Continuidad y Límites de Funciones en Espacios Métricos

L. Fridman

UNAM

Matemáticas Avanzadas

Outline

1. Continuidad y Límites de Funciones
    - Continuidad, Compacidad y Conectividad
    - Continuidad Uniforme
    - Continuidad de Familia de Funciones: Equicontinuidad
    - Conectividad
2. Homeomorfismo
3. Espacio Completo y Secuencia de Cauchy
    - Secuencias de Cauchy
    - Espacio Completo
4. Principio de Contracción y Teorema de Punto Fijo

Continuidad y Límites de Funciones

Sea $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios métricos, tales que $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$, f mapea $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ y $p \in \mathcal{X}$

Definition

a) Escribimos $\lim_{x \to p} f(x) = q$ si existe un punto $q \in \mathcal{Y}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ para el cual $d_{\mathcal{Y}}(f(x), q) < \epsilon$ para todo $x \in \mathcal{E}$ para el cual $d_{\mathcal{X}}(x, p) < \delta$.
   - $d_{\mathcal{X}}$ y $d_{\mathcal{Y}}$ $\Rightarrow$ distancia en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$
   - f puede no estar definido en p ya que p puede no pertenecer a $\mathcal{E}$.

b) Si además $p \in \mathcal{E}$ y $d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(p)) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y para todo $x \in \mathcal{E}$ para el cual $d_{\mathcal{X}}(x, p) < \delta = \delta(\epsilon)$ entonces f se dice **continuo** en p

Definition (Continuación)

c) Si f es continua en cada punto de $\mathcal{E}$ entonces f se dice **continua en $\mathcal{E}$**

c) Si para todo $x, y \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$

$$d_{\mathcal{Y}}\left(f(x), f(y)\right) \leq L_f d_{\mathcal{X}}(x, y), \quad L_f < \infty$$

entonces f es **~~Lypschitz~~ continua en $\mathcal{E}$**

Observación

Si p es un punto límite de $\mathcal{E}$ entonces f es continua en el punto p si y solo si

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Definition (Continuación)

c) Si f es continua en cada punto de $\mathcal{E}$ entonces f se dice **continua en** $\mathcal{E}$

c) Si para todo $x, y \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$

$$d_{\mathcal{Y}}\left(f(x), f(y)\right) \leq L_f d_{\mathcal{X}}(x, y), \quad L_f < \infty$$

entonces f es ~~**Lypschitz**~~ **continua en** $\mathcal{E}$

Observación

Si p es un punto límite de $\mathcal{E}$ entonces f es continua en el punto p si y solo si

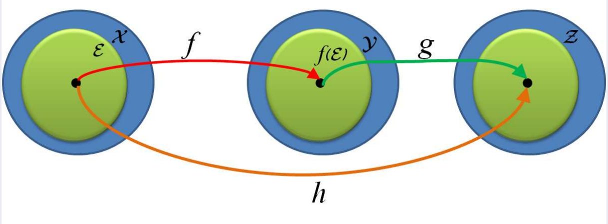
$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Proposición

1. *Si para $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ espacios métricos, los mapeos estan definidos*

$$f : \mathcal{E} \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$
$$g : f(\mathcal{E}) \to \mathcal{Z}$$
$$h(x) := g\left(f\left(x\right)\right), \quad x \in \mathcal{E}$$

Entonces h es continua en el punto $p \in \mathcal{E}$ si f es continua en p y g es continua en $f(p)$



Proposición

2. *Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, y $f(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, entonces f es continua si y solo si todas las $f_i(x)$ (i=1,...,n) son continuas.*
3. *Si $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ son mapeos continuos entonces $f + g$ y (f,g) son también continuos en $\mathcal{X}$*
4. *El mapeo $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es continuo en $\mathcal{X}$ si y solo si $f^{-1}(\mathcal{V})$ es abierto (cerrado) en $\mathcal{X}$ para todo conjunto abierto (cerrado) $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$.*

Continuidad, Compacidad y Conectividad

Theorem

Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un mapeo continuo de un espacio métrico compacto $\mathcal{X}$ a un espacio métrico $\mathcal{Y}$ entonces $f(\mathcal{X})$ es compacto.

Demostración.

Sea $\{V_\alpha\}$ una cobertura abierta de $f(\mathcal{X})$. Por continuidad de f y por la proposición anterior sigue que cada conjunto $f^{-1}(V_\alpha)$ es abierto. Por compacidad de $\mathcal{X}$ hay un número infinito de indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\mathcal{X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i}) \tag{1}$$

Como $f\left(f^{-1}\left(V_{\mathcal{E}}\right)\right) \subset \mathcal{E}$ para cualquier $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}$ se sigue que (1) implica que $f(\mathcal{X}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$. $\square$

Corollary

Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ es un mapeo continuo de un espacio métrico compacto $\mathcal{X}$ en $\mathbb{R}^n$ entonces $f(\mathcal{X})$ es cerrado y acotado, i.e., contiene todos sus puntos límites y $\|f(x)\| \leq M < \infty$ para cualquier $x \in \mathcal{X}$.

Theorem (Teorema de Weierstrass)

Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ *es un* **mapeo continuo** *de un* **espacio métrico compacto** $\mathcal{X}$ *a* $\mathbb{R}^n$ *y*

$$M = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x), \qquad m = \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

entonces existen los puntos $x_M, x_m \in \mathcal{X}$ *tales que*

$$M = f(x_M), \qquad m = f(x_m)$$

Esto significa que f *alcanza su máximo (en* x_M*) y su mínimo (en* x_m*), i.e.,*

$$M = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \max_{x \in \mathcal{X}} f(x), \qquad m = \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Theorem

Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ es un mapeo uno a uno de un espacio métrico compacto $\mathcal{X}$ a un espacio métrico $\mathcal{Y}$ entonces el mapeo inverso $f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ definido por

$$f^{-1}(f(x)) = x \in \mathcal{X}$$

también es un mapeo continuo

Continuidad Uniforme

Definition

Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ un mapeo del espacio $\mathcal{X}$ al espacio métrico $\mathcal{Y}$. El mapeo f se dice

a) **Uniformemente Continuo** en $\mathcal{X}$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(x')) < \epsilon$ para todo $x, x' \in \mathcal{X}$ para los cuales $d_{\mathcal{X}}(x, x') < \delta$.

b) **Uniformemente Lipschitz Continuo** en un (x,z)-conjunto $\mathcal{E}$ con respecto a x, si existe una constante positiva $L_f < \infty$ tal que

$$d_{\mathcal{Y}}(f(x, z), f(x', z)) \leq L_f d_{\mathcal{X}}(x, x')$$

para todo $x, x', z \in \mathcal{E}$.

Observación

La diferencia entre continuidad y continuidad uniforme se pueden resumir en dos aspectos

a) Continuidad Uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras continuidad se define para una función en un punto.

b) δ, en la definición de continuidad, es una función de ϵ y el punto p, i.e., $\delta = \delta(\epsilon, p)$. Mientras, δ, en la definición de continuidad uniforme, es una función de ϵ únicamente, para todos los puntos del conjunto $\mathcal{X}$, i.e. $\delta = \delta(\epsilon)$

Theorem

Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un mapeo continuo de un espacio métrico compacto $\mathcal{X}$ en un espacio métrico $\mathcal{Y}$ entonces f es uniformemente continuo en $\mathcal{X}$.

Demostración.

La continuidad de f implica que para cualquier punto $p \in \mathcal{X}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ podemos asociar un número $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ tal que

$$x \in \mathcal{X}, d_{\mathcal{X}}(x, p) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right) \text{ implica } d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Defina el conjunto

$$\mathcal{J}(p) := \left\{x \in \mathcal{X} : d_{\mathcal{X}}(x, p) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right)\right\}$$

□

Demostración.

Como $p \in \mathcal{J}(p)$ la colección de todos los conjuntos $\mathcal{J}(p)$ es una cobertura abierta de $\mathcal{X}$ y por la compacidad de $\mathcal{X}$ existen un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_n$ tales que

$$\mathcal{X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{J}(p_i)$$

Sea

$$\tilde{\delta}(\varepsilon) := \frac{1}{2} \min \left\{ \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p_1\right), \ldots, \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p_n\right) \right\} > 0.$$

□

Demostración.

Ahora, suponga que $x \in \mathcal{X}$ satisface la desigualdad $d_{\mathcal{X}}\left(x, p\right) < \tilde{\delta}(\varepsilon)$. Por propiedades de compacidad, existe un entero m $(1 \leq m \leq n)$ tal que $p \in \mathcal{J}(p_m)$ implica

$$d_{\mathcal{X}}\left(x, p_m\right) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p_m\right)$$

y

$$d_{\mathcal{X}}\left(x, p_m\right) < d_{\mathcal{X}}\left(x, p\right) + d_{\mathcal{X}}\left(p, p_m\right) \leq \tilde{\delta}\left(\varepsilon\right) + \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, p_m\right)$$

Finalmente

$$d_{\mathcal{Y}}\left(f(x), f(p)\right) < d_{\mathcal{Y}}\left(f(x), f(p_m)\right) + d_{\mathcal{Y}}\left(f(p_m), f(p)\right) \leq \varepsilon$$

□

Ejemplos

Si $\mathcal{E}$ es un conjunto no compacto en $\mathbb{R}$, de un ejemplo de los siguientes conceptos

1. Una función continua en $\mathcal{E}$ que no sea acotada
2. Función continua y acotada en $\mathcal{E}$ que no tenga máximo

Continuidad de Familia de Funciones: Equicontinuidad

Definition

Sea **F** una familia de funciones. La función $f(x)$ definida en algún conjunto $\mathcal{E}$ se dice equicontinua si para ~~algún~~ $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon)$, lo mismo para toda la clase **F**, tales que $d_{\mathcal{X}}(x, y) < \delta$ implica $d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$ y cualquier $f \in$ **F**

Hecho

Si una secuencia de funciones continuas en un conjunto compacto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es uniformemente convergente en $\mathcal{X}$, entonces es uniformemente acotada y equicontinua.

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \in \mathbb{C}[x], \quad f_n(x) \Rightarrow \mathbb{C}[x] \quad \& \quad d\left(f_n(x), 0\right) < M$$

Theorem (Propagación, Ascoli–Arzelà)

Sea una secuencia de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$, *definida en un x-conjunto compacto de* $\mathcal{E}$, *equicontinua y convergente en un subconjunto denso de* $\mathcal{E}$, *pero no uniformemente convergente. Entonces existe una subsecuencia* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ *uniformemente convergente en* $\mathcal{E}$.

Theorem (Selección, Ascoli–Arzelà)

Sea una secuencia de funciones $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$, *definida en un x-conjunto compacto de* $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, *uniformemente acotada y equicontinua. Entonces existe una subsecuencia* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ *uniformemente convergente en* $\mathcal{E}$.

Lemma

Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un mapeo continuo de un espacio métrico $\mathcal{X}$ en un espacio métrico $\mathcal{Y}$, y si $\mathcal{E}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{X}$, entonces $f(\mathcal{E})$ es conexo.

Definition

Sea $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ una función de un espacio métrico $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ a otro $(\mathcal{T}, d_{\mathcal{T}})$ tal que dicho mapeo es uno a uno, i.e., existe $f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$. Si adicionalmente f es continuo en $\mathcal{S}$ y f^{-1} en T entonces f se denomina mapeo topológico o homeomorfismo, y el espacio $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ y $(f(\mathcal{S}), d_{\mathcal{T}})$ se dice homeomórfico.

Comentario

El que una función sea un homeomorfismo no es suficiente para que en una ecuacún diferencial se pueda realizar un cambio de variable. Se requiere además que exista la derivada de la función y de su inversa.

Definition (Isometría)

Un mapeo continuo uno a uno que preserva la métrica (medida) se denomina isométrico, i.e., para todo $x, x' \in \mathcal{S}$ se mantiene la identidad

$$d_{\mathcal{T}}\left(f(x), f(x')\right) = d_{\mathcal{S}}(x, x')$$

Definition

Una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio métrico $\mathcal{X}$ se dice que es una secuencia de Cauchy (Fundamental) si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero n_ϵ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ si ambos $n \geq n_\epsilon$ y $m \geq n_\epsilon$

- Defina el diámetro de $\mathcal{E}$ como

$$\text{diam}\mathcal{E} = \sup_{x,y \in \mathcal{E}} d(x, y)$$

- Si $\mathcal{E}_{n_\epsilon}$ consiste en los puntos $\{x_{n_\epsilon}, x_{n_\epsilon+1}, \ldots\}$ entonces $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy si y solo si

$$\lim_{n_\epsilon \to \infty} \text{diam}\mathcal{E} = 0$$

Theorem

a) *Si cl$\mathcal{E}$ es la cerradura de un conjunto $\mathcal{E}$ en un espacio métrico $\mathcal{E}$ entonces*

$$diam\mathcal{E} = diam\ cl\mathcal{E}$$

b) *Si $\{\mathbb{K}_n\}$ es una secuencia de conjuntos compactos en $\mathcal{X}$ tales que $\mathbb{K}_n \supset \mathbb{K}_{n-1}$, n=2,3,... entonces el conjunto $\mathbb{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}_n$ consiste exactamente en un punto.*

Theorem

a) *Toda secuencia convergente* $\{x_n\}$ *definida en un espacio métrico* $\mathcal{X}$ *es una secuencia de Cauchy*

b) *Si* $\mathcal{X}$ *es un espacio métrico compacto y si* $\{x_n\}$ *es una secuencia de Cauchy en* $\mathcal{X}$ *entonces* $\{x_n\}$ *converge a un punto en* $\mathcal{X}$

c) **Criterio de Cauchy:** *En* $\mathbb{R}^n$ *una secuencia converge si y solo si es una secuencia de Cauchy*

Definition

Un espacio métrico donde cada secuencia de Cauchy converge se dice que es **Completo**

Ejemplos

- Todo espacio Euclidiano es Completo
- El espacio de todos los números racionales con norma $d(x, y) = |x - y|$ no es completo
- En $\mathbb{R}^n$ cualquier secuencia convergente es acotada pero no toda secuencia acotada obligatoriamente converge.

Definition

Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico con medida d. Si ϕ mapea $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ y si existe un número $c \in [0,1)$ tal que

$$d(\phi(x), \phi(x')) \leq c d(x, x')$$

para todo $x, x' \in \mathcal{X}$, entonces ϕ se dice una **contracción** de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$

Theorem (Punto Fijo)

Si $\mathcal{X}$ es un espacio métrico completo y si ϕ es una contracción de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$, entonces existe uno y solo un punto $x \in \mathcal{X}$ tal que

$$\phi(x) = x$$

Demostración.

Tome un valor arbitrario $x_0 \in \mathcal{X}$, y defina una secuencia $\{x_n\}$ recursivamente haciendo $x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0, 1, \ldots$. Entonces, como ϕ es una contracción

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d\left(\phi(x_{n\cancel{+1}}), \phi(x_n)\right) \\ &\leq c d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq c^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \vdots \\ &\leq c^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

Tomando $m > n$ y por la desigualdad del triángulo, se cumple que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\left(x_i, x_{i-1}\right) \\ &\leq \left(c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c^{n}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq c^{n}\left(c^{m-1-n} + c^{m-2-n} + \cdots + 1\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq c^{n}\left(1 - c\right)^{-1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

□

Demostración.

Entonces $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy, y como $\mathcal{X}$ es un espacio métrico completo debe converger, i.e. $\lim_{n\to\infty} x_n := x$. Y como ϕ es una contracción, es continuo (de hecho uniformemente continuo). Por lo tanto

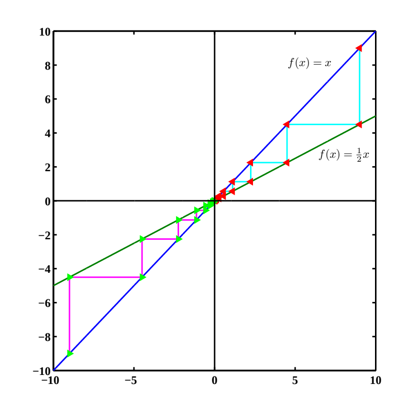
$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n := x.$$

La unicidad se prueba por contradicción. Suponga que existe otro punto $x \in \mathcal{X}$ tal que $\phi(y) = y$. Entonces

$$d(x,y) \leq cd\left(\phi(x), \phi(y)\right) = cd(x,y) = 0$$

$\square$

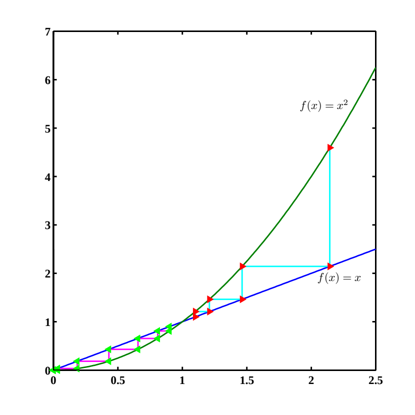
Example $\left(f(x) = \frac{1}{2}x\right)$



Iteración	x	f(x)=0.5x
1	10.0000	5.0000
2	5.0000	2.5000
3	2.5000	1.2500
4	1.2500	0.6250
5	0.6250	0.3125
6	0.3125	0.1563
7	0.1563	0.0781
8	0.0781	0.0391
9	0.0391	0.0195

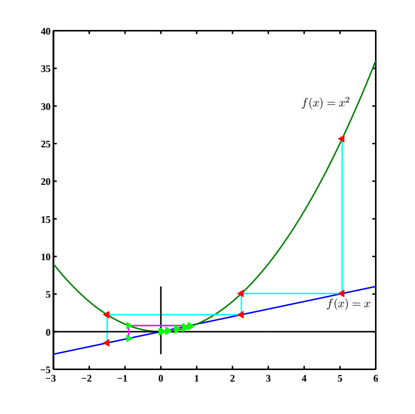
Iteración	x	f(x)=0.5x
1	-10.0000	-5.0000
2	-5.0000	-2.5000
3	-2.5000	-1.2500
4	-1.2500	-0.6250
5	-0.6250	-0.3125
6	-0.3125	-0.1563
7	-0.1563	-0.0781
8	-0.0781	-0.0391
9	-0.0391	-0.0195

Example ($f(x) = x^2$)



Iteración	x	$f(x)=x^2$
1	-0.9000	0.8100
2	0.8100	0.6561
3	0.6561	0.4305
4	0.4305	0.1853
5	0.1853	0.0343
6	0.0343	0.0012
7	0.0012	0.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000
Iteración	**x**	**f(x)=x**
1	-1.5000	2.2500
2	2.2500	5.0625
3	5.0625	25.6289
4	25.6289	656.8408
5	656.8408	431439.8833

Example ($f(x) = x^2$)



Iteración	x	f(x)=x²
1	0.9000	0.8100
2	0.8100	0.6561
3	0.6561	0.4305
4	0.4305	0.1853
5	0.1853	0.0343
6	0.0343	0.0012
7	0.0012	0.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000

Iteración	x	f(x)=x
1	1.1000	1.2100
2	1.2100	1.4641
3	1.4641	2.1436
4	2.1436	4.5950
5	4.5950	21.1138