图中的匹配

图中的匹配是一对不相邻的边的集合。

米
如果是匹配， M则每条边

配 的两端在M下匹 ，

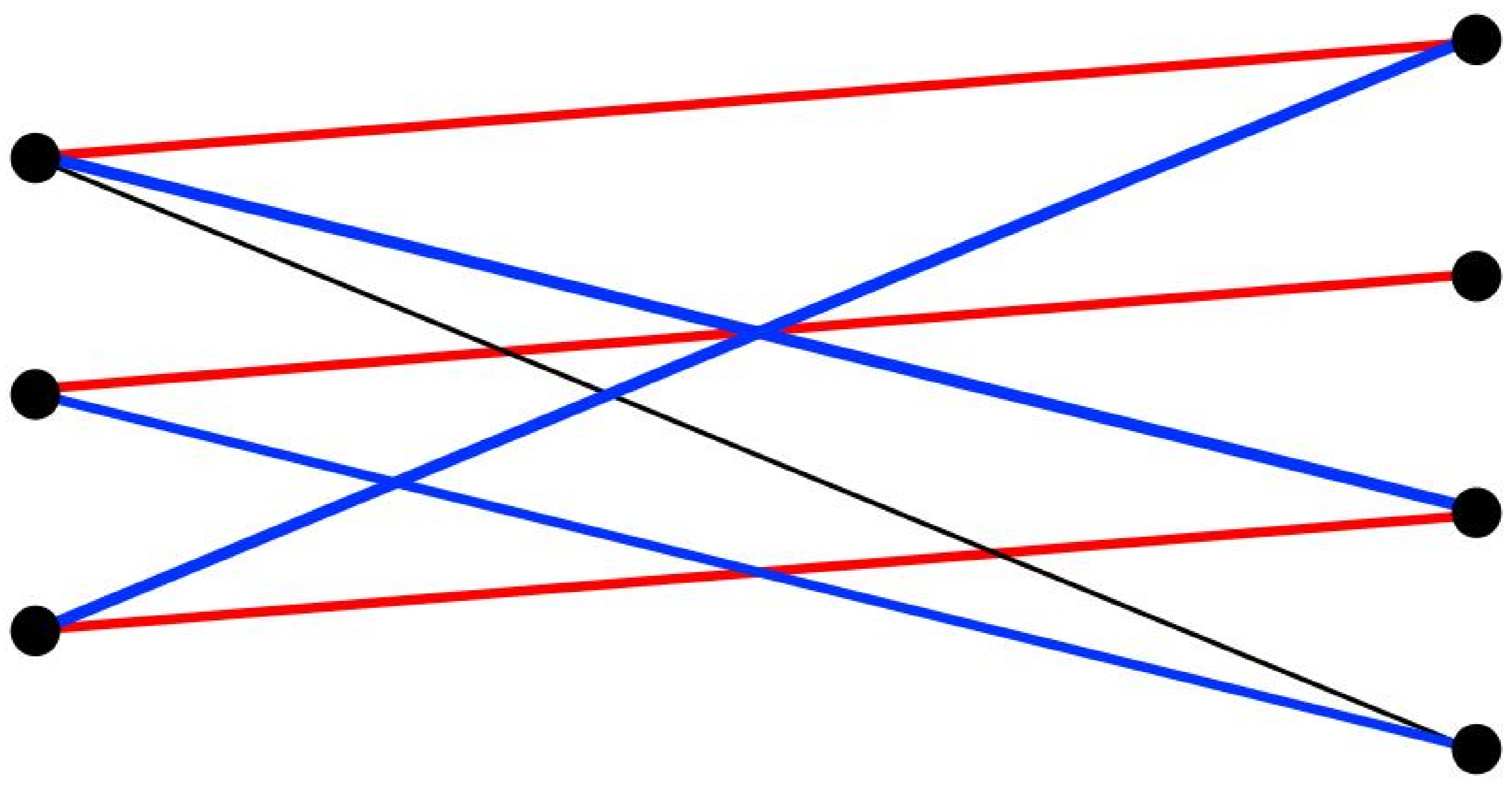
并且与 的边相邻的每个顶点被称为 被覆盖。 米 米

完美匹配是覆盖图的每个顶点,而最大匹配是覆盖尽可能多的顶点。

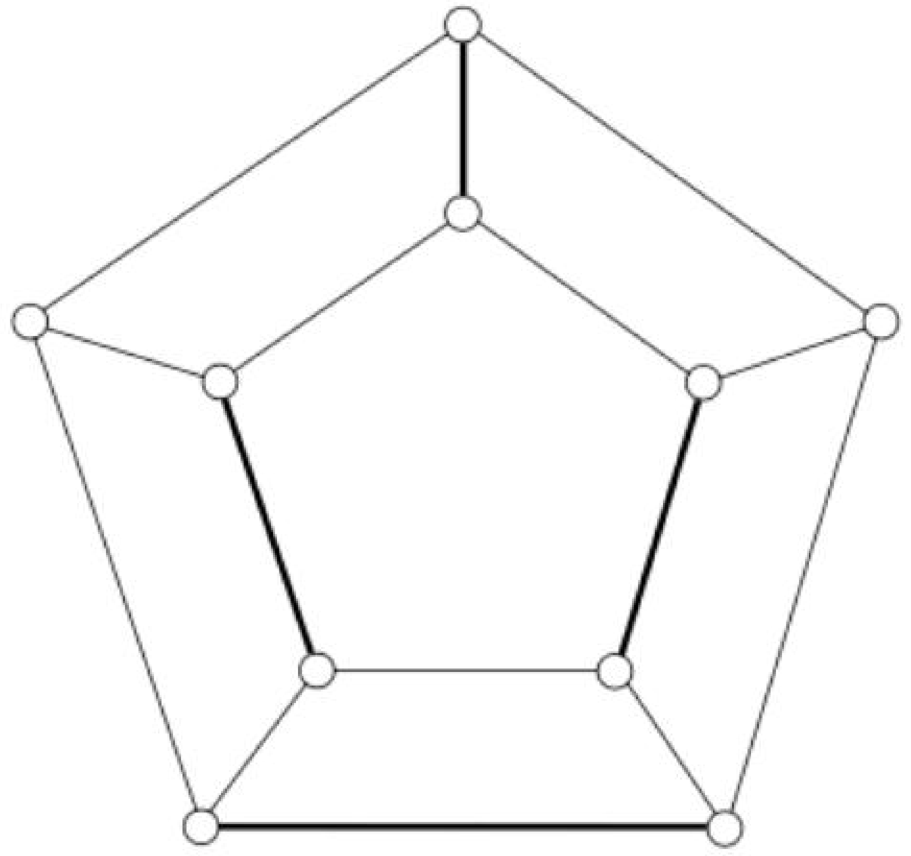
最大匹配是不能扩展到更大匹配的匹配。

图的最大匹配中边的个数称为图的匹配数 G

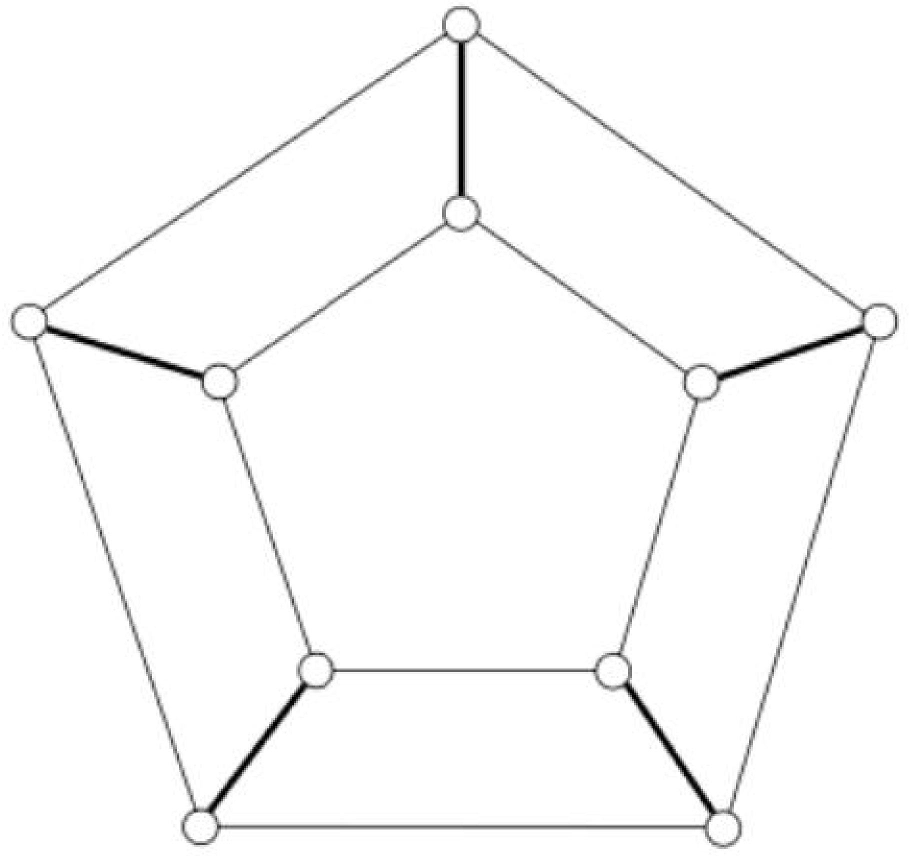
G ，并表示 $\alpha'(G)$ 。



最大匹配数



最大匹配



完美匹配

示例3. 作业分配

有一定数量的职位可供填补。

给定一组申请这些职位的申请人,尽可能多地填补他们的空缺,只将申请人分配到他们有资格担任的职位。

这种情况可以用二分图来表示,其中表示申请人集、工作集和边xy G[X, Y]

X 和

x ∈ X y ∈ Y表示申请人符合职位要求。其中y X

将申请人分配到工作岗位,每个职位分配一个人,相当于

匹配 G ,以及尽可能多地填补空缺的问题

相当于找到 G 。

如何在图G中找到最大匹配?

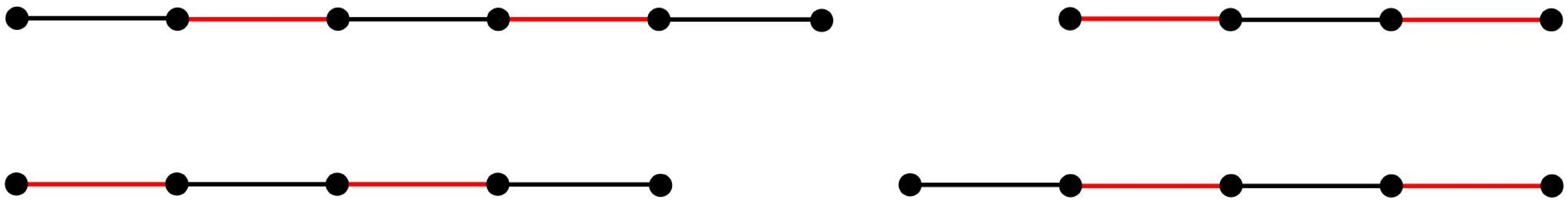
Augmenting Paths (增广路)

设是图的匹配。 G

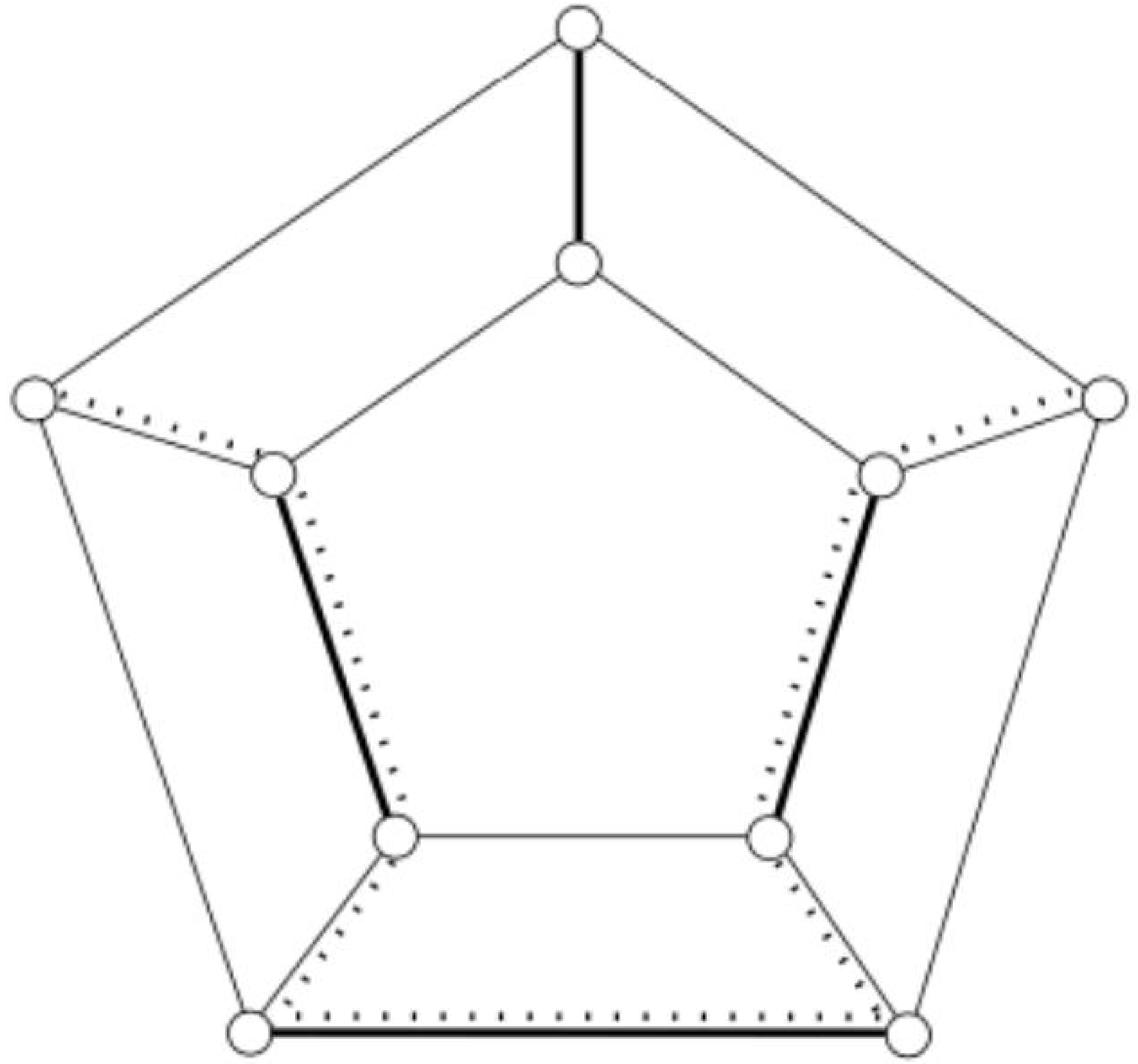
交替路径或循环 G

是一条路径或循环,其边交替位于和 中号E 。

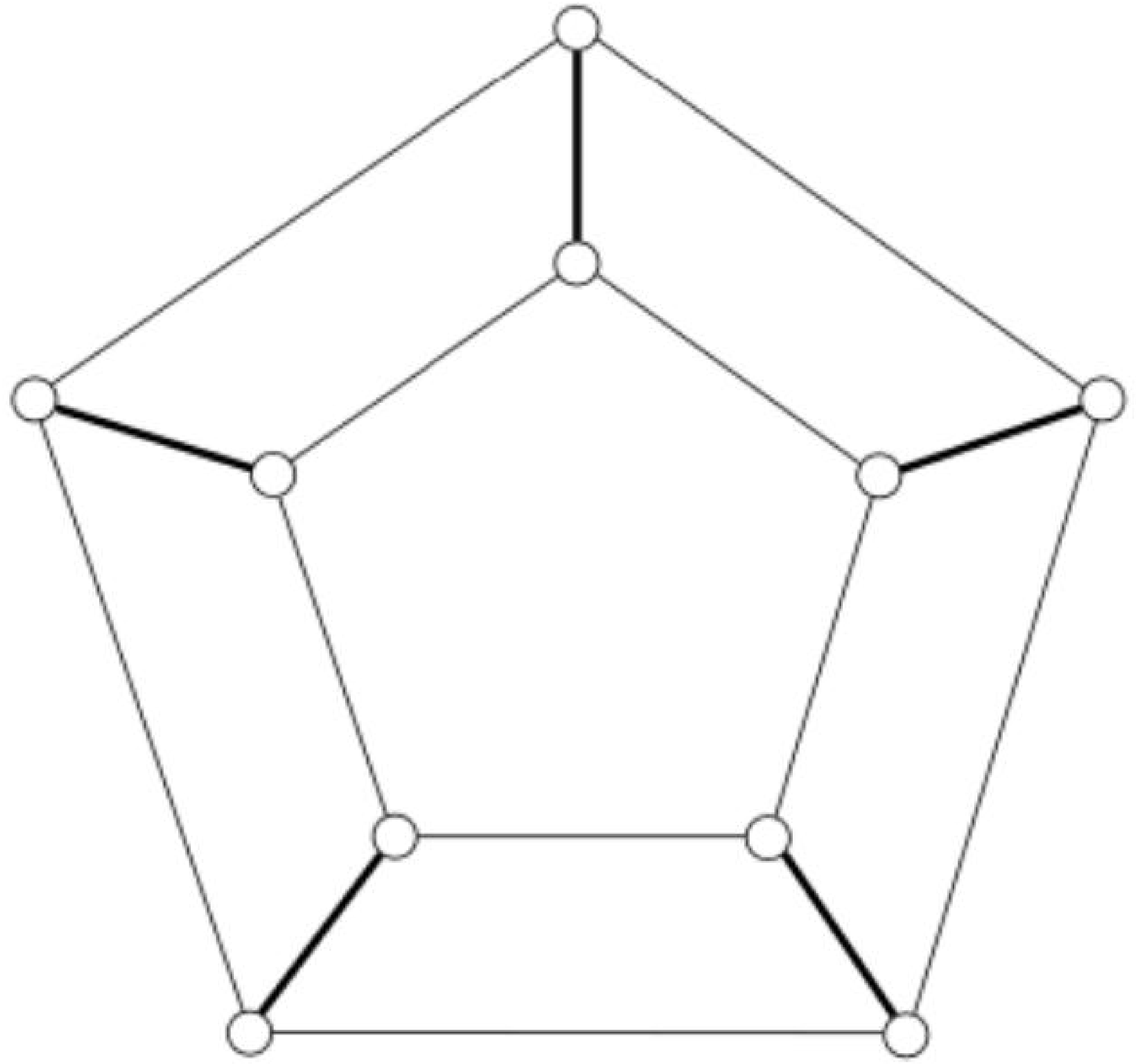
交替路径可能以 的边缘开始或结束,也可能不以 的边缘开始或结束。 米



对于 -交米替路径,如果其起点和终点均未被覆盖米 ,那么该路径被称为-增广路径米。



M增广路径P



匹配M Δ E(P)

定理21(Berge).图中的匹配是最大匹配,若G且仅当不包含 -增广路径。 G

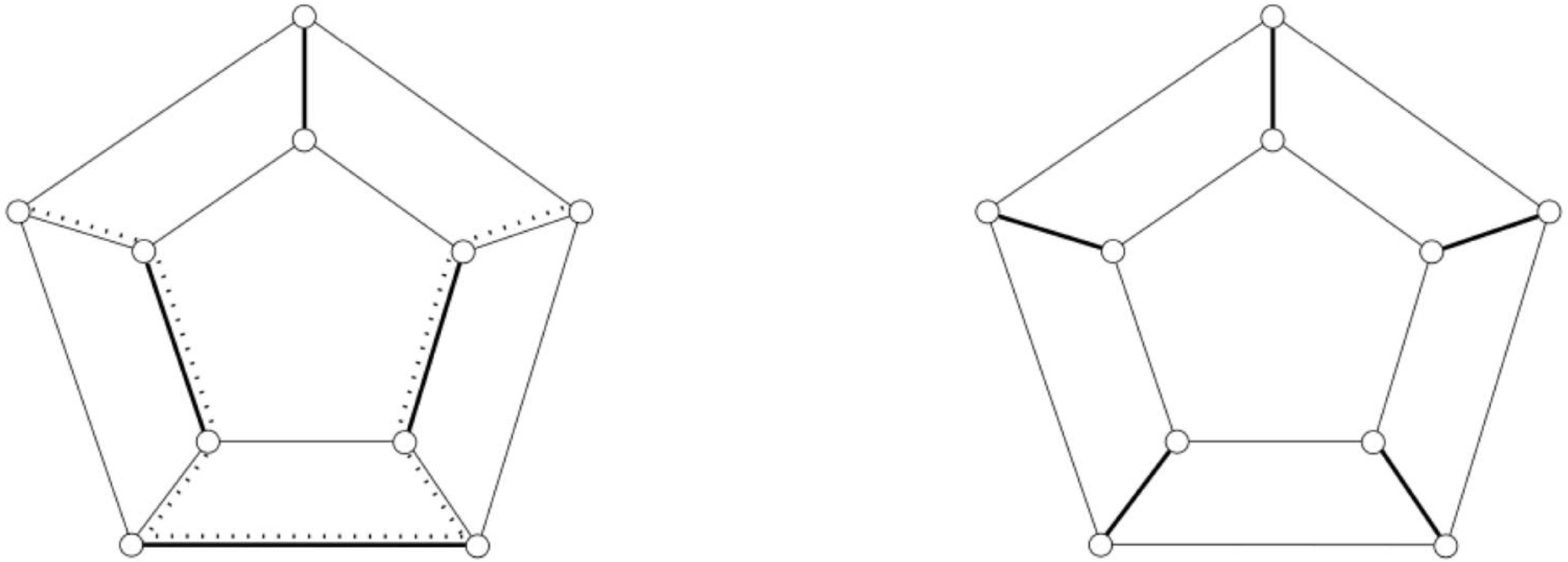
米

米

证明。设是M中的匹配 米 G 。假设包含一个-增广 G $|M'| = |M| + 1$

路径。然后是和M 的匹配 P $M' = M \Delta E(P)$, 。因此

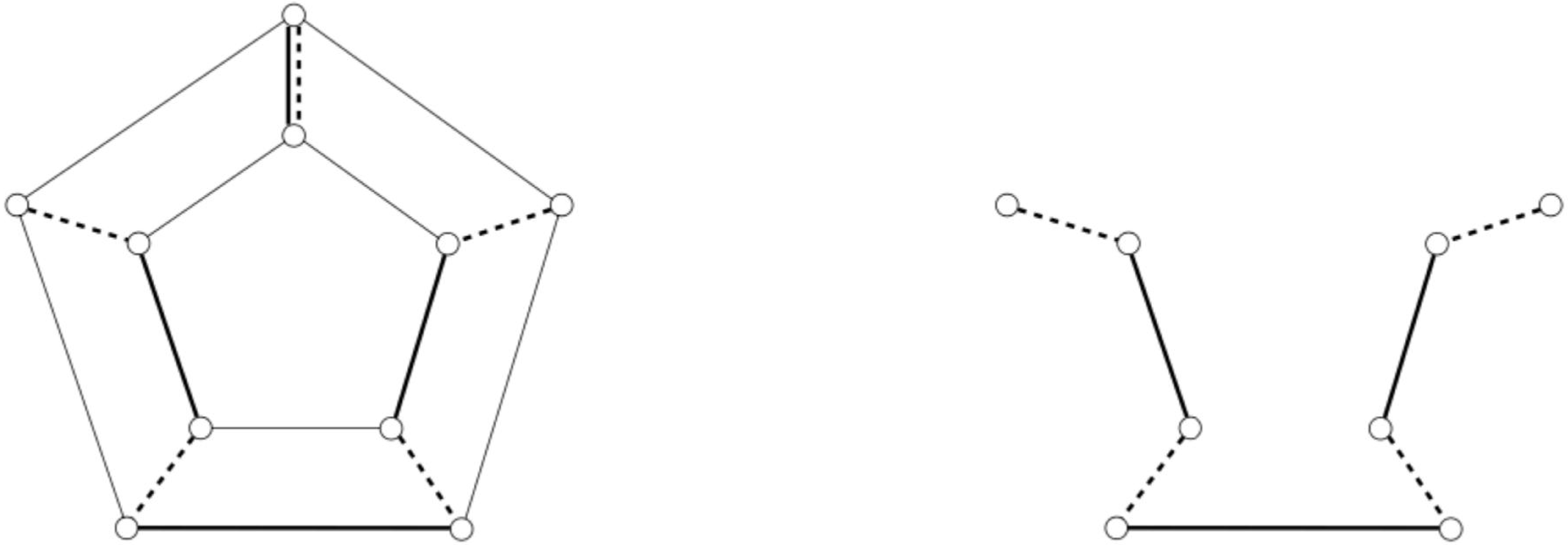
不是最大匹配。



M假

设不是最大匹配,设是最大值$|M^*| > |M|$ $H = G[M \Delta M^*]$ 米*

匹配于 . 集合 G ，以便 。



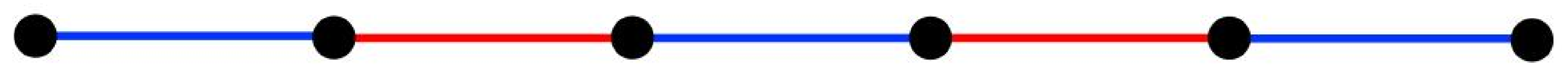
匹配M (重) 和M* (破损) 子图$H = G[M \Delta M^*]$

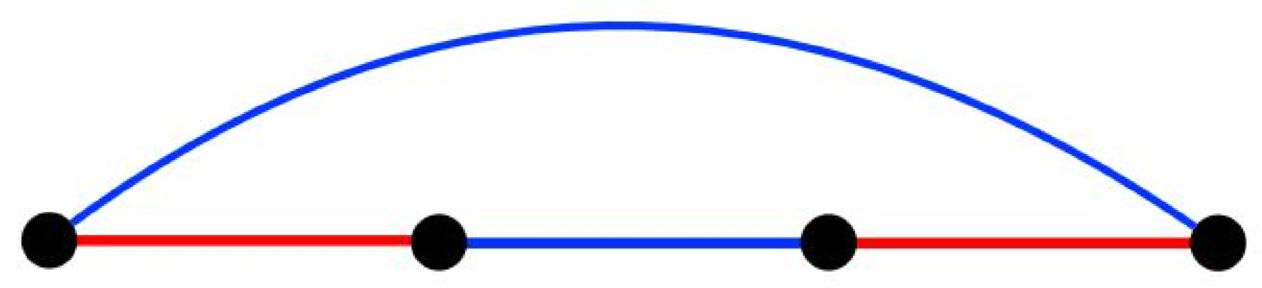
显然,的每个顶点在 H H ,

因为它最多可以与 的一个边和 的一个边关联 M 米* 。

因此,的每个组成部分要么是具有边的偶数循环,H

交替地在和中,或者交替地在和中的边缘路径 毫米* 毫米* 。





因为 因此 $|M^*| > |M|$,子图包含的边多于 H 米*

米 ,存在某个组成部分 其起点是一条路径 H 磷

并以M* PM的边缘结束 米* 。

的起点和终点被 覆盖,但未被 覆盖。

因此,该路径是聚甲基丙烯酸甲酯 。

二分图中的匹配

令$S \subset V(G)$.定义$N(S) = \bigcup$ $\in S$ $N(v)$ 。

定理22 (Hall)。二分图$G = G[X, Y]$ 有一个匹配覆盖了 中的每个顶点当且仅当$|N(S)| \geqslant |S|$对所有$S \subseteq X$ X

。

证明。设G=G[X, Y]为具有匹配覆盖的二分图 米

SX中的每个顶点 X 。

考虑 的任意子集。

中的顶点与 中的不同顶点S匹配 米 北半球。

所以， $|N(S)| \geqslant |S|$ 。

相反,设是二分图,没有匹配的 $G = G[X, Y]$

覆盖 M^* G u M^* 中的每个顶点 。

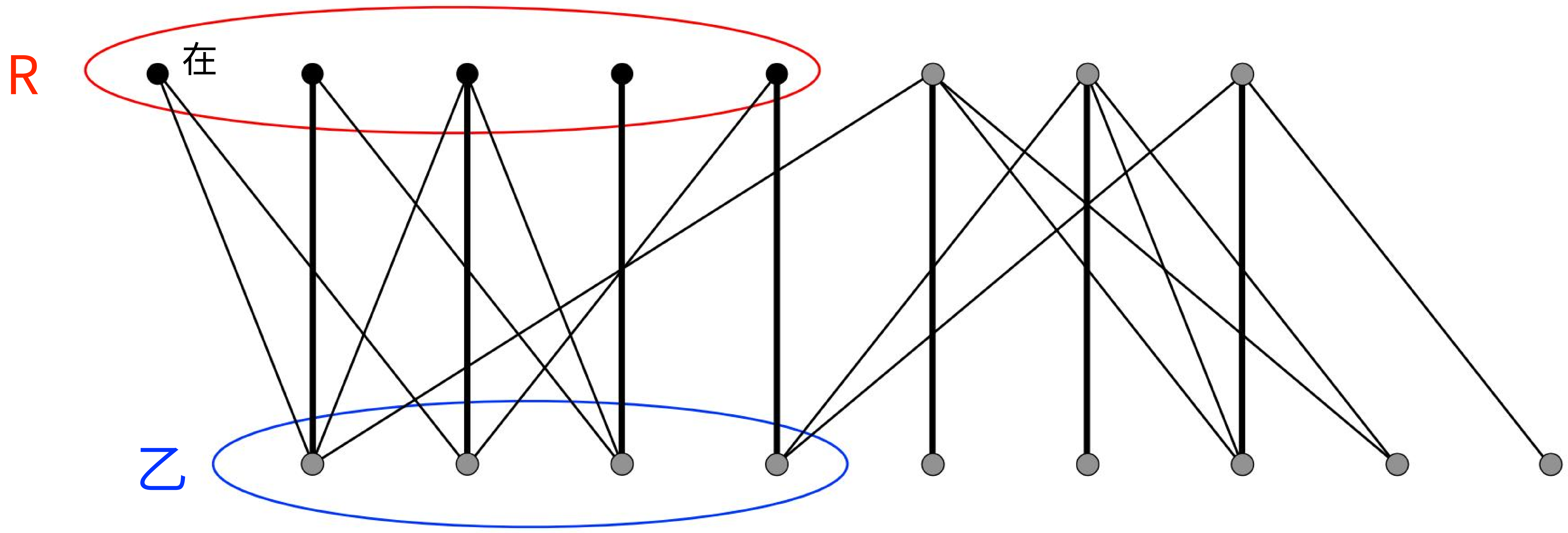
让你 是 中的最大匹配,并且 中的顶点未被 覆盖。 X

M^* Z

表示通过 -交替路径可达的所有顶点的集合。

M^* 是最大匹配,由定理 21 可知,因为 M^* $R = X \cap Z$ $B = Y \cap Z$ 在

中唯一未被覆盖的顶点。设置和 和 。



显然,的顶点与的顶点匹配。 $R \quad \{u\}$ 最大*

因此,并且$N(R) = |B| = |R| - 1$ 事实上,我们有 $B \subseteq N(R)$ 。

,为中的每个顶点都通过 $N(R)$因 在

一条交替路径。米*

这两个方程暗示了该假设。 $|N(R)| = |B| = |R| - 1$,这与

推论3. 二分图$G[X, Y]$ 具有完美匹配当且仅当$|X| = |Y|$ $|N(S)| \geqslant |S|$且对于所有$S \subseteq X$ 。

推论4. 每个非空正则二分图都有一个完美匹配。

匹配和覆盖

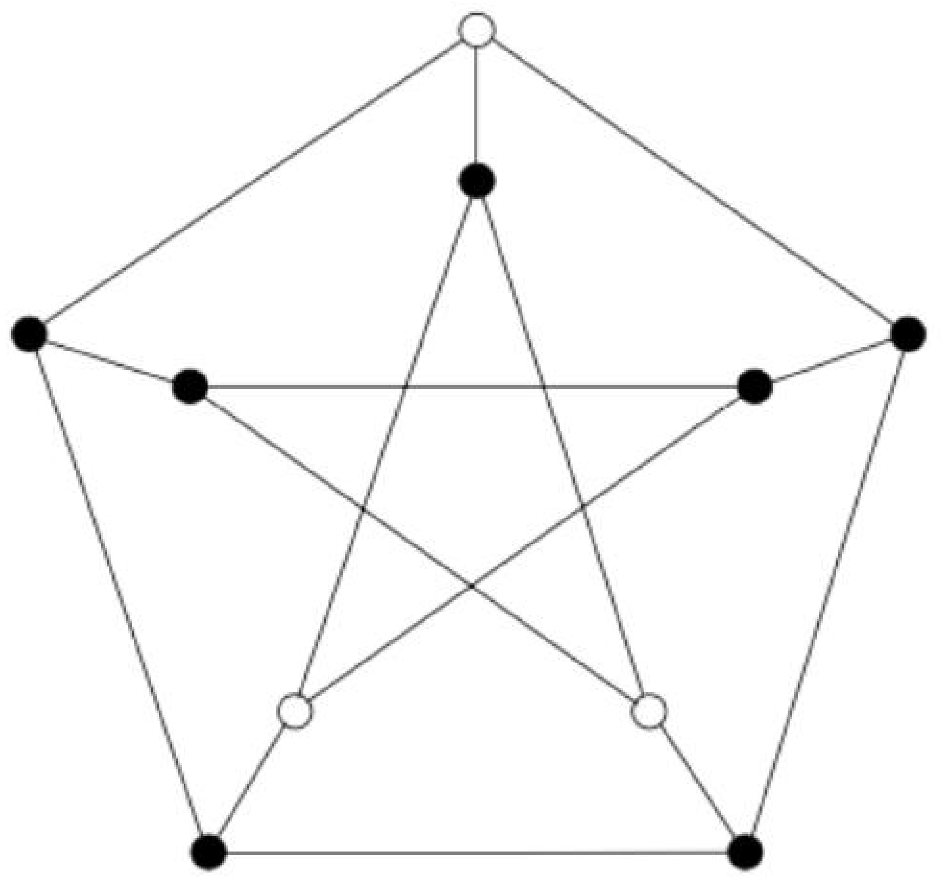
图的覆盖是 G KV (重力) 这样
G至少有一个结尾 钾。

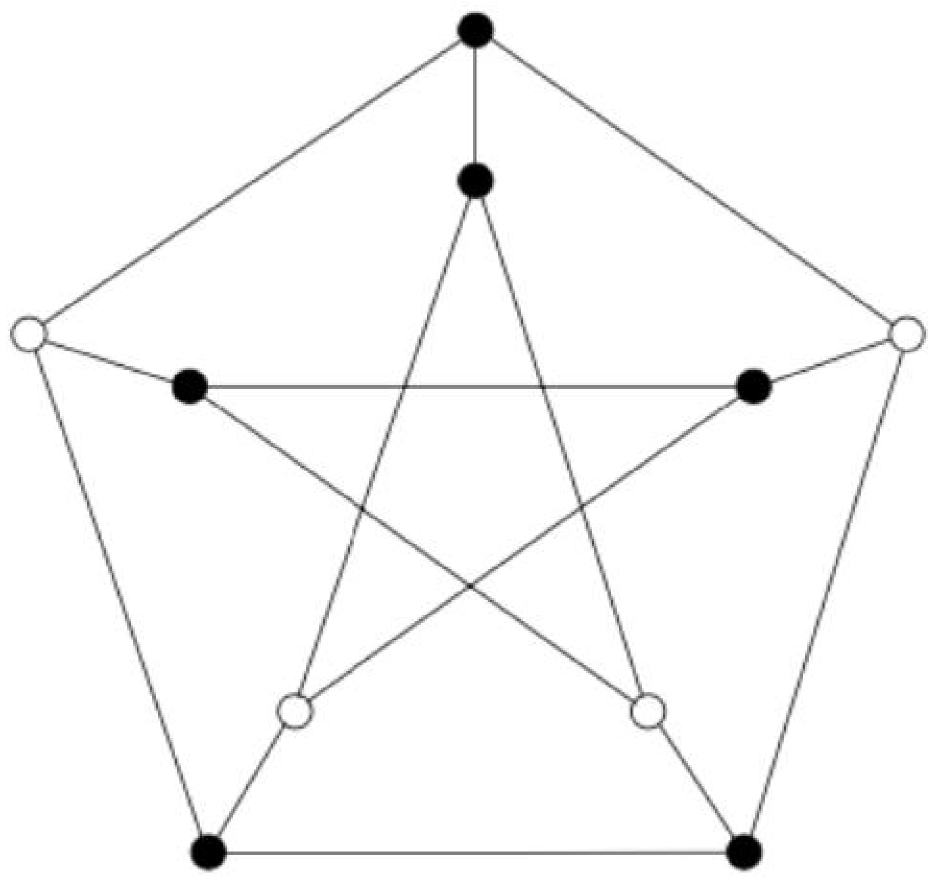
如果 A 覆盖没有覆盖 且|K| < |K*|，则K* G为最小覆盖。 钾

的最小覆盖中的顶点数称为β(G) G

如果 A 覆盖的真子集本身都不 G ，并表示为 。

是覆盖，则A 覆盖的覆盖数为最小。





如果米是图的匹配,并且是MK的覆盖 克克格 ，那么至少一个

的每条边的端点都属于 。由于所有这些端点都是不同的,所以有一个|M| ⩽ |K|

可以推断 。

命题8. 设是匹配和覆盖,使得米是最大匹配,是最小覆盖。 钾 |M| = |K| 。

米 钾

定理 23.对于二分图G = G[X, Y]， α′(G) = β(G)。

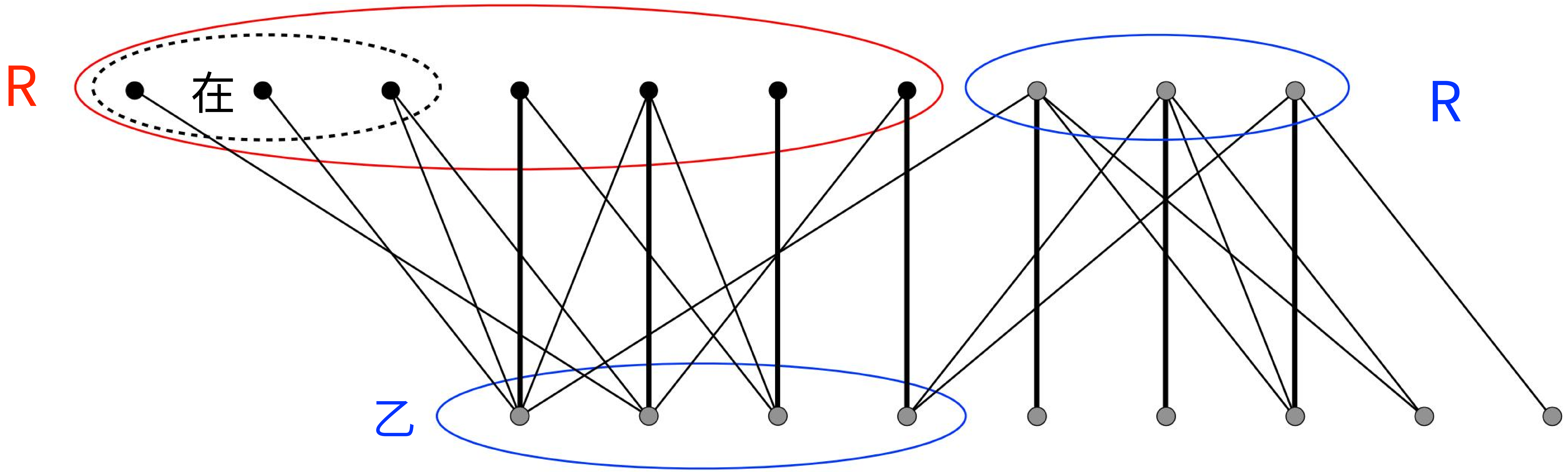
M* GU证明。设是中的最大匹配,是X中的顶点集

未被 覆盖。用K* = (X R) ∪ B可到达的所有顶点的集合表示 中号*至

M* R = X ∩ Z B = Y ∩ Z -交替路径。设置和。然后G |K*| = |M*|

是K* G的覆盖 。

根据引理8， 是 的最小覆盖。



$K^* = (X \quad R) \cup B$ 是G的最小覆盖。

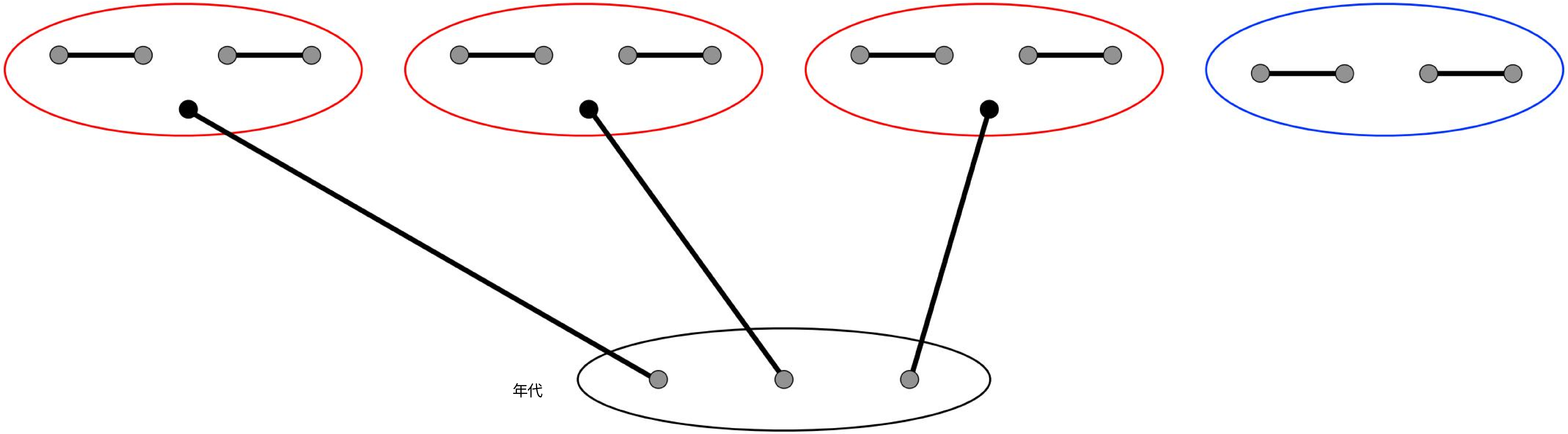
任意图中的完美匹配

令$S \subset V(G)$且$o(G - S)$为$G - S$的奇数分量的数量。

定理24（Tutte）。一个图有完美匹配当且仅当G

$$o(G - S) \leqslant |S|,\text{对于所有}S \subseteq V(G)$$

。



定理25(Petersen).每一个没有切边的 3 正则图都有一个完美匹配。

证明。设是无切边的 3 正则图。假设和G − S S1, . . . , Sk G S⊂V (G)

G

的奇数分量。由于没有切边,因此d(Si) ⩾ 2 1 ≤ i ⩽ k

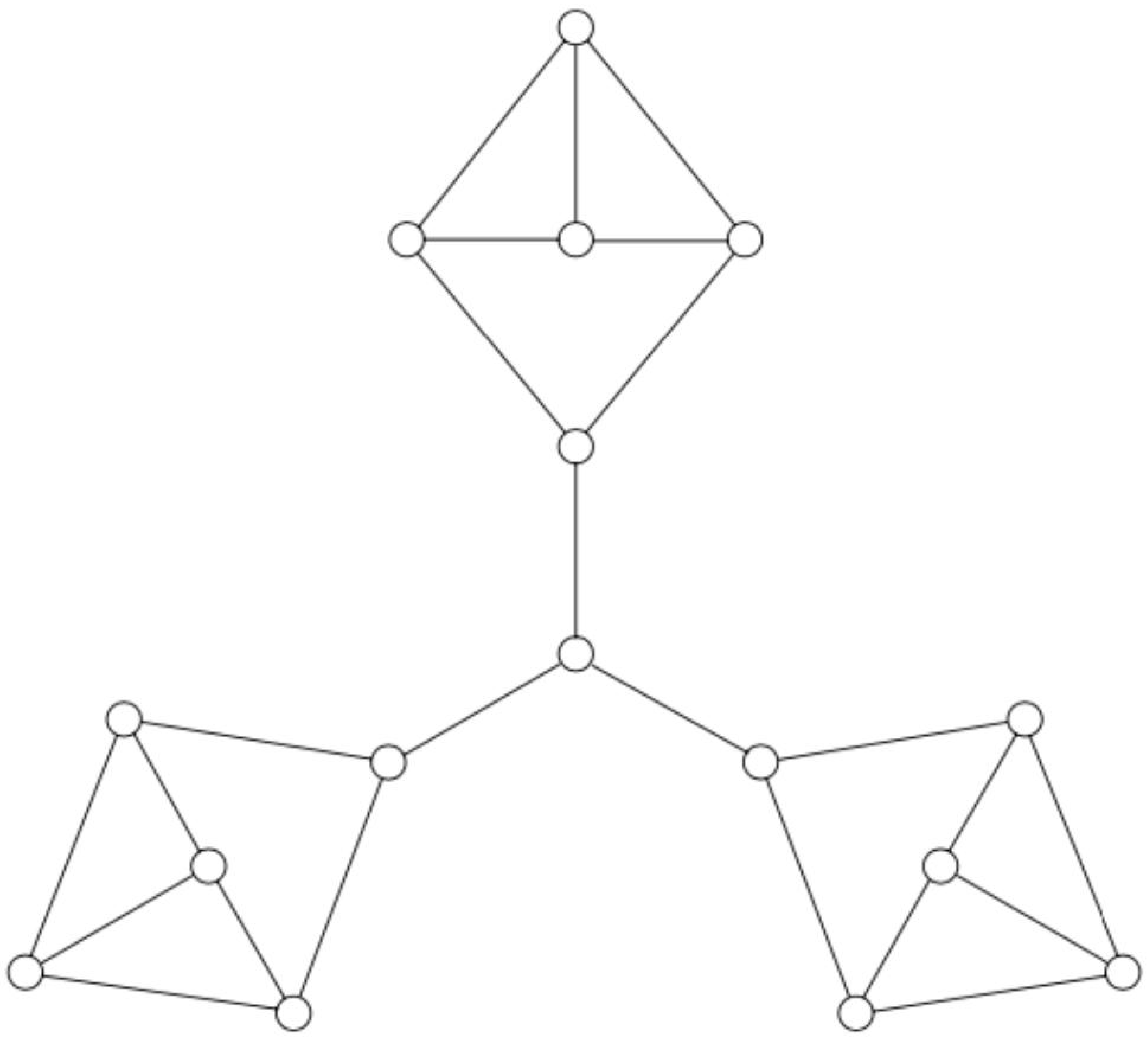
和 之间的两个边上,即 。因为 Si S位于

|硅| d(Si) ⩾ 3 1 ≤ i ⩽ k 为奇数,可以推出对于 ∂ (Si) ∂ (Si) ⊆ ∂ (S) 。

注意,边切是成对不相交的,并且 ,所以

$$3k \leqslant \sum_{我=1}^{钾} d(如果) = d\left(\cup_{i=1}^{k} Si\right) = d(S) \leqslant 3|S|。$$

即o(G − S) ⩽ |S|。根据定理 24,可得结论。



没有完美匹配的 3 正则图

练习 6。

1. 说明不可能用矩形平铺1×1正方形 1×2 8×8 其中两个对角的正方形被移除了。

2. 证明如果顶点上无三角形，则GG G n $\alpha'(G)=n-\chi(\overline{G})$，在哪里 $\overline{G}$ 是 的补图。