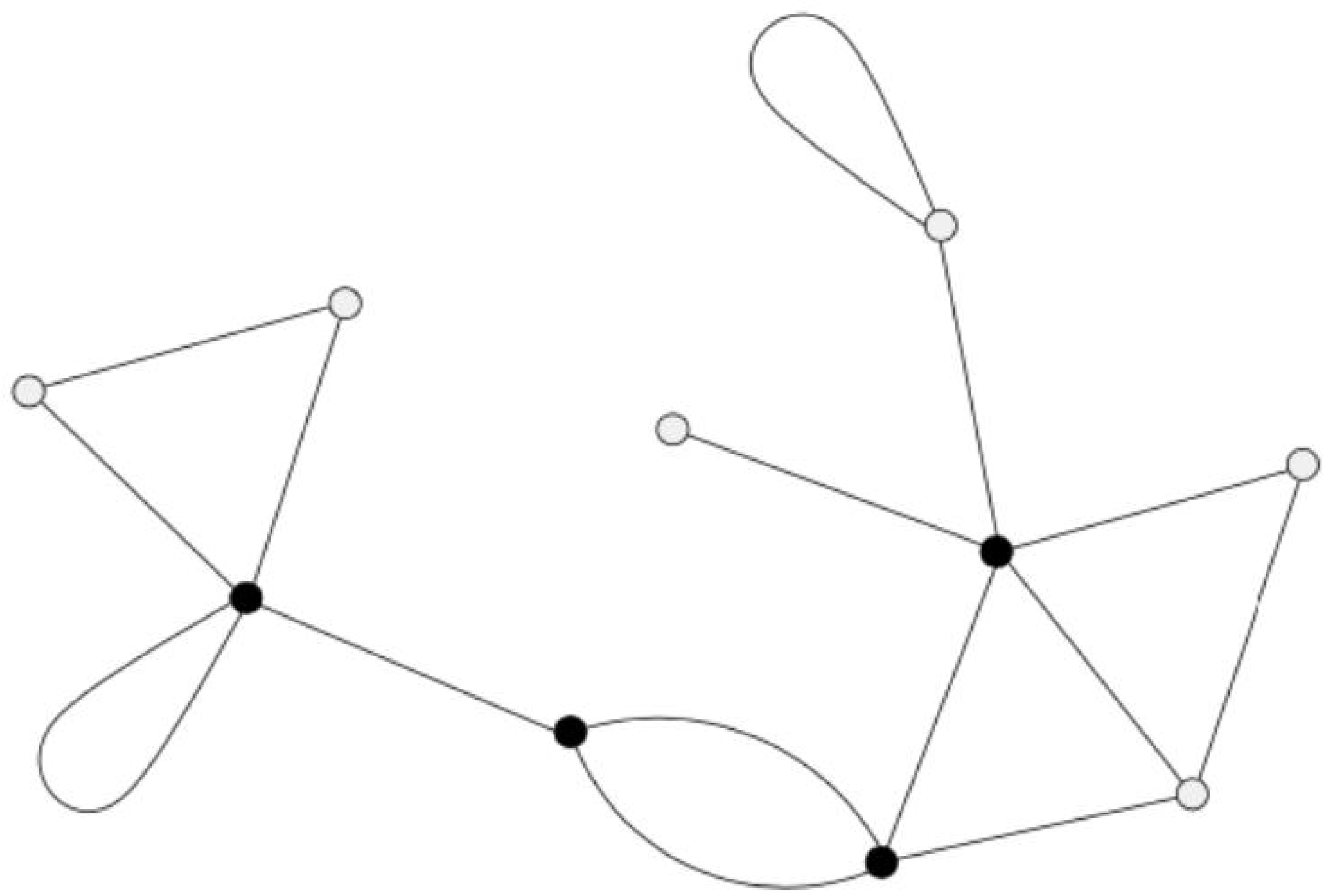
设是一G个连通图。v ∈ V(G) G v如果和不

连通,则称其为割点。

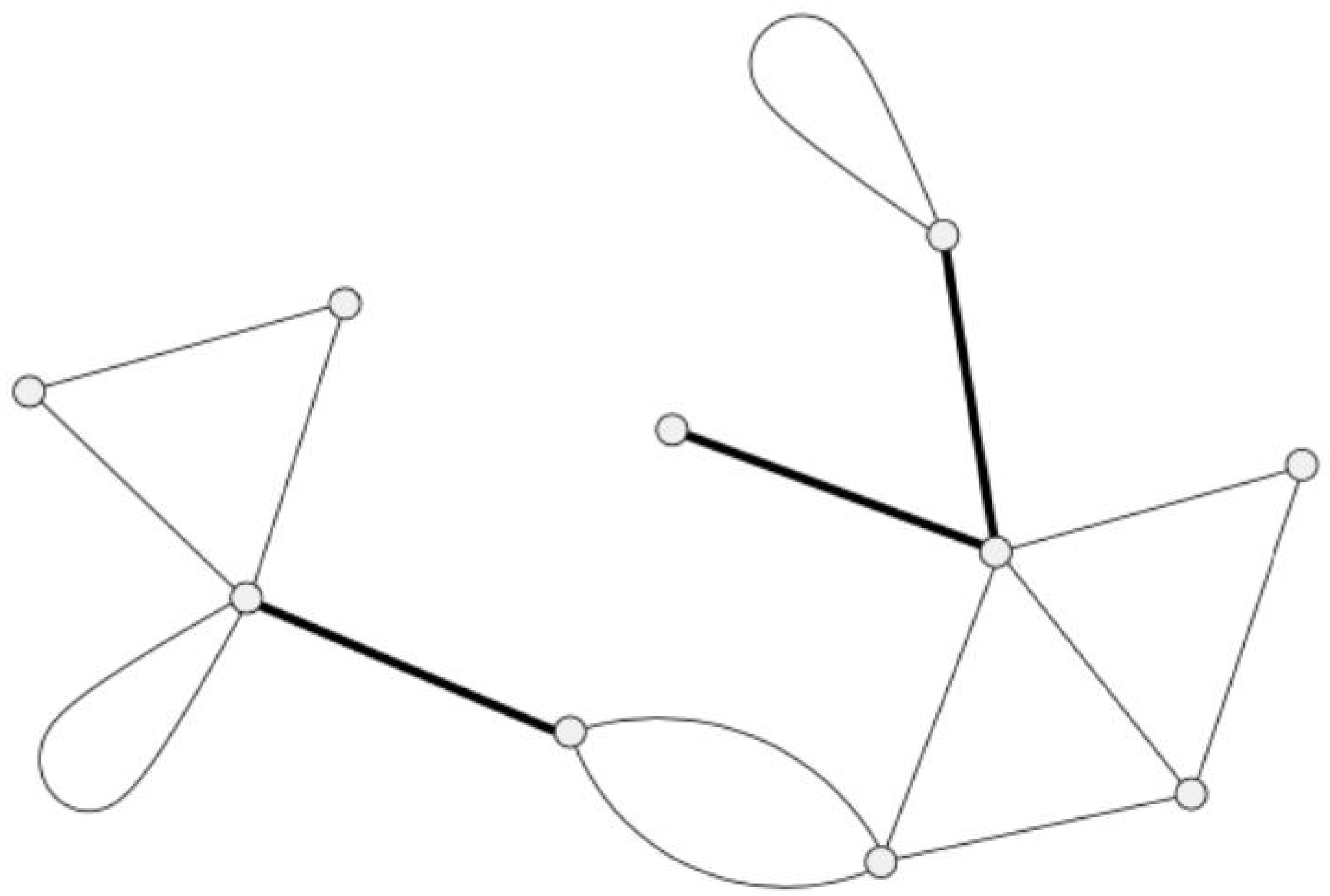
在

通,则称其为(G)割边。e如果和不连

这是



切割顶点



切边

设为连$G$通图。

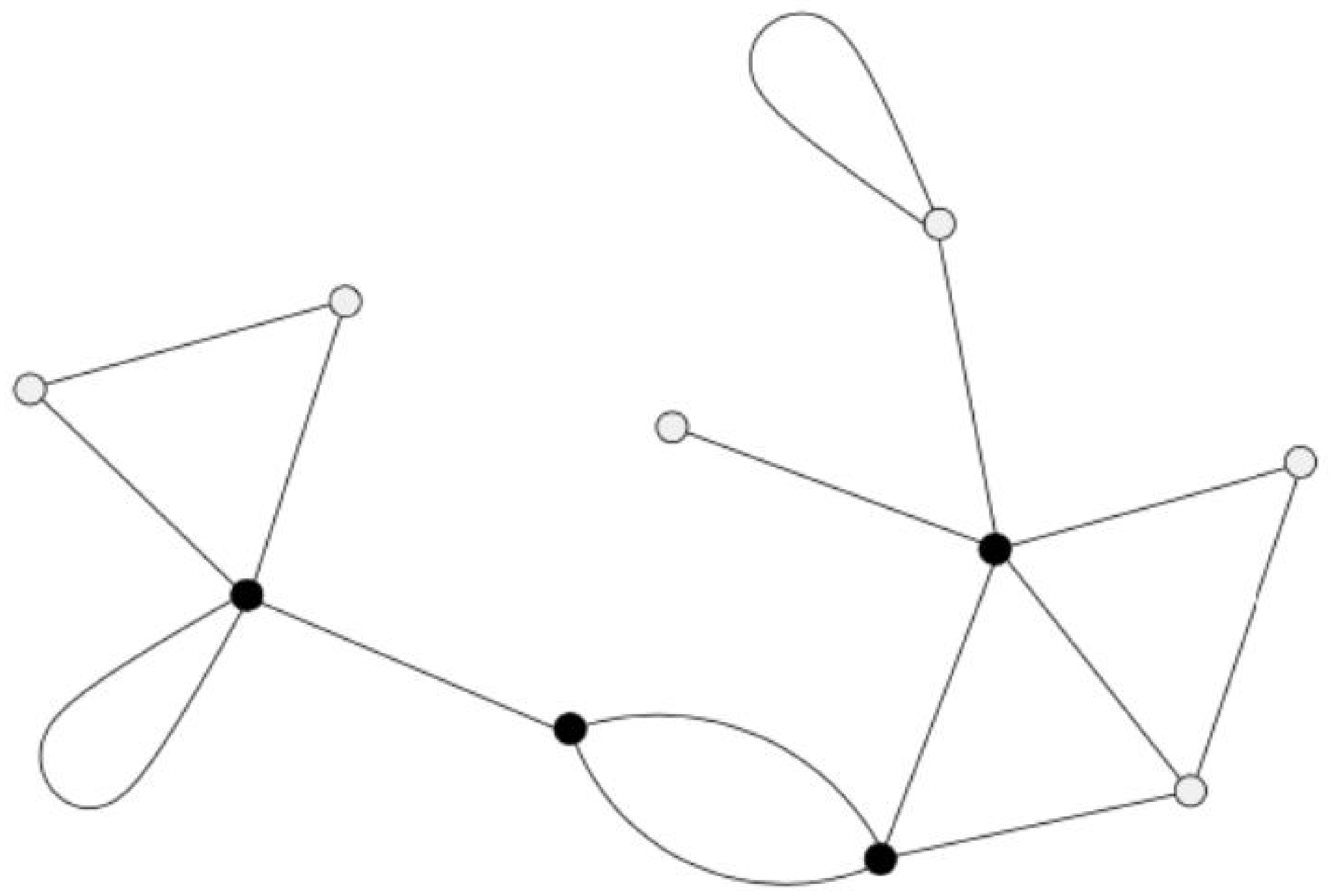
如果和不连通,则称为割集。
$S \in V(G)\ G \quad S\ S$

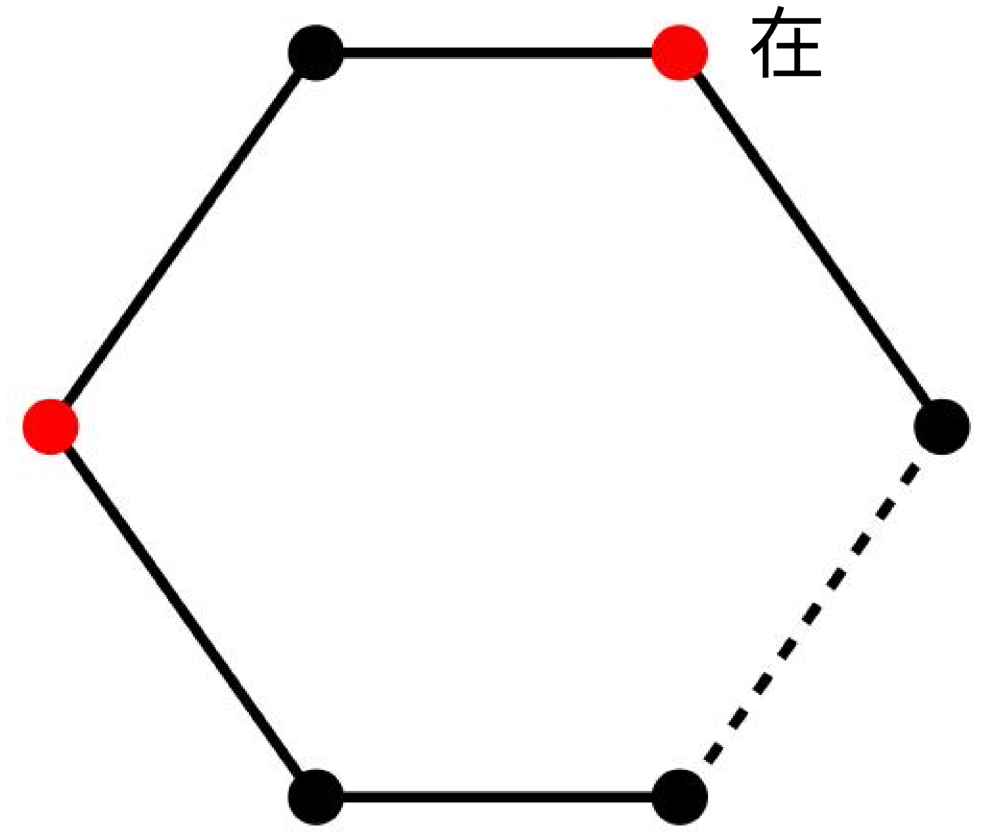
对于具有至少两个不相邻顶点的$G$连通图,定义

$$\kappa(G) = \min\{|S| : S\text{是 } G \text{ 的割集}\},$$

called connectivity (连通度) of .$G$

如果一个图$G$ 钾 $\kappa(G) \geqslant k$ 。

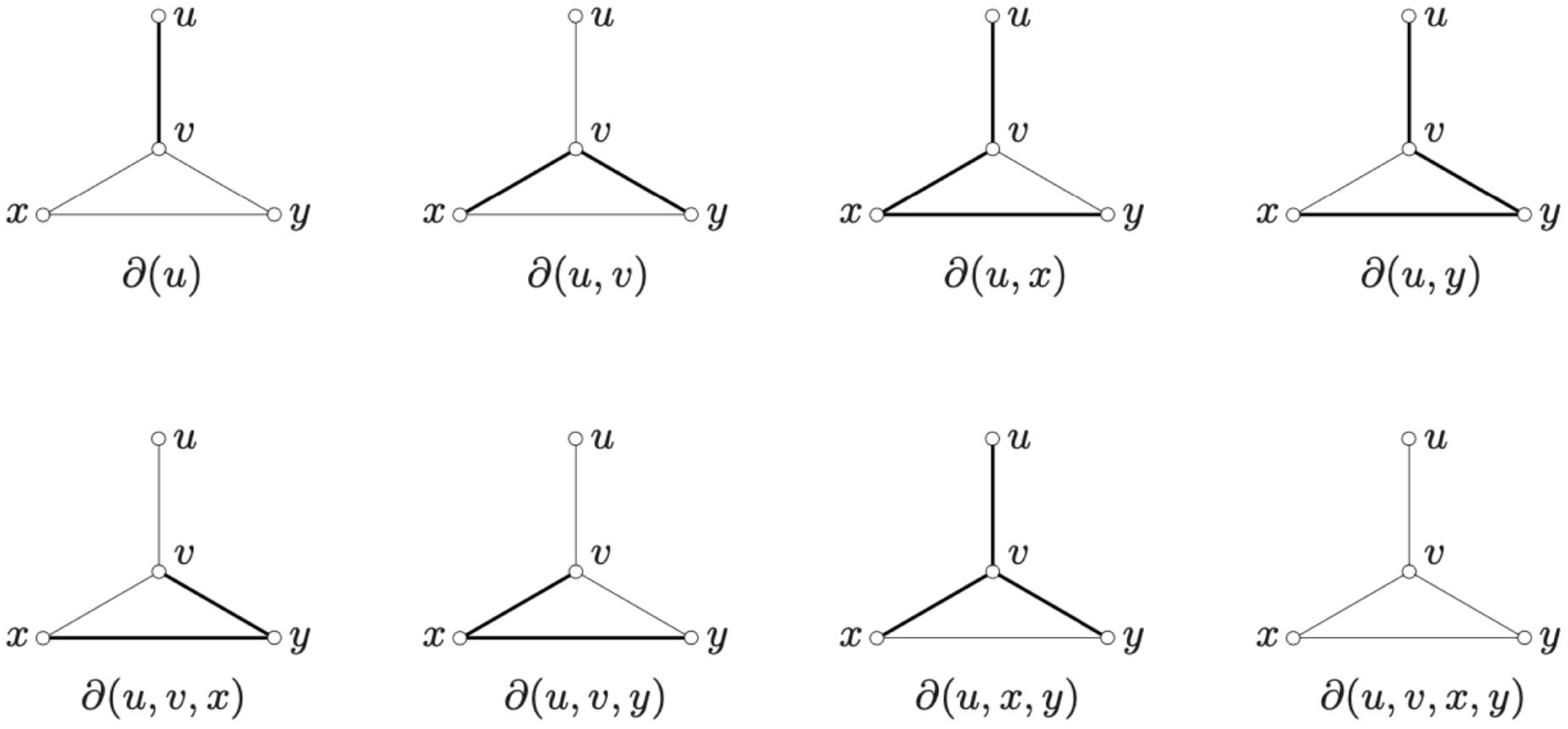




设G为图。若 则边集 $X \subset V(G)$ $Y = V(G)$ X ，

$$E(X, Y) = \{ uv : uv \in E(G), u \in X 且 v \in Y \}$$

被称为与相关的**边切割** G X ，写为 **$\partial(X)$**。



设 为有根树,根为 。对于任意rTv表示连接的唯一路径， ℓ(v)为rTv $v \in V(T)$ ，

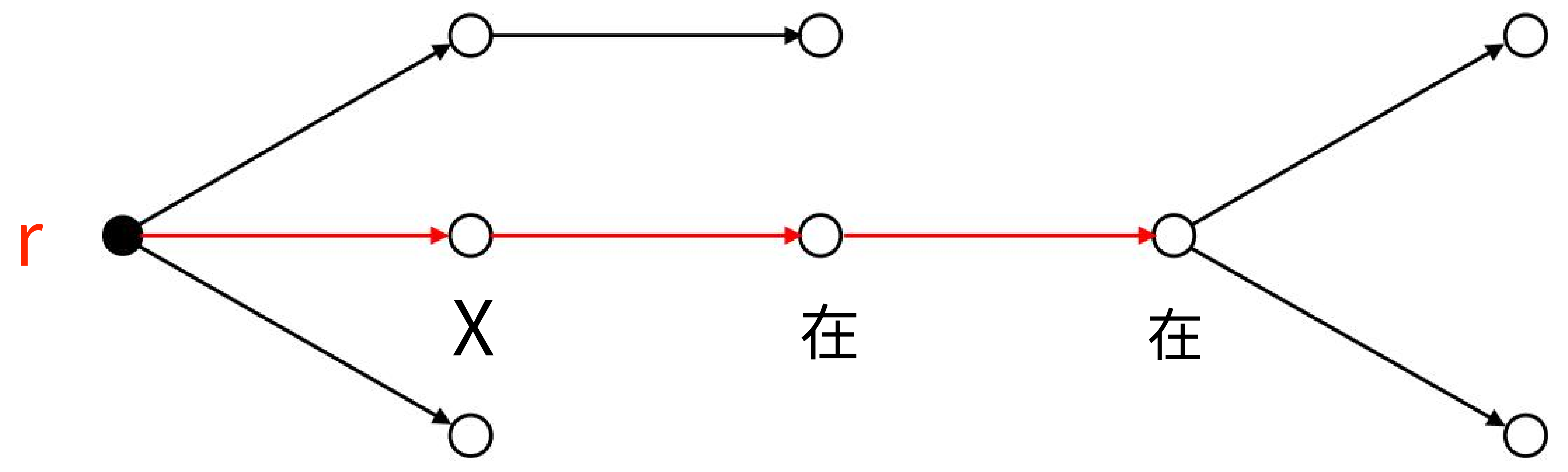
的长度 r 在，

，

对于任何前身 V(T), E(T))， p(v) v rTv是 (从根到 ) 中 在 $V \in V(T)$ r 。

有根树的（有向)边集由其前驱函数决定： p

$$E(T) = \{p(v)v : v \in V(T) \ r\}。$$



# 图中的树

如何判断一个图是否连通?

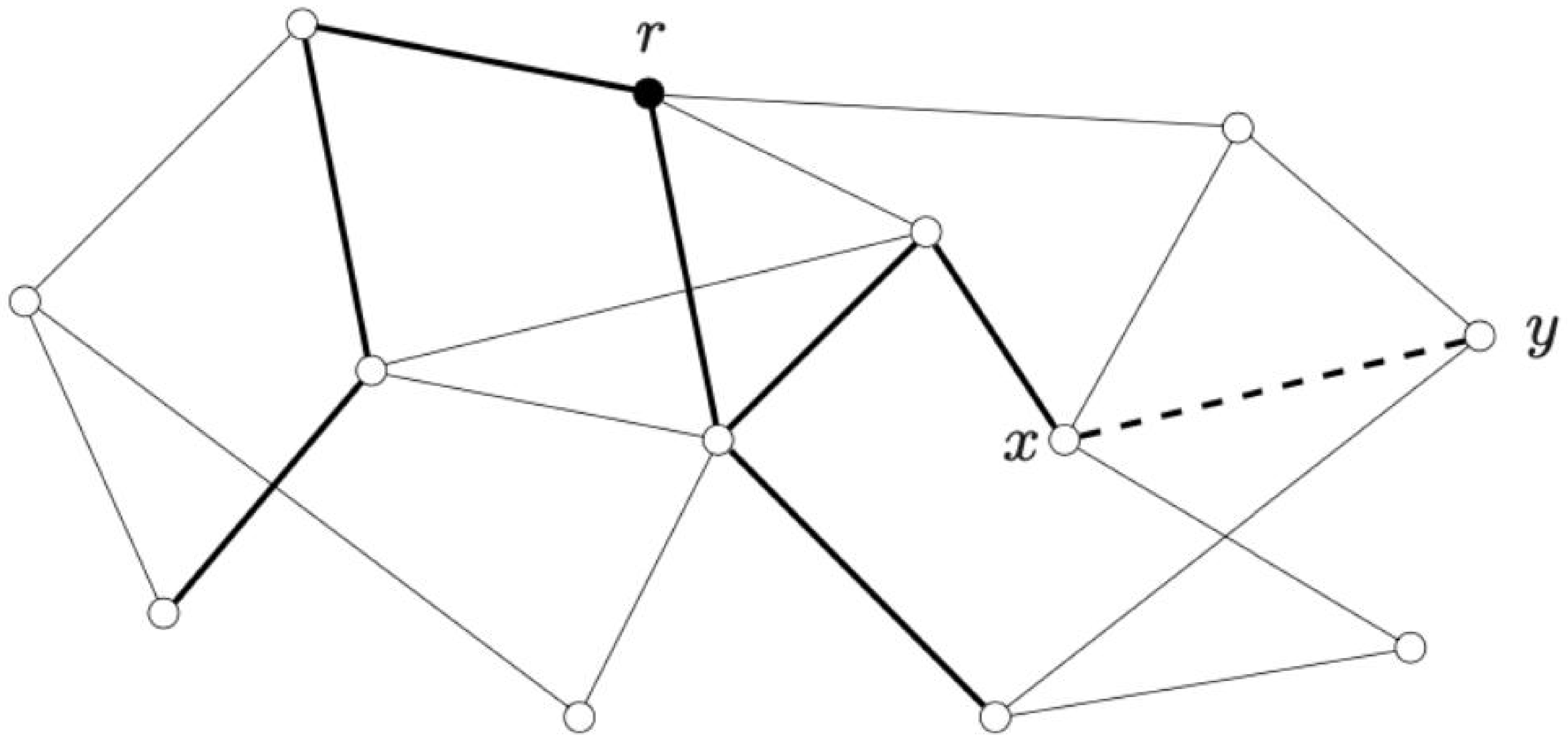
设为图中的一棵树。 G

若 $V(T) = V(G)$ ,是一棵生成树 G ,并且因此 G 相连。

如果 $V(T) \subset V(G)$ ,有两种可能: $\partial(T) \neq \emptyset$ $xy \in \partial(T)$ $\partial(T) = \emptyset$ ,在这种情况下 G

已断开连接,或 。 在后一种情况下,对于任何边y ∈ ,

哪里又是一棵树 $V(G)$ $V(T)$ $T + xy$ $x \in V(T)$ G 。



# 广度优先搜索算法（BFS）

1. 从2 开始。取T = r　$i = 0$ $Q = \varnothing$ ；

，颜色黑色r;设置　$t(r) = i + 1$， $\ell(r) = 0$ $Q = r$；

3. 如果检查队头 $Q \neq \varnothing$， Q　X

(1)如果x有一个未着色的邻居,则颜色为黑色,设yy

$t(y) = i + 1, \ell(y) = \ell(x) + 1$ $p(y) = x$ ， ，

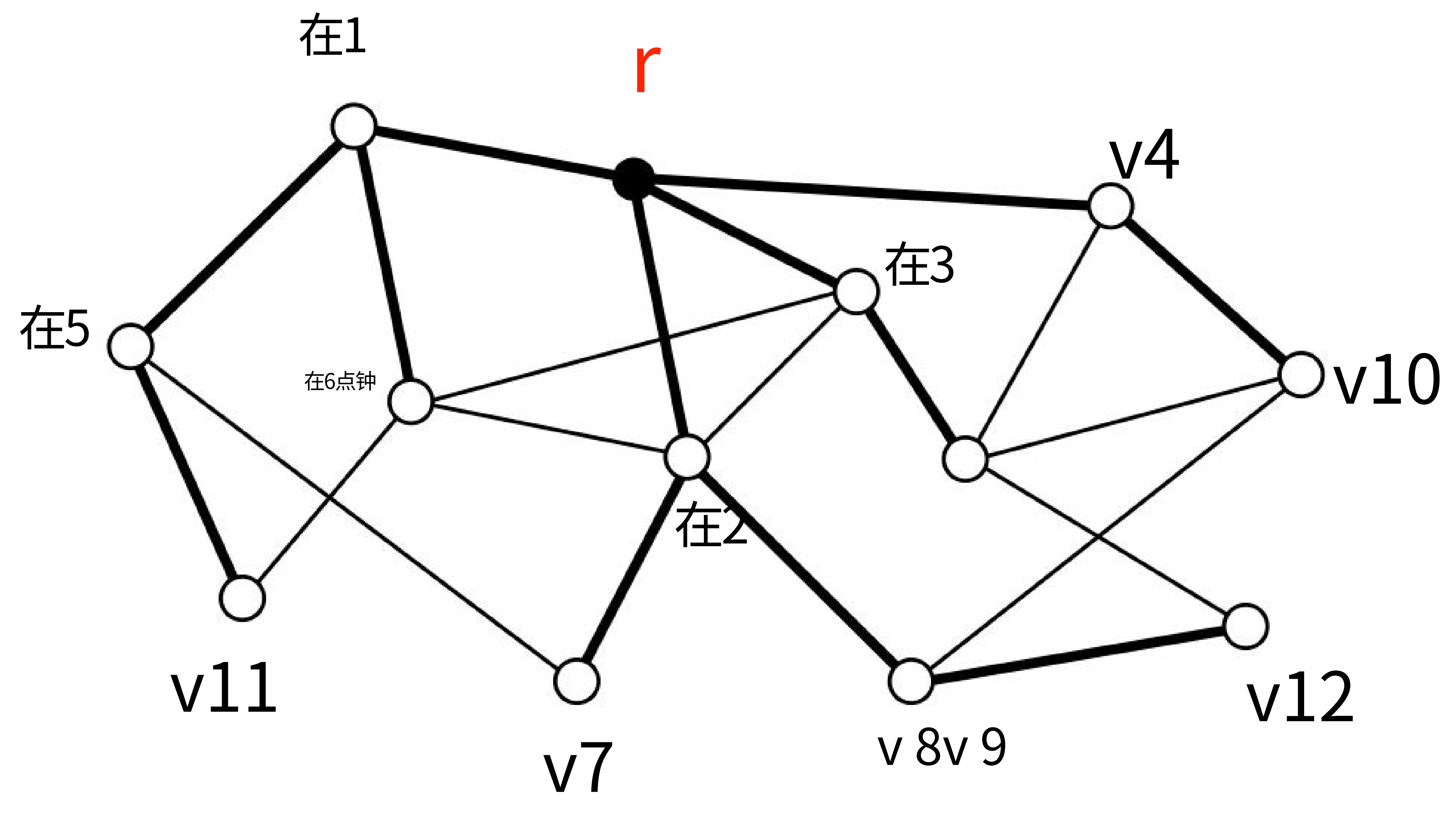
并附加到；　和Q

(2)如果x没有无色邻居,则从中移除。　x 问

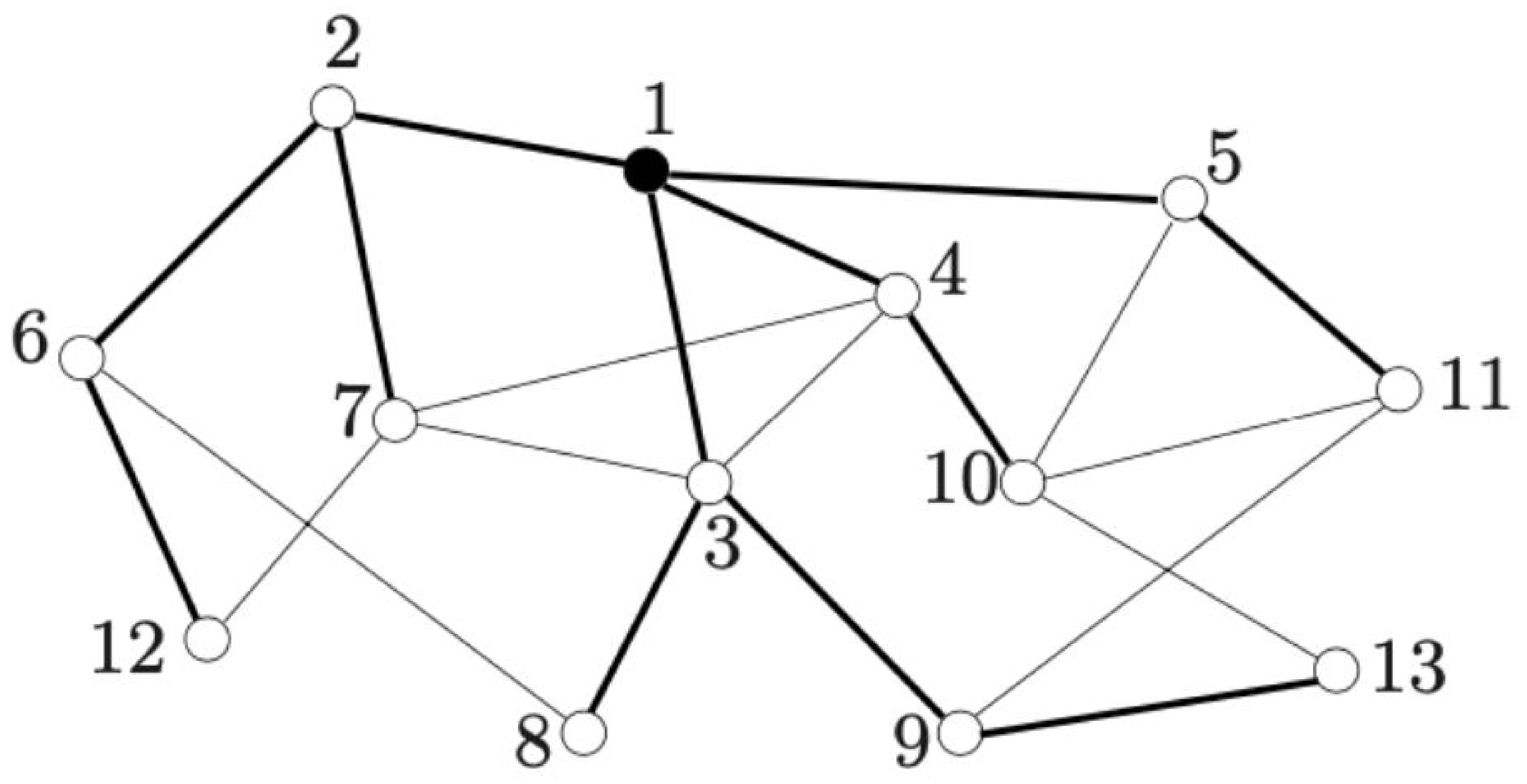
4. 重复3直到　$Q = \varnothing$ 。

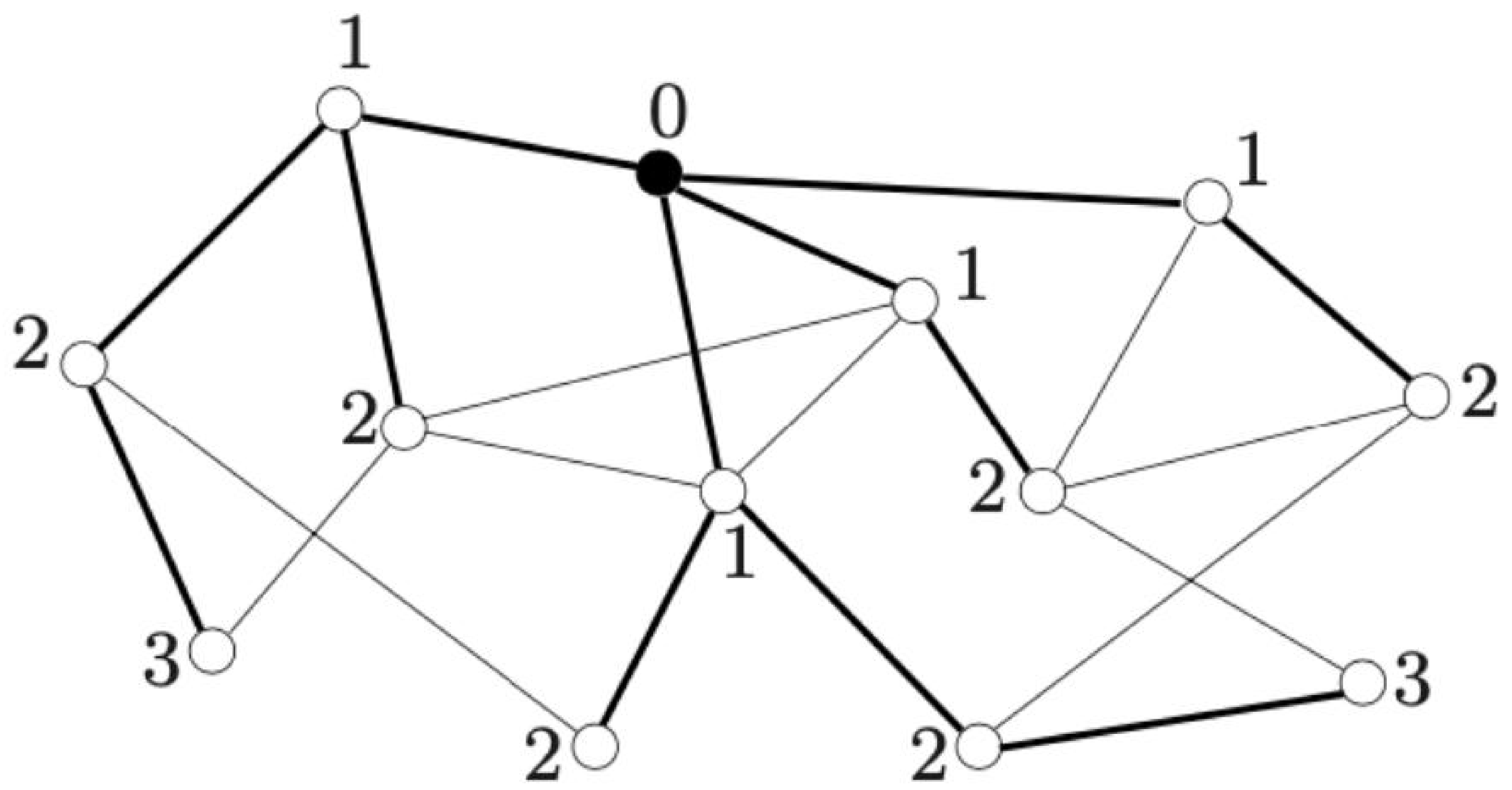
## 该算法（BFS)输出一棵生成树。

## 通过BFS算法得到的树称为BFS树。




∅ → r → rv 1 → rv 1 v 2 → rv 1 v 2 v 3 → rv 1 v 2 v 3 v4 → v 1 v
2 v 3 v4 → v 1 v 2 v 3 v4 v 5 → v 1 v 2 v 3 v4 v 5 v 6 → v 2
v 3 v4 v 5 v 6 → v 2 v 3 v4 v 5 v 6 v7 → v 2 v 3 v4 v 5 v 6 v7 v 8
→ v 3 v4 v 5 v 6 v7 v 8 → v 3 v4 v 5 v 6 v7 v 8 v → v4 v 5 v 6 v7 v 8 v 9 9
→ v4 v 5 v 6 v7 v 8 v 9 v10 → v 5 v 6 v7 v 8 v 9 v10
→ v 5 v 6 v7 v 8 v 9 v10 v11 → v 6 v7 v 8 v 9 v10 v11
→ v7 v 8 v 9 v10 v11 → v 8 v 9 v10 v11 → v 8 v 9 v10 v11 v12 9
→ v v10 v11 v12 → v10 v11 v12 → v11 v12 → v12 → ∅



定理7. 设是连通图的 BFS 树,其根为。则$v \in V(G)$ $\ell(v) = d_T(v,r)$ G r

(1)对于任何uv ， 。

(2) 对于任意 $\in E(G)$ $|\ell(u) - \ell(v)| \leqslant 1$。

证明. (1) 根据T连接和的定义 $\ell(v)$，这是唯一路径rTv的长度 在

r 在 , 结果如下。

(2)若和为任意两个顶点,且在之前。 $\ell(u) < \ell(v)$ ，然后加入 问

在

假使,假设 $uv \in E(G)$ $\ell(u) < \ell(v)$ $u = p(v)$ 。如果 ,那么y $\ell(u) = \ell(v) - 1$ 。

如果不是,则设置 $p(v)$ 因为 被添加到了边 ,而不是yv

边,即之前由参数 y 连接的顶点 $\ell(v) - 1 = \ell(y) \leqslant \ell(u) \leqslant \ell(v) - 1$ $\ell(y) \leqslant \ell(u)$

以上。因此,这意味着 $\ell(u) = \ell(v) - 1$ ,

。

定理8. 设是连通图的 BFS 树,其根为$\ell(v)$ G r，和

通过 BFS 算法得到水平函数。则

$$\ell(v) = d_G(v,r)\ v \in V(G)$$ 对全部 。

证明。显然， $\ell(v) = d_T(r, v) \geqslant d_G(r, v)$ 。

$\ell(v) \leqslant d_G(r, v)$ （通过对最短路径的长度进行归纳,我们展示-路径。

设为最短路径 （右、右） G ，其中 $v \neq r$， ，并让前导(r, u) $d_G(r, u) = d_G(r, v) - 1$

后 v P的 。然 rPu是最短路径,且$\ell(v) - \ell(u) \leqslant 1$ 。

通过归纳， $\ell(u) \leqslant d_G(r, u)$ ，根据定理7,因此，

$$\ell(v) \leqslant \ell(u) + 1 = d_G(r, u) + 1 = d_G(r, v)。$$

# 深度优先搜索算法（DFS）

1. 从 开始； 2. 取T = r $i = 0$ $S = \varnothing$

，颜色黑色；设置$S \neq \varnothing$，$f(r) = i + 1, S = r$ ；

3. 如果 S 检查队列尾部： X

(1)如果 X 有一个未着色的邻居，则颜色为黑色，设yy

$f(y) = i + 1, p(y) = x$ ，

并附加到； 和S。

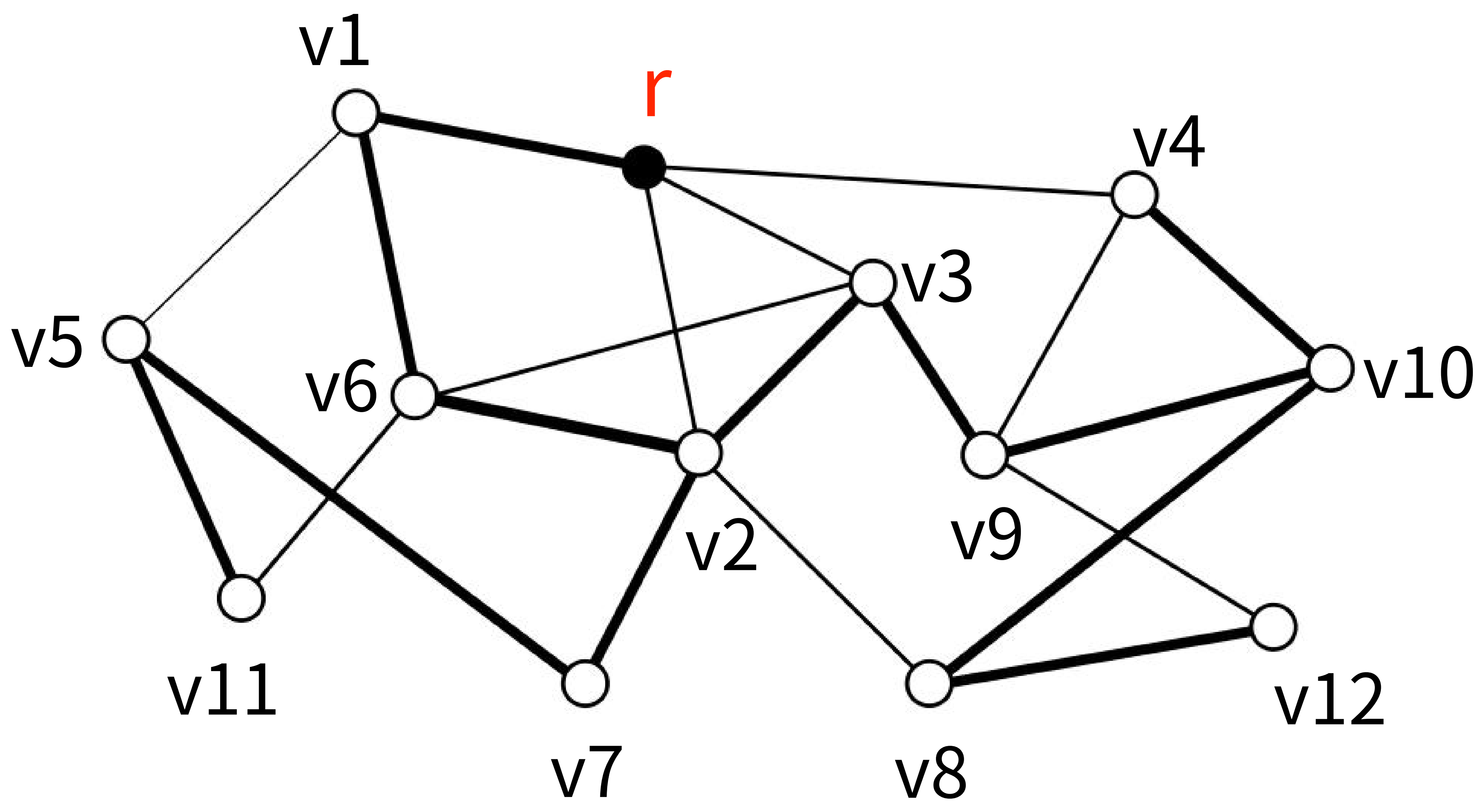
(2)如果 X 没有无色邻居，则从中移除并设置 X 年代

$\ell(x) = i + 1$。

4. 重复3直到 $S = \varnothing$ 。

该算法（DFS)输出一棵生成树。

通过DFS算法得到的树称为DFS树。




$\varnothing$ → r → rv1→ rv1v6 → rv1v6v2→ rv1v6v2v3

→ rv1v6v2v3v9 → rv1v6v2v3v9v10 → rv1v6v2v3v9v10v4

→ rv1v6v2v3v9v10 → rv1v6v2v3v9v10v8

→ rv1v6v2v3v9v10v8v12 → rv1v6v2v3v9v10v8

→rv1v6v2v3v9v10 →rv1v6v2v3v9

→rv1v6v2v3→rv1v6v2

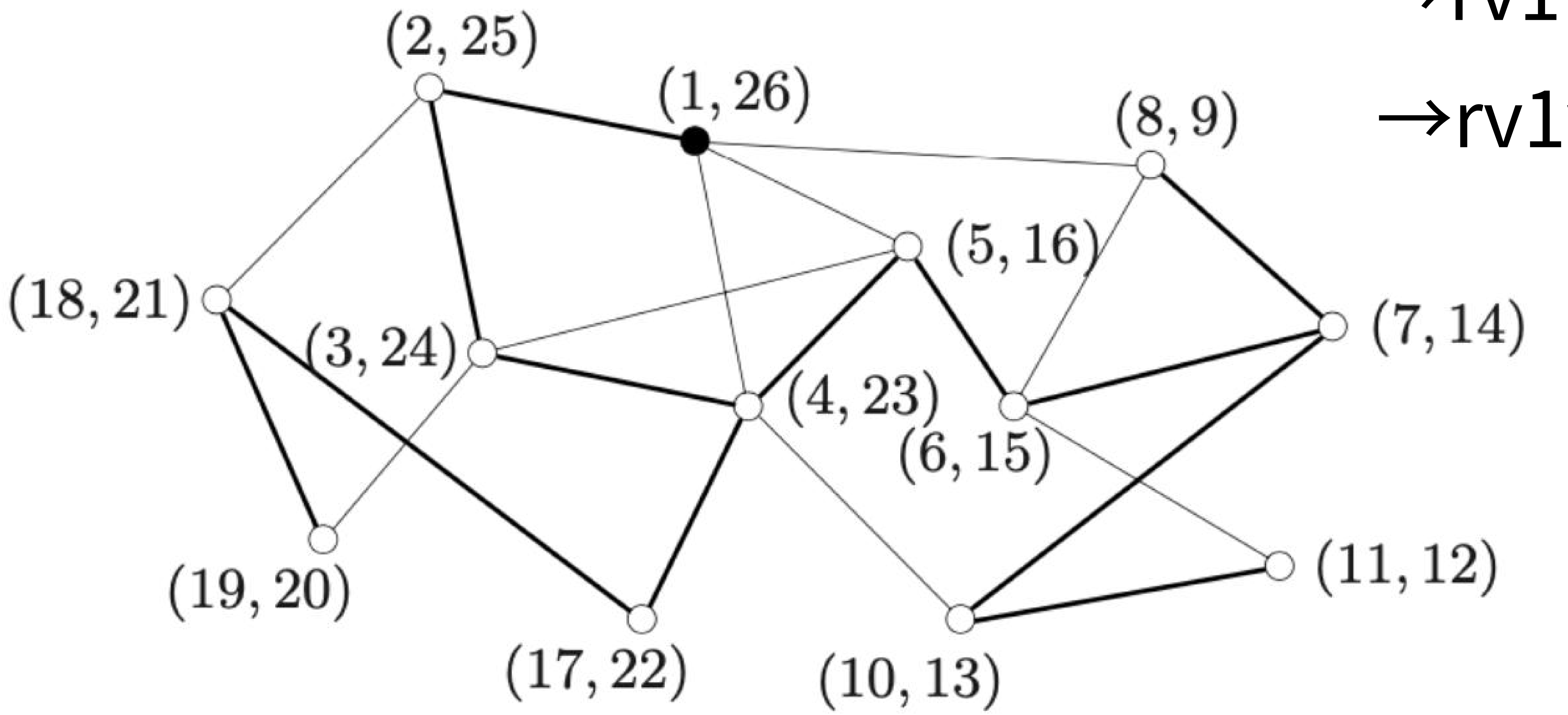
→rv1v6v2v7 →rv1v6v2v7v5

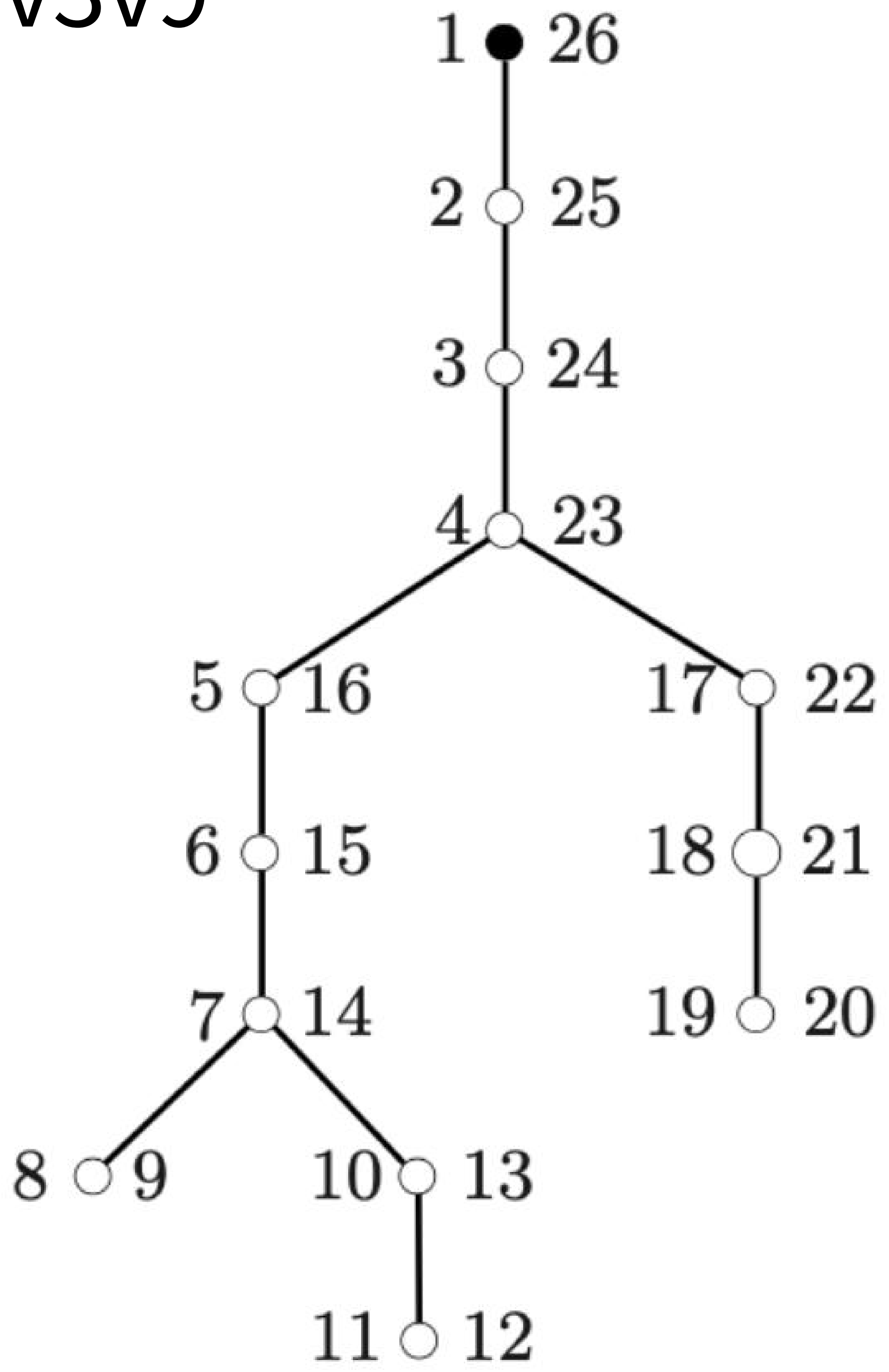
→rv1v6v2v7v5v11

→rv1v6v2v7v5→rv1v6v2v7

→rv1v6v2→rv1v6

→ rv1→ r →$\varnothing$



以下命题提供了输入与其 DFS 树ℓ(v)之间的联系 G

电视， DFS 算法返回的f(v) 。以及两个时间函数和

命题3. 设和是的两个顶点，且ℓ(v) < ℓ(u)在 在 G f(u) < f(v) ; 。

(1)如果 uv ∈ E(G) ，那么 。

是 in 的祖先当且仅当 在 ℓ(v) < ℓ(u) T (2) 。

定理9. 设是连通图的DFS树。电视 G

的根是 的割顶点当且仅当它具有至少两个子节点。r T v ≠ r T 的任何其他顶点是 的割顶点当且仅当它具有一个子节点，G

没有与顶点 的适当祖先相邻。并且该子节点 G

在

定理10（凯莱公式）。顶点上的标记树的数量为nn－2　n

。

证明。我们首先说明顶点上的标记分支的数量为。要了解这一点，请考虑构建标记分支的方法数量：从顶点　nn－1。n

上的空图开始，一次添加一条边。

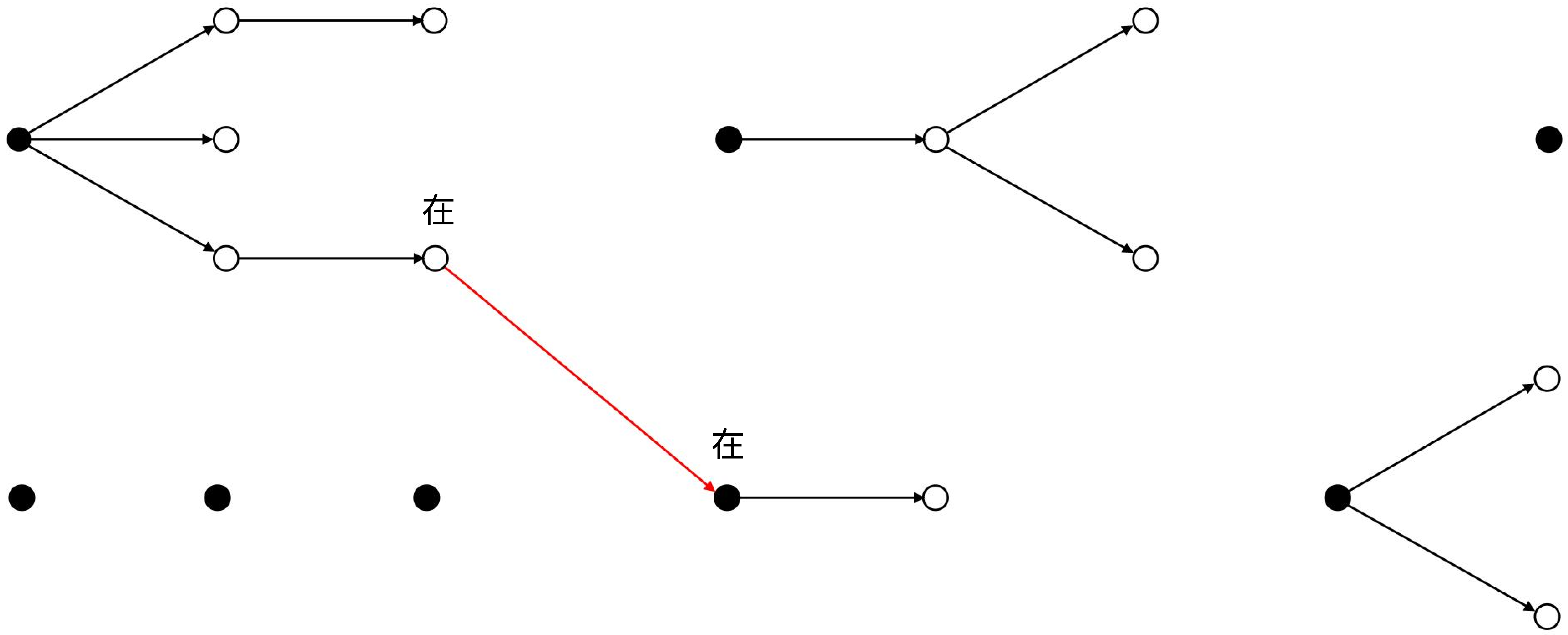
n

为了最终形成分支，每个阶段构建的子图必须是一个分支森林。最初，这个分支森林有分支，每个分支都是一个孤立顶点。在每个阶段，分支的数量都会减少一个。（u，v）　n

如果有分支，则新边的选择数为n(k − 1) :任何一个顶点都可以作为不包含 的分支之一的k − 1 个根。

n　在，而必须是　在

在




以这种方式在顶点上构造分支的方法总数为 n

$$\prod_{我=1}^{n-1} n(n-i) = n^{n-1}(n-1)!$$

请注意,任何顶点上的单个分支都是精确构造的 n

（n －1） !通过此过程,对于其n - 1条边的每个顺序,一次选择一次,顶点上的标记分支数为 n

$$n^{n-1}。$$

此外,由于每个顶点上的标记生成树都与顶点上的精确标记分支相对应,因此结果如下。 n

n n

对于一般的图,我们有以下简单的递归公式来计算图G的生成树的数量。

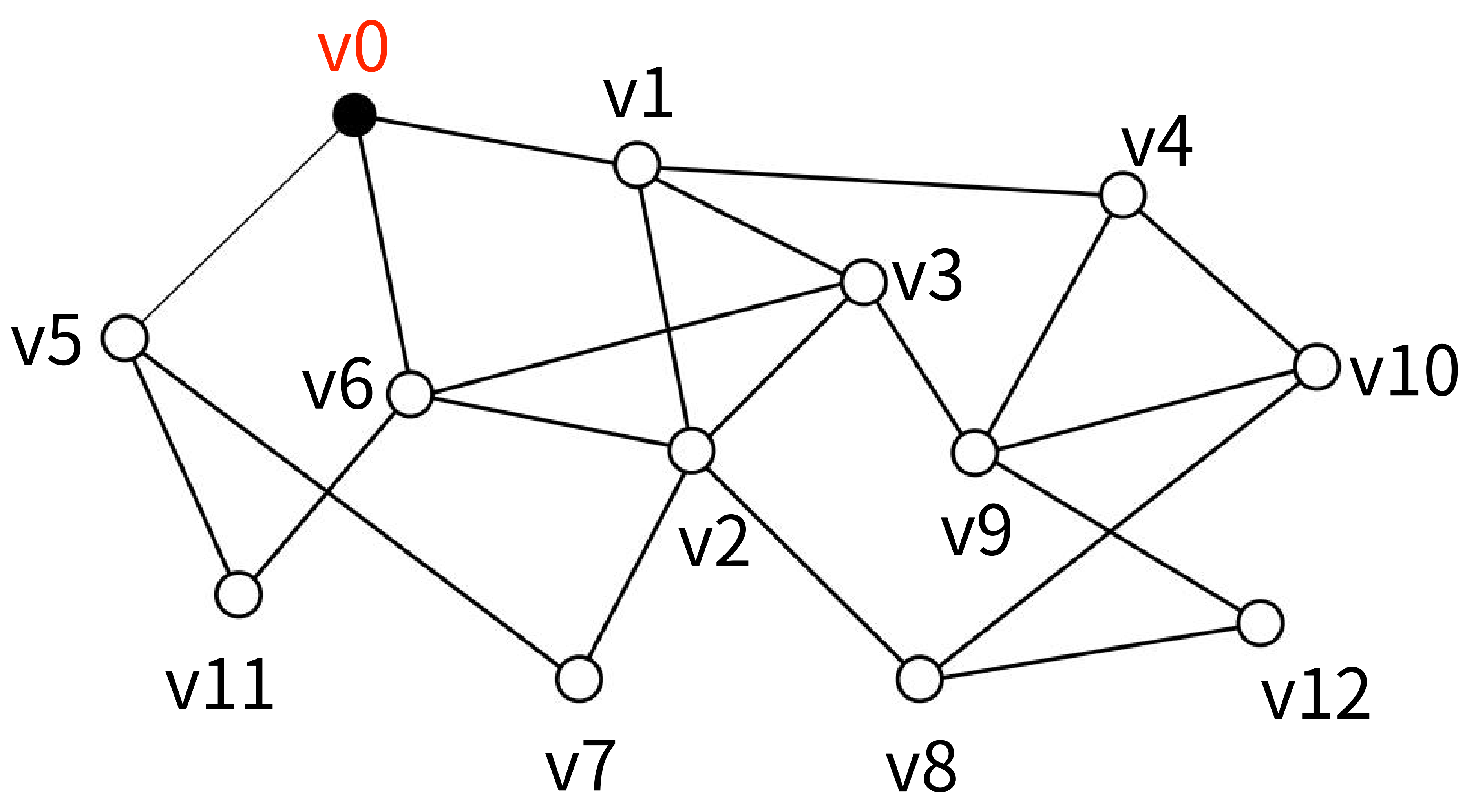
命题4. 设G为图， e为 G的边。则

$$t（G） = t（G - e） + t（G/e） 。$$

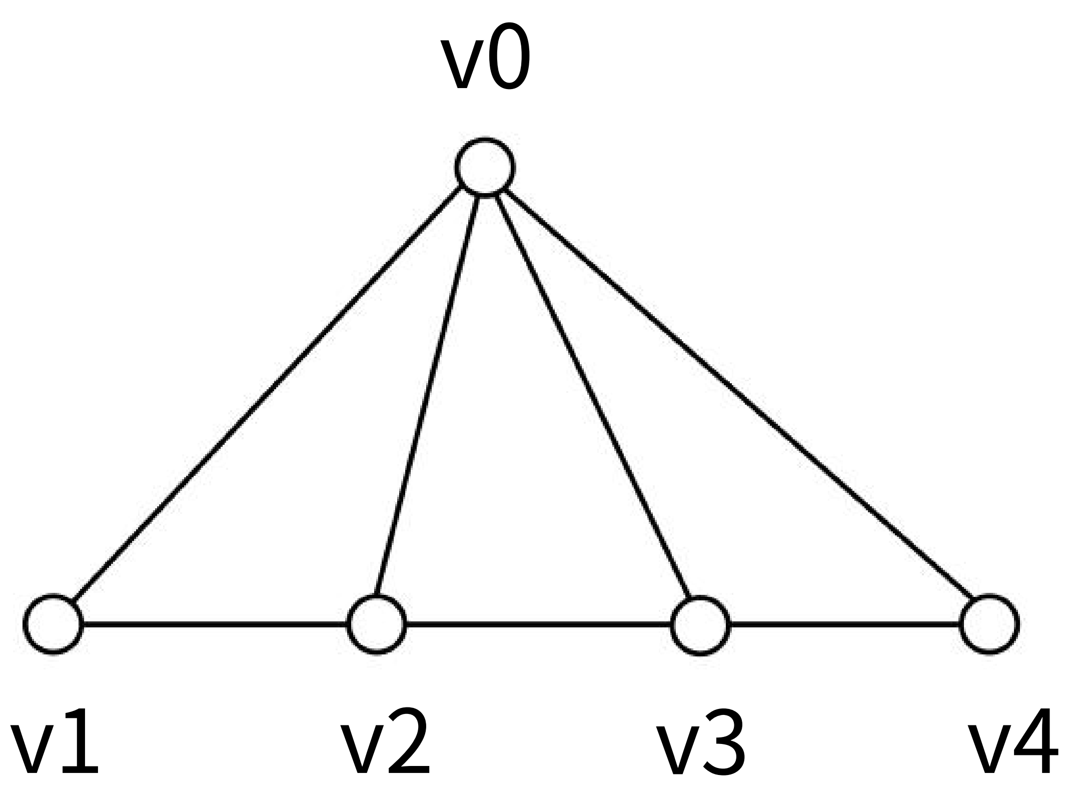
练习 2。

1. 在图G中寻找一棵BFS树和一棵DFS树,以v为根。 0

2. 计算图F中的生成树的数量。




G




F