Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

L. Fridman

UNAM

Matemáticas Avanzadas

Outline

Definiciones Básicas

Definition (Espacio métrico de funciones continuas)

Colección de funciones $x(t)$ continuas en t_1, t_2 con métrica

$$d(x_1(t), x_2(t)) = \max_{t \in [t_1, t_2]} \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

Se denota como

$$\mathbb{C}_{[t_1, t_2]}$$

Bola alrededor de x_0

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathcal{X} | d(x, x_0) \leq r\}$$

Clases de ODE

- Funciones que satisfacen la Ecuación Diferencial Ordinaria (ODE)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \text{ para casi todo } t \in [t_0, t_0 + \theta] \\ x(t_0) &= x_0 \\ f &: \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \end{aligned}$$

- f es una función no lineal.
- $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach

Definition

Un espacio de Banach es un espacio lineal, normado y completo

- **Problema de Cauchy** Consiste en resolver la ODE. Encontrar $x(t)$ que satisfaga la ODE.

Clasificación de las ODE

- **Regulares** Si $f(x,t)$ es una función continua tanto en x como en t. La $x(t)$ que satisface la ODE debe ser: Continuamente diferenciable; i.e. $x(t)$ existe para ~~casi~~ todo $t \in [t_0, t_0+\theta]$, $x(t) \in \mathbb{C}^1_{[t_0,t_0+\theta]}$
- **Carathedory** Si $f(t,x)$ es medible en t y continua en x.
- **Lado derecho discontinuo** Si $f(x,t)$ es continua en t y discontinua en x. Estan relacionadas con una inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

donde $F(t,x) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Si este conjunto consiste de un punto para un par (t,x) entonces $F(t,x) = f(t,x)$.

Theorem (Existencia y Unicidad Local)

Sea $f(x,t)$ *una función continua en* t *sobre un intervalo* $t_0, t_0+\theta]$ *y para cualquier* $t \in [t_0, t_0+\theta]$ *la función* $f(x,t)$ *satisface la condición de Lipschitz en* x*, esto es, existen constantes* $c, L_f > 0$ *tales que*

$$\|f(x,t)\| \leq c$$
$$d(f(t,x_1), f(t,x_2)) \leq L_f d(x_1,x_2)$$

para toda $t \in [t_0, t_0+\theta]$ *y toda* $x, x_1, x_2 \in B_r(x_0)$ *donde*

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathcal{X} | d(x,x_0) \leq r\}$$

Theorem (Existencia y Unicidad Local (Continuación))

Entonces, el problema de Cauchy tiene una solución única en el intervalo de tiempo $t \in [t_0, t_0 + \theta_1]$ *donde*

$$\theta_1 < \min\{r/c, L_f^{-1}, \theta\}$$

Demostración.

1) Primero mostraremos que el problema de Cauchy es equivalente a encontrar una solución continua a la siguiente ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{s=t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Ciertamente, si $x(t)$ es una solución de la ODE, entonces obviamente es una función diferenciable en $[t_0, t_0 + \theta_1]$. Por integración de la ODE sobre $[t_0, t_0 + \theta]$ obtenemos esta ecuación integral. Inversamente, suponga que $x(t)$ es una función continua satisfaciendo la ecuación integral.

□

Demostración.

Entonces, según las suposiciones del teorema tendríamos que

$$d\{f(s,x(s)),f(s_0,x(s_0)\} \leq$$
$$d\{f(s,x(s)),f(s,x(s_0))\} + d\{f(s,x(s_0)),f(s_0,x(s_0))\} \leq$$
$$L_f d(x(s),x(s_0)) + d\{f(s,x(s_0)),f(s_0,x(s_0))\}$$

esto implica que si $s, s_0 \in [t_0, t_0 + \theta]$ y $s \to s_0$ entonces el lado derecho de la última desigualdad tiende a cero y, por lo tanto, $f(s, x(s))$ es continua en cada punto del intervalo $[t_0, t_0 + \theta]$. Y mas aún, también concluimos que $x(t)$ es diferenciable en este intervalo, que satisface la ODE y que $x(t_0) = x_0$. $\square$

Demostración.

2) Usando la equivalencia anterior, introduzca un espacio métrico de funciones continuas $\mathcal{X}$ y $x(t) \in \mathcal{X}$. Note que el operador no lineal $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definido como

$$\Phi(x) = x_0 + \int_{s=t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

transforma una bola $B_r(x_0)$ en $B_r(x_0)$ dado que

$$\|\Phi(x) - x_0\| = \max_{t \in [t_0, t_0+\theta]} \left\| \int_{s=t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq$$

$$\max_{t \in [t_0, t_0+\theta]} \int_{s=t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| \, ds \leq \theta_1 c < r$$

Demostración.

Mas aún, el operador Φ es una contracción sobre $B_r(x_0)$. Ciertamente, por la condición local de Lipschitz sigue que

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \max_{t\in[t_0,t_0+\theta]} \left\| \int\limits_{s=t_0}^{t} [f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))]ds \right\| \leq$$

$$\max_{t\in[t_0,t_0+\theta]} \int\limits_{s=t_0}^{t} \|f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))\|\, ds \leq \theta_1 L_f d(x_1,x_2)$$

donde $\theta_1 L_f < 1$ para una suficientemente pequeña. Entonces, por el Principio de Contracción, concluimos que la ecuación integral tiene una solución única $x \in \mathbb{C}_{[t_0,t_0+\theta_1]}$. $\square$

Desigualdad de Gronwall-Bellman

Lemma

Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y* $\mu : [a, b] \to \mathbb{R}$ *función continua y no negativa. Si la función continua* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *satisface*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s) y(s) ds$$

para $a \leq t \leq b$*, entonces en el mismo intervalo*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp\left[\int_s^t \mu(\tau) d\tau\right] ds$$

Lemma

En particular, si $\lambda(t) \equiv \lambda$ *es una constante, entonces*

$$y(t) \leq \lambda \exp\left[\int_a^t \mu(\tau) d\tau\right]$$

Si, además, $\mu(t) \equiv \mu > 0$ *es una constante, entonces*

$$y(t) \leq \lambda \exp\left[\mu(t-a)\right]$$

Demostración.

Sea $z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)ds$ y $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0.$
Entonces, z es diferenciable y

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t)$$

Esta es una ecuación lineal de estado escalar con función de transición de estados

$$\phi(t,s) = \exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]$$

$\square$

Demostración.

Como $z(a) = 0$, tenemos

$$z(t) = \int_a^t \phi(t,s)\left[\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)\right] ds$$

El término

$$\int_a^t \phi(t,s)\mu(s)v(s)ds$$

es no negativo. □

Demostración.

Entonces,

$$z(t) \leq \int_a^t \exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right] \mu(s)\lambda(s)ds$$

Como $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$, esto completa la prueba en el caso general. En el caso general cuando $\lambda(t) \equiv \lambda$, tenemos $\square$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\int_a^t \mu(s)\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right] ds &= -\int_a^t \frac{d}{ds}\left\{\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]\right\} ds \\
&= -\left\{\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]\right\}\Bigg|_{s=a}^{s=t} \\
&= -1 + \exp\left[\int_a^t \mu(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}
$$

lo que prueba el lema cuando λ es una constante. La prueba cuando tanto λ como μ son constantes se sigue por integración. $\square$

Dependencia continua sobre un parámetro o condiciones iniciales

Theorem

Sea $f(t,x)$ *continua a pedazos en* t *y Lipschitz en* x *sobre* $[t_0,t_1]\times\mathcal{W}$ *con constante* L *donde* $\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto conexo. Sea* $y(t)$ *y* $z(t)$ *las soluciones de*

$$\dot{y}(t)=f(t,y),\quad y(t_0)=y_0$$

y

$$\dot{z}(t)=f(t,z)+g(t,z),\quad z(t_0)=z_0$$

tal que $y(t),z(t)\mathcal{W}$ *para toda* $t\in[t_0,t_1]$.

Theorem

Suponga que

$$\|g(t,x)\| \leq \mu, \forall (t,x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{W}$$

para algún $\mu > 0$. *Entonces*

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| \exp\left[L(t-t_0)\right] + \frac{\mu}{L}\left\{\exp\left[L(t-t_0) - 1\right]\right\}$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$.

Demostración.

Las soluciones $y(t)$ y $z(t)$ están dadas por

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, z(s)) + g(s, z(s)) \right] ds$$

$\square$

Demostración.

Restando ambas ecuaciones y sacando su métrica queda

$$\|y(t)-z(t)\| \leq \|y_0-z_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s))-f(s,z(s))\|ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|g(s,z(s))\|ds$$

$$\leq \gamma + \mu(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} L\|y(s)-z(s)\|ds$$

donde $\gamma = \|y_0 - z_0\|$. □

Demostración.

Aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman a la función $\|y(t) - z(t)\|$ resulta en:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L[\gamma + \mu(s - t_0)] \exp[L(t - s)] ds$$

$\square$

Demostración.

Integrando la parte derecha por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\|y(t)-z(t)\| &\leq \gamma+\mu(t-t_0)-\gamma-\mu(t-t_0)+\gamma\exp[L(t-t_0)] \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \mu\exp[L(t-s)]ds \\ &= \gamma\exp[L(t-t_0)]+\frac{\mu}{L}\{\exp[L(t-t_0)]-1\}\end{aligned}$$

lo que completa la prueba □

Theorem

Sea $f(t, x, \lambda)$ *continua sobre* (t, x, λ) *y localmente Lipschitz en* x *(uniforme en* t *y* $lambda$ *) sobre* $[t_0, t_1] \times \mathcal{D} \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$ *donde* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto conexo. Sea* $y(t, \lambda_0)$ *una solucin de*

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$$

con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in \mathcal{D}$*. Suponga que* $y(t, \lambda_0)$ *esta definida y pertenece a* $\mathcal{D}$ *para todo* $t \in [t_0, t_1]$*. Entonces, dada una* $\epsilon > 0$ *existe una* $\delta > 0$ *tal que si*

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \quad y \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

Theorem

entonces existe una única solución $z(t, \lambda)$ *para*

$$\underset{z}{\cancel{\dot{x}}} = f(t, \underset{z}{\cancel{x}}, \lambda)$$

definida en $[t_0, t_1]$ *, con* $z(t_0, \lambda) = z_0$ *y además* $z(t, \lambda)$ *satisface.*

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Demostración.

Por la continuidad de $y(t, \lambda_0)$ en t y la compactidad de $[t_0, t_1]$, sabemos que $y(t, \lambda_0)$ esta acotada sobre $[t_0, t_1]$. Defina un tubo U alrededor de la solucin $y(t, \lambda_0)$ por

$$U = \{(t, x) \in [t_0, t_i] \times \mathbb{R}^n \,|\, \|x - y(t, \lambda_0)\| \le \epsilon\}$$

Tubo

Suponga que $U \subset [t_0, t_1] \times \mathcal{D}$; si no, reemplace ϵ por $\epsilon_1 < \epsilon$ que es suficientemente pequeo para que $U \subset [t_0, t_1] \times \mathcal{D}$ y continúe con la prueba usando ϵ_1. El conjunto U es compacto y, por ello, $f(t, x, \lambda)$ es Lipschitz en x sobre U con una constante L determinada. Por la continuidad de f en λ, para cualquier $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ (con $\beta < c$) tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \alpha, \quad \forall (t, x) \in U, \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Demostración.

Elija $\alpha < \epsilon$ y $\|z_0 - y_0\| < \alpha$. Por el teorema de existencia y unicidad local existe una solución única $z(t, \lambda)$ en algún intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta]$. La solucin inicia dentro del tubo U y, mientras permanezca dentro del tubo U, esta puede ser extendida. Mostraremos que al escoger una α suficientemente pequea, la solucin permanece en U para todo $t \in [t_0, t_1]$. En particular, sea τ la primera vez que la solucin sale del tubo y muestre que podemos hacer que $\tau > t_1$. En el intervalo de tiempo $[t_0, \tau]$, las condiciones del teorema anterior se cumplen con $\mu = \alpha$. Por ello,

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \alpha \exp[L(t - t_0)] + \frac{\alpha}{L}\{\exp[L(t - t_0)] - 1\}$$
$$< \alpha \left(1 + \frac{1}{L}\right) \exp[L(t - t_0)] < \varepsilon$$

Demostración.

Escogiendo

$$\alpha \leq \epsilon L \frac{\exp[-L(t_1 - t_0)]}{1 + L}$$

se asegura que la solucin $z(t, \lambda)$ no pueda dejar el tubo durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Por ello $z(t, \lambda)$ esta definida sobre $[t_0, t_1]$ y satisface

$$\|x(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon.$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$ se completa la prueba del teorema. □

Diferenciabilidad de Soluciones y Ecuación de Sensibilidad

Suposiciones sobre $f(t, x, \lambda)$

- Continua en (t, x, λ)
- Derivadas parciales con respecto a x y λ continuas
- Sea λ_0 el valor nominal de λ y suponga que la ecuación diferencial nominal

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_0), \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t, \lambda_0)$ sobre $[t_0, t_1]$.

Por el teorema anterior sabemos:

- Para toda λ suficientemente cercana a λ_0, la ODE

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t, \lambda)$ sobre $[t_0, t_1]$ que es cercana a la solución nominal $x(t, \lambda_0)$.

Comentario

La diferenciabilidad continua de f con respecto a x y λ implica que la solucin $x(t,\lambda)$ es diferenciable con respecto a λ cerca de λ_0.

Por qué?

$$x(t,\lambda) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,\lambda), \lambda) ds$$

Tomando la derivada parcial con respecto a λ

$$x_\lambda(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f(s, x(s,\lambda), \lambda)}{\partial x} x_\lambda(s,\lambda) + \frac{\partial f(s, x(s,\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} \right] ds$$

Derivando con respecto a t se puede observar que $x_\lambda(t,\lambda)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} x_\lambda(t,\lambda) = A(t,\lambda) x_\lambda(t,\lambda) + B(t,\lambda), \quad x_\lambda(t_0,\lambda) = 0$$

donde

$$A(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\right|_{x=x(t,\lambda)}, \quad B(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x(t,\lambda)},$$

- Para λ suficientemente cercano a λ_0, las matrices $A(t,\lambda)$ y $B(t,\lambda)$ estan definidas en $[t_0, t_1]$. Por lo tanto también $x_\lambda(t,\lambda)$.
- Si $\lambda = \lambda_0$ el lado derecho de la ecuación solo depende de la solución nominal $x(t,\lambda_0)$.
- Sea $S(t) = x_\lambda(t,\lambda_0)$, entonces $S(t)$ es la única solución de la ecuación

$$\dot{S}(t) = A(t,\lambda_0)S(t) + B(t,\lambda_0), \quad S(t_0) = 0$$

- La función $S(t)$ se denomina **función de sensibilidad** y su ODE asociada se denomina **ecuación de sensibilidad**

Utilidad de la ecuación de sensibilidad

- Las funciones de sensibilidad dan estimados de primer order de los efectos de las variaciones en los parámetros de las soluciones.
- Se pueden usar para aproximar la solución cuando λ esta suficientemente cerca al valor nominal λ_0.
- Expansión en series de Taylor alrededor de la solución nominal $x(t, \lambda_0)$

$$x(t, \lambda) = x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) + \text{high-order-terms}$$

- Si se desprecián los términos de alto orden.

$$x(t, \lambda) = x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0)$$

Procedimiento para calcular las funciones de sensibilidad

- Resuelva las ecuaciones nominales para la solución nominal $x(t, \lambda_0)$
- Evalúe las matrices Jacobianas

$$A(t, \lambda) = \left.\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x}\right|_{x=x(t,\lambda),\lambda=\lambda_0},$$

$$B(t, \lambda) = \left.\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x(t,\lambda),\lambda=\lambda_0},$$

- Resuelva las ecuaciones de sensibilidad para $S(t)$

Example

Considere el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c\sin(x_1) - (a + b\cos(x_1))x_2 \end{aligned}$$

suponga que los parámetros a, b y c tienen valores nominales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ y $c_0 = 1$. Encuentre y resuelva las ecuaciones de sensibilidad.

Principio de Comparación

Características

- Sirve para encontrar cotas en la solución $x(t)$ de la ODE sin necesidad de encontrar la solución explícitamente.
- Se aplica cuando la derivada de la función diferencial escalar $v(t)$ satisface una desigualdad de la forma

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$$

para todo t en algún intervalo.

- Compara la solución de la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$$

con la de la ecuación diferencial

$$\dot{u}(t) = f(t, u)$$

Se puede aplicar incluso si $v(t)$ no es diferenciable, pero tiene una derivada superior derecha acotada $D^{+}v(t)$, que satisface la desigualdad diferencial.

- Si $v(t)$ es diferenciable en t. Entonces $D^{+}v(t) = \dot{v}(t)$
- Si
$$\frac{1}{h}[v(t+h) - v(t)] \leq g(t,h), \quad \forall h \in (0,h]$$
y
$$\lim_{h \to 0^{+}} g(t,h) = g_0(t)$$
entonces $D^{+}v(t) \leq g_0(t)$

Lemma (Principio de Comparación)

Considere la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

donde $f(t, u)$ *es continua en* t *y localmente Lipschitz en* u, *para todo* $t \geq 0$ *y todo* $u \in J \subset \mathbb{R}$. *Sea* $[t_0, T)$ *(*T *puede ser infinito) el intervalo máximo de existencia de la solución* $u(t)$, *y suponga* $u(t) \in J$ *para todo* $t \in [t_0, T)$. *Sea* $v(t)$ *una función continua cuya derivada superior derecha satisface la desigualdad*

$$D^+ v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0$$

con $v(t) \in J$ *para todo* $t \in [t_0, T)$. *Entonces,* $v(t) \leq u(t)$ *para todo* $t \in [t_0, T)$.

Demostración.

La derivada superior derecha $D^+v(t)$ se define como

$$D^+v(t) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

donde $\lim_{n \to \infty} \sup$ de una secuencia de números reales $\{x_n\}$ es un número real y que satisface las siguientes condiciones

- Para todo $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que $n > N$ implica $x_n < y + c$
- Dado $\epsilon > 0$ y $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que $x_n > y - \epsilon$

$\square$

Demostración.

Considere la ecuación diferencial

$$\dot{z} = f(t, x) + \lambda, \quad z(t_0) = u_0 \qquad (*)$$

donde $\lambda > 0$. En cualquier intervalo compacto $[t_0, t_1]$, podemos concluir que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\lambda < \delta$, entonces la ecuación diferencial tiene una única solución en $[t_0, t_1]$ y

$$\|z(t, \lambda) - u(t)\| < \epsilon, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\square$

Demostración.

1) $v(t) \leq z(t, \lambda)$, para todo $t \in [t_0, t_1]$.
Esta aseveración se puede probar por contradicción. Existe tiempos $[a, b] \in [t_0, t_1]$ tales que $v(a) = z(a, \lambda)$ y $v(t) > z(t, \lambda)$ para $a < t \leq b$. Consecuentemente,

$$v(t) - v(a) > z(t, \lambda) - z(a, \lambda), \quad \forall t \in [a, b]$$

lo que implica

$$D^+ v(a) \geq \dot{z}(a, \lambda) = f(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f(a, v(a))$$

lo que contradice la desigualdad $D^+ v(t) \leq f(t, v(t))$

□

Demostración.

2) $v(t) \leq u(t)$, para todo $t \in [t_0, t_1]$.
De nuevo lo podemos mostrar por contradicción. Existe $a \in (t_0, t_1]$ tal que $v(a) > u(a)$. Tomando $\epsilon = [v(a) - u(a)]/2$ y utilizando $*$ obtenemos

$$v(a) - z(a, \lambda) = v(a) - u(a) + u(a) - z(a, \lambda) \geq \epsilon$$

lo que contradice 1).

□

Demostración.

Entonces, hemos mostrado que $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Como esto es cierto en cualquier intervalo compacto, podemos concluir que se mantiene si $t \geq t_0$. Si este no fuera el caso, sea $T < \infty$ el primer tiempo para el cual la desigualdad no se cumple. Tenemos $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \in [t_0, T)$ y, por continuidad, $v(T) = u(T)$. Por lo tanto, podemos extender la desigualdad al intervalo $[T, T + \Delta]$ para algún $\Delta > 0$, lo que contradice el hecho de que T es el primer tiempo en que la desigualdad no se cumple. $\square$

Example

- $\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a, \quad t \in [0, t_1)$
- $\dot{x} = f(t, x) = -(1 + x^2)x + e^t, \quad x(0) = a, \quad t \in [0, t_1)$