图兰问题

给定一个图H,如果该图不包含H作为子图,则称该图无 H。

对于一个简单图,设H为顶点上的简单 -自由图可以拥有的最大边 H ex (n, H)

ex (n, H) 数。 n

数字H 也叫图兰号。

让 Tk,n表示顶点上的完全 -分图,并且所有部分的大小尽可能相等。图Tk,n 也称为图兰图。

定理 42 (Turán)。设是一个简单的图,其中不包含Kk G ,在哪里

k ⩾ 2.当且仅当G ≅ Tk−1,n时才相等。然后 e(G) ⩽ e(Tk−1,n)

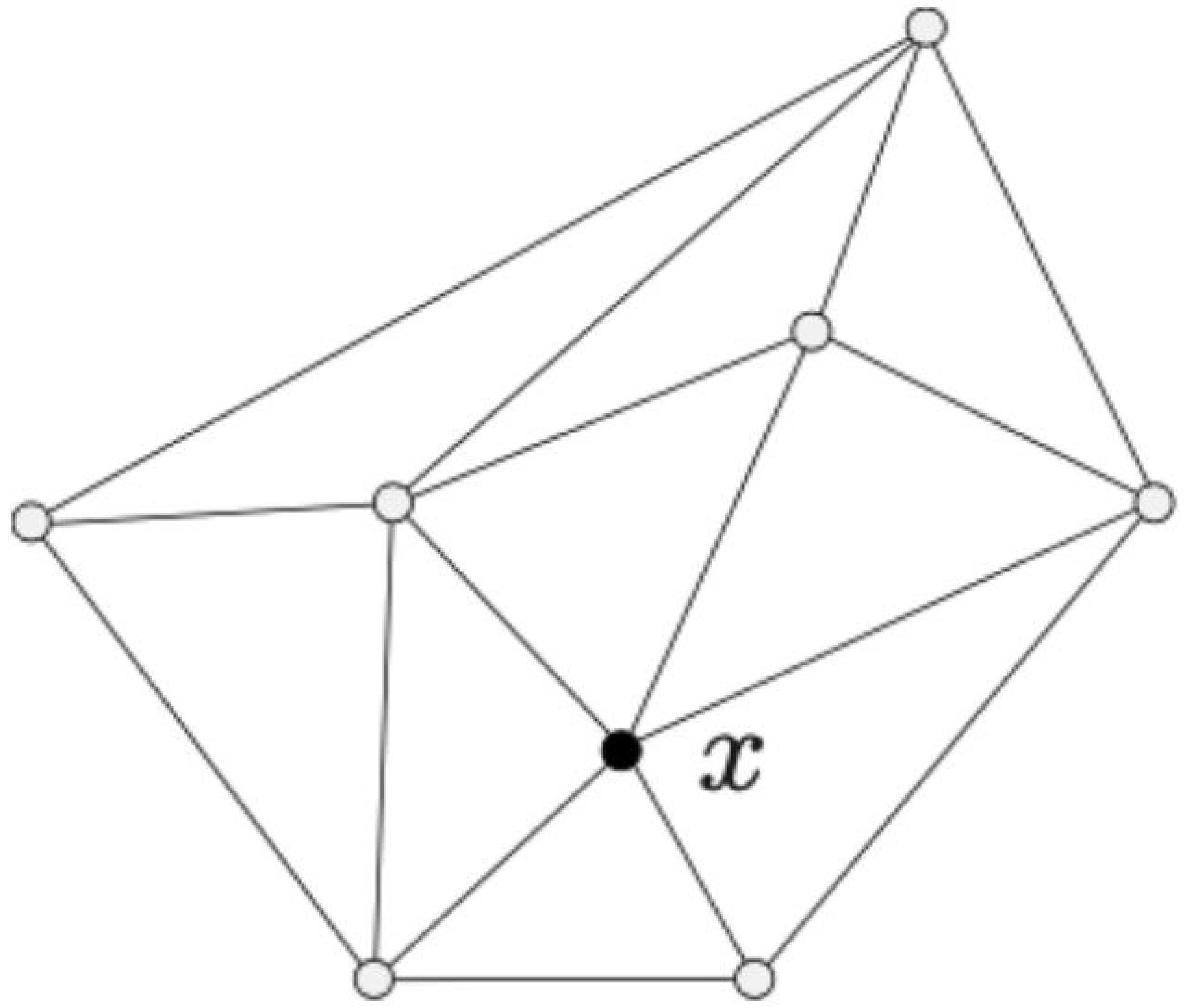
证明。通过对 . k = 2进行归纳 钾

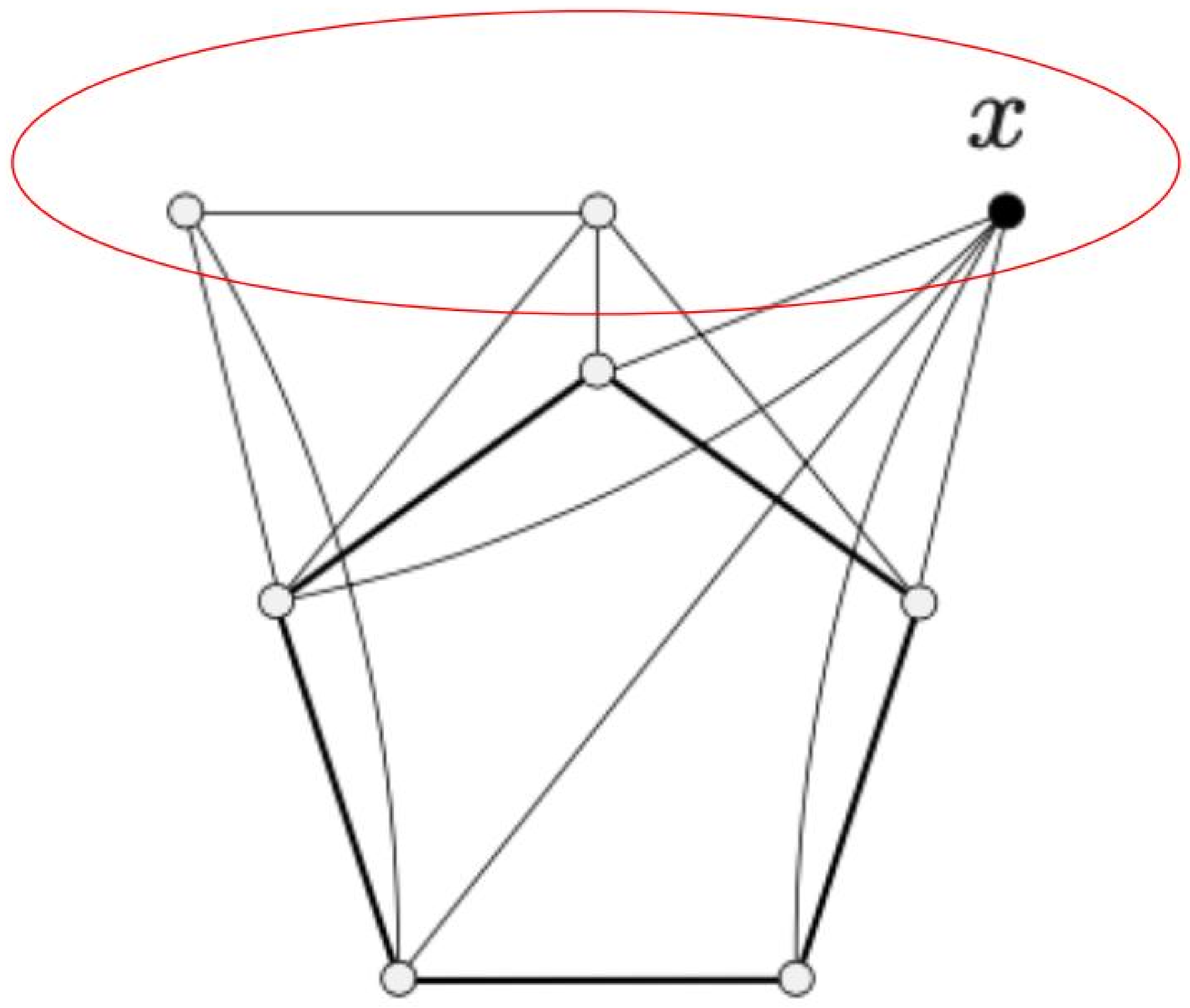
该定理对k成立,假设它对所有小于Kk 的 。

整数成立 ，并设为一个G简单的图表

不包含 。

选择度为的顶点 X 德格 ，并设置和 X = N（x） Y = V（G） X 。





然后

$$e(G) = e(X) + e(X, Y) + e(Y) \text{。}$$

由于不包含不包含 G K_k $G[X]$。因此，通过归纳，K_{k-1}

假设，

$$e(X) \leqslant e(T_{k-2,\Delta}),$$

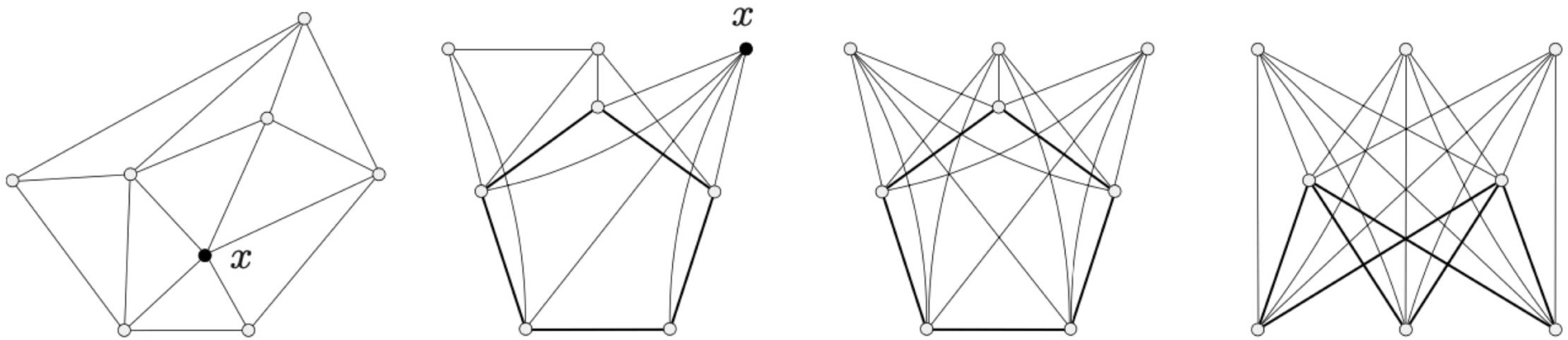
具有质量当且仅当此外，因为G的每个边E[X, Y] E[Y] $G[X] \cong T_{k-2,\Delta}$。

顶点为 的事件属于 和 或者 ，

$$e(X, Y) + e(Y) \leqslant \Delta(n - \Delta),$$

当且仅当 是独立集，且其所有成员满足 和 Δ

有学位。



所以， $e(G) \leqslant e(H)$ ，

从副本中H获得的图表在哪里 $T_{k-2,\Delta}$，

通过添加独立顶点并将该集合中的每个 $n-D$ 顶点连接到
每个顶点 $T_{k-2,\Delta}$。

观察到是顶点上的完全-分图。$e(H) \leqslant e(T_{k-1,n})$ H (k − 1) n

不难证明 ，

当且仅当$H = T_{k-1,n}$时才相等 。

它遵循 $e(G) \leqslant e(T_{k-1,n})$，当且仅当 $G = T_{k-1,n}$。

图兰定理被认为是极值图论的起源,它被应用于数学的许多领域,包括组合数论和组合几何。

我们给出了图兰定理在组合几何中的应用。

平面上一组点的直径是

集合中的两个点。需要注意的是,这是一个纯粹的几何概念,与图论中的直径和距离概念无关。

我们讨论直径为一的集合。

一组点决定 n (注2) 这些点对之间的距离。

显然,如果"大" ,那么其中一些距离必须"小" 。d

因此,对于 0 到 1 之间的任意值, {x1,

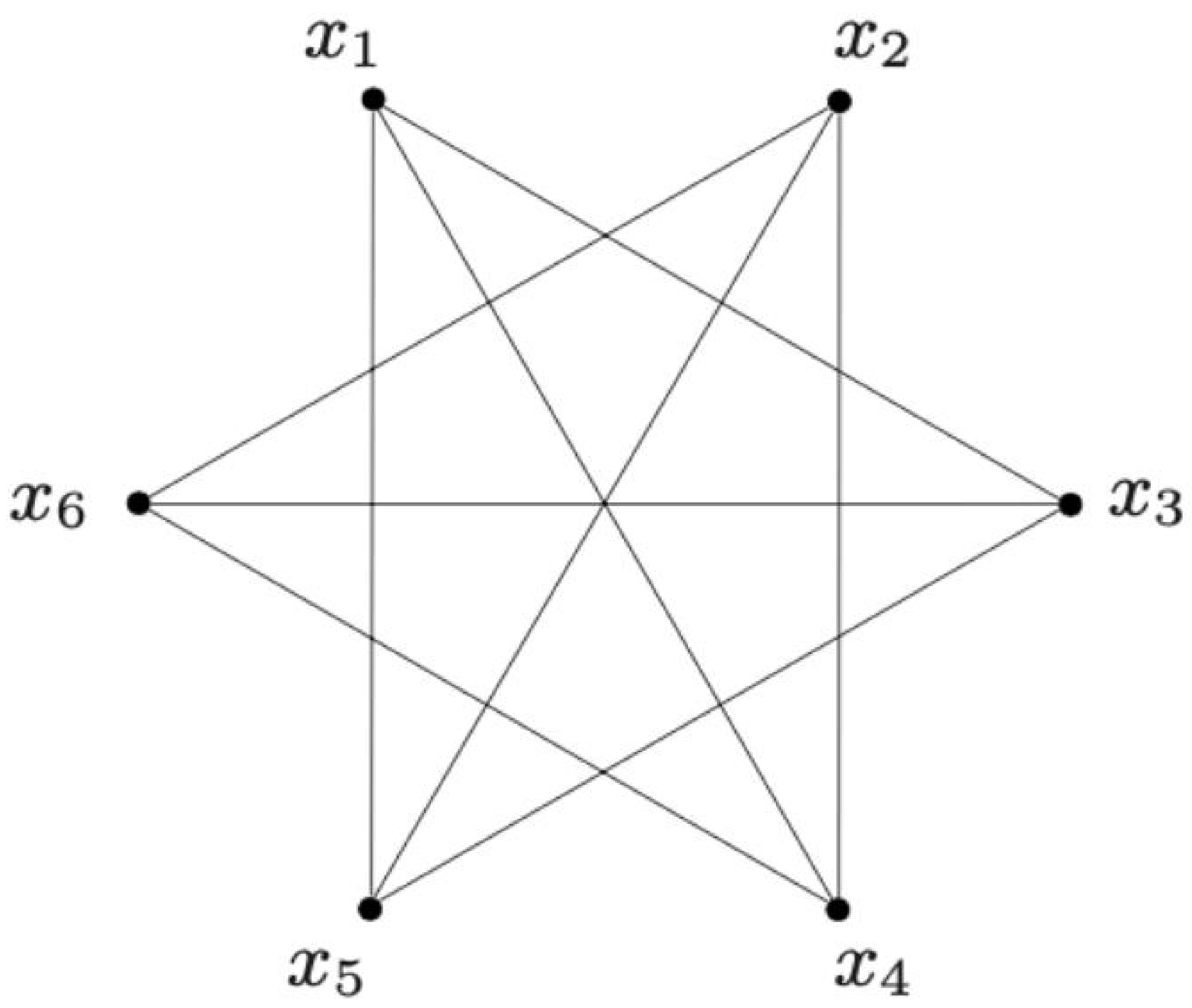
询问集合d中有多少对点是有意义的 x2, . . . , xn} 的

直径可以位于大于的距离处,这里我们提出了一个由 。

Erd s 提出的解决方案,

这个问题的一个特殊情况是, $d = 1/2\sqrt{\ }$ 。

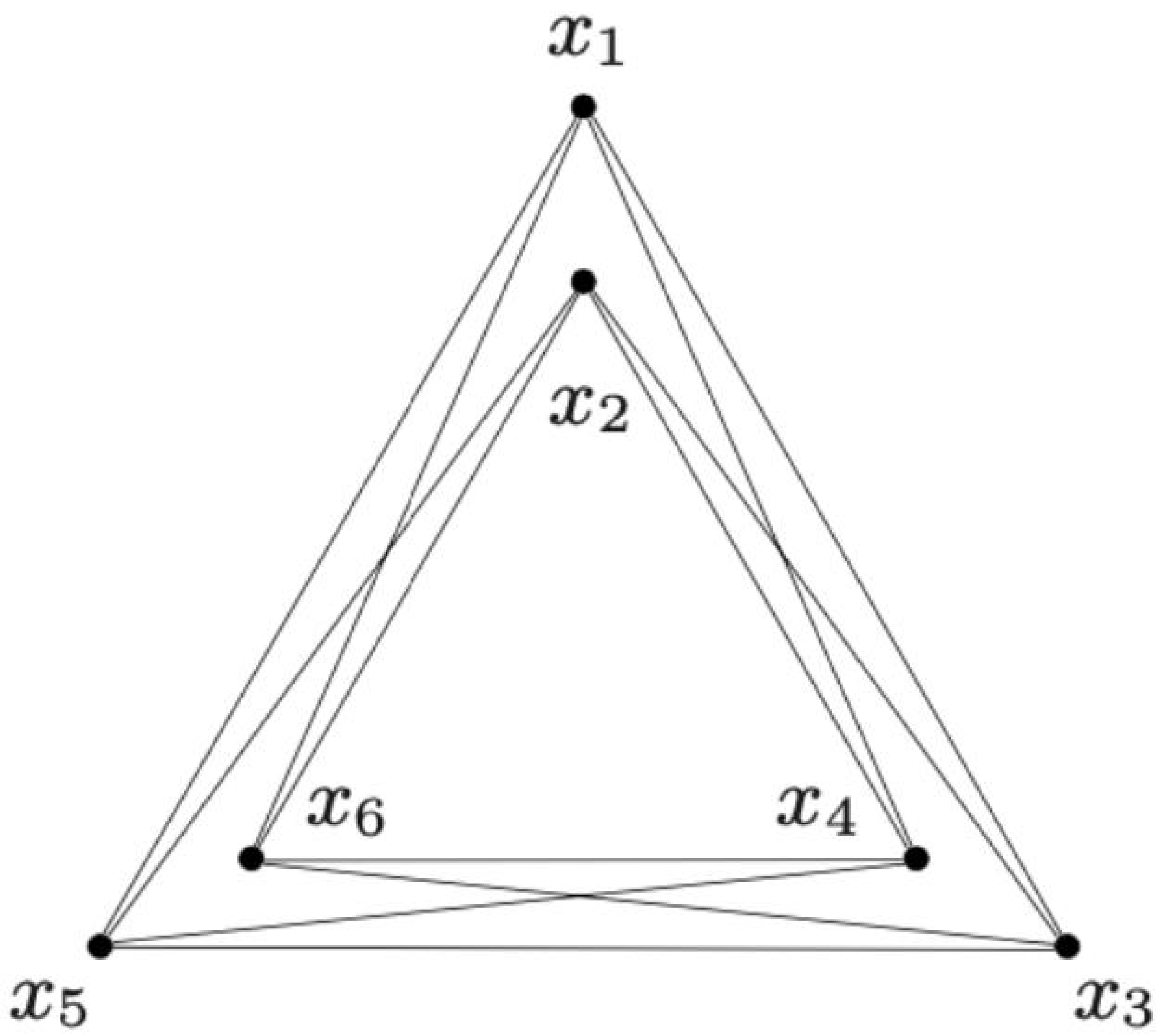
例如。n = 6 ,集合为{x1, x2, . . . , x6} 。



1 (x1， x4) ， (x2， x5) ， (x3，x6)

1/2 (x1， x2) ， (x2， x3) ， (x3， x4) ， (x4， x5) ， (x5， x6) ， (x6， x1)

$\sqrt{3}/2$ (x1， x3) ， (x2， x4) ， (x3， x5) ， (x4， x6) ， (x5， x1) ， (x6， x2)



除以下所有货币对外 (x1， x2) ， (x3， x4) ， (x5， x6)

距离大于 $1/2\sqrt{}$。

这是最好的可能！

定理 43 (Erd s)。设是平面上直径为 1 的集合。则S 1/ 2 年代

距离大于的点对数最多为直径为 n2/3的点对数,其中恰好 $\sqrt{}$

, n = |S| n ⩾ 2其中 。此外,对于每个 ,都有一组点 n2/3 , n

点对之间的距离大于

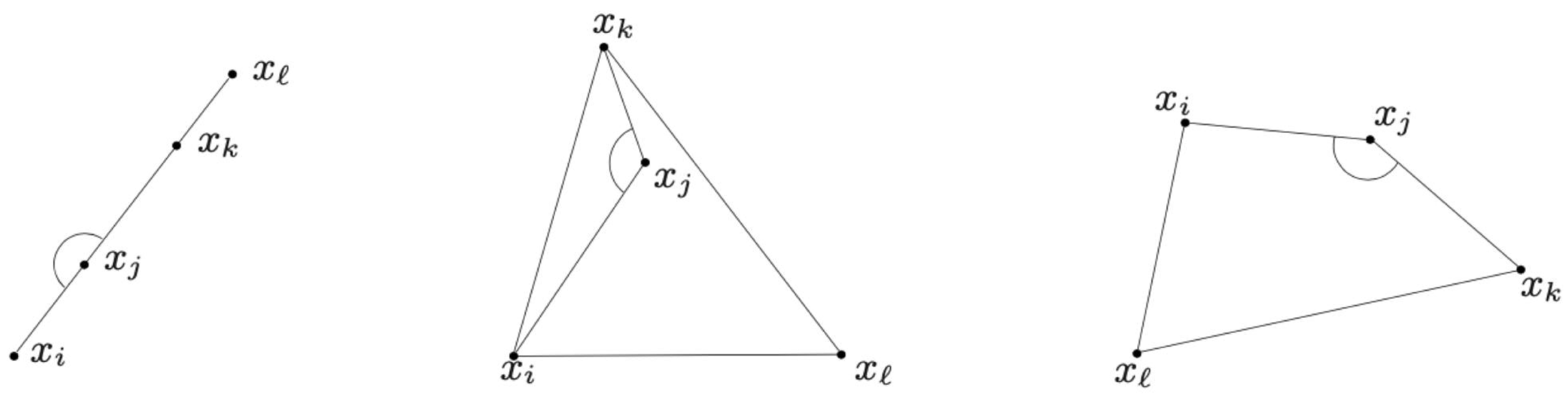
比 1/ 2$\sqrt{}$ 。

证明。设 S = {x1, x2, ..., xn} 考虑具有顶点集和{xi xj|d(xi , xj) > 1/ 2} d(xi , xj)的图 G 年代

边缘设置距 $\sqrt{}$, 在哪里 表示欧几里得

离和K4之间 西西杰 。我们表明不能包含的副本。 G

注意,平面上的任意 4 个点,其中 3 个点之间都确定一个至少为 90 度的角:这些点的凸包是一条线、一个三角形或一个四边形,并且在每种情况下都有一个至少为 90 度的角∠x。i xj xk



现在看看确定这个角度的三个点。xi， xj， xk

并非所有距离 $d(x_i , x_j)$ $d(x_i , x_k)$ $d(x_j , x_k)$ 可以大于 $1/\sqrt{2}$

于或等于 1。对于,如果 $d(x_i , x_k) > 1$ {x1, $d(x_i , x_j) > 1/\sqrt{2}$ 且小 和 $d(x_j , x_k) > 1/\sqrt{2}$，

然后 x2, . . . , xn} . 该套装 假设直径为 1。

因此， K4中的任意 4 个点 G，至少有一对不能被

边,因此不能包含的副本。 G

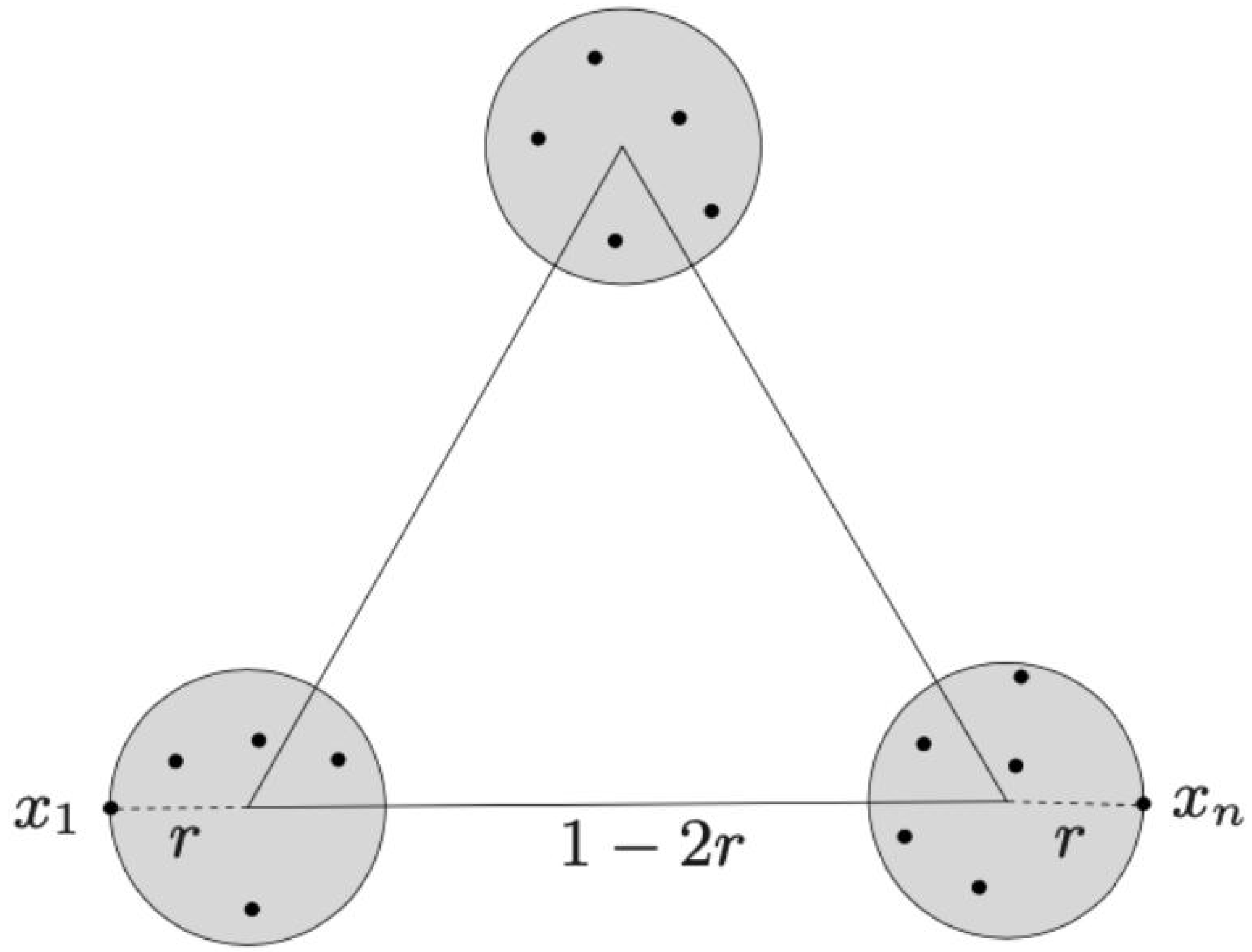
根据图兰定理，

$$e(G) \leqslant e(T_{3,n}) = \frac{n^2}{3} 。$$

可以构造一个集合 $\{x_1，x_2，...，x_n\}$ 直径为

恰好有一对点的距离大于 $n^2/3$ $1/\sqrt{2}$，如下所示。

$$0 < r < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



将点放在半径为r的 3 个圆内，英石

任意 2 个圆内的点数最多相差 1。

对于非二分图H， ex(n, H)的值是
渐近确定的。

定理 43 (Erd s-Stone-Simonovits)。设H为色数为χ(H)=χ⩾3 的图,则

$$ex(n, H) = \left(\frac{\chi-2}{\chi-1} + o(1)\right)\binom{n}{2}。$$

对于二分图H， ex(n, H)的值
还远未被人们所知。

定理 44 (Reiman).对于所有 $n \geqslant 4$ ，

$$ex(n, C_4) < \frac{1}{4} n\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)。$$

定理45（Füredi）

$$ex(q2+q+1,C4) \leqslant \frac{1}{2}q(q+1)^{2}\ \text{为了}\ q>13 \quad ,$$

并且等式对所有素数幂q都成立。

定理 45 的极值图是极性图,由Brown以及Erd s、Rényi 和 Sós独立定义。

让 $F_q = GF(q)$ 是具有q 个元素的伽罗瓦域。

在(ka, kb, kc)=(a′ , $F_q^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ （a′ ,令c′） （a， b， c)= b′, c ）

如果存在非零 $k \in F_q$ 使得 b′, 。

令V为所有等价类的集合。

极性图是具有顶点集 V 的图问， V中有两个等价类abc和xyz,当且仅

当ax+by+cz=0时相邻

。

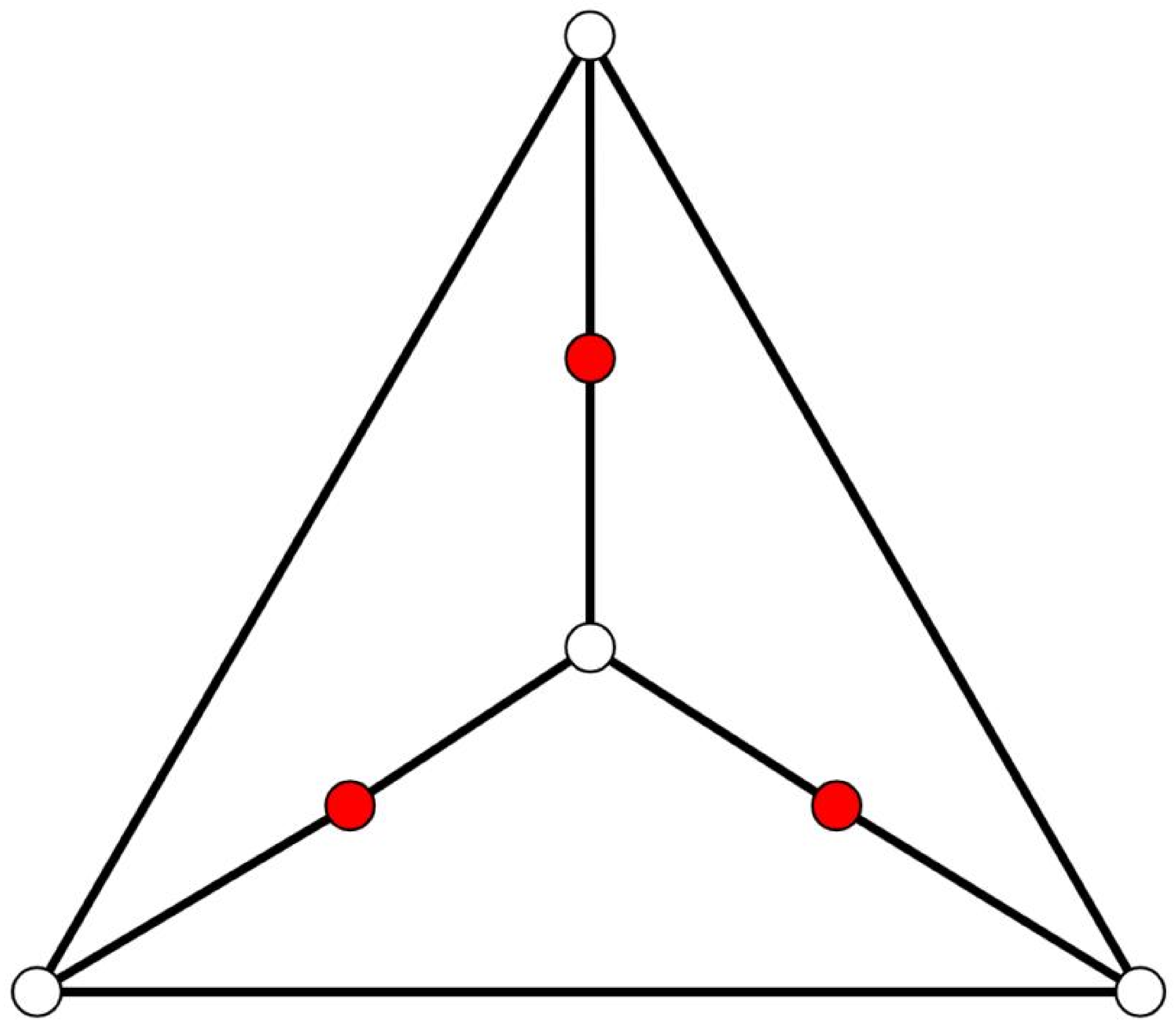
简单极性图 Gq是通过删除所有 问

q+1 循環。

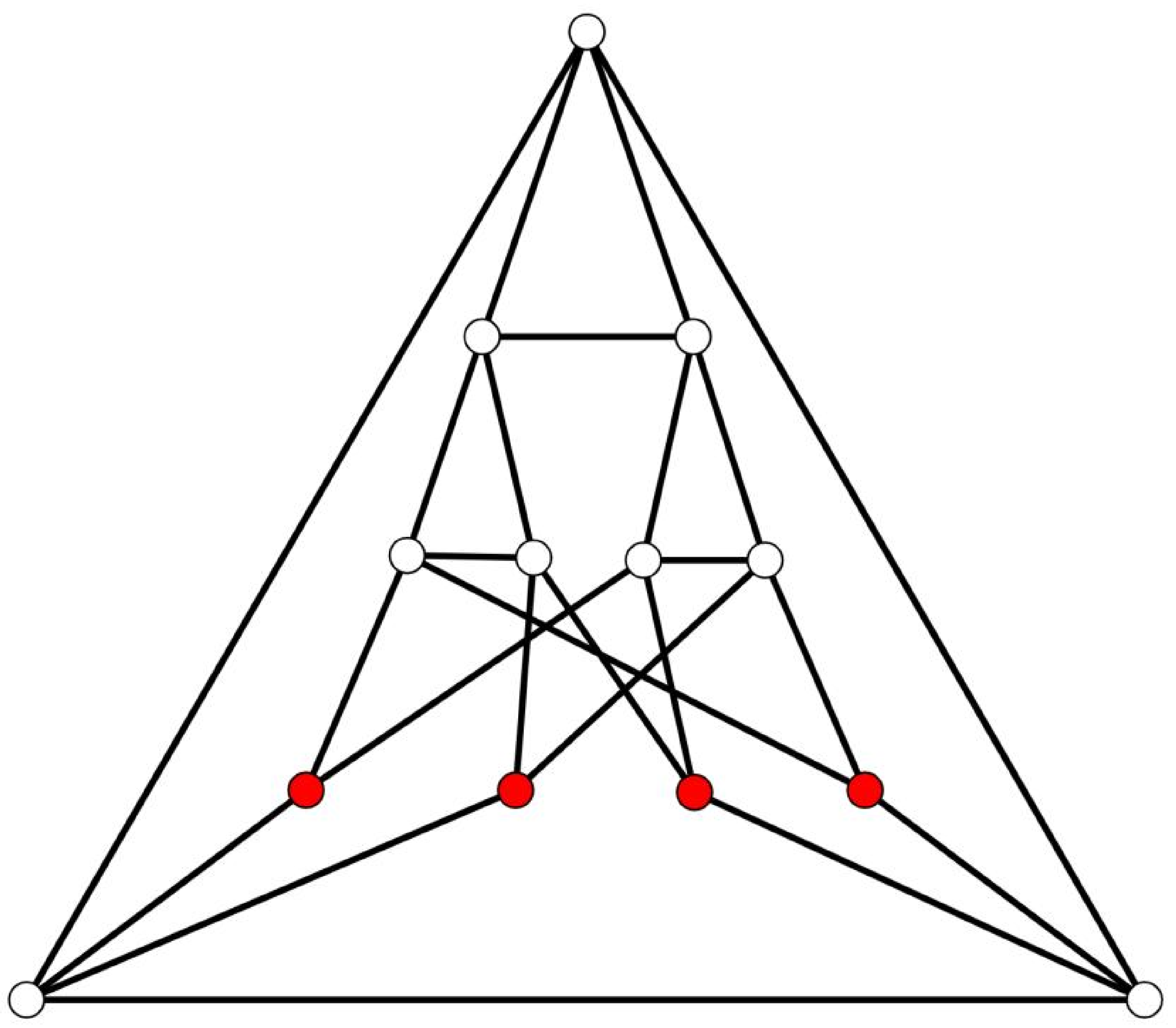
该图有q+1 个顶点Gqq2 +q+1

顶点的度为q,它们形成一个独立的集合 膽 ，

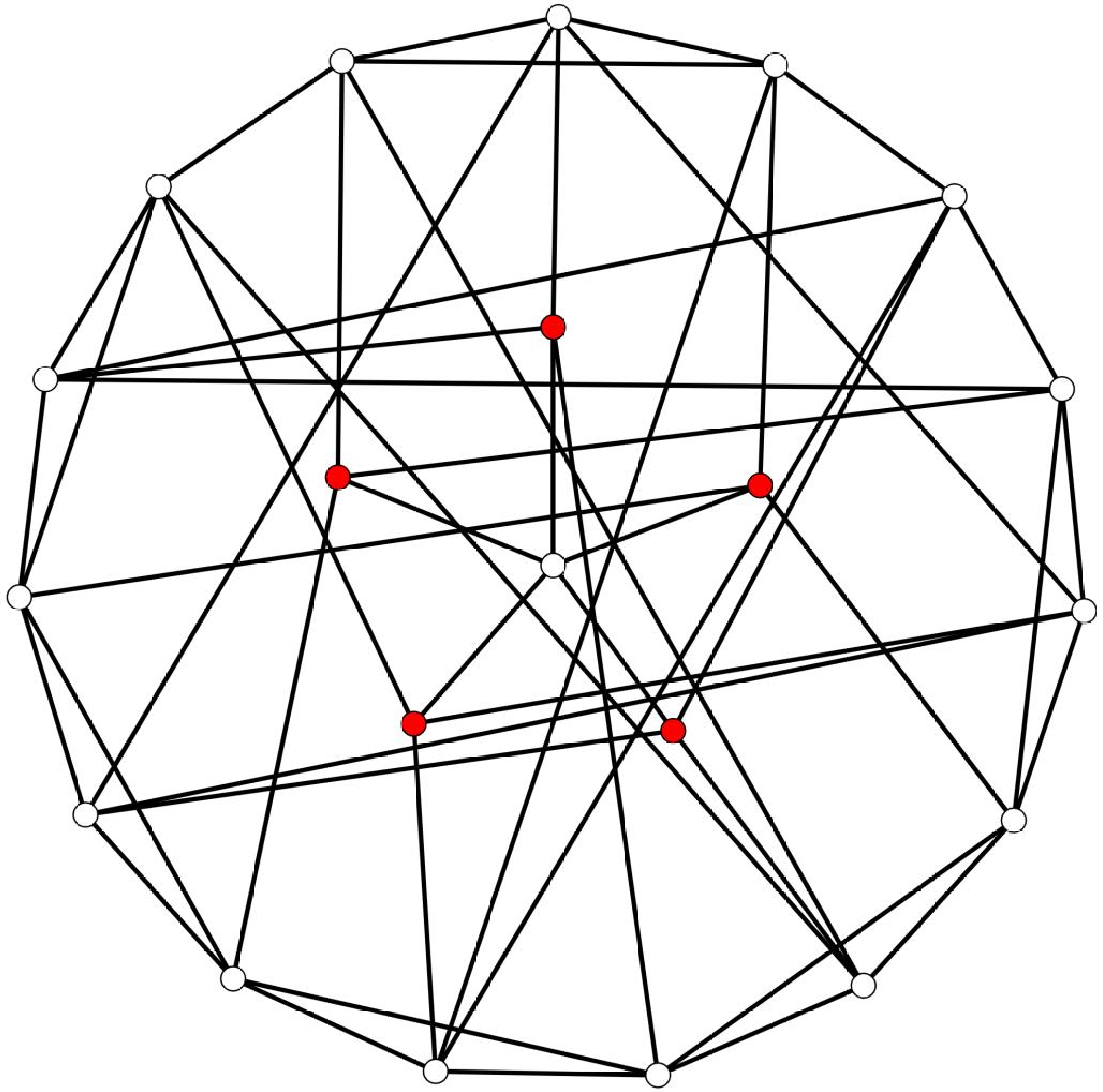
其他顶点的度数为 q+1 。



q = 2



q = 3



q = 4

完美差集

米2+米+1

令 2+m+1个 是整数模和的加法群

并且(m+1) -子集 2+m+1个。

如果每个非零元素都可以唯一地表示为差值Zm2+m+1

d1 −d2 D中两个元素的差集,则我们称D

为完美差集。

例如: Z7 = {0,1,2,3,4,5,6} ,

{2,3,5}是Z7的完美差集 ,

{0,4,6}也是 的完美差集。 Z7

如果q是素数幂,则完美 阶差集称为Singer 差集。 q+1

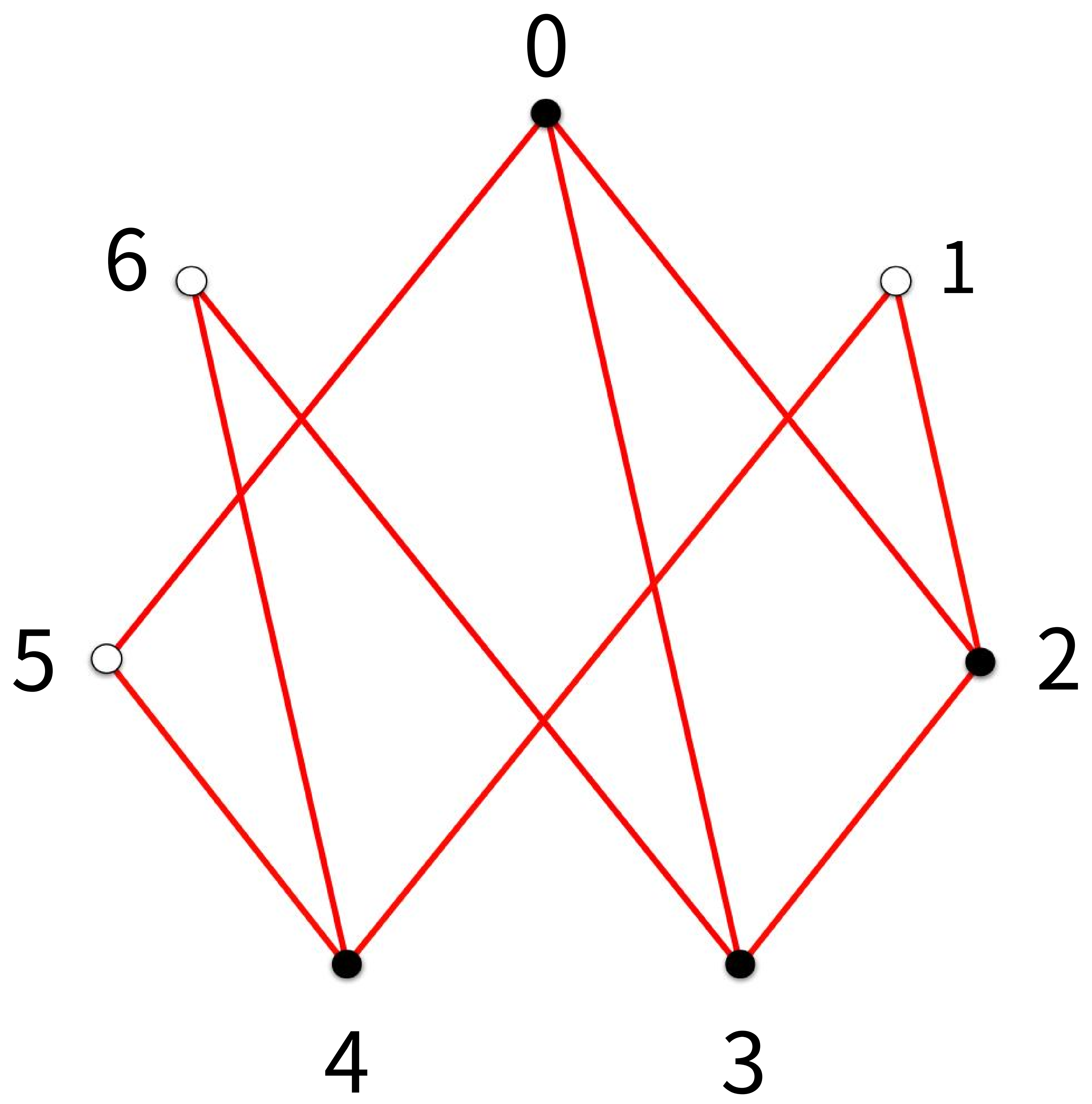
定理 46 (Jungnickel)。对于任何素数幂q,在Z中存在两个不相交的q+1阶辛格差集。q2 +q+1

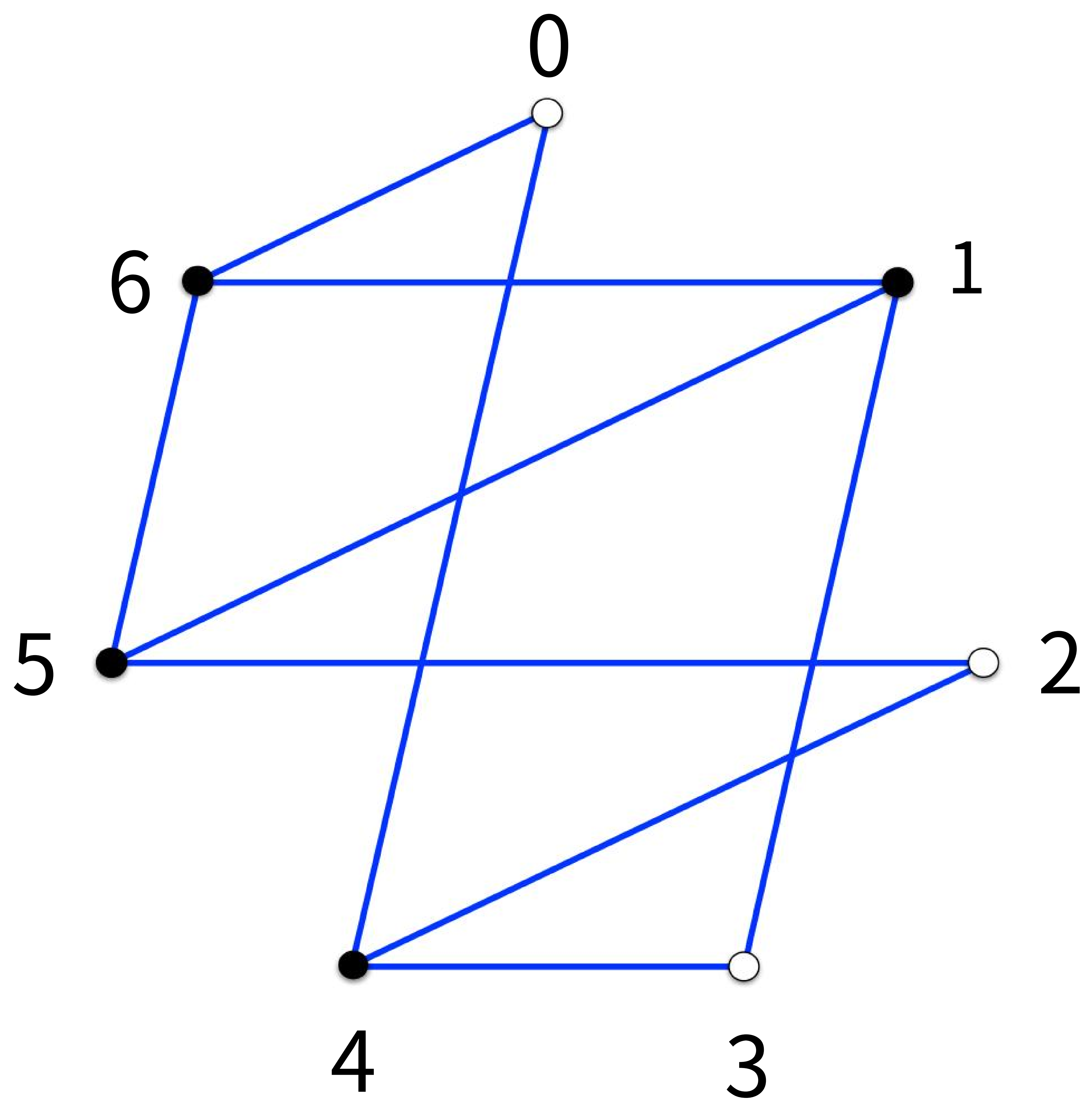
令q为素数幂, D 为q+1阶 Singer 差

集Zq2+q+1 在 。

极性图 GD是一个具有顶点集的简单图 q2+q+1, 两个截然不同的

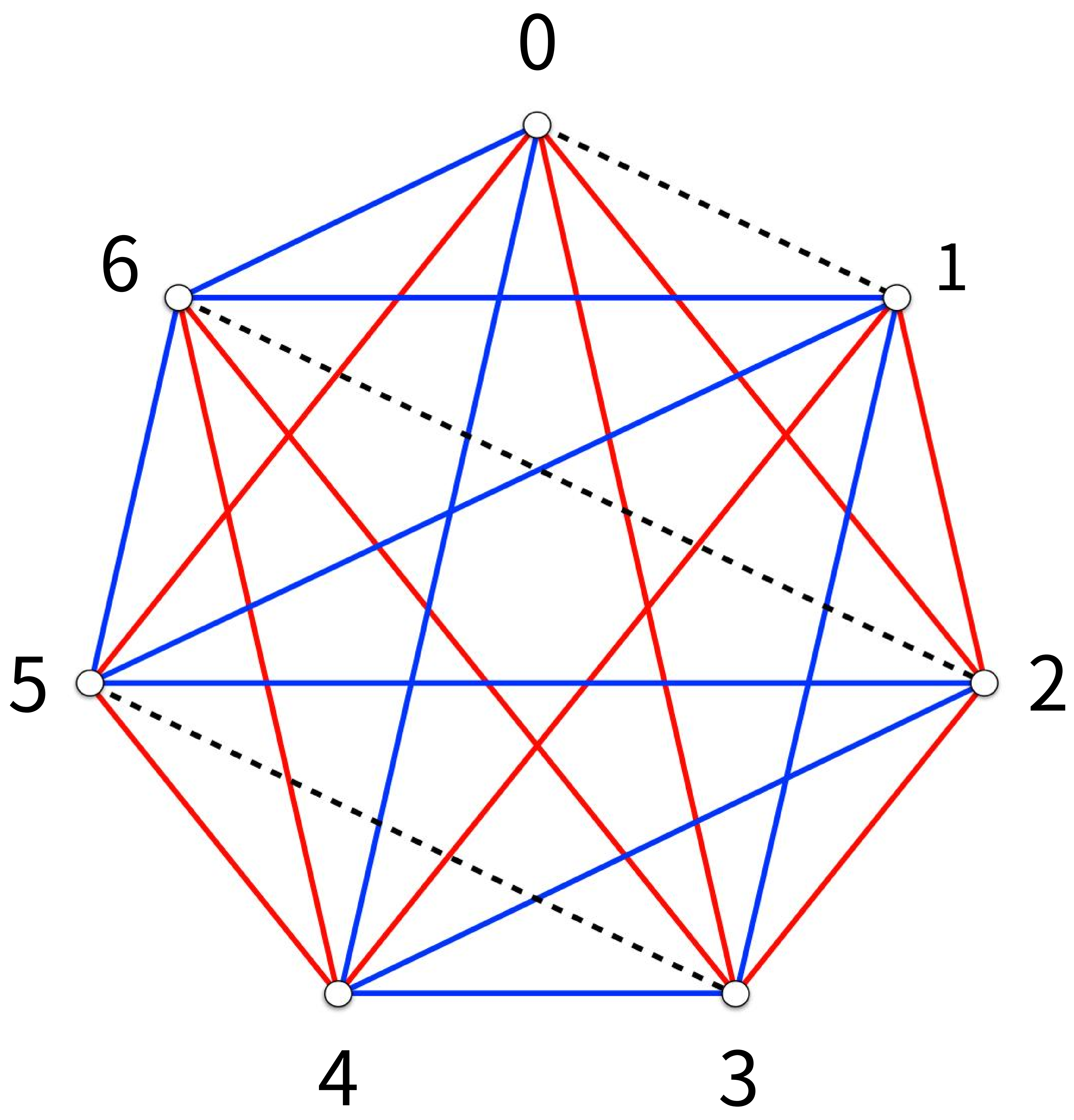
当且仅当 在D中,顶点i和j才相邻 q2+q+1一世+j





{2,3,5}

{0,4,6}


0
1
2
3
4
5
6

例子。

某个桥牌俱乐部有一条特殊规定,即四名会员之间必须事先没有结过婚,才可以一起玩。

有一次聚会,有 14 名成员出席,每人之前都曾与另外 5 名成员搭档。三局比赛结束后,由于俱乐部规定,会议暂停。就在成员们准备离开时,一位他们都不认识的新成员来了。

表明现在至少可以再玩一场比赛。

练习 12。

1. 一个半径为六英里的扁平圆形城市由十八辆警车巡逻,这些警车通过无线电相互通信。如果无线电的覆盖范围是九英里,请说明,在任何时候,至少有两辆警车,每辆警车可以与至少五辆警车通信。

2. 令P_4为 4 阶路径。确定 Turán 数 $ex(n，P_4)$。