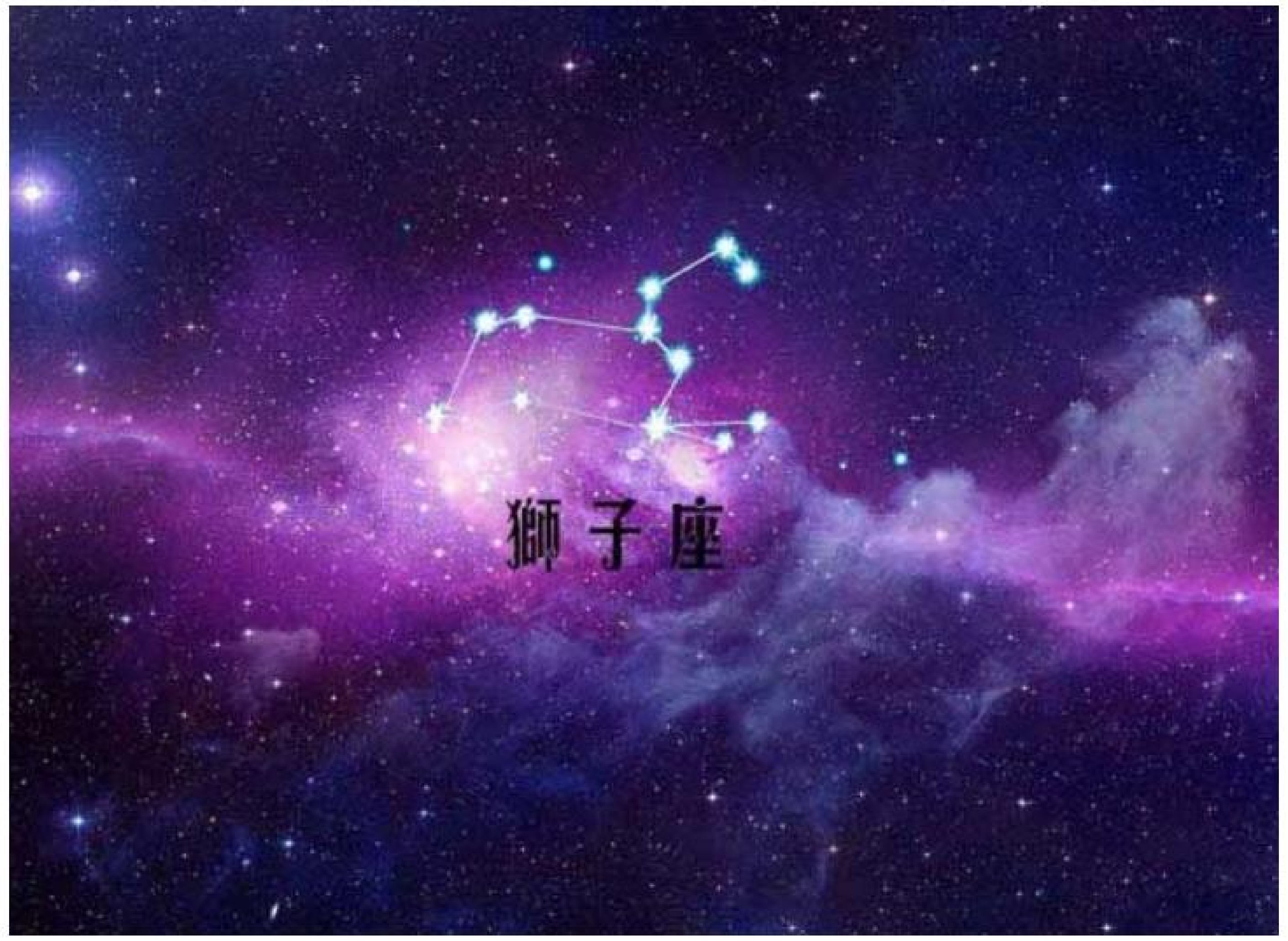
什么是拉姆齐理论?

根据一份有 3500 年历史的楔形文字文献,一位古代苏美尔

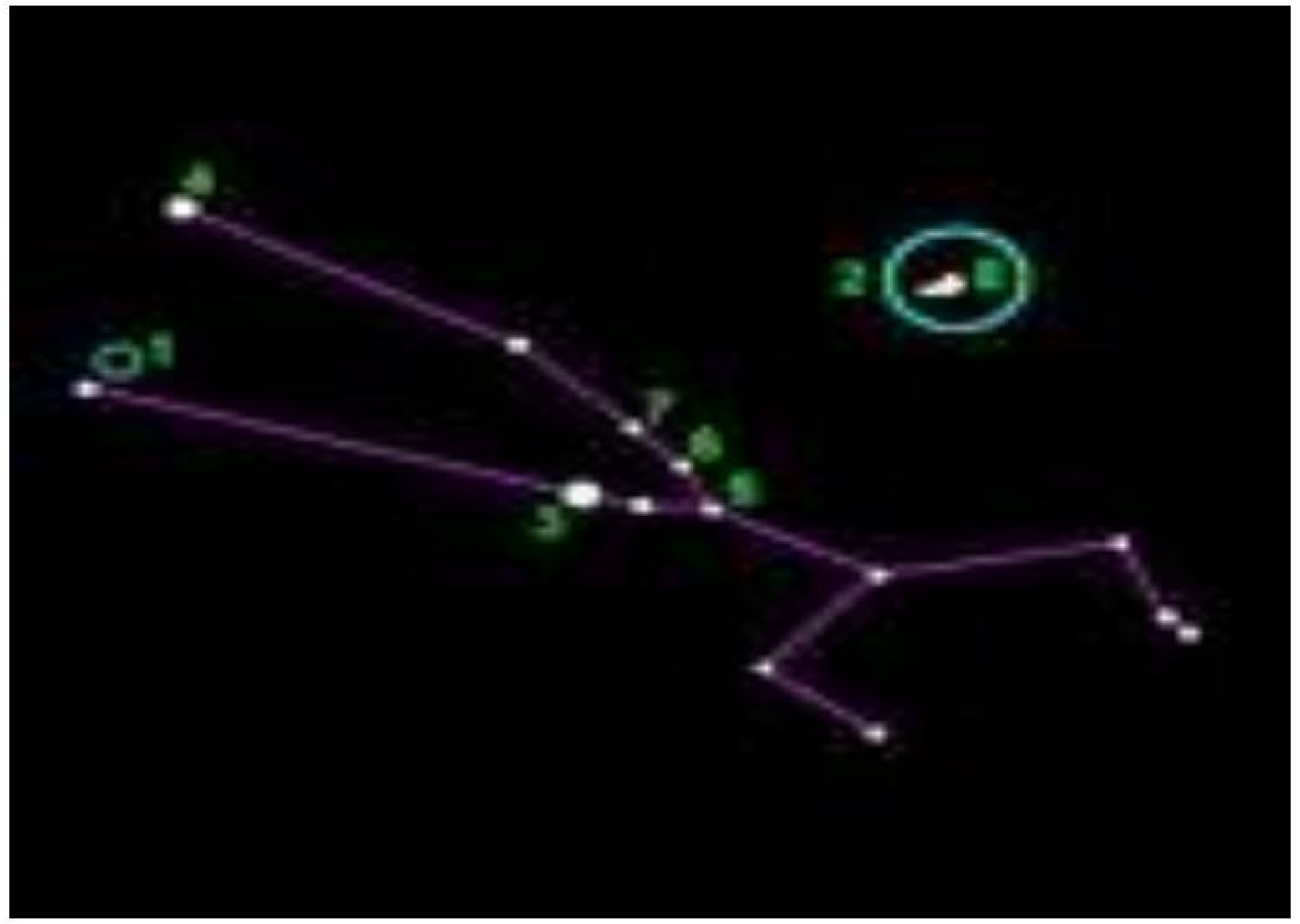
学者

曾经仰望天空的星星,看到

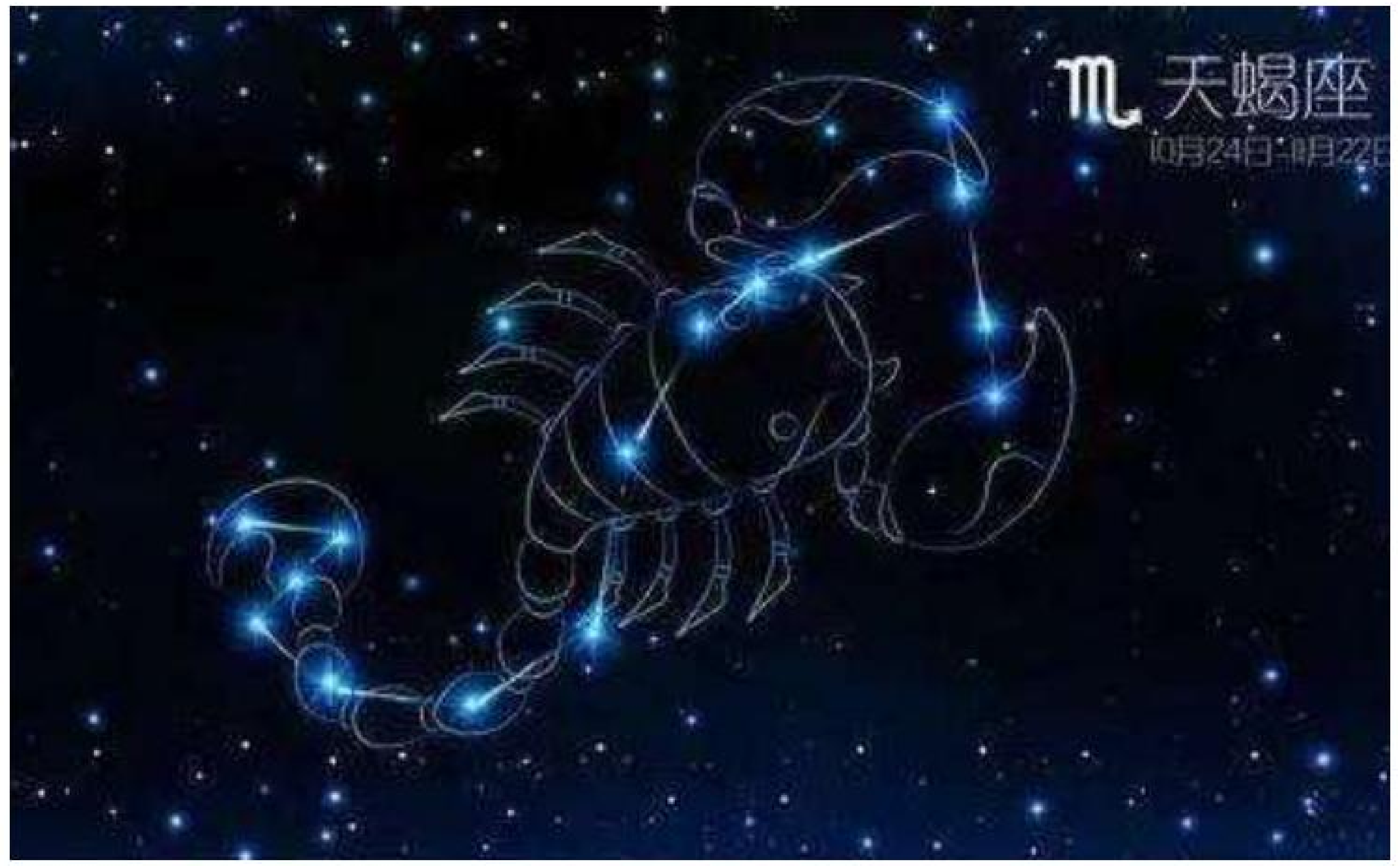
一只狮子



公牛



蝎子



如今,大多数观星者都会同意,夜空中似乎充满了直线、矩形、五边形等形状的星座。

这样的几何图案会不会是来自宇宙中某种未知的力量?

数学提供了更为合理的解释。

1928 年,一位英国数学家、哲学家和经济学家

拉姆齐

证明了这种模式

实际上隐含在任何大型结构中,

不管它是一群星星还是一排鹅卵石!

FP Ramsey,《关于形式逻辑的问题》,

伦敦数学会刊,30(1930),361-376。

1. 拉姆齐定理

2.舒尔定理

3.范德瓦尔登定理

4. 埃尔多斯-塞克雷斯定理

1.拉姆齐定理

派对拼图

需要多少人才能组成一个总是包含n 个共同熟人

或n 个共同陌生人的团体?

对于n=3,已知至少需要 6 个人。

如何证明?

一种方法是列出所有可能的组合,然后检查每个组合中是否有熟悉

或不熟悉的三组组合。

因为我们必须检查

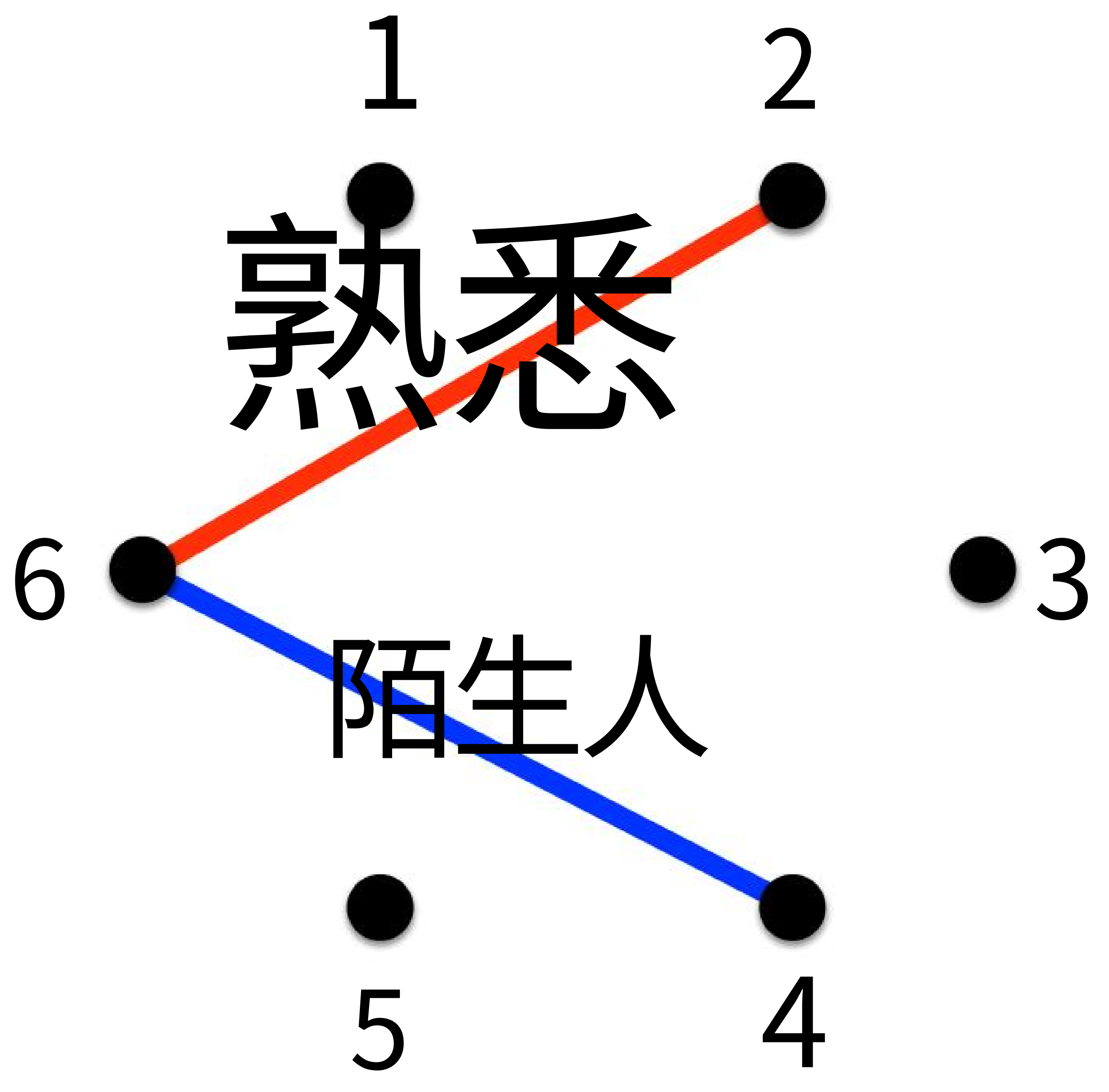
2（6 2）= 215 = 32768

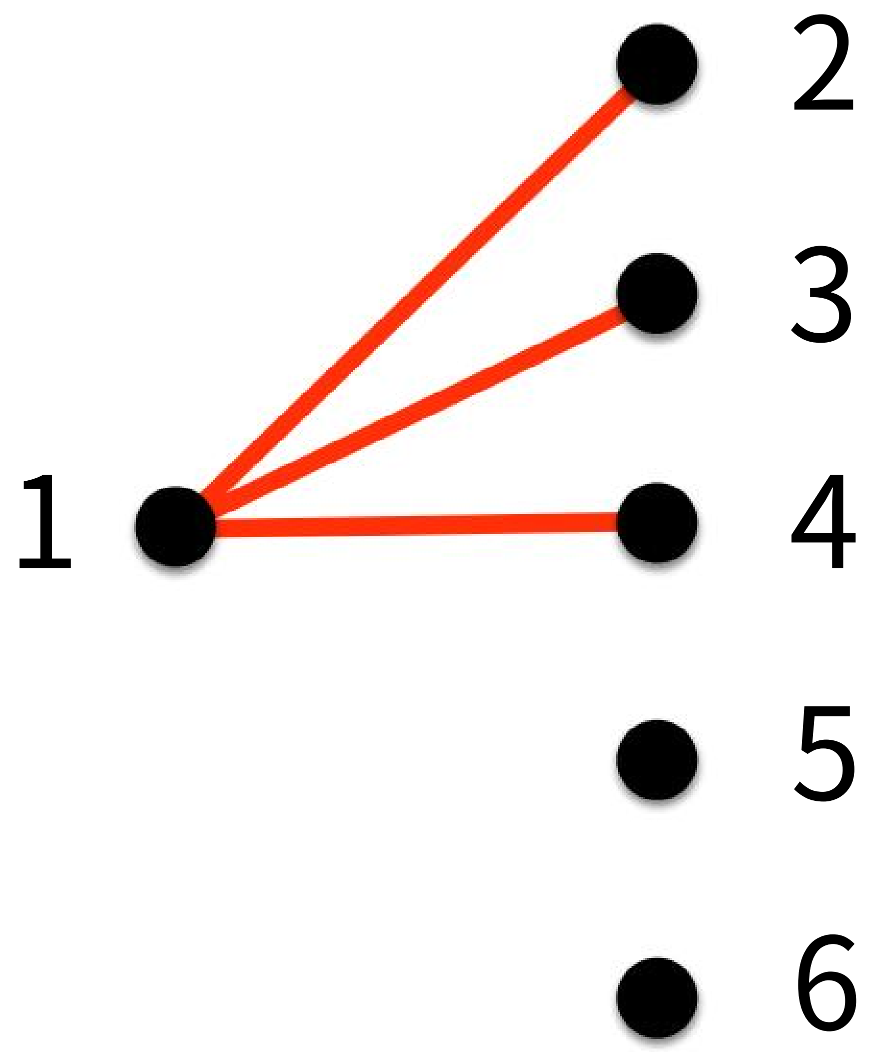
组合,这种方法既不实用,也无见解。

现在,让点代表聚会

中的人,红色边连接互相认识的人,蓝色边连接互

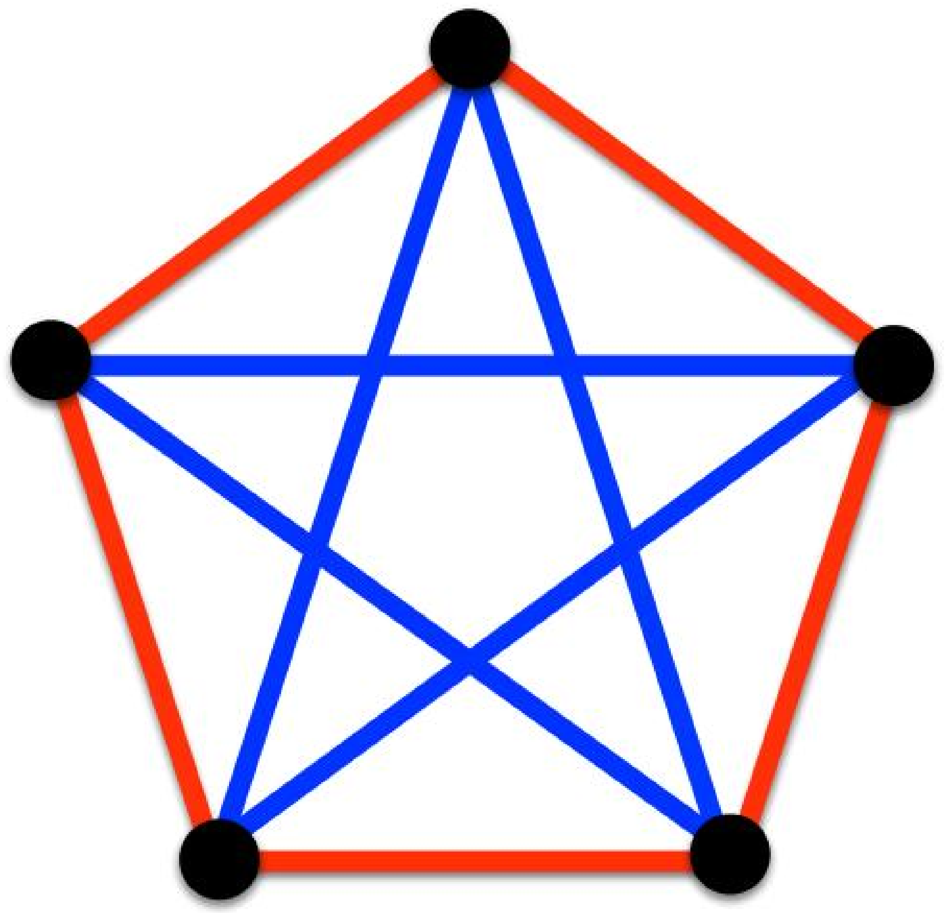
相陌生的人。





如果{2,3,4}互相陌生,则结论成立。

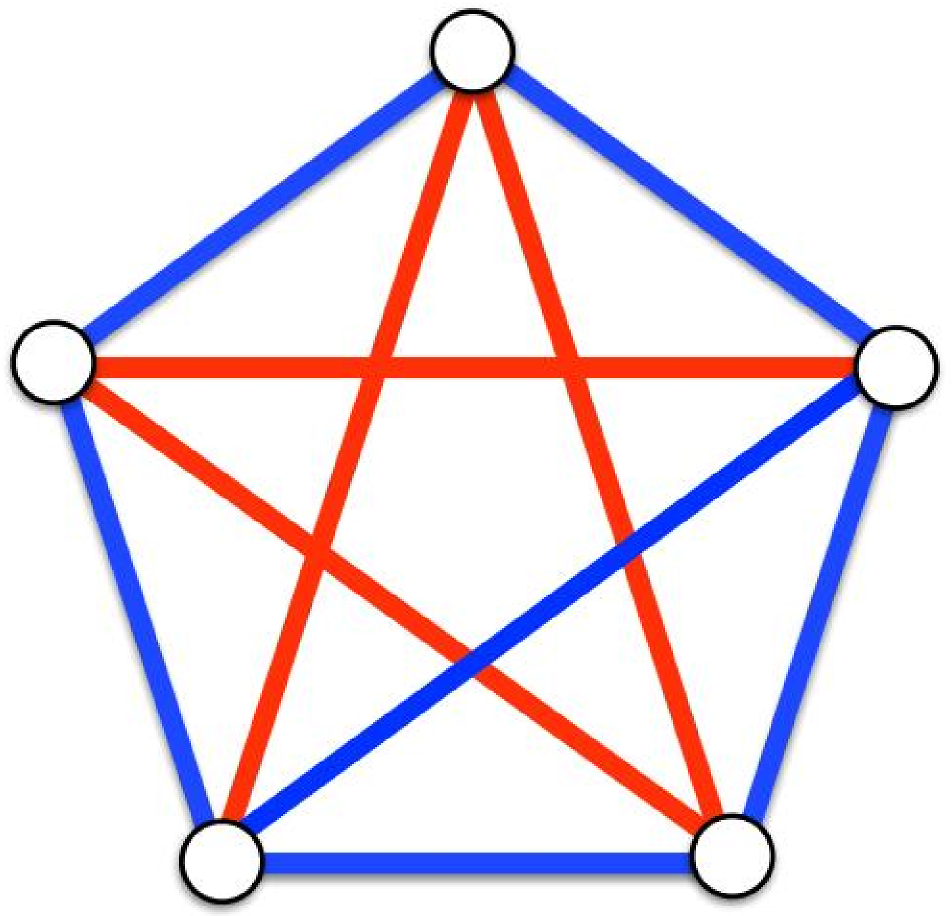
如果 {2,3,4} 中的某两个人互相认识,比如 2 和 3 互相认识,那么 {1,2,3} 也认识。

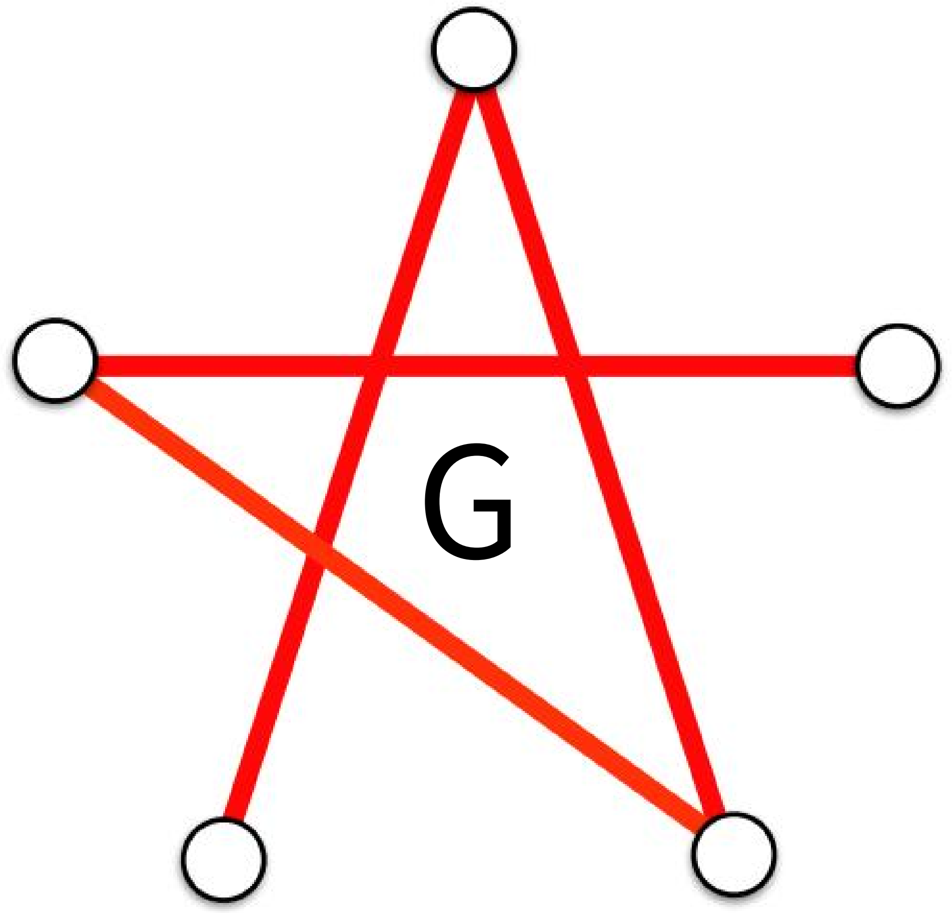


另一方面,左侧所示的 5
个人与亲属关系表明 5 个人是不够的。

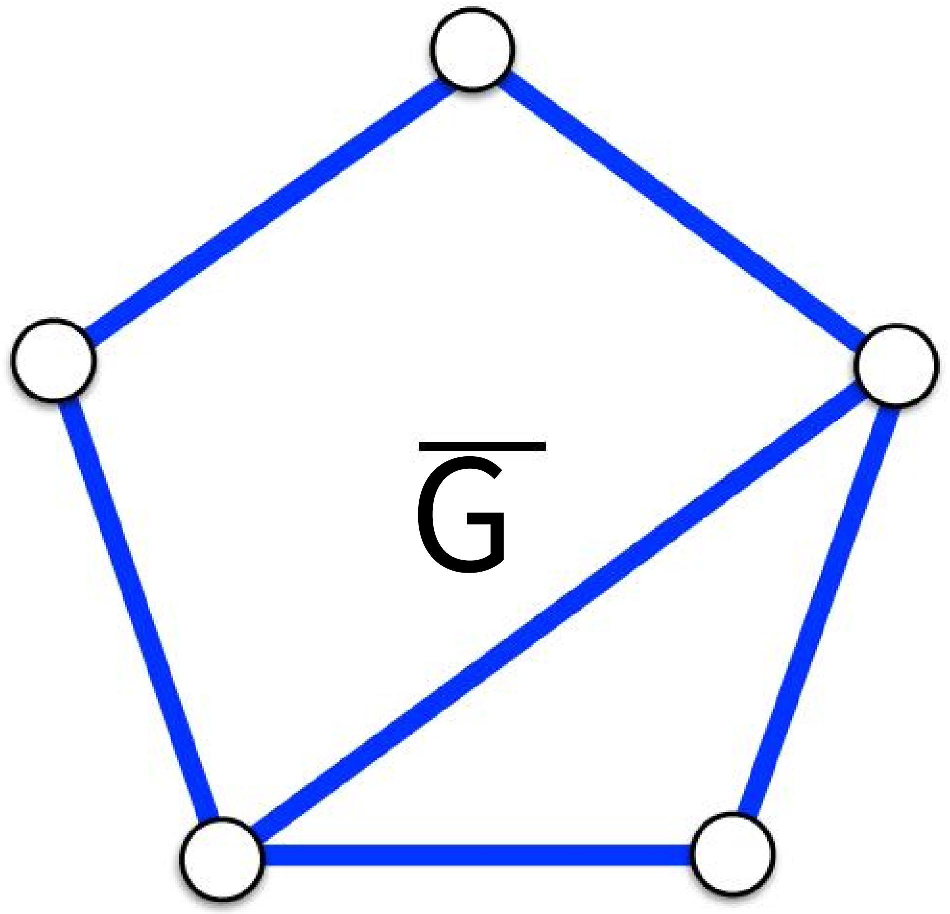
完全图： KN

一个有N 个顶点的图,任意两个顶点都有一条边连接。





$uv \in E(G)$ $uv \notin E(\overline{G})$



PARTY PUZZLE 的一般形式:给定正整数p和q， p,

q≥2。

N=N(p, q)

多大程度可以保证任意一个有红色和蓝色的完全图的2边着

色， KN

KN包含红色还是蓝色? Kp ， 公斤

Ramsey 证明了这样的整数N确实存在!

令R(p,q)为最小整数N ,使得任意一个有红色和蓝色的完全图

的 2 边着色KN

包含红色或蓝色。 钾 ， 公斤

很容易看出

$$R(p,2)=p，\quad R(2,q)=q且R(p, q)=R(q, p)。$$

定理 29.对于任何两个整数R(p, $p, q \geqslant 2$， $R(p, q)$ 是有限的,并且

$$q) \leqslant R(p-1,q)+R(p, q-1)$$

对于p， $q \geqslant 3$。

此外,如果 $R(p-1,q)$ 和 $R(p, q-1)$ 都是偶数,那么

$$R(p, q) < R(p-1,q) + R(p, q-1)。$$

因为

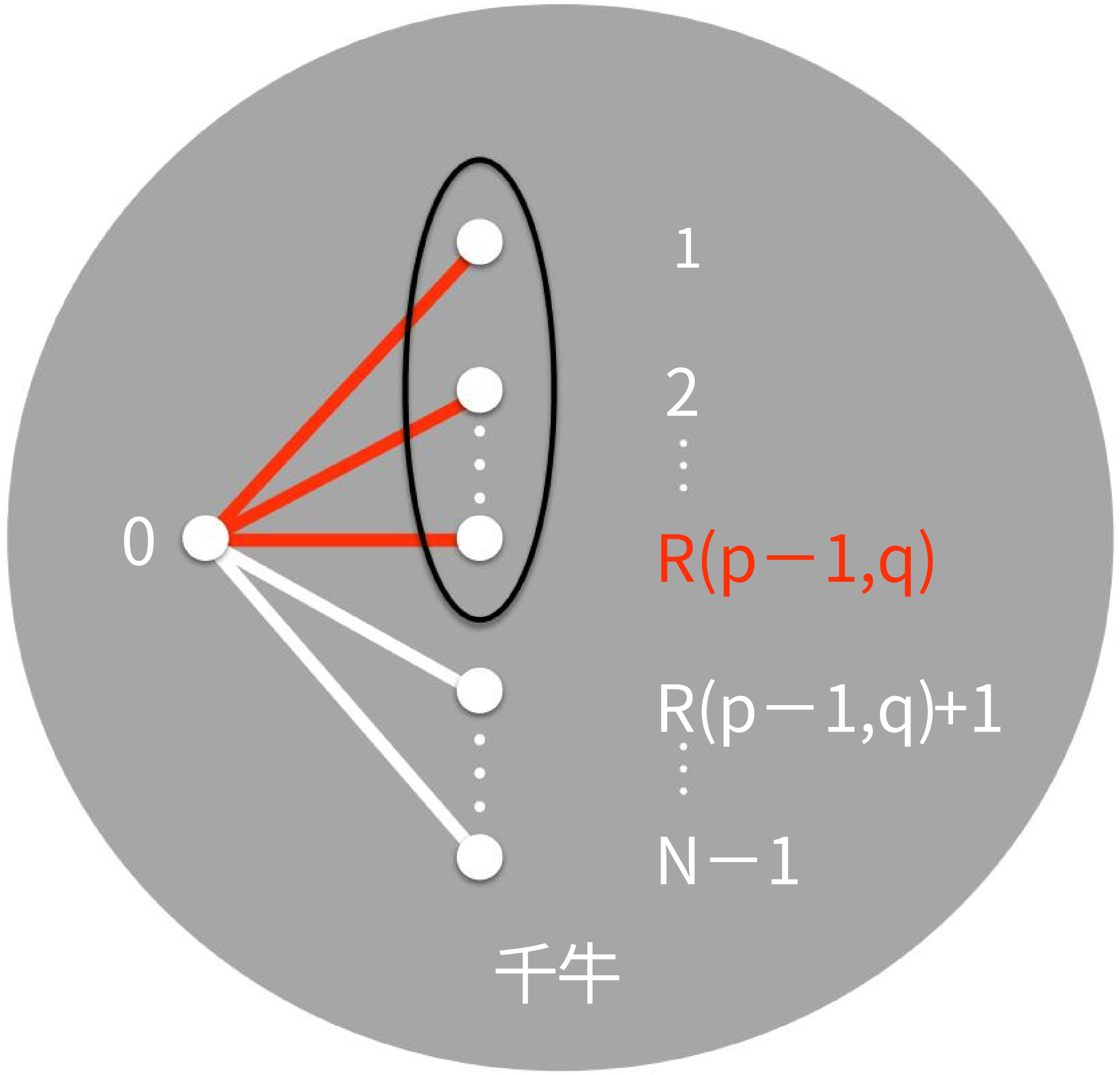
$$R(p,2)=p \quad R(2,q)=q$$ 和 ，

上述不等式意味着 $R(p, q)$ 是有限的。

令N=R(p－1,q)+R(p, q－1)。

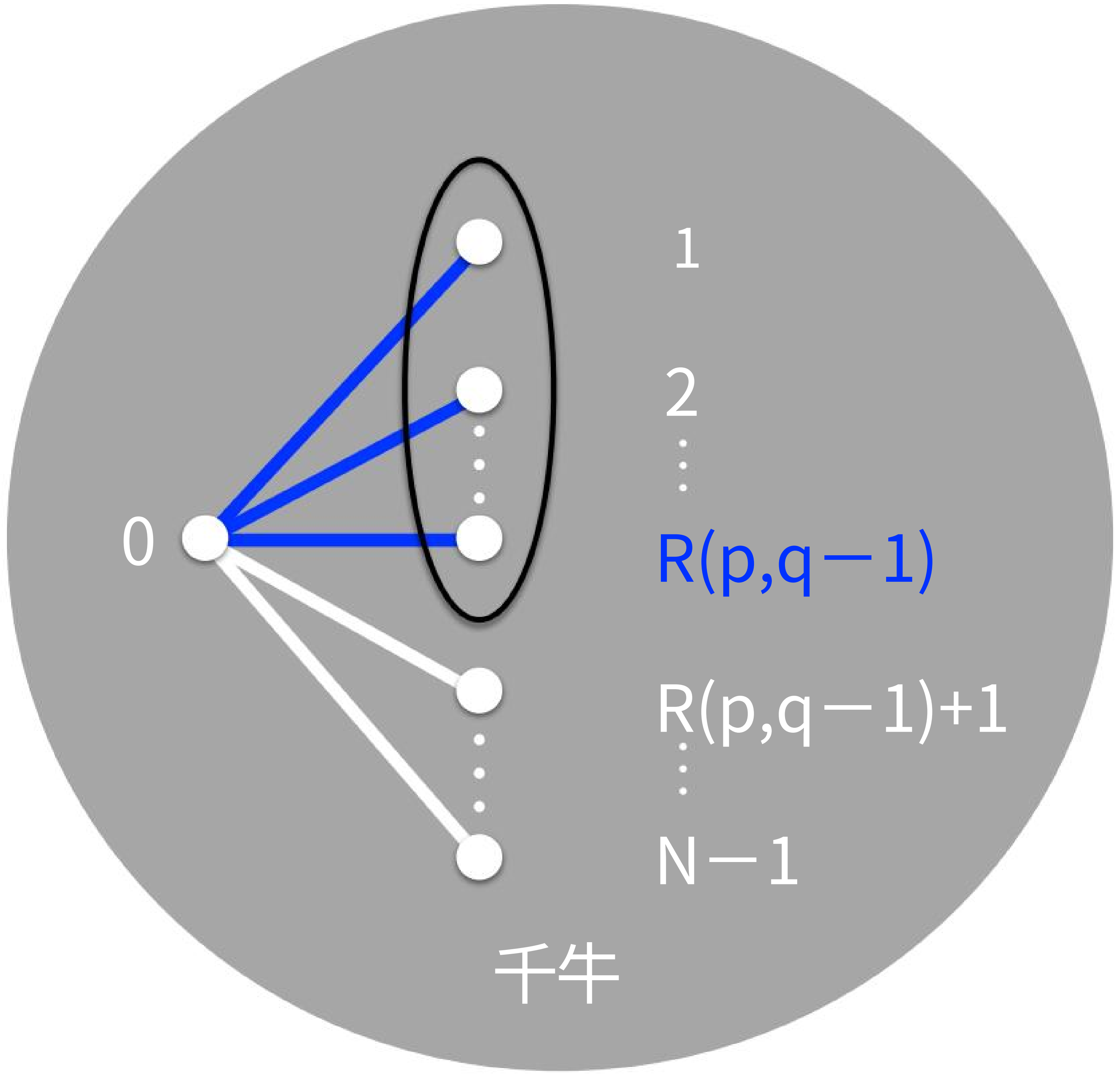
顶点事件

至少R(p－1,q)个红边



顶点事件

至少R(p, q－1)个蓝色边

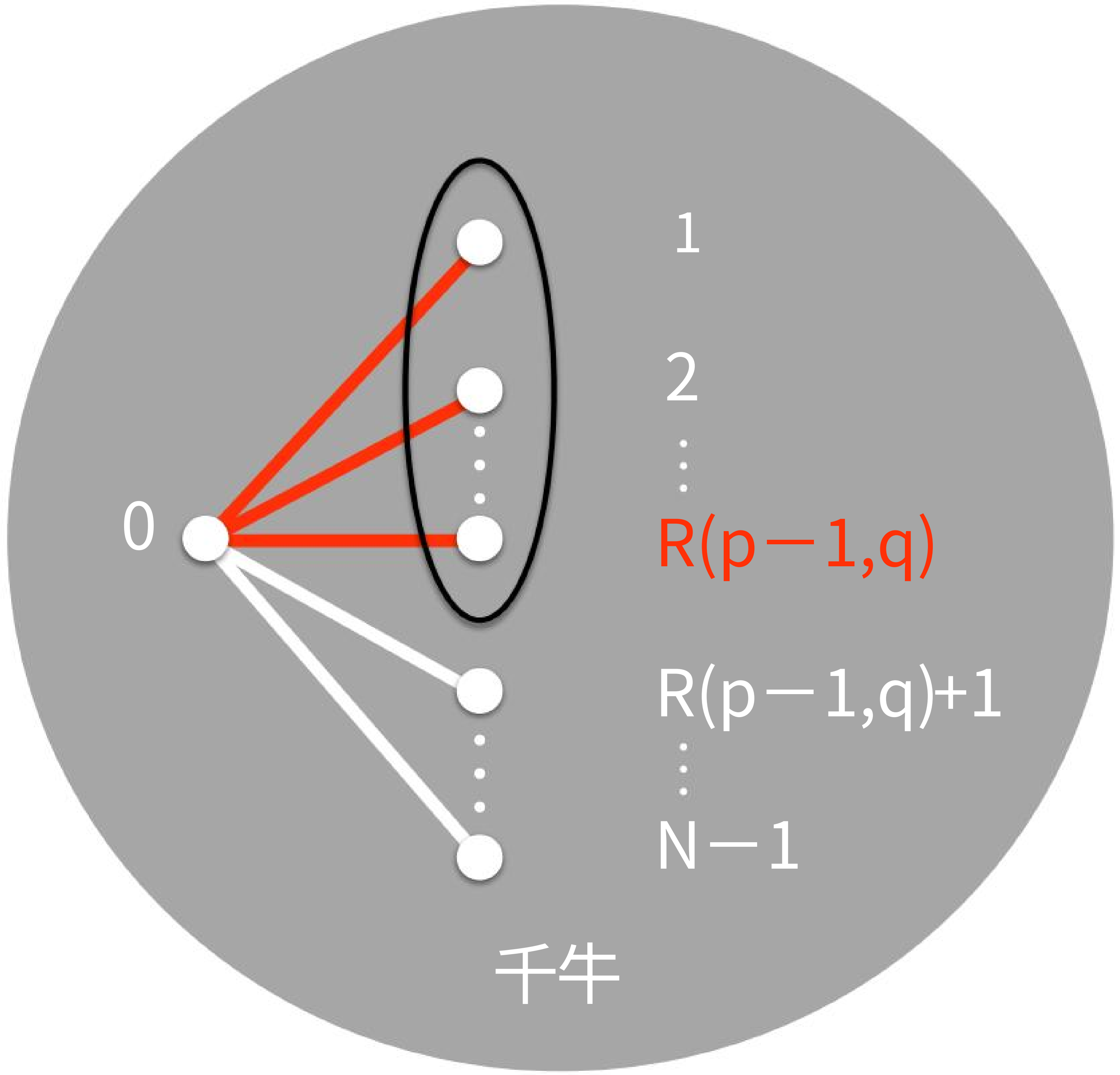


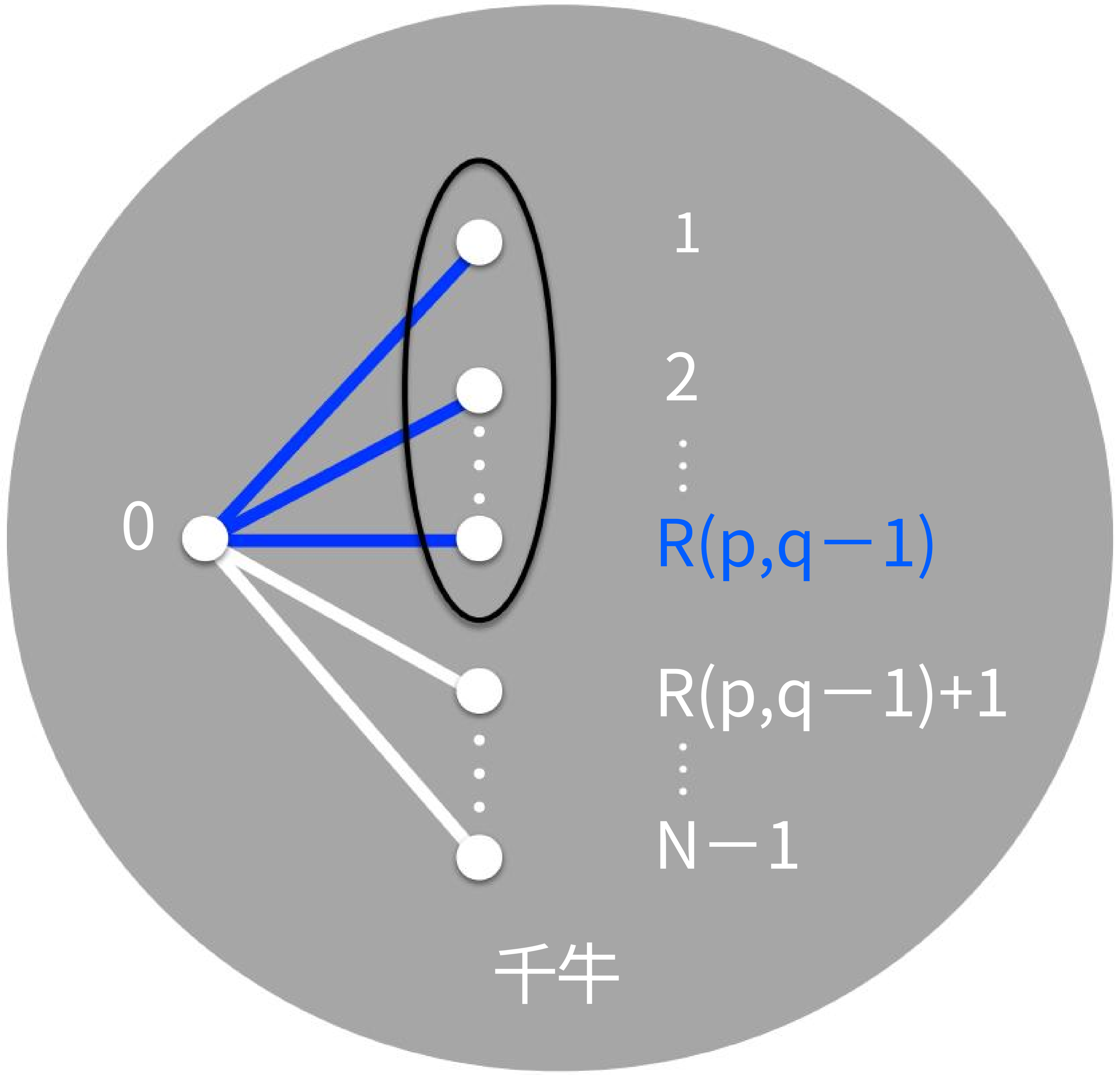
让 $N=R(p-1,q)+R(p,q-1)-1$。

由于N为奇数，红色子图中有一个顶点v为偶数。d $(v)\geqslant R(p-1,q)$ $d(v)\leqslant R(p-1,q)-2$。d(v)

那是，

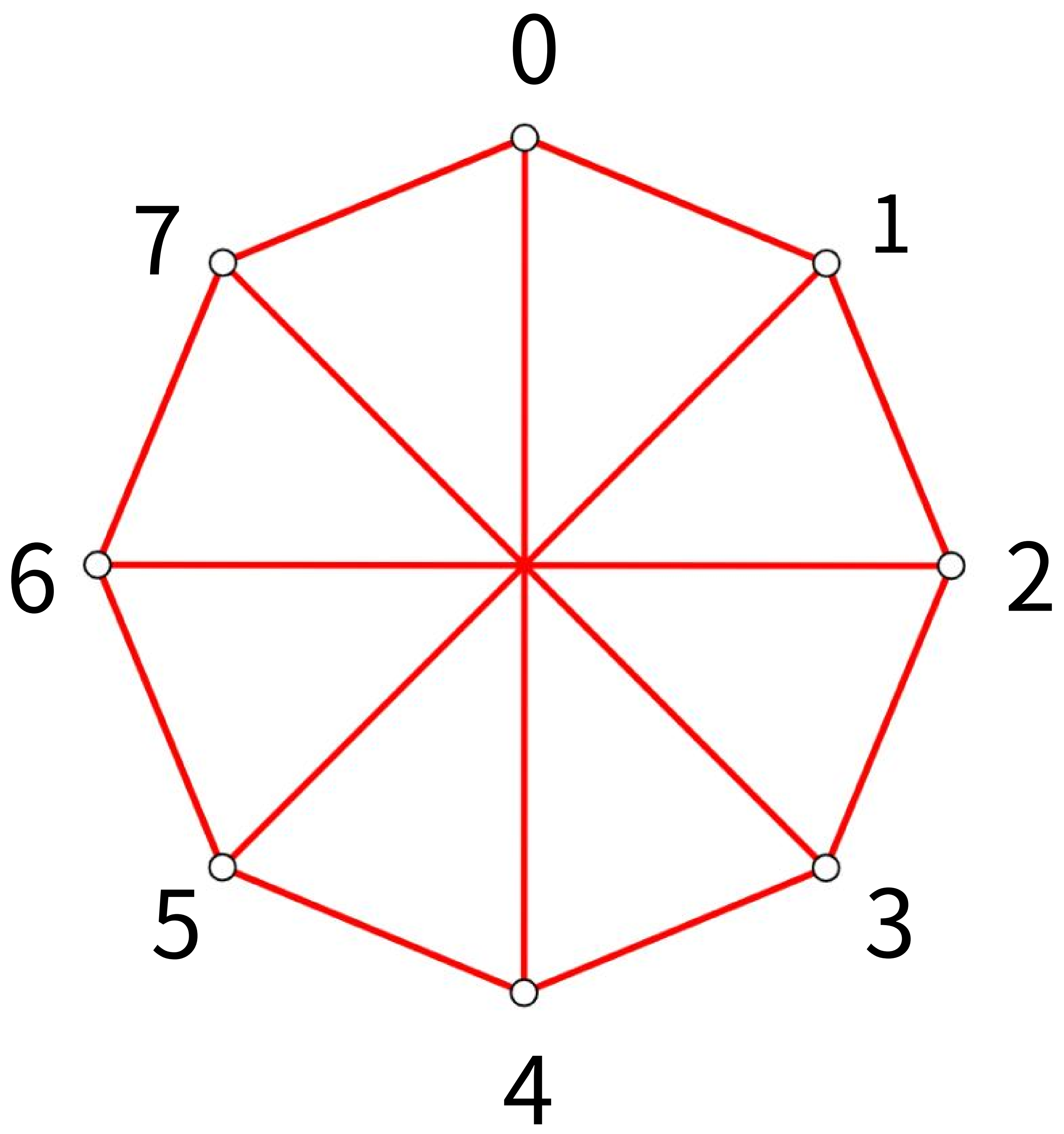
或者

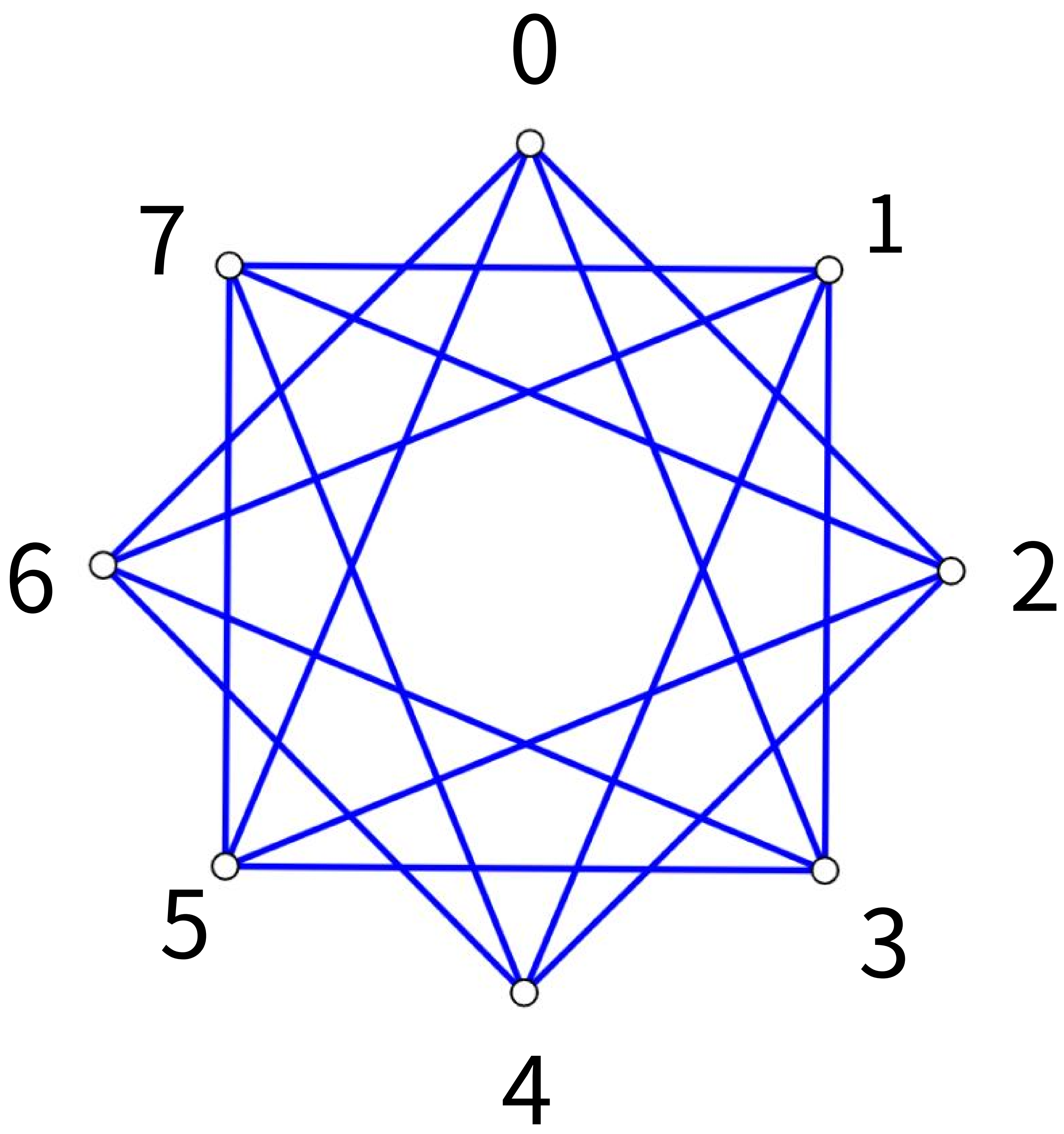




R (3,4)= 9。

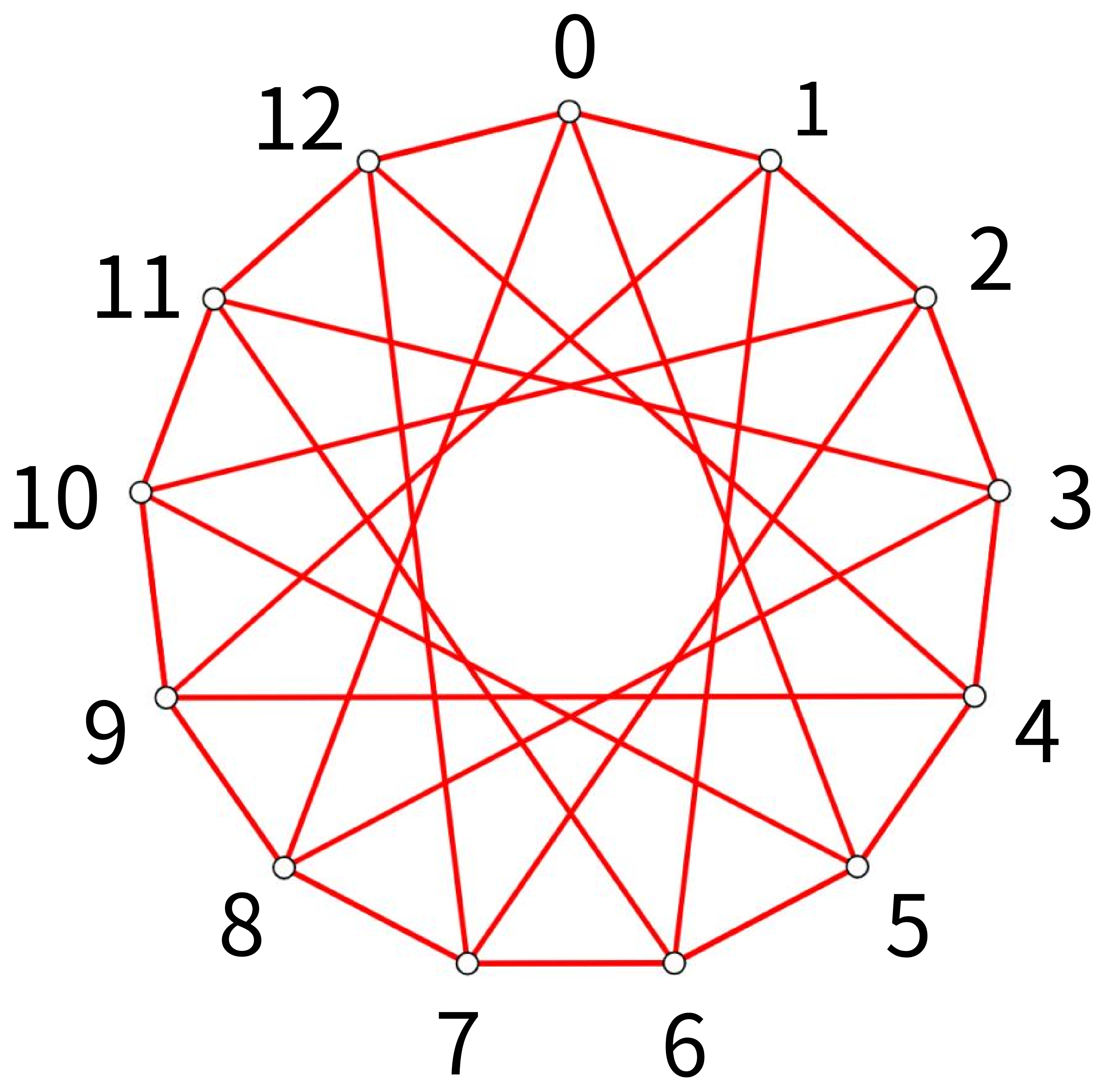
R (3,4)⩽R (3,3) + R (2,4) -1=9。

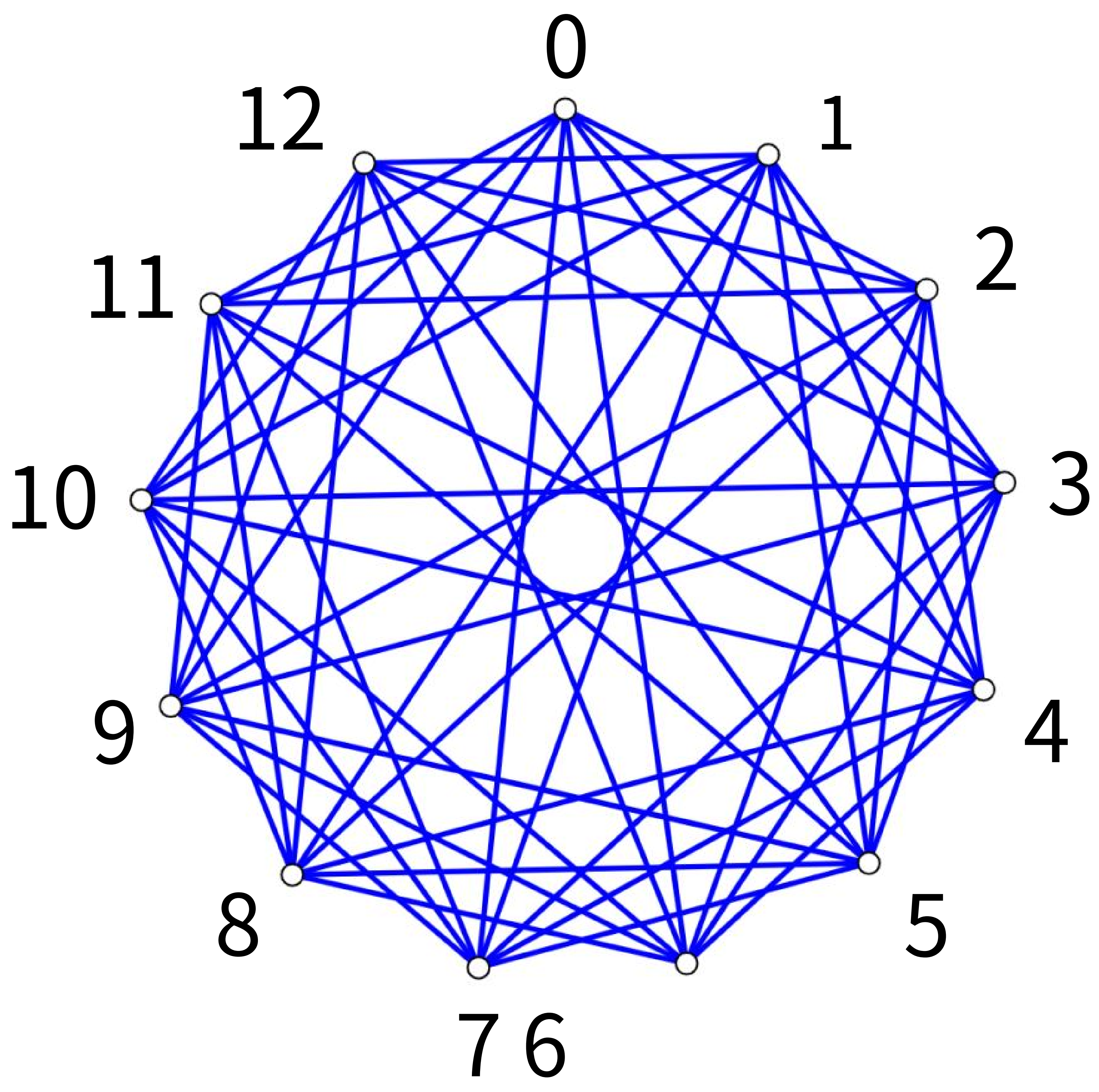




R (3,5)= 14。

R (3,5)⩽R (3,4) + R (2,5)= 14。





R(3,6)怎么样?

R（3,6)≤R （3,5）+ R（2,6）-1=14+6-1=19。

R(3,6) = 19是真的吗?

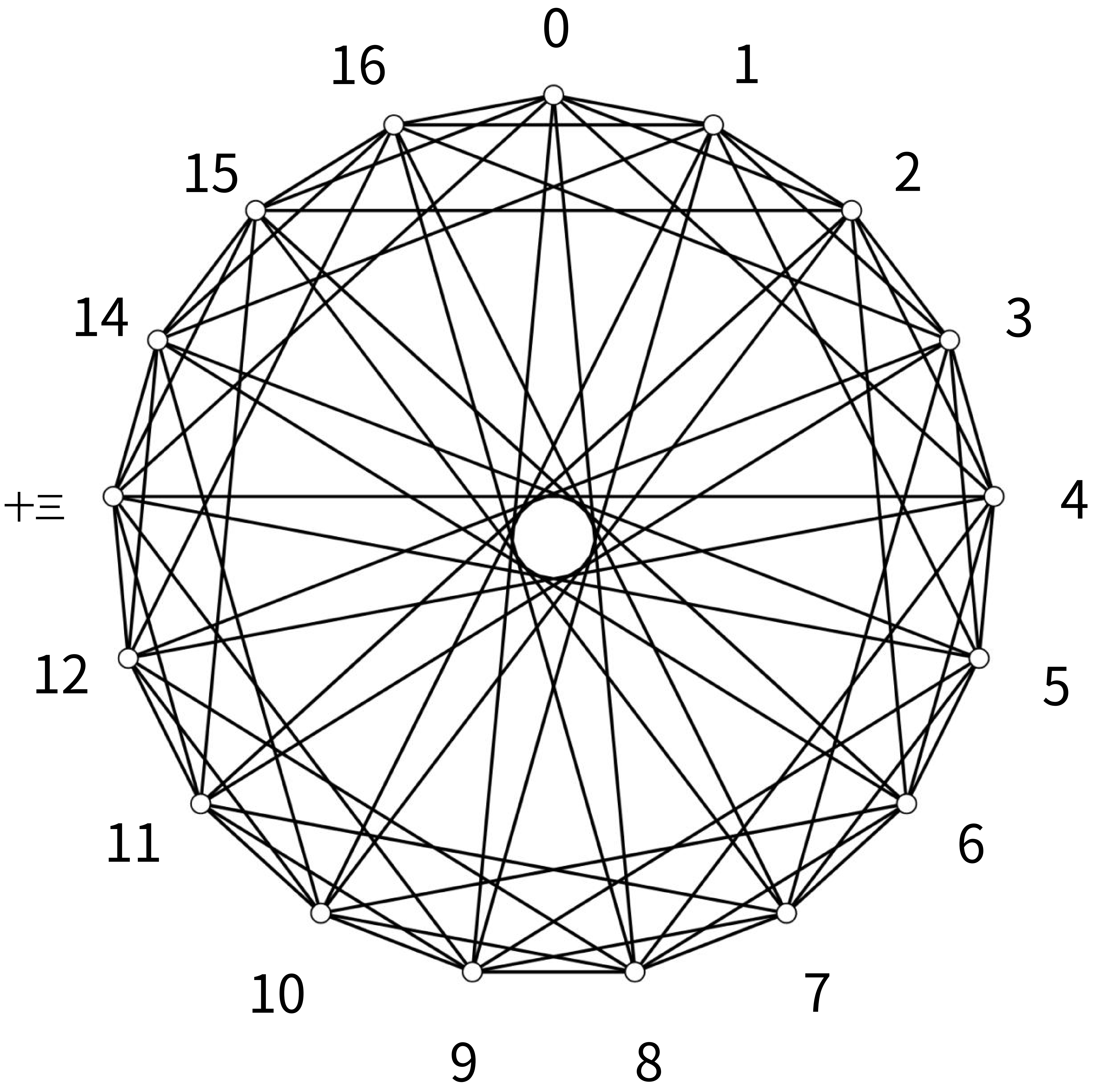
R（3,6)= 18!

R（3,7)≤R （3,6）+ R（2,7)=18+7=25。

R（3,7)= 23!

R（4,4)≤R （3,4）+ R（4,3)=9+9=18。

R（4,4)= 18。


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
十三
14
15
16

迄今为止,所有已知的经典Ramsey数的值R(p,q)如下:

第3 页	3	3	3	3	3	3	3	4	4
问	3	4	5	6	7	8	9	4	5
R(p,q) 6	6	9	14	18	23 28 36	28	36	18 25	25

经典拉姆齐数的求值非常困难,无论是精确求值还是渐近求值。表中的大多数数值都是借助计算机求得的。

一个具有挑战性的问题是计算R(5,5)。

已知43≤R(5,5)≤48 。

经典拉姆齐数的界限

定理30（Erd s， 1947）：

当p⩾3 时,R(p, p)>2 第 2 页 。

证明。K的所有红蓝边着色的数量为 n

2（n2）
。

单色K的染色数量最多为 页

。

（n p） 2 2 （n 2） − （p 2）

如果

$$\binom{n}{p} 2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}+1} < 2^{\binom{n}{2}},$$

那么存在

是红蓝着色,使得K没有单色。 n Kp

根据R(p, p)的定义,有R(p, p)>n 。

不难证明,如果n ⩽ 2 ,则 $\frac{}{p2}$,

例如 $\frac{p2}{2}$ −p+

$$(np) < \frac{例如}{1 \leqslant 22p - 1}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}p(p-1)-1} \quad 2-p\,2+2 \leqslant 2(p\,2)-1$$ 。

因此,

$< 2(n\,2)$ 。

$$(n\,p) \quad 2(n\,2)-(p\,2)+1$$

根据上面的论证,我们有

$$R(p,p) > 2^{\frac{页}{2}}$$ 。

定理31（Erd s 和 Szekeres， 1935）

$$R(p+1,q+1) \leqslant \binom{p+q}{p}。$$

如果 p 或 q 那么很容易看出结果成立。

自从 $R(p+1,q+1) \leqslant R(p,q+1)+R(p+1,q)$， 我们有

$$R(p+1,q+1) \leqslant \binom{p+q-1}{p-1}+\binom{p+q-1}{p}=\binom{p+q}{p}。$$

相信这个上限还会进一步得到满足！

定理32（Graham 和 Rödl， 1987）

$$R(p+1,q+1) \leqslant \frac{(p+q\ \text{对})}{\log\log(p+q)}。$$

如果且$p = q$,则$R(p, q)$称为对角拉姆齐数，

否则为非对角拉姆齐数。

为了 $R(p, p)$ ，最近取得了更多进展。

定理 33 （Conlon， 2009）

$$R(p+1,p+1) \leqslant p - c\log p/\log\log p\ (2p\ p)。$$

其中c是常数。

定理 34 （Sah， 2023）

$$R\ (p+1,p+1) \leqslant e - c\ (\log p)\quad 2\ (2pp)\ 。$$

其中c是常数。

定理 35 （Campos、Griffiths、Morris、Sahasrabudhe， 2023）

其中ε为常数（p足

够大）， R(p, p)⩽(4 − ε) p 。

众所周知：

$$R(p, p) \leqslant \binom{2p-2}{p-1} = O\left(\frac{4^p}{\sqrt{p}}\right)。$$

问题2. $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{R(p,p)}$ 存在?

如果是真的,那么 $\sqrt{2} \leqslant \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{R(p,p)} < 4$。

对于非对角拉姆齐数 $R(p, q)$ ，

如果页固定且$q \to \infty$, 然后

Erd s 和 Szekeres 的上限意味着

$$R(p, q) \leqslant qp-1\text{。}$$

阿吉泰（Ajtai）、科姆洛斯（Komlós)和塞梅雷迪（Szemerédi)提高了界限

$$R(p, q) \leqslant cp \frac{qp-1}{p-2} \text{。}$$

（对数q）

其中c是依赖于p的常数。

当p = 3 时,表示存在一个常数c ,使得q2

$$R\ (3,q)\leqslant c\ \frac{}{\log q}\text{。}$$

Kim 的R(3,q)下界(1995)： q2

$$R\ (3,q)\geqslant c\ \frac{}{\log q}\text{，}$$

其中c是常数。因此， R(3,q)的渐近阶为： R(3,q)= Θ(q2 / log q)。

练习 10。

1.证明$R(3,3) = 6$。

2. 证明当$n \geqslant 3$ 时,$R(n, n)>2^{\frac{n}{2}}$。

多种颜色拉姆齐数的定义

令G为ni阶简单图，　　　　$1 \leqslant i \leqslant k$。

拉姆齐数是具有以下属性的R(G1，G2，...，Gk) 是

最小整数N :如果的边用k种颜色着色,则 KN

则存在某个i ,使得有一个颜色为 $1 \leqslant i \leqslant k$

i 的子图,且该子图同构于Gi 。KN

如果每个Gi都是R(G1, G2, . . . , Gk)的完 $1 \leqslant i \leqslant k$, 然后

我们称之为 全图 经典拉姆齐数，

和写 R(G1，G2，...，Gk) = R(n1，n2，...，nk)。

拉姆齐定理的一般形式

定理36.对于任意两个正整数且q1, q2, ..., qk≥r, r, k,

有这样的 N = N（q1， q2， ...， qk），

对于任何n≥N,以及任何k-着色 [n]（右)， 存在一些i

1≤i≤k qi Si⊆[n]和一个 -set 使得 S(r) 我 是颜色i。

[n]={1,2,...,n}； S表示(右)我的所有r子集。 和

最小整数N满足定理 2 (r) (n1, n2, . . . , nk)

称为拉姆齐数,写为R 。

如果 r=1, 那么定理2就是抽屉原理。r =2,如果那么

R(2) (n1, n2, ..., nk)=R(n1, n2, ..., nk) ，

即多种颜色拉姆齐数。

2.舒尔定理

以下结果由Schur (1916) 提出,被视为 Ramsey 理论的起源之一：

定理37（Schur， 1916）。对于任何给定的整数k,存在一个N,使得如果则对于[n]的任何 k-着色， 存在相同 有n≥N,
颜色的x, y,z∈[n] ,使得x + y = z。

设是斯克定理 3 中N的最小可能值。

斯克 称为舒尔数。目前已知的舒尔数为： S1=2， S2=5， S3=14， S4=45。

的值是1965年由S4计算机确定的。

Schur定理可以通过Ramsey定理来证明。

对于任何给定的整数k,取

$$N = R(2)\ \overbrace{(3,3,\ldots,3)}^{钾} = R\ \overbrace{(K_3,K_3,\ldots,K_3)}^{钾}。$$

令ℓ| S_1、S_2、.。。，S_k 是[N]的任意分割。

对于任何颜色的 2 子集{i，j}如果 [N] {i， j} ，|i−j|∈$S_ℓ$。

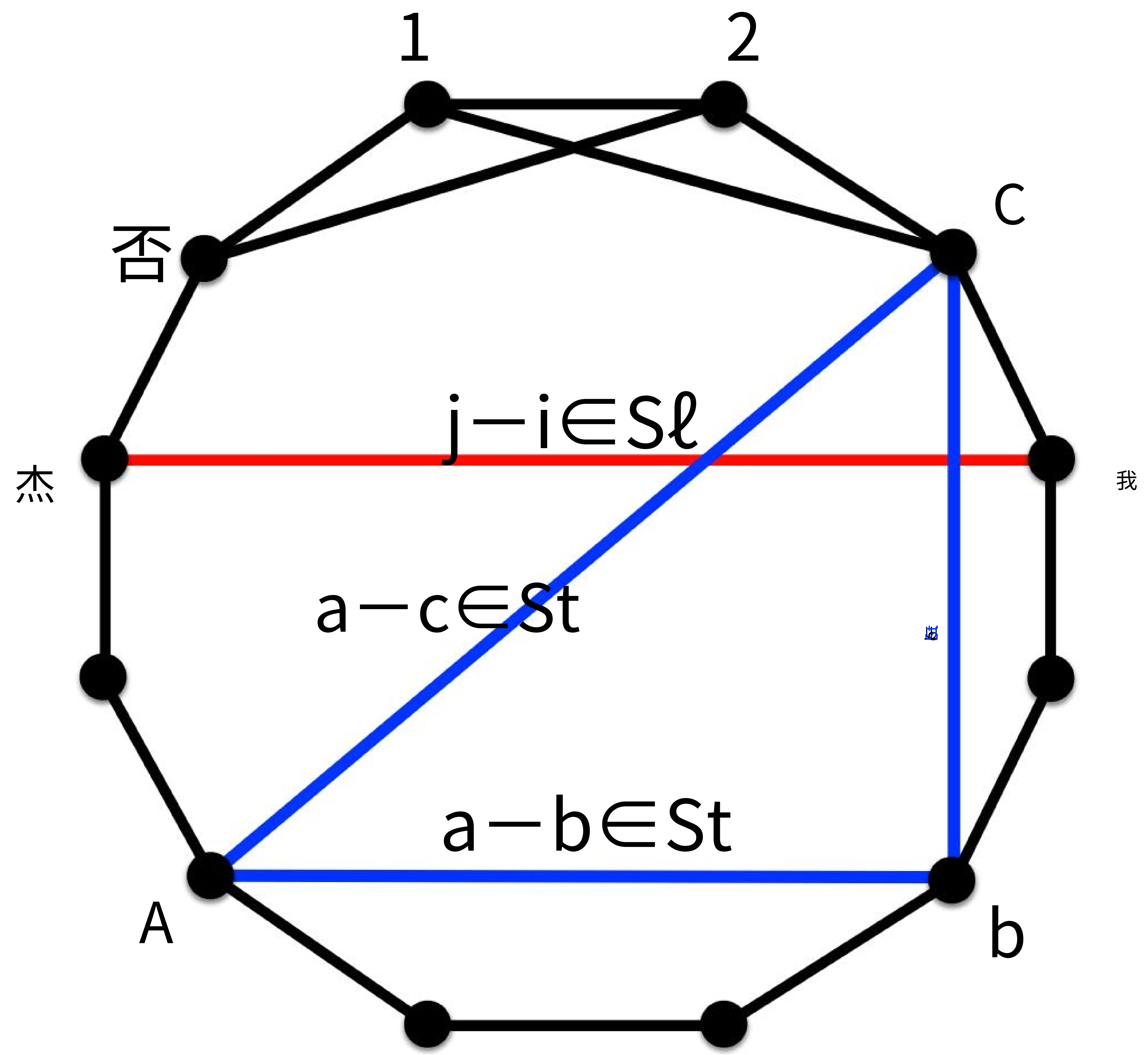
这样,我们得到了所有边的 k 着色。

根据拉姆齐定理， [N]有一个 3 子集,满足{a, b}, {b, c}, {a, c} {a， b， c}
其所有 2 子集均采用相同的颜色。

假设ℓ a>b>c， x=a−b， y=b−c， z=a−c 。 和

显然，1≤ℓ≤k x,y,z∈$S_ℓ$其中 x y z。 ，和

如果$|j-i|\in S$,则用ℓ $1\leqslant \ell \leqslant k$为边着色。伊 ,



设x=a−b、 y=b−c和z=a−c,则x + y = z。

3.范德瓦尔登定理

Van der Waerden (1928) 证明了以下观点。

定理 38 (范德华登)。对于任意两个正整数ℓ, k， W=W(ℓ, k)

存在一个正整数,使得对于任意ℓ

[W] [W]的 k-着色具有同色项的算术级数。

定理4中的最小可能值称为范德华登数。W(ℓ, k)

一些已知的范德瓦尔登数：

W（3,2)=9， W（3,3)=27， W（3,4)=76， W（4,2)=35， W（5,2)=178。

W(3,2)=9的证明。

案例1、4 和 6 具有相同的颜色，即红色。

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 4 5 6 8

案例 2、4和 6 颜色不同。

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. 埃尔多斯-塞克雷斯定理

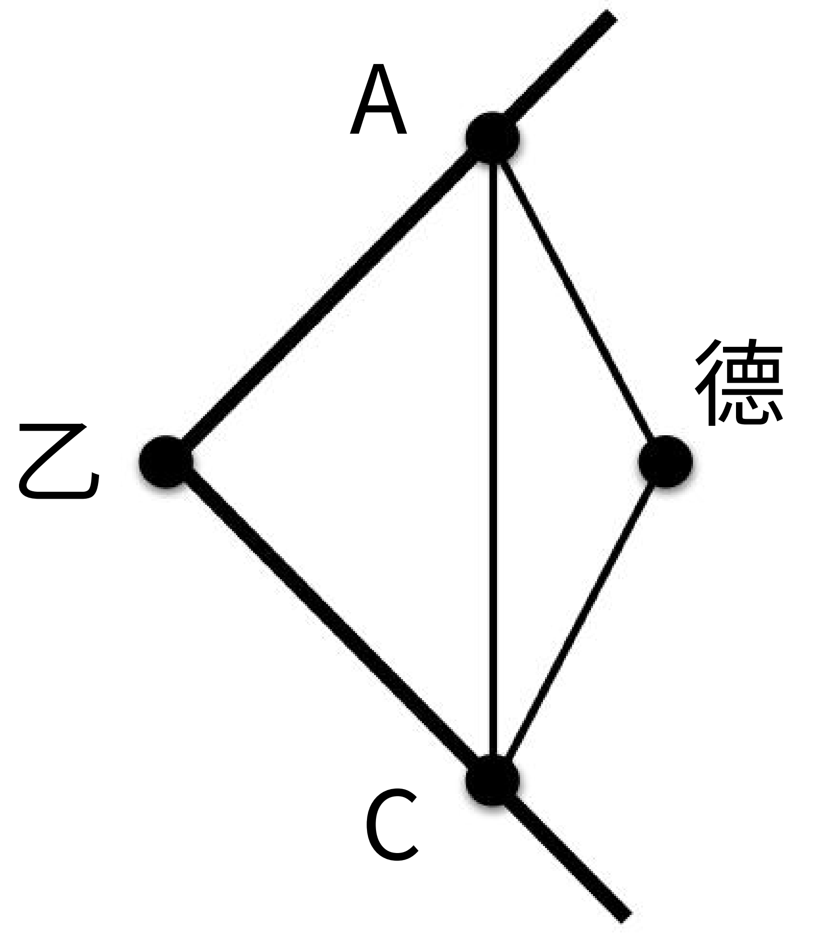
Erd s 和 Szekeres (1935) 发表了以下内容：

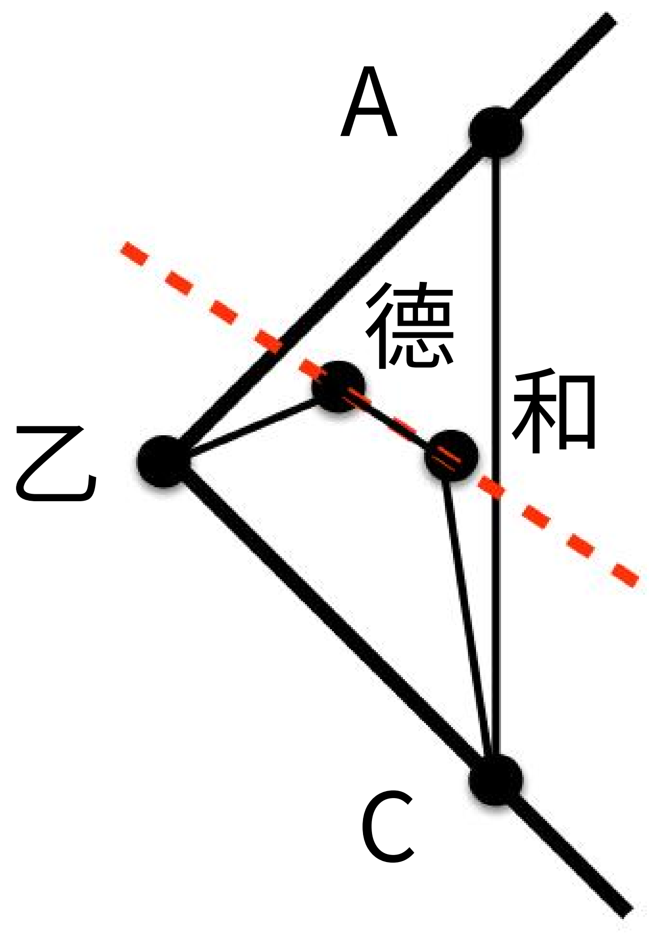
定理39（Erd s 和 Szekeres）。令m为正整数。
则存在一个正整数N,使得对于平面上任意N个点,若任意三个点不构成一条直线,则有m
点形成一个凸m多边形。

对于m=4， N=5。

选择三个点,例如A,B,C st ∠ABC < 1800
另外两个∠ABC。

点D、 E位于





令N(m)为定理5中的最小整数。

我们已经知道

$$N(3)=3,$$

$$N(4)=5,$$

$$N(5)=9。$$

到目前为止,还不知道N(m)的其他值。

埃尔多斯推测

$$N(米)=1+2米-2。$$

对于m = 3,4,5,猜想是正确的。

广义拉姆齐数

由于经典拉姆齐数的研究极其困难，

Chvátal和Harary在一系列论文中指出：

1. Periodica Math. Hungarica 3(1973) 115-124, 2. Proceedings of AMS 32(1972) 389-394, 3. Pacific J. Math. 41(1972) 335-345, R(G,

建议研究广义拉姆齐数,即GH H)

或者不是一个完整的图,不仅为了它们本身,也为了

它们或许能为经典的拉姆齐数提供一些启示。

在这项研究的早期阶段,大多数人关
注的是拉姆齐数字

他们将完全图与减一条边的
完全图进行了比较,希望这项研究能对经
典的Ramsey数有所启发。然而,他们很快发现,研究这
类Ramsey数仍然非常困难,几乎和经典的Ramsey数一样困难。

到目前为止,广义
由于 Chvátal 的原因,Ramsey 数可能是以下数:

定理40(Chvátal)。设是一棵 m 阶树 ,以及一个 n 阶完全图 ,则$R(T_m,K_n)=(m-1)(n-1)+1$。

证明。设G为阶图,若其补图G没有K_n $\chi(G)$ $(m-1)(n-1)+1$。

$\geqslant m$,然后 $\alpha(G) \leqslant n-1$,这意味着

。

假设H是G关于其色数m 的临界子图,

$$\delta(H) \geqslant m-1。$$

也就是说, H包含所有树T_m。

设G为色数为k 的图,且s(G)

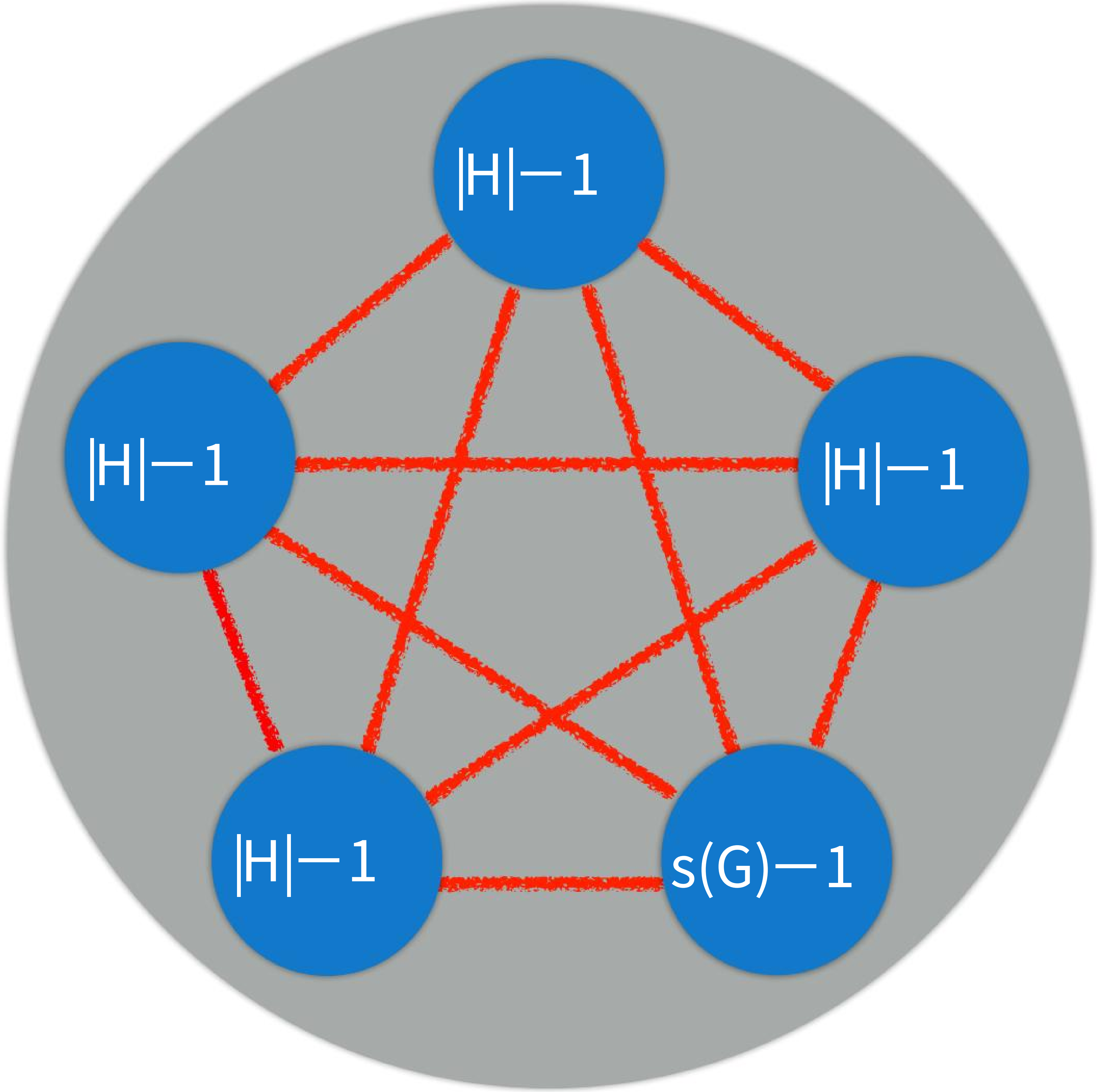
G的色度盈余,定义为G所有带有k 种

颜色的顶点着色下,某个颜色类别中的最小顶点数。

可能是受到定理 40 的启发, Burr证明了以下两个给定图的下界:

定理41 (Burr)。如果H是连通图,且至少是s(G),则 |H|

$$R(G, H) \geqslant (\chi(G)-1)(|H|-1)+s(G)。$$



$K(\chi(G)-1)(|H|-1)+s(G)-1$

蓝色子图不包含H。

设为红色子图。

然后

$$\chi(G_r) \leqslant \chi(G)\text{。}$$

如果 $x(G_r) = x(G)$, 然后

$$s(G_r) \leqslant s(G) - 1\text{。}$$

红色子图G没有G。 r

例如。R (K3,C4) = 7。

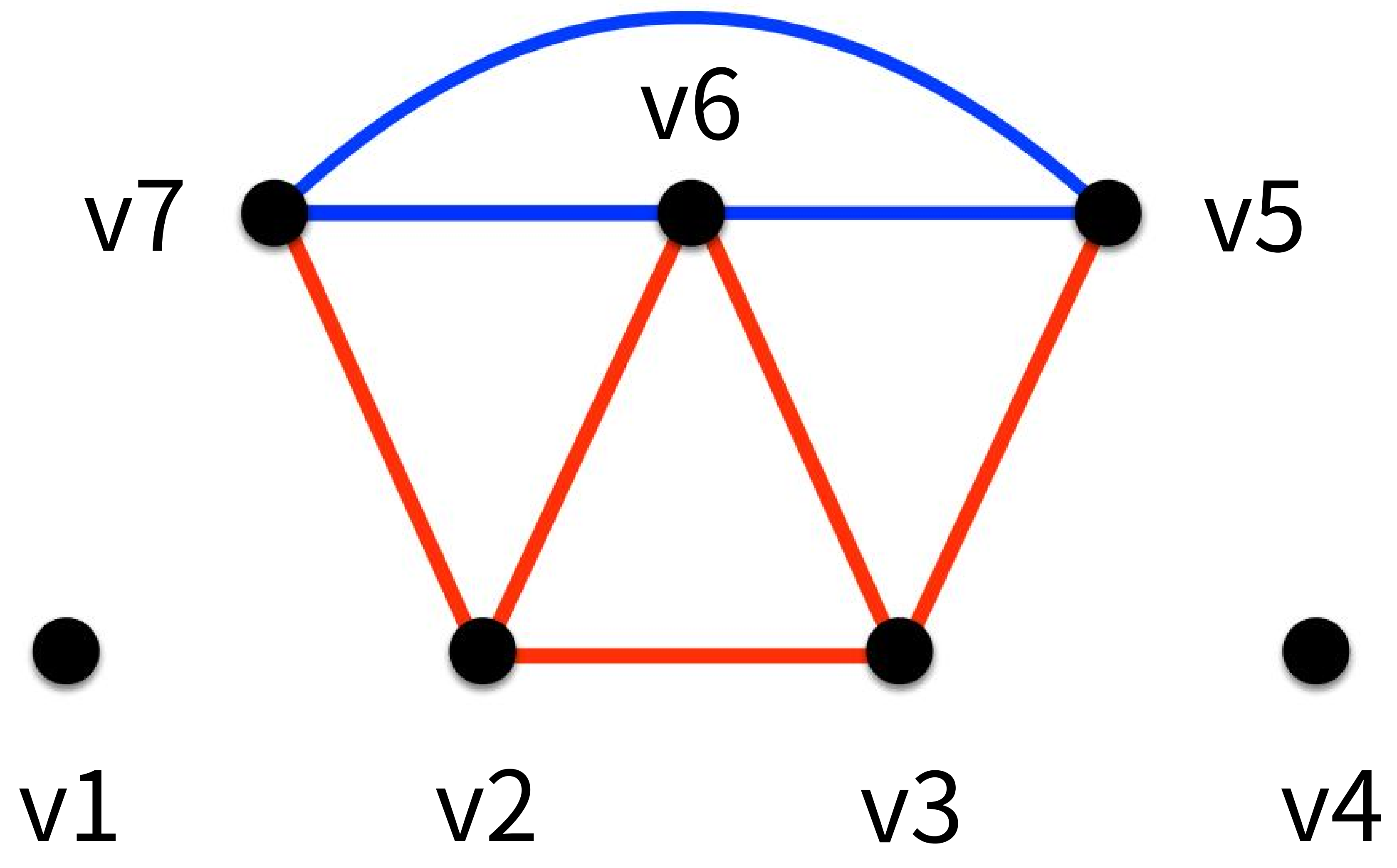
根据定理 41,我们有

$$R(K3,C4) \geqslant (\chi(K3) - 1)(4 - 1) + s(K3) = 7。$$

为了证明 被染成红色和蓝色。r(3,3)=6 K7假设 没有红色。因为 有蓝色。

R(K3,C4) ≤ 7, K7

K7 K3 K3 ,



练习 11。

1. 证明$R(K_3,C_4) = 7$ 。

2. 证明舒尔数$S = 14$ 3 。