Espacios metricos

- <u>Espacio métrico</u>: Un conjunto $\mathcal{X}$ (cuyos elementos debemos llamar puntos) para el cual cada par de puntos p y q de $\mathcal{X}$ tienen asociado un numero real $d\left(p,q\right)$ tal que

a) $d\left(p,q\right) > 0 \;\; if\, p \neq q$

$$d\left(p,p\right) = 0$$

b) $d\left(p,q\right) = d\left(q,p\right)$

c) Para cualquier $r \in \mathcal{X}$ la "desigualdad del triangulo" se cumple:

$$d\left(p,q\right) \leq d\left(p,r\right) + d\left(r,q\right)$$

Cualquier función con estas propiedades es una *función de distancia* o *métrica*.

Ejemplos: a) Longitud, Área, Volumen existen físicamente.

b) Métrica euclidiana. $d\left(p,q\right) = \|p-q\|$

c) Métrica discreta $d\left(p,q\right) = \begin{cases} 0 & if\, p = q \\ 1 & if\, p \neq q \end{cases}$

d) Tan extrañas como se necesiten: Prokhorov $d\left(p,q\right) = \dfrac{\|p-q\|}{1+\|p-q\|} \in [0,1)$

Topología de espacios metricos

- <u>Estructuras de conjuntos</u>: Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico y $x \in \mathcal{X}$:

  a) La **vecindad** de un punto x es el conjunto $\mathcal{N}_r(x)$ definido como

  $$\mathcal{N}_r(x) := \{x \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$$

  donde r es el "radio" de $\mathcal{N}_r(x)$.

  b) Un punto $x \in \mathcal{X}$ es un **punto limite** del conjunto $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ si cada vecindad posible de x contiene un punto $y \neq x$ tal que $y \in \mathcal{E}$.

  c) Si $x \in \mathcal{E}$ y x no es un punto limite entonces x en un **punto aislado** (*isolated point*).

  d) $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ es **cerrado** si todo punto limite de $\mathcal{E}$ es un punto de $\mathcal{E}$.

  e) Un punto $x \in \mathcal{E}$ es un **punto interior** de $\mathcal{E}$ si existe una vecindad $\mathcal{N}_r(x)$ de x tal que $\mathcal{N}_r(x) \subset \mathcal{E}$.

  f) $\mathcal{E}$ es **abierto** si cada uno de sus puntos es un punto interior.

Topología de espacios metricos

g) El **complemento** $\mathcal{E}^c$ de $\mathcal{E}$ es el conjunto de puntos $x \in \mathcal{X}$ tales que $x \notin \mathcal{E}$.

h) $\mathcal{E}$ esta **acotado** si existe un numero real M y un punto $x \in \mathcal{E}$ tales que $d(x, y) < M$ para todo $y \in \mathcal{E}$.

i) $\mathcal{E}$ es **denso** en $\mathcal{X}$ si cada punto $x \in \mathcal{X}$ es o un punto limite de $\mathcal{E}$ o un punto de $\mathcal{E}$ o ambas cosas.

j) $\mathcal{E}$ esta **conectado** en $\mathcal{X}$ si no es una unión de dos conjuntos no vacíos separados. Es decir $\mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ donde

$$\mathcal{A} \neq \varnothing,\ \mathcal{B} \neq \varnothing \ \ and \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing.$$

Topología de espacios metricos

Para pensar:

- Toda vecindad $\mathcal{N}_r(x) \subset \mathcal{E}$ es un conjunto abierto.
- Si x es un punto limite de $\mathcal{E}$ entonces toda vecindad $\mathcal{N}_r(x) \subset \mathcal{E}$ contiene una cantidad infinita de puntos de $\mathcal{E}$.

Topología de espacios metricos

- Teorema : Sea $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ una colección (finita o infinita) de conjuntos $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{X}$
  Entonces

$$\left(\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha^c$$

Prueba: Si $x \in \left(\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha\right)^c$ entonces, evidentemente, $x \notin \bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha$

y por ello $x \notin \mathcal{E}_\alpha$ para cualquier α . Esto significa que $x \in \bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha^c$. Por ello:

$$\left(\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha\right)^c \subseteq \bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha^c$$

Contrariamente, si $x \in \bigcap \mathcal{E}_\alpha^c$ entonces $x \in \mathcal{E}_\alpha^c$ para cada a y, por ello, $x \notin \bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha$. Así $x \in \left(\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha\right)^c$ que implica $\bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha^c \subseteq \left(\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha\right)^c$ combinando

ambas expresiones se obtiene la primera expresión.

Topología de espacios metricos

Corolarios:

a) Un conjunto $\mathcal{E}$ es abierto si y solo si su complemento $\mathcal{E}^c$ es cerrado.

b) Un conjunto $\mathcal{E}$ es cerrado si y solo si su complemento $\mathcal{E}^c$ es abierto.

c) Para cualquier colección $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ de conjuntos abiertos $\mathcal{E}_\alpha$ el conjunto $\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha$ es abierto.

d) Para cualquier colección $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ de conjuntos cerrados $\mathcal{E}_\alpha$ el conjunto $\bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha^c$ es cerrado.

e) Para cualquier colección finita $\{\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n\}$ de conjuntos abiertos $\mathcal{E}_\alpha$ el conjunto $\bigcap_\alpha \mathcal{E}_\alpha$ es abierto también.

f) Para cualquier colección finita $\{\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n\}$ de conjuntos cerrados $\mathcal{E}_\alpha$ el conjunto $\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha$ es cerrado también.

Topología de espacios metricos

- Cerradura: Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico y $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$. Denote por $\mathcal{E}'$ el conjunto de todos los puntos limite de $\mathcal{E}$. Entonces el conjunto $\mathrm{cl}\mathcal{E}$ se define como

$$\mathrm{cl}\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$$

y se le conoce como la cerradura de $\mathcal{E}$.

Propiedades:

a) $\mathrm{cl}\mathcal{E}$ es cerrado.

b) $\mathcal{E} = \mathrm{cl}\mathcal{E}$ si y solo si $\mathcal{E}$ es cerrado.

c) $\mathrm{cl}\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ para cada conjunto cerrado $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$

d) Si $\varnothing \neq \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ y $y := \sup \mathcal{E} < \infty$ entonces $y \in \mathrm{cl}\mathcal{E}$ y por lo tanto $y \in \mathcal{E}$ si $\mathcal{E}$ es cerrado.

Topología de espacios metricos

- <u>Puntos de frontera</u>: Sea $\mathcal{E}$ un conjunto de un espacio métrico $\mathcal{X}$. Un punto x en $\mathcal{E}$ es un punto de frontera de $\mathcal{E}$ si *cualquier* vecindad $\mathcal{N}_r(x)$ de este punto contiene al menos un punto de $\mathcal{E}$ y un punto de $\mathcal{X} - \mathcal{E}$
- <u>Conjunto de puntos de frontera</u>: Denotado como $\partial\mathcal{E}$ es el conjunto de todos los puntos de frontera de $\mathcal{E}$. Se puede verificar que

$$\partial\mathcal{E} = \mathrm{cl}\mathcal{E} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{X} - \mathcal{E})$$

Denotando a $\mathrm{int}\mathcal{E} := \mathcal{E} - \partial\mathcal{E}$ (el conjunto de todos los puntos internos) se cumple que:

$$\mathrm{int}\mathcal{E} = \mathcal{X} - \mathrm{cl}(\mathcal{X} - \mathcal{E})$$
$$\mathrm{int}(\mathcal{X} - \mathcal{E}) = \mathcal{X} - \mathrm{cl}\mathcal{E}$$
$$\mathrm{int}(\mathrm{int}\mathcal{E}) = \mathrm{int}\mathcal{E}$$
$$\text{If } \mathrm{cl}\mathcal{E} \cap \mathrm{cl}\mathcal{D} = \varnothing \text{ then } \partial(\mathcal{E} \cup \mathcal{D}) = \partial\mathcal{E} \cup \partial\mathcal{D}$$

Topología de espacios metricos

- Conjuntos compactos:

  a) La **cubierta abierta de un conjunto** $\mathcal{E}$ en un espacio metrico $\mathcal{X}$ es una colección $\{\mathcal{G}_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{X}$ tales que

  $$\mathcal{E} \subset \bigcup_\alpha \mathcal{G}_\alpha$$

  b) Un subconjunto $\mathcal{K}$ de un espacio metrico $\mathcal{X}$ es **compacto** si existe un numero finito de indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

  $$\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{G}_{\alpha_n}$$

  *** Nota: todo conjunto finito es compacto.

Topología de espacios metricos

c) <u>Teorema</u>: Un conjunto $\mathcal{K} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es compacto con respecto a X $\mathcal{X}$ *y solo si* K $\mathcal{K}$ es compacto con respecto a Y $\mathcal{Y}$.

Prueba. *Necesidad.* Suponga que $\mathcal{K}$ es compacto con respecto a $\mathcal{X}$. Por definición, existe una cubierta finita tal que

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{G}_{\alpha_n} \tag{14.31}$$

donde $\mathcal{G}_{\alpha_i}$ es un conjunto abierto con respecto a $\mathcal{X}$. Por otro lado suponga que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}$ donde $\{\mathcal{V}_{\alpha}\}$ es una colección de conjuntos abiertos con respecto a $\mathcal{Y}$. Pero cualquier conjunto abierto $\mathcal{V}_{\alpha}$ puede ser representado como $\mathcal{V}_{\alpha} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}_{\alpha}$ Así reescribimos (14.31)

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{V}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{\alpha_n} \tag{14.32}$$

Suficiencia. Alternamente, si $\mathcal{K}$ es compacto con respecto a $\mathcal{Y}$ entonces existe una colección finita $\{\mathcal{V}_{\alpha}\}$ de conjuntos abiertos en $\mathcal{Y}$ tal que (14.32) es valida. Haciendo $\mathcal{V}_{\alpha} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}_{\alpha}$ para alguna selección particular de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sigue que $\mathcal{V}_{\alpha} \subset \mathcal{G}_{\alpha}$ que implica (14.31).

Topología de espacios metricos

d) <u>Teorema</u>: Conjuntos compactos de espacios métricos son cerrados.

Prueba. Suponga que $\mathcal{K}$ es un subconjunto de un espacio métrico $\mathcal{X}$. Permita que $x \in \mathcal{X}$ pero $x \notin \mathcal{K}$ y $y \in \mathcal{K}$. Considere las vecindades $\mathcal{N}_r(x)$ y $\mathcal{N}_r(y)$ de estos puntos con $r < d(x,y)/2$. Como $\mathcal{K}$ es compacto existen un numero finito de puntos $y_1, \ldots, y_n$ tales que

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{N}_r(y_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_r(y_n) = \mathcal{N}$$

Si $\mathcal{V} = \mathcal{N}_{r_1}(x) \cap \cdots \cap \mathcal{N}_{r_n}(x)$ entonces evidentemente $\mathcal{V}$ es una vecindad de x que no toca $\mathcal{N}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}^c$. Por ello, x es un punto interior de $\mathcal{K}^c$ por lo que $\mathcal{K}^c$ es un conjunto abierto.

Topología de espacios metricos

e) <u>Teorema</u>: si $\mathcal{E}$ es un subconjunto infinito de un conjunto compacto K $\mathcal{K}$ tonces E $\mathcal{E}$ ene un punto limite en K $\mathcal{K}$

Prueba. Si ningún punto de $\mathcal{K}$ fuese un punto limite de $\mathcal{E}$ entonces cualquier $y \in \mathcal{K}$ debería tener una vecindad $\mathcal{N}_r\,(y)$ que contuviese a lo mas un punto de $\mathcal{E}$ (por ejemplo, y si y en $\mathcal{E}$). Es claro que ninguna subcolección finita $\{\mathcal{N}_{r_k}\,(y)\}$ puede cubrir $\mathcal{E}$. Lo mismo es cierto para $\mathcal{K}$ dado que $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$. Sin embargo, esto contradice la compacticidad de $\mathcal{K}$.

<u>Teorema:</u> *Compacticidad en* $\mathbb{R}^n$. Si un conjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, entonces las siguientes tres propiedades son equivalentes:

a) $\mathcal{E}$ es cerrado y acotado.

b) $\mathcal{E}$ es compacto.

c) Cualquier subconjunto infinito de $\mathcal{E}$ tiene un punto limite en $\mathcal{E}$

Topología de espacios metricos

- <u>Convergencia de secuencias en espacios métricos</u>

  a) <u>Convergencia:</u> Una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio metrico $\mathcal{X}$ converge si existe un punto $x \in \mathcal{X}$ para el cual dada alguna $\varepsilon > 0$ existe un entero n_ε tal que si $n \geq n_\varepsilon$ implica que $d(x_n, x) < \varepsilon$. En este caso decimos que $\{x_n\}$ converge a x o que x es un limite de $\{x_n\}$ y escribimos

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \ or \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

  Ejemplo: La secuencia $\{1/n\}$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, pero no converge er $\mathbb{R}_+$.

  Teorema.

  1. $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathcal{X}$ si y solo si cada vecindad $\mathcal{N}_\varepsilon(x)$ de x contiene todos los términos de $\{x_n\}$ excluyendo una cantidad finita de ellos fuera de $\mathcal{N}_\varepsilon(x)$

Topología de espacios métricos

2. Si $x', x'' \in \mathcal{X}$ y $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x' \; and \; x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x''$ entonces $x' = x''$
3. Si $\{x_n\}$ converge entonces $\{x_n\}$ esta acotada.
4. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ y x es un punto limite de $\mathcal{E}$ entonces existe una secuencia $\{x_n\}$ en $\mathcal{E}$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Topología de espacios métricos

b) Subsecuencias: Dada una secuencia $\{x_n\}$, considere una secuencia $\{n_k\}$ de enteros positivos satisfaciendo $n_1 < n_2 < \cdots$ Entonces, la secuencia $\{x_{n_k}\}$ se conoce como una subsecuencia de $\{x_n\}$.

Teorema. Si una secuencia $\{x_n\}$ converge a x entonces cualquier subsecuencia $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ onverge al mismo punto limite x .

Prueba. Por contradicción. Ciertamente, asumiendo que dos diferentes subsecuencias $\{x_{n_k}\}$ y $\{x_{n_j}\}$ tienen dos puntos limites distintos x' y x'', entonces existe $0 < \varepsilon < d(x', x'')$ y por lo tanto un numero k_ε tal que para toda $k \geq k_\varepsilon$ se debe cumplir que $d(x_{n_k}, x_{n_j}) > \varepsilon$ que es una contradiccion a la supocision de que $\{x_n\}$ converge.

Topología de espacios métricos

Teorema. Si {xn} es una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio metrico compacto X entonces obligatoriamente contiene algunas $\{x_{n_k}\}$ subsecuencias convergentes a un punto de X.