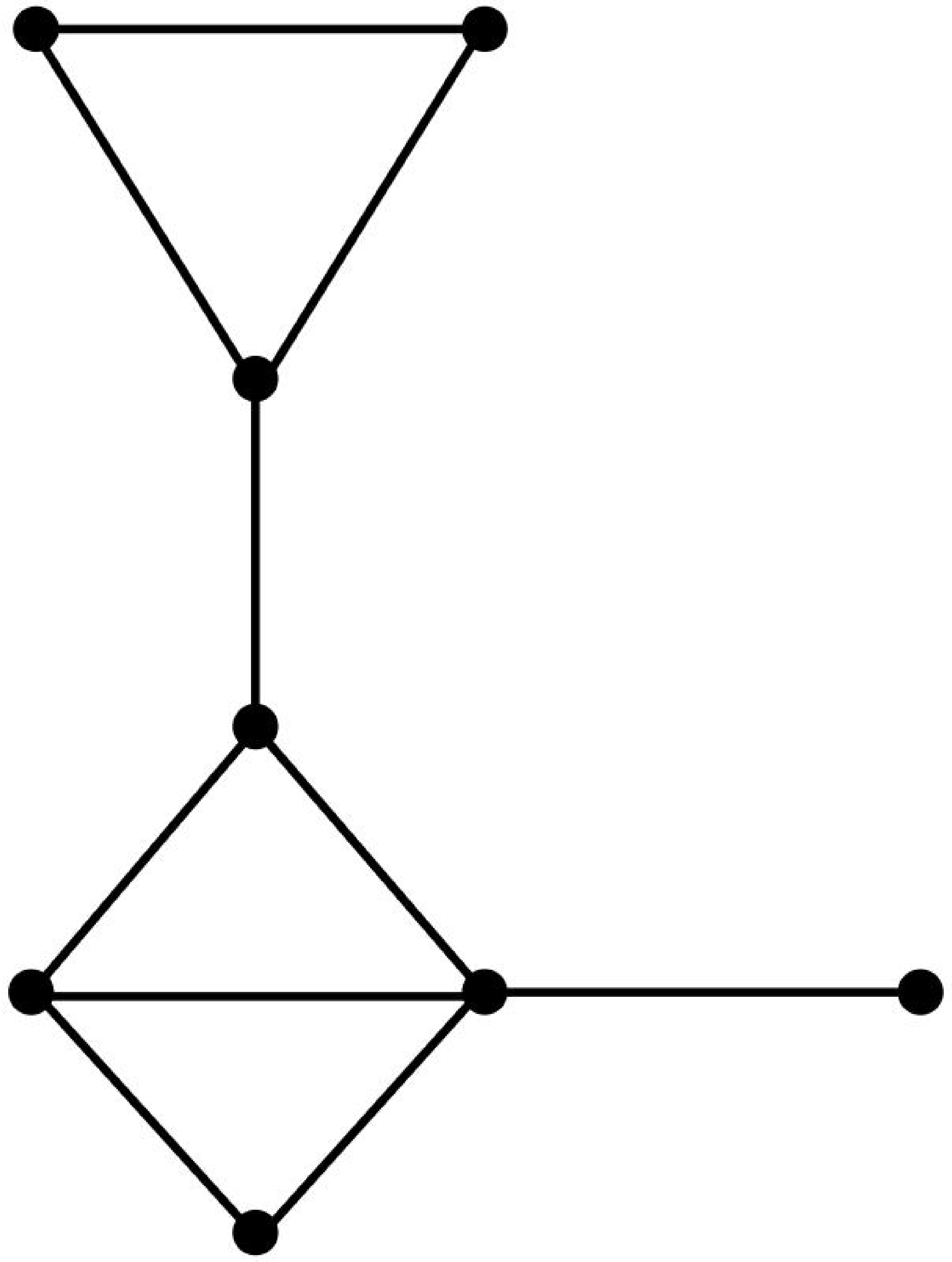
不失一般性地假设在x P中。则uPx P′ uQw 和v 在 是

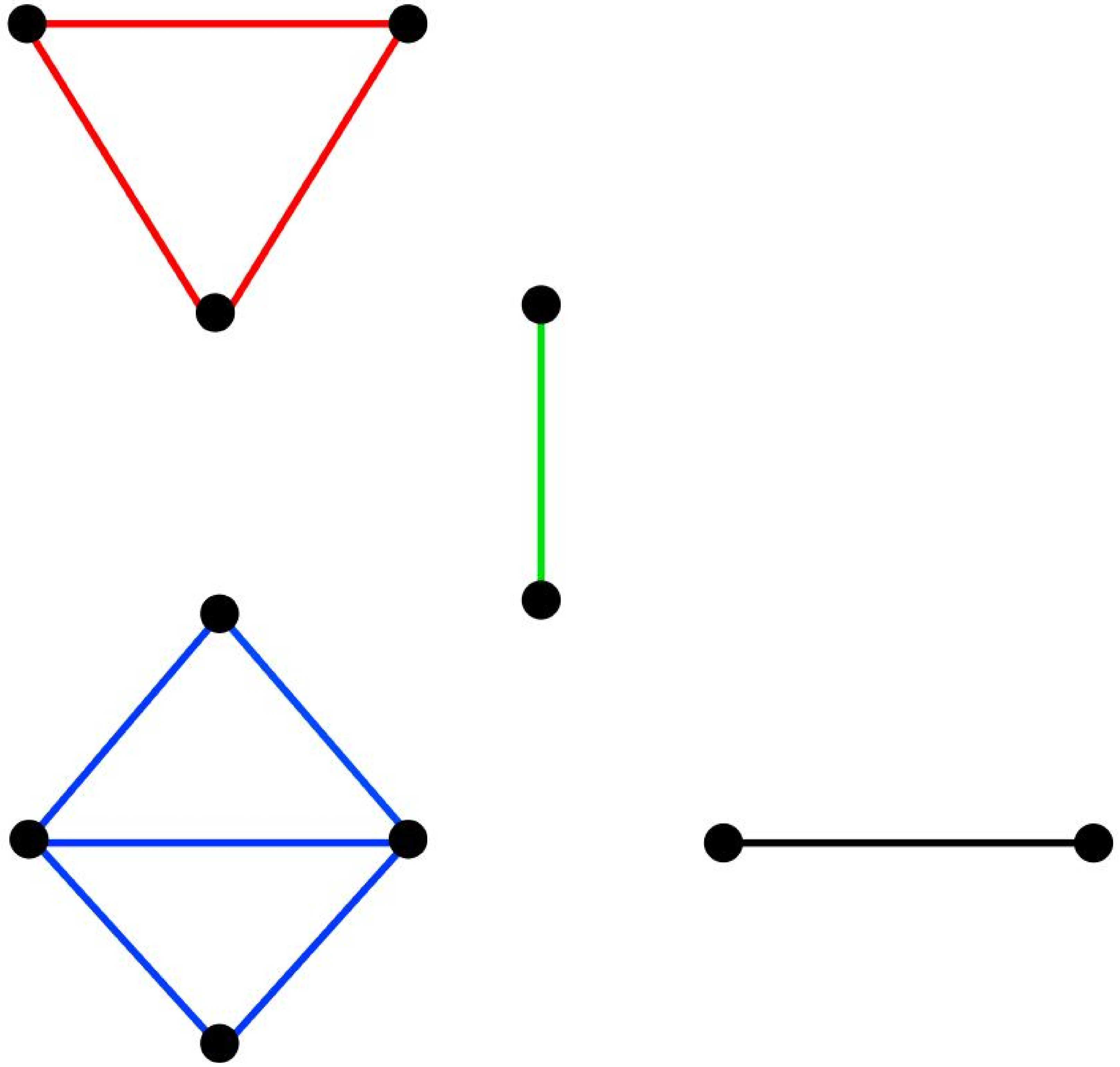
中两个内部不相交的 -路径 (u, v) G 。



推论1.若是2连通的，则的任意两个顶点都位于一个公共环上。G G

没有割点的连通图称为块。每个至少有三个顶点的块都是 2 连通的。图中的块是块的子图,并且相对于此属性是最大的。





设G为含有割顶点的连通图，且为所有H1, H2, . . . , Hk

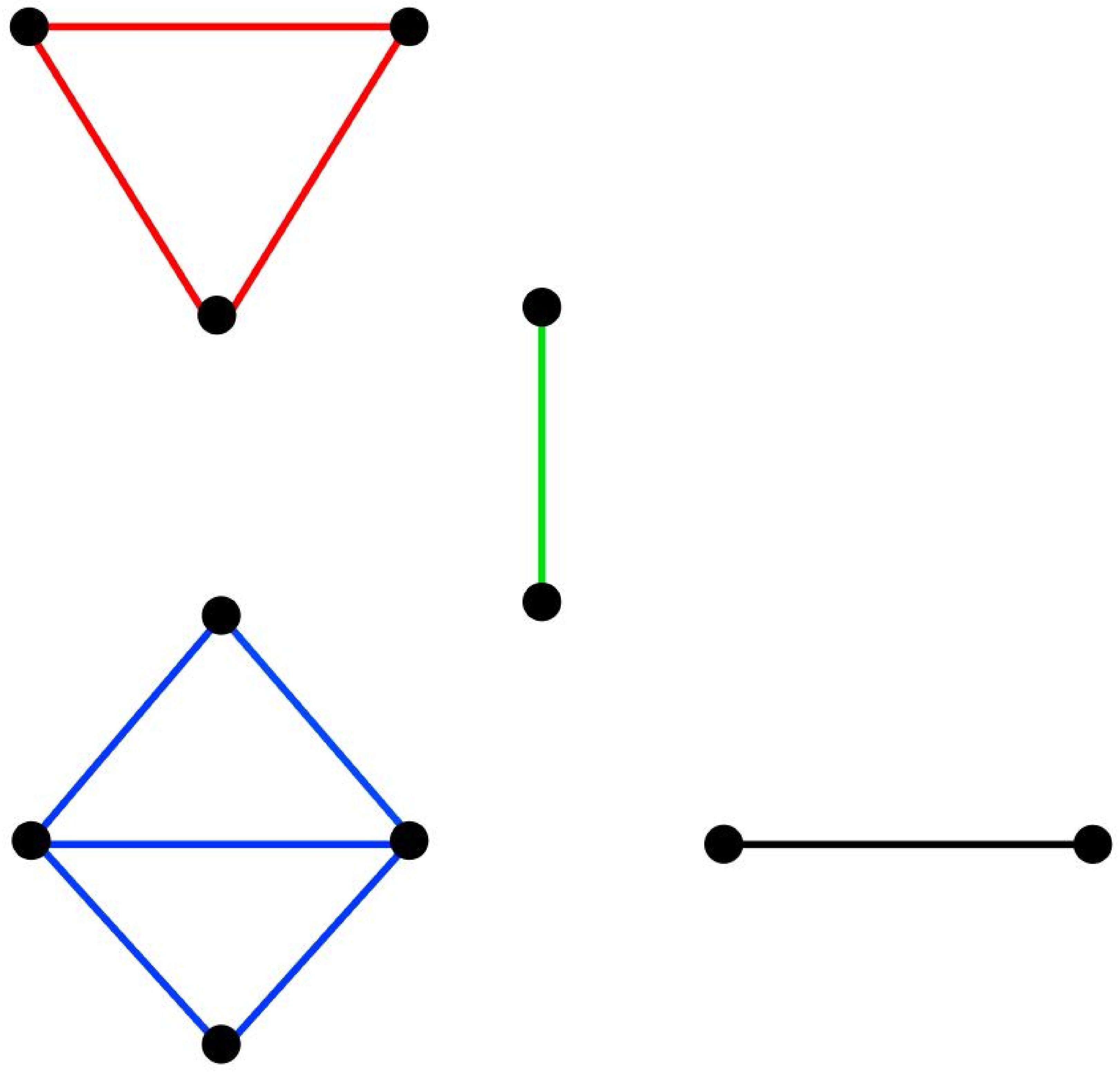
块。现在，作为顶点G，并且如果且H1， H2， ...， Hk Hj相邻

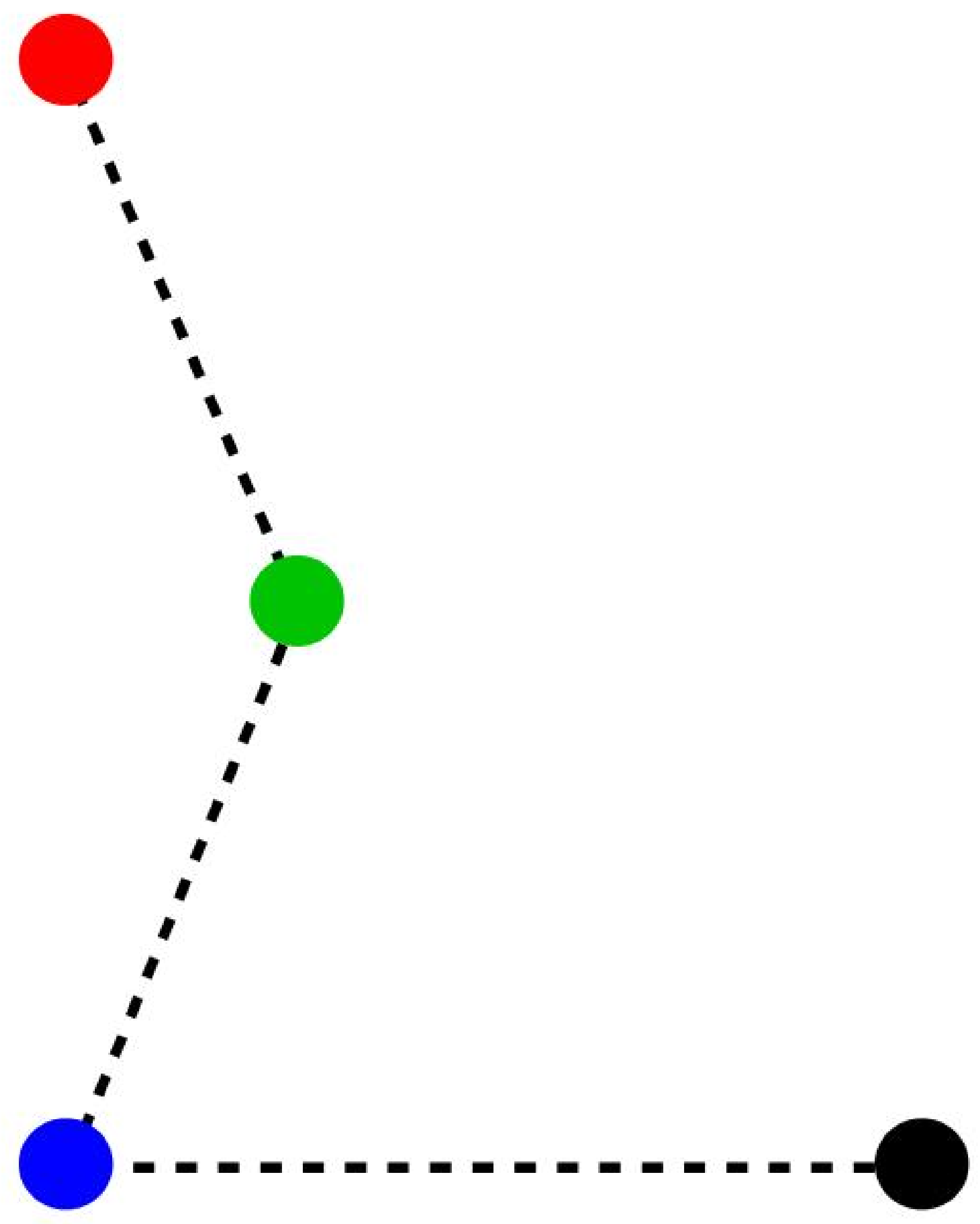
只有当 和 共享一个共同的割顶点时，这样的图才称为Hi Hj G

的块切割顶点图。

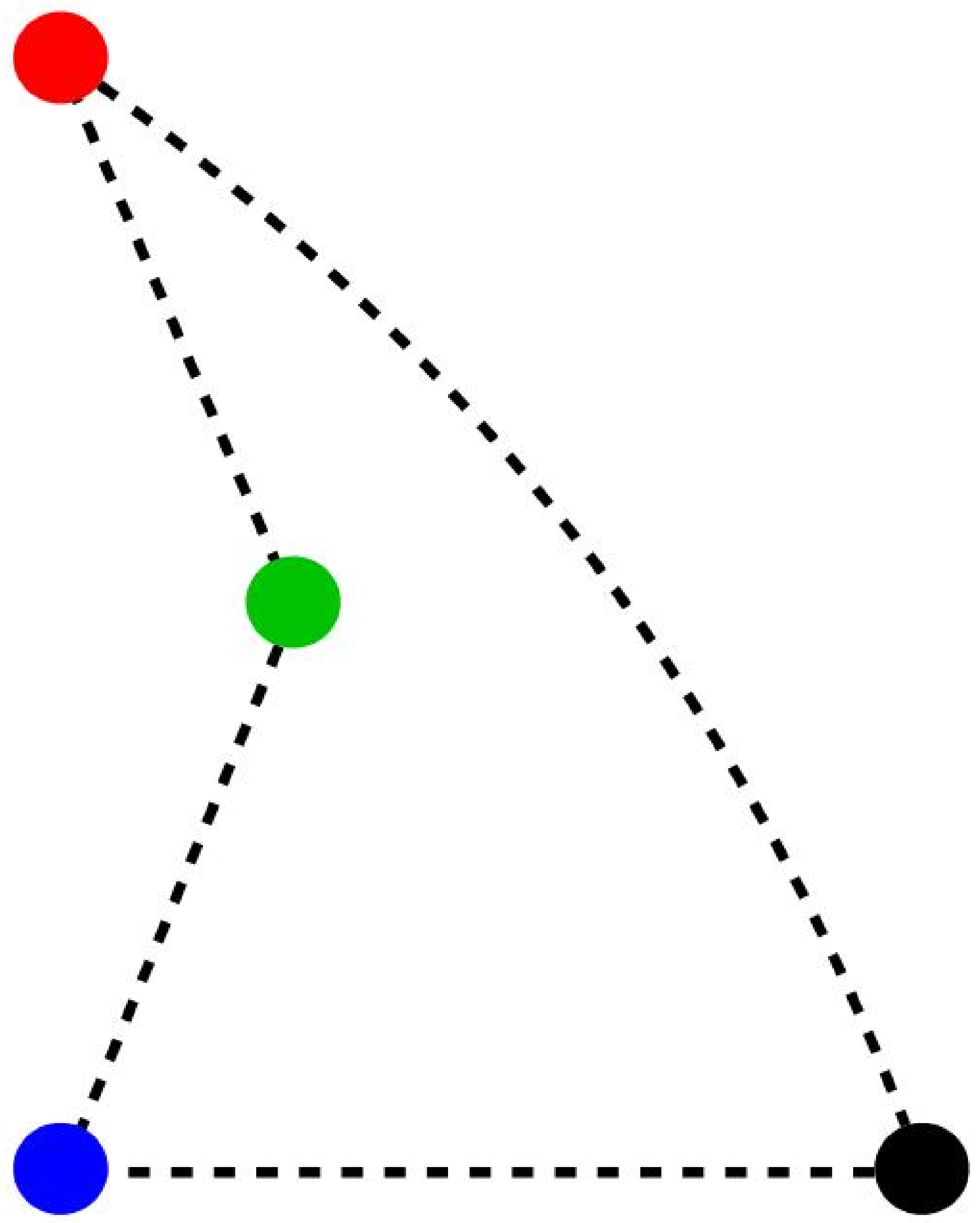
你好

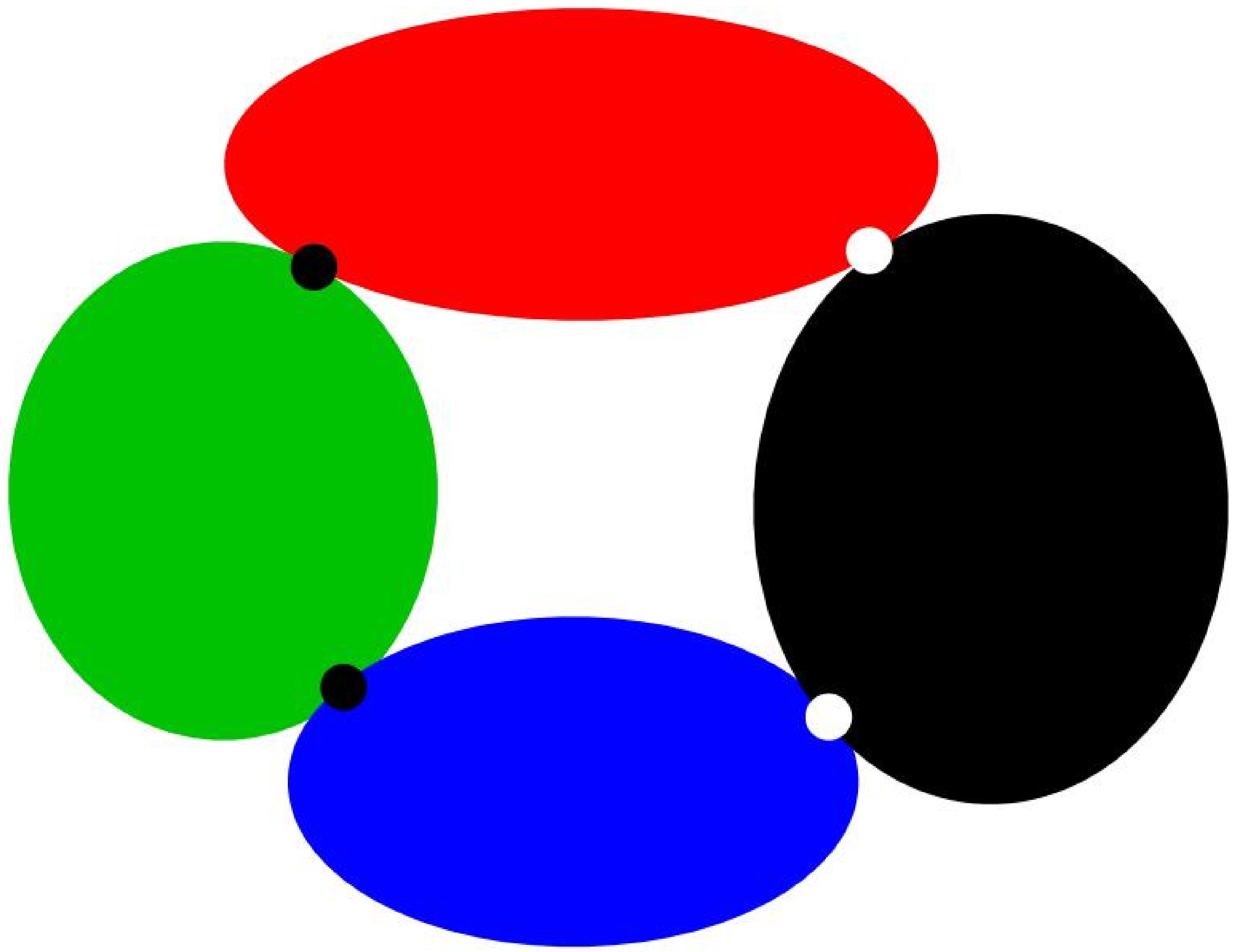
乙(国)





命题5.设G为连通图.则B(G)为一棵树.





如果连通图包含割点,则它至少包含两个块。

只包含一个切顶点的块称为终止块。

根据命题 5,如果连通图包含割点,则它包含至少两个终端块。

定理18(Brooks)。设是连通图,如果既不是奇环也不是完全图,则$\chi(G) \leqslant \Delta$ G $\Delta(G) = \Delta G$ 。

。

为根的生成树 这意味着 的顶点可以按 证明:如果不是(-正则的,则称T为以 $G \; \Delta \; d(x_n) < \Delta$ v_i ,那么由于是连通的,G G

$\leqslant n - 1$)排序 i 。 G

作为 式算法, 使得每个在$v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ $\chi(G) \leqslant \Delta$中至少有一个邻居。通过贪婪着色启发

。

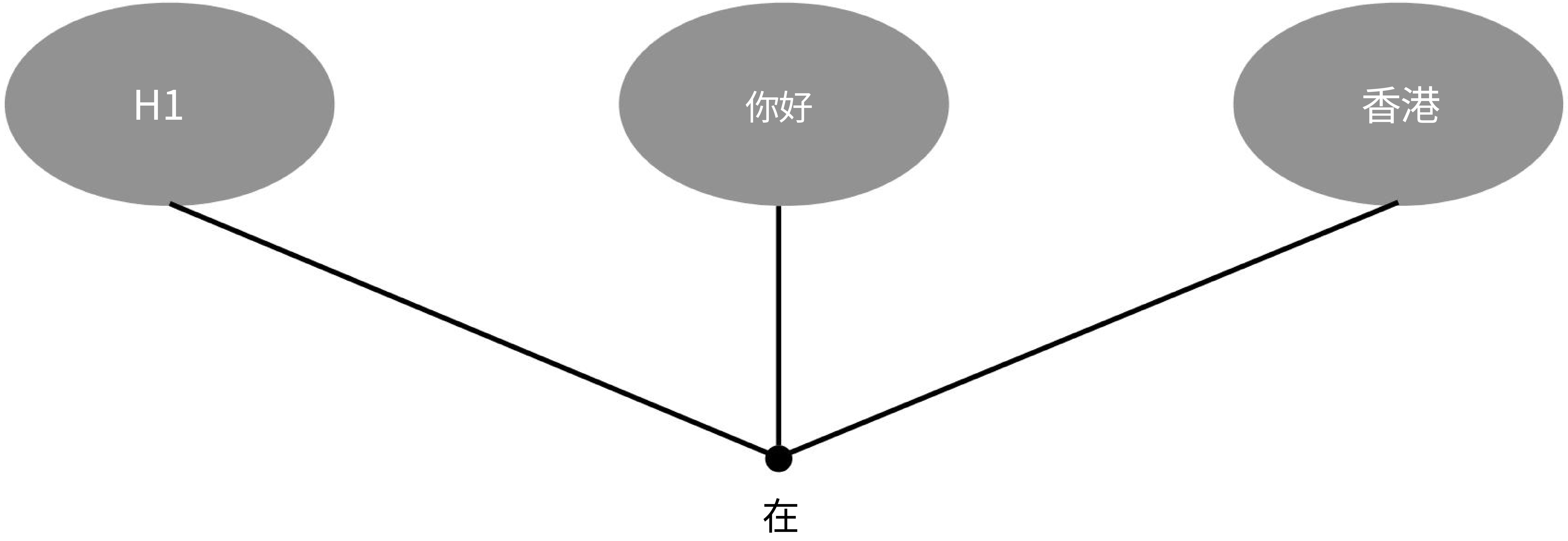
假设是-正则的,并且 $G \Delta \Delta \geqslant 3$ 。

如果包含一个割点v G ,令$H_1, \ldots, H_\ell$为$V(H_i) \cup \{v\}$ $1 \leqslant i \leqslant k$的所有分量 $G - v$, 和

设是由 G_i $d_{G_i}(v) < \Delta$ $1 \leqslant i \leqslant k$ G_i诱导的子图 G 。

显然 为了 ,这意味着每个都不是$\chi(G_i) \leqslant \Delta$ $\chi(G) \leqslant \Delta$ Δ -正

则的,因此, 。 。



因此我们可以假设是2连通的。G

如果G是 3 连通的,那么由于不是完全图,所以必须有两个vn G

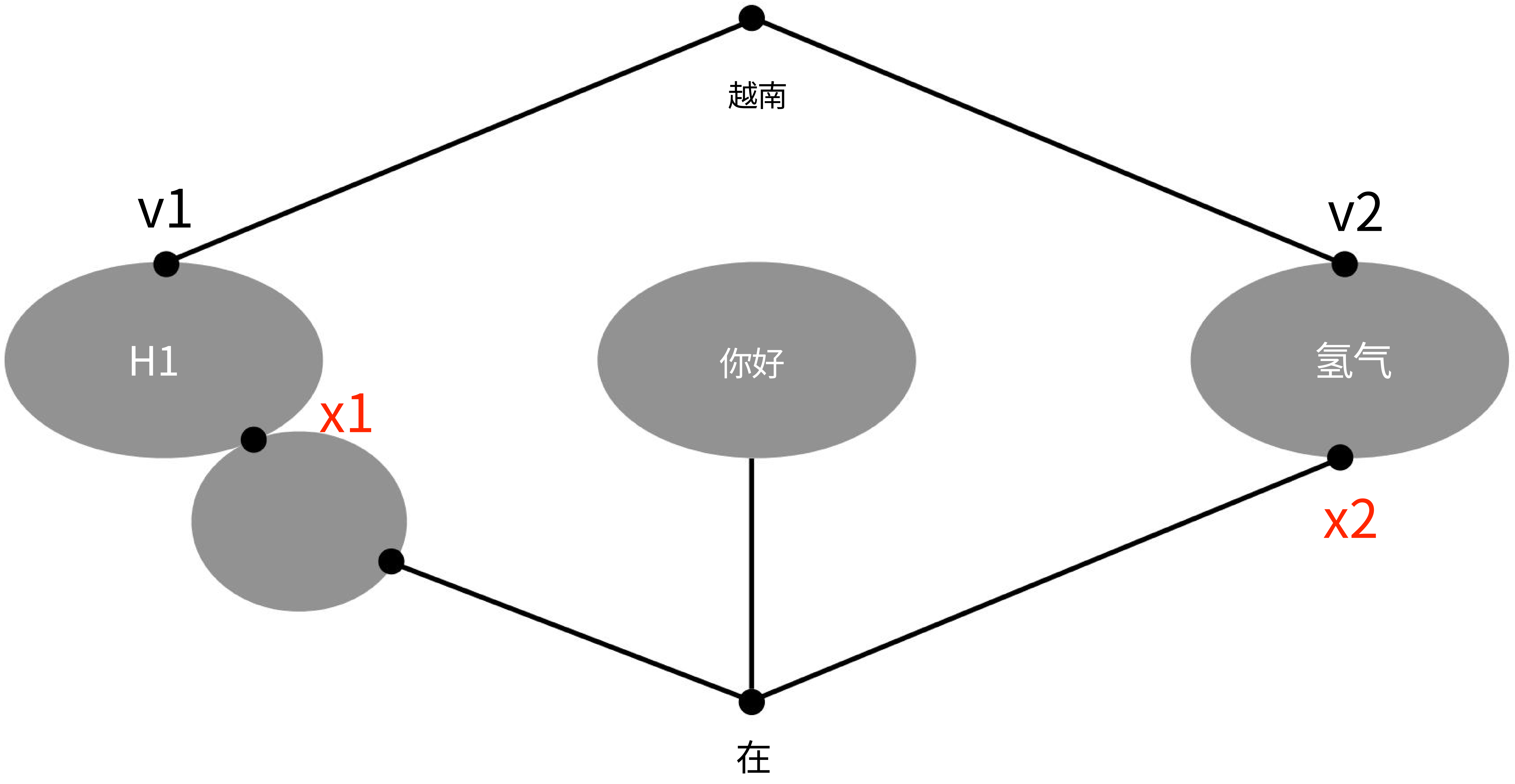
不相邻的邻居,使得 是连通的。v1 , v2 G − {v1， v2}

如果 κ(G) = 2 ,那么我们假设包含在某个最小割集中。越南

因此,是连通的并且包含切点。 G − vn

顶点Hi i = 1,2。vi Hi H1, xi 分别是 的两个端点,假设 是唯一割 G − vn xi i = 1,2

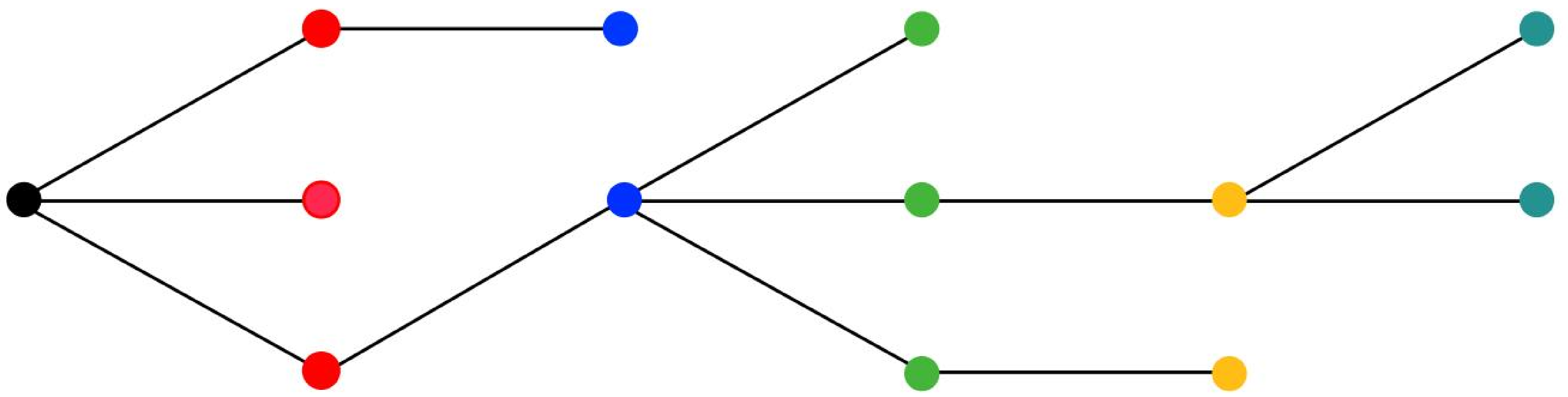
由于是2连通的,所以在vn中有一个邻居 G ,



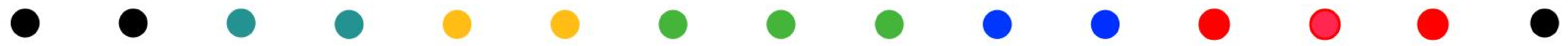
显然是不相邻的并且是连通的。v1 , v2 G − {v1, v2} G − {v1， v2}

T为根设为 的生成树：

越南



对G的顶点进行如下排序：



按此顺序，根据贪婪着色启发式算法， $\chi(G) \leqslant \Delta$ 。

命题6. 设是阶为 的连通图。则 G n

$$x(G) \geqslant \frac{n}{一个（G）}。$$

关键图表

如果HG G x(H) < x(G) 为了

的每个真子图。

狄拉克于 1951 年首次研究了此类图。

-临界图是-色且临界的图。 钾

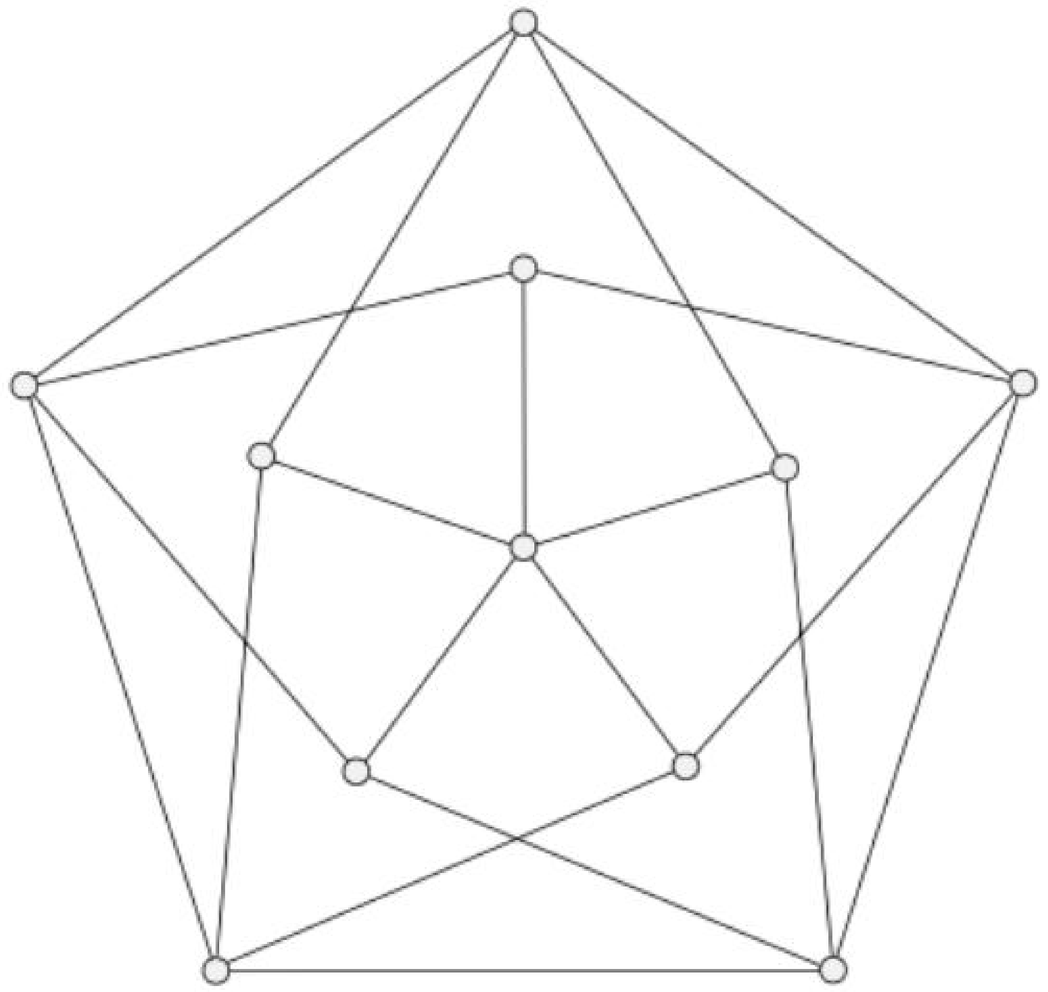
注意，-色图的最小-色子图是-临界的,因此每个-色图都有一个钾临界子图。

钾 钾

定理 19.如果G是k 临界的,则$\delta(G) \geqslant k-1$。

定理20.如果G是k临界的,则G没有团割。

推论2. 如果G是k临界的,则G没有割点。



Grötzsch 图:4 临界图

命题7. 设是一个连通图,团数为G 钾,那就是

中最大完全图的顶点数。则χ(G) ⩾ k

。

Mycielski 的建筑

定理21.对于任何正整数,都有一无三角的-色图。 k 钾

k = 1 k = 2证明。对于且 ,图和具有所需的属性。k K1 K2

我们通过对 进行归纳。

假设我们构造了一个无三角形的色图 格

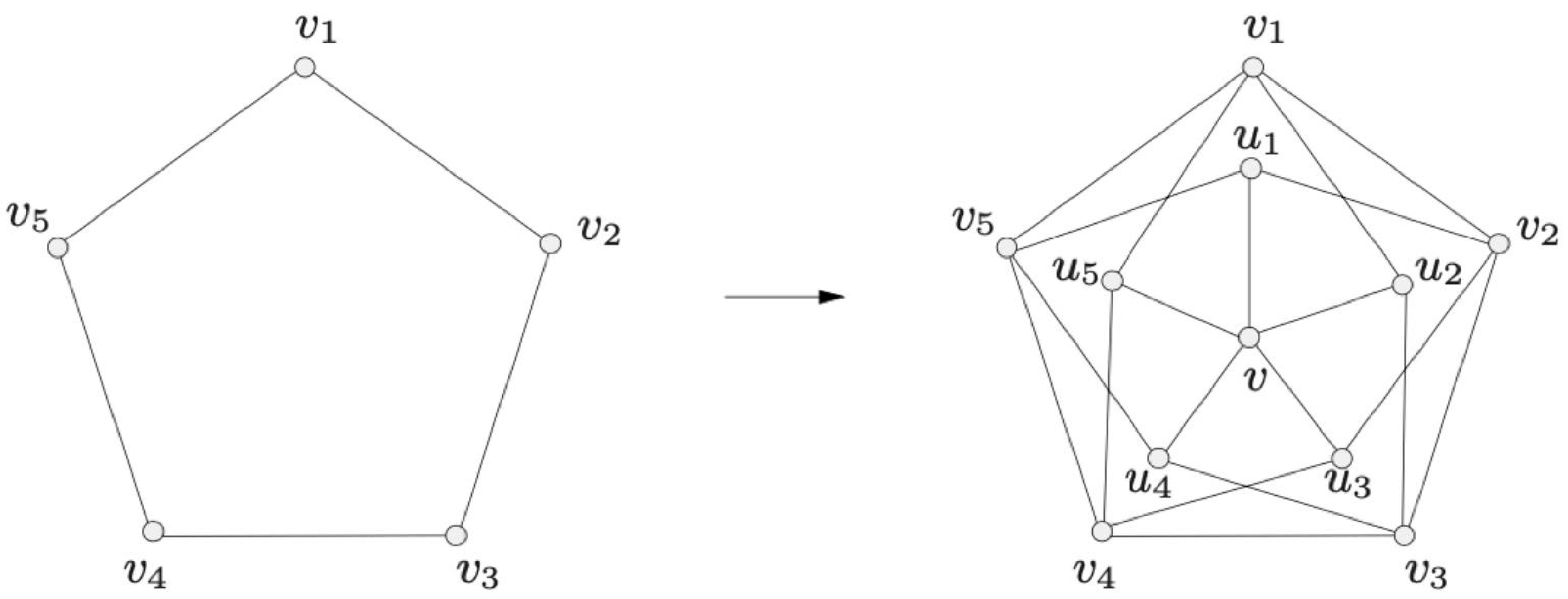
数。设的顶点为 k ⩾ 2Gk v1， v2， ⋯， vn 。

按照如下方式形成图表;+1 格

n + 1 1 ⩽ i ⩽ n添加新顶点,然后,对于 ,连接到u1, u2, . . . , un, v ui

邻居 vi Gk的,以及 . v

例如,如果 G2 = K2 ,然后是G5循环和 Grötzsch 图: G4



G_3 G_4

图表 乙+1 肯定没有三角形。

因为是u1, u2, . . . 中的独立集,的三角 vkui Gk中 un Gk+1包含多个 ;并且如果是ui ui vj 乙+1 ，没有三角形可以

形 ，然后 vi vj vkvi

将是 中的一个三角形,这与我们的假设相反。

我们现在证明是-色度的。Gk+1 (k +1)

首先注意,即（k + 1） Gk+1 (k +1) -可着色,因为任何-着色都可以 钾 格

通过将的颜色分配给ui来扩展为的 -着色 Gk+1 我们 ，

$1 \leqslant i \leqslant n$ ，然后为 分配一种新颜色。 在

因此,仍可证明不是可着色的。 Gk+1 钾

假设具有-着色。 Gk+1 钾

这种颜色，当限制于 {v1， v2， ...， vn}，是 钾

kG色度图。

不难证明，对于每种颜色j ，存在一个颜色为j的顶点 我们

与其他所有颜色的顶点相邻。 格

因为在ui中有完全相同的邻居 Gk我们 ，

顶点也必须具有颜色。 杰 用户界面

因此，每种颜色至少出现在一个顶点上。ui 钾

但现在顶点v没有可用的颜色 ，矛盾。

我们得出结论，确实是-色的，并且定理成立。 Gk+1 （k + 1）

列出图的着色

设是一个图,设是一个函数,它将分配给正整数L(v)的每个顶点,称为 的列表。 G 电压

在 一套着色

: V N

c(v) ∈ L(v) v ∈ V使得对于所有L ,被称为关于的列表着色 G

至,或-coloring。

若每当与相邻时,我们称是 可色的。 G L c(u) ≠ c(v) 在 在

观察到,如果对于所有v ∈ V L(v) = {1,2,...,k} ,

-coloring 仅仅是 -coloring。 大号 钾

例如,如果是二分图,并且对于所有,则具有-着色,将颜色1分配给 一个部分 L(v) {1,2} 的所有顶点 v ∈ V G,将颜色2分配给 ,

大号

到另一部分的所有顶点。

如果一个图G是-可着色的,并且当所有k钾 大号

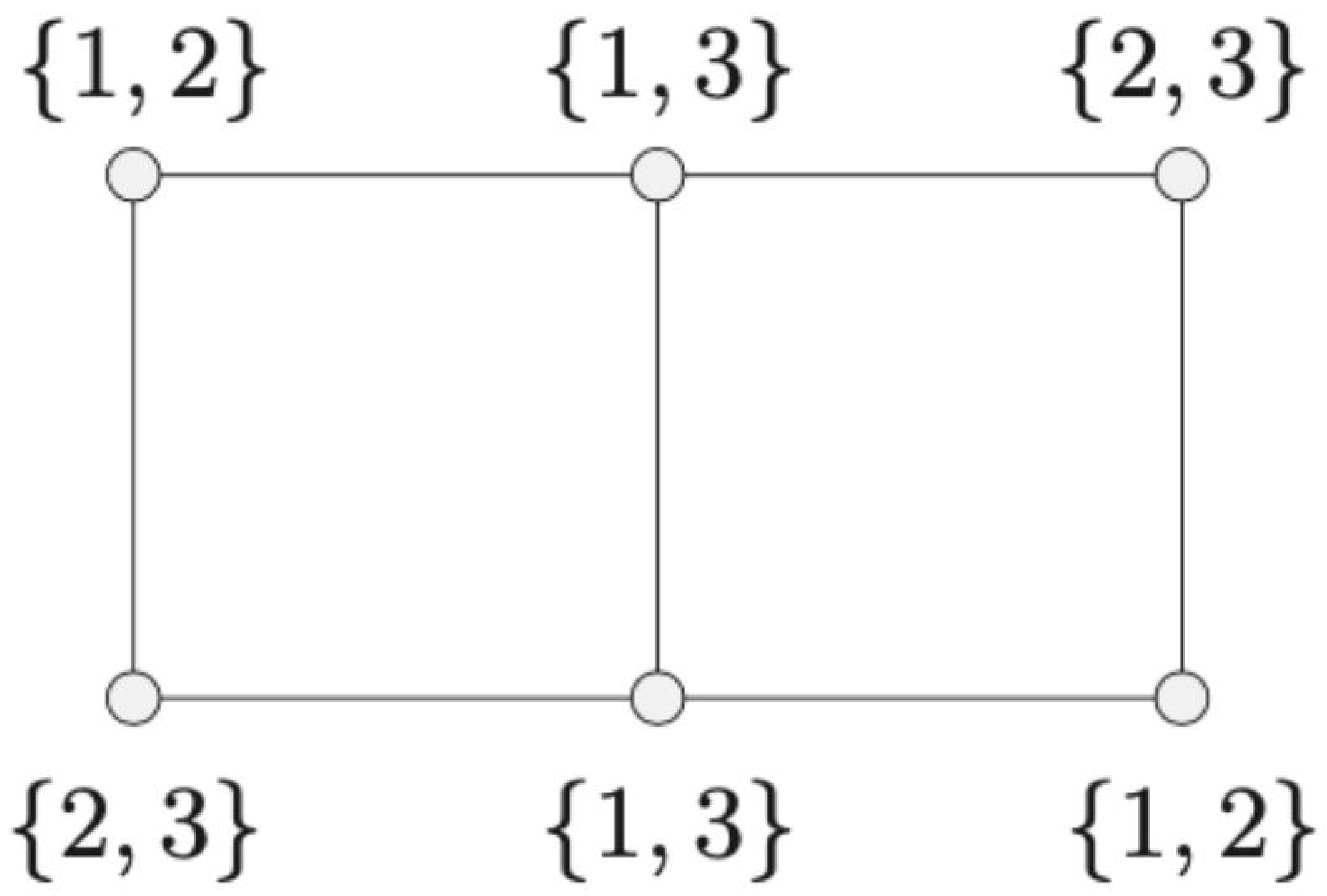
列表有长度。

顶点上的每个图都是-list-colorable。G n显然。 n

的最小值为 -list-colorable 钾 Gk

被称为列表色数 G ,表示为例如下 χL(G) 。

图的列表色数为3。



对于任何图G,我们总是有

$$\chi(G) \leqslant \chi_L(G) \leqslant \Delta(G) + 1。$$

事实上,存在列表色数可以任意大的2-色图,例如$\chi_L(K_{n,n^n}) = n + 1$。

练习 5。

1. 设是阶为 G 的非正则图。通过归纳证明 n $x(G) \leqslant D$
在。n

2. 证明图G是 3-临界的当且仅当G是奇数环。

3. 证明$\chi L(Kn,nn) = n + 1$。