Valores propios y Vectores propios

Operadores matriciales

Con el motivo de comprender mejor las herramientas utilizadas para el diseño de sistemas de control con el enfoque de espacio de estados, es necesario citar brevemente algunas de las propiedades más frecuentes y útiles del álgebra matricial. Recordar también que las matrices son arreglos ordenados que representan un sistema de ecuaciones consistente (donde el número de ecuaciones es mayor o igual al número de incógnitas). El planteamiento de problemas mediante matrices ofrece una alternativa de solución más simple con respecto a otros métodos y para el caso de los sistemas de control permite obtener un enfoque más abstracto para la solución de procesos multivariables. En este apartado se pretende retomar algunos conceptos fundamentales para aplicarlos posteriormente en la teoría del control moderno tomando en cuenta que se tienen buenas bases de álgebra matricial y operaciones básicas entre matrices como son la suma y multiplicación entre matrices.

Definición: *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada. Se dice que* $\mathbf{A}$ *es no singular si y solo si existe una matriz* $\mathbf{B}$ *tal que:*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

Donde $\mathbf{I}$ *es la matriz identidad,* $\mathbf{B}$ *se denomina mediante* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ *y se le conoce como matriz inversa de* $\mathbf{A}$.

La matriz $\mathbf{A}^{-1}$ *existe si el determinante de* $\mathbf{A}$ *denominado mediante* $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$ *es diferente de cero.*

Si $|\mathbf{A}| = 0$ *entonces no existe* $\mathbf{A}^{-1}$ *y se dice que* $\mathbf{A}$ *es singular*

La inversa de una matriz (no singular):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se calcula mediante la fórmula de Cramer:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{M_A}^T$$

Es decir, la matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de menores de $\mathbf{A}$.

Ejemplos:

1. Sea la matriz cuadrada no singular:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A})=\mathbf{M}_{\mathbf{A}}{}^{T}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

2. Sea la matriz cuadrada no singular

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Nota: El cálculo del determinante se puede realizar por diferentes métodos, pero el resultado por cualquiera de ellos siempre debe ser el mismo.

La matriz de menores de $\mathbf{A}$ para este ejemplo está dada por:

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Definiendo:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ m_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\ m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$m_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ m_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\ m_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};\ m_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};\ m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

Se tiene por lo tanto:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{M_A}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}m_{11} + a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13}} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa:

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$	2. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$	3. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$
4. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$	5. $(\mathbf{A}+\mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$	

Ecuación característica de una matriz cuadrada

Sea el sistema dinámico descrito por el conjunto de ecuaciones de estado LTI:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

La ecuación característica que se obtiene de la matriz de estados $\mathbf{A}$ es equivalente al polinomio característico del sistema. Como se observa en el proceso para obtener la matriz de transferencia mediante la ecuación:

$$\mathbf{G}(s) = \left(\mathbf{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right)$$

Al calcular la matriz $\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$ se está obteniendo también el polinomio característico para todo el sistema. Esto quiere decir que aunque el sistema sea multivariable (MIMO) éste tiene un único polinomio característico y que está determinado mediante la expresión:

$$p(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2}s^2 + a_{n-1}s + a_n$$

Ejemplo: Sea la matriz cuadrada:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Su ecuación característica está dada por:

$$p(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = \left(s+1\right)^3$$

Por lo tanto:

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Establece que toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ satisface su ecuación característica $p(s)$. Es decir:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + a_2\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\mathbf{A}^2 + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Donde $\mathbf{0}$ es una matriz de ceros de $n \times n$

Ejemplo: Sea la matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinar su ecuación característica y comprobar que $\mathbf{A}$ satisface el teorema de Cayley - Hamilton.

Solución. La ecuación característica está dada por:

$$p(s) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

Por lo tanto:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Es decir:

$$p\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa, la matriz $\mathbf{A}$ satisface su ecuación característica

Valores propios y Vectores propios

Debido a que la ecuación característica del sistema es única (aun cuando el sistema sea MIMO), a las raíces λ_i del polinomio característico $(i = 1, \dots, n)$ anteriormente conocidas como “polos” se les conoce también como *eigenvalores* o **valores propios** del sistema. Por lo tanto, el número “*n*” de valores propios en un sistema determina el número de estados y en consecuencia el orden del sistema.

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$$

Por otro lado, del teorema de Cayley – Hamilton se sabe que:

$$p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, es posible obtener *n* sistemas de ecuaciones relacionados con cada valor propio de manera que satisfacen la expresión:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{X}_i = \mathbf{0}; \text{ para } (i = 1, \dots, n)$$

Donde: $\mathbf{X}_i$ (de dimensión $n \times 1$) se conoce como *eigenvector* o vector propio asociado al valor propio λ_i

El cálculo de los vectores propios depende en gran medida del tipo de valores propios con que estén relacionados. Es decir, el algoritmo para calcular los vectores propios cuando todos los valores propios son diferentes es distinto al algoritmo que se utiliza para calcular vectores propios asociados a valores propios con multiplicidad (repetidos).

Caso 1: Cálculo de $\mathbf{X}_i$ para λ_i diferentes.

Cuando cada uno de los valores propios tiene multiplicidad algebraica de "1" (es decir, que todas las raíces son simples y diferentes) el sistema de ecuaciones para calcular el i – ésimo vector propio se obtiene a partir de:

$$\mathbf{AX}_i - \lambda_i \mathbf{X}_i = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{AX}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i$$

Existen diferentes métodos para resolver el sistema de ecuaciones descrito para el vector propio $\mathbf{X}_i$, por lo que en general se pueden obtener diferentes vectores propios, lo que implica que no son únicos.

Ejemplo: Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinar:

a) La ecuación característica

b) Los valores propios

c) Los vectores propios

Solución:

a) $$p(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 1 & -2 & s+3 \end{vmatrix} = \boxed{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

b) $$p(s) = \left(s - \lambda_1\right)\left(s - \lambda_2\right)\left(s - \lambda_3\right) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1};\ \boxed{\lambda_2 = -2};\ \boxed{\lambda_3 = -3}$$

c) Para el vector $\mathbf{X}_1$ se tiene que $\mathbf{AX}_1 = \lambda_1 \mathbf{X}_1$; o bien:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \left(-1\right) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

Donde: $-x_{11} = -x_{11};\ \ x_{11} - 2x_{21} = -x_{21} \Rightarrow x_{11} = x_{21}$ y $-x_{11} + 2x_{21} - 3x_{31} = -x_{31} \Rightarrow x_{31} = \dfrac{1}{2} x_{11}$

Si $x_{11}=1$ entonces $x_{21}=1$ y $x_{31}=0.5$; por lo tanto: $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0.5\end{bmatrix}$

Para el vector $\mathbf{X}_2$ se tiene que $\mathbf{AX}_2=\lambda_2\mathbf{X}_2$; es decir:

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-2&0\\-1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}$$

Donde: $-x_{12}=-2x_{12}$; $x_{12}-2x_{22}=-2x_{22}$; y $-x_{12}+2x_{22}-3x_{32}=-2x_{32}\Rightarrow x_{12}=0$ y $x_{32}=2x_{22}$

Si $x_{22}=1$ entonces $x_{32}=2$; por lo tanto: $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$

Para el vector $\mathbf{X}_3$ se tiene que $\mathbf{AX}_3=\lambda_3\mathbf{X}_3$; o bien:

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-2&0\\-1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}=(-3)\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto: $-x_{13}=-3x_{13}$; $x_{13}-2x_{23}=-3x_{23}$; y $-x_{13}+2x_{23}-3x_{33}=-3x_{33}\Rightarrow x_{13}=x_{23}=0$

Si $x_{33}=1$ entonces: $\mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Finalmente, la matriz de vectores propios $\mathbf{X}$ está dada por:

$$\mathbf{X}=\left[\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_3\right]=\left[\begin{array}{c|c|c}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0.5&2&1\end{bmatrix}$$

Nota importante: La matriz de vectores propios $\mathbf{X}$ resultante debe ser no singular; es decir: $|\mathbf{X}|\neq 0$, por lo que si al proponer los valores de los componentes de cualquier vector propio, éste resulta linealmente dependientes de los otros vectores propios (es decir que existen constantes α_1,α_2 tales que $\mathbf{X}_3=\alpha_1\mathbf{X}_1+\alpha_2\mathbf{X}_2$,) entonces se proponen otros valores diferentes de modo que todos los vectores propios sean linealmente independientes (o de lo contrario $\mathbf{X}$ sería una matriz singular).

Caso 2: Cálculo de $\mathbf{X}_i$ para λ_i repetidos.

Cuando uno o más valores propios tiene multiplicidad algebraica de "*m*" (es decir, que dos o más raíces son repetidas) el sistema de ecuaciones para calcular los vectores propios diferentes sigue siendo:

$$\mathbf{AX}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i$$

Mientras que para calcular os vectores propios de raíces repetidas se utiliza el algoritmo:

$$\mathbf{AX}_{i+1} = \lambda_i \mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{X}_i$$

Con lo anterior se busca obtener vectores propios con independencia lineal, especialmente con respecto a los vectores propios relacionados con valores propios múltiples.

Ejemplo: Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinar:

a) La ecuación característica

b) Los valores propios

c) Los vectores propios

Solución:

a) $$p(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \left|\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} s+1 & -2 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = \boxed{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

b) $$p(s) = \left(s - \lambda_1\right)\left(s - \lambda_2\right)\left(s - \lambda_3\right) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1}$$

c) Para el vector $\mathbf{X}_1$ se tiene que $\mathbf{AX}_1 = \lambda_1 \mathbf{X}_1$; es decir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

Donde: $-x_{11} + 2x_{21} - x_{31} = -x_{11};\ -x_{21} + x_{31} = -x_{21} \Rightarrow x_{31} = 0$ y $x_{21} = 0$

Por lo tanto, si $x_{11} = 1$ entonces: $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el vector $\mathbf{X}_2$ como se tienen valores propios repetidos entonces $\mathbf{AX}_2 = \lambda_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1$; o bien:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: $-x_{12} + 2x_{22} - x_{32} = -x_{12} + 1;\ -x_{22} + x_{32} = -x_{22} \Rightarrow x_{32} = 0$ y $x_{22} = 0.5$

Si $x_{12} = 0$ entonces: $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el vector $\mathbf{X}_3$ se tiene que $\mathbf{AX}_3 = \lambda_1 \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_2$; es decir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: $-x_{13} + 2x_{23} - x_{33} = -x_{13};\ -x_{23} + x_{33} = -x_{23} + 0.5 \Rightarrow x_{33} = 0.5$ y $x_{23} = 0.25$

Si $x_{13} = 0$ entonces: $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Finalmente, la matriz de vectores propios $\mathbf{X}$ está dada por:

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_3 \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Problemas Propuestos

Dadas las matrices:

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3.5 \\ -3.5 & -2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

I. Realizar las siguientes operaciones matriciales:

a) $\left(\mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2\right)^{-1}$ de forma directa y utilizando propiedades de inversión

b) $\left(\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1\right)^{-1}$ de forma directa y utilizando propiedades de inversión

c) $\left(\mathbf{A}_5 + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1\mathbf{C}_2\right)^{-1}$ de forma directa y utilizando propiedades de inversión

II. Determinar para las matrices $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$:

a) La ecuación característica $p(s)$

b) Comprobar el teorema de Cayley – Hamilton $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

c) Calcular los valores propios λ_i y los vectores propios $\mathbf{X}_i$

Nota: Calcular solo los valores propios utilizando calculadora científica o alguna herramienta computacional. Puede comprobar sus resultados con MATLAB utilizando los comandos “POLY” y “EIG”.