COSA E' L'ELETTROTECNICA?

E' la tecnica dell'energia elettrica, cioè le possibili applicazioni degli effetti prodotti dalle cariche, ferme o in movimento.

COSA E' UN CAMPO?

E' una distribuzione spaziale di una quantità

che può essere o non essere funzione del tempo

L'ELETTROMAGNETISMO E' ALLA BASE DI UNA GRANDE QUANTITA' DI FENOMENI FISICI

- conversione elettromeccanica dell'energia
- comunicazione in fibra ottica
- dispositivi a micro-onde
- ricezione televisiva
- comunicazione via satellite
- radar
- oscilloscopi
- etc…

IPOTESI SU CUI SI BASA LA TEORIA DEI CIRCUITI

Quando la sorgente è di frequenza tanto bassa che le dimensioni della rete conduttrice sono molto più piccole della lunghezza d'onda, si ha una situazione "QUASI STATICA", semplifica il problema elettromagnetico in un problema circuitale.

LA TEORIA DEI CIRCUITI RIGUARDA ISISTEMI A PARAMETRI CONCENTRATI

- Grandezze fondamentali: Tensioni e Correnti
- Matematica: Equazioni Algebriche o Differenziale Ordinarie

ESEMPI

1) CIRCUITO AUDIO

- frequenza più alta $\sim$25 kHz
- corrispondente $\lambda = 12$ km (c/f)

SUPERIORE DI GRAN LUNGA ALLE DIMENSIONI DI UN CIRCUITO DEL GENERE

2) CIRCUITO DI UN CALCOLATORE

- f può essere 500 MHz
- corrispondente λ = 0,6 m

IL MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI PUO' NON ESSERE SUFFICIENTEMENTE ACCURATO

3) CIRCUITO A MICRO ONDE

- λ varia tra 10 cm e 1 mm

LE LEGGI DI KIRCHHOFF NON VALGONO

COSTRUZIONE DI UNA TEORIA

- Definire le quantità base
- Specificare le regole di operazione (cioè la MATEMATICA)
- Postulare le relazioni fondamentali

TEORIA DEI CIRCUITI

- Modello basato su sorgenti ideali, resistenze, induttanze, capacità, …, PURE.
- Quantità basilari: TENSIONI, CORRENTI, R, L, C, …
- Regole Operative: Algebra, Equazioni Differenziali Ordinarie, Trasformate di Laplace
- Postulati Fondamentali: LEGGI DI KIRCHHOFF

TEORIA DEI CAMPI

- Quantità basilari: SORGENTI, CAMPI
  (La sorgente di un campo elettromagnetico è invariabilmente una carica elettrica, a riposo o in moto)
- Regole Operative: Calcolo Vettoriale
- Postulati Fondamentali: EQUAZIONI DI MAXWELL

CARICA ELETTRICA (q , Q)

- E' una proprietà fondamentale della materia
- Esiste solo sotto forma di multipli positivi e negativi dell'elettrone

$$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathbf{C}$$

- PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA:

"Una carica non può essere creata né distrutta"

E' una legge della natura

- DENSITA' DI CARICA (dipendono dalle coordinate spaziali)

$\rho = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta v} \left(\dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}^3} \right)$	$\rho = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta s} \left(\dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}^2} \right)$	$\rho = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} \left(\dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{m}^3} \right)$
Volumica	Superficiale	Lineare

CORRENTE ELETTRICA

$$I = \frac{dq}{dt}\left(\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}\right)$$

In elettromagnetismo si definisce la densità di corrente ***J*** che misura la quantità di corrente che fluisce attraverso l'unità di superficie normale alla direzione del flusso di corrente.

Esistono, inoltre, quattro quantità fondamentali, vettoriali, del tipo "campi":

E: intensità di campo elettrico

D: densità di flusso elettrico

B: densità di flusso magnetico

H: intensità di campo magnetico

QUANTITA' BASILARI NELLO STUDIO DEI CAMPI

campo	quantità	simbolo	unità
ELETTRICO	intensità di campo elettrico	***E***	**V/m**
	densità di flusso elettrico	***D***	**C/m^2**
MAGNETICO	densità di flusso magnetico	***B***	**T=V s/m^2**
	intensità di campo magnetico	***H***	**A/m**

E: è l'unico vettore necesario per lo studio del campo stazionario nel vuoto

D: è utile nello studio del campo elettrico in mezzi materiali

B: è l'unico vettore necessario per lo studio della magnetostatica nel vuoto

H: è utile nello studio dei campi magnetici nei mezzi materiali

SE NON VI SONO VARIAZIONI TEMPORALI SI HA IL CASO STATICO O STAZIONARIO

E, B, D, H sono quantità "puntuali"
Le proprietà del mezzo determinano le relazioni fra ***E*** e ***D*** e fra ***B*** e ***H***. Tali relazioni sono chiamate:

RELAZIONI COSTITUTIVE DEL MEZZO

ε_0 è la costante di proporzionalità fra la densità di flusso elettrico ***D*** e l'intensità di campo elettrico ***E*** nel vuoto:

$$D = \varepsilon_0 \cdot E$$

μ_0 è la costante di proporzionalità fra la densità di flusso magnetico ***B*** è l'intensità di campo magnetico ***H*** nel vuoto

$$H = \frac{1}{\mu_0} \cdot B$$

COSTANTI UNIVERSALI

costanti universali	simbolo	valore	unità
velocità della luce nel vuoto	c	3×10^{8}	**m/s**
permeabilità del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	**H/m**
permettività del vuoto	ε_0	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	**F/m**

SISTEMA INTERNAZIONALE

QUANTITA'	UNITA'	SIMBOLO
Lunghezza	metro	**m**
Massa	kilogrammo	**kg**
Tempo	secondo	**s**
Intensità di Corrente	Ampére	**A**

Costanti Universali

c velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto $\approx 3 \times 10^{8}$ **m/s**

μ_0 permeabilità del vuoto $4\pi \times 10^{-7}$ **H/m**

ε_0 permettività del vuoto $8{,}854 \times 10^{-12}$ **F/m**

Definizioni:

metro: la definizione deriva da quella del secondo e dalla velocità della luce nel vuoto.

c = 299 792 450 **m/s**

secondo: 9 192 631 770 periodi della radiaizone emessa da una particolare transizione di un atomo di cesio

kilogrammo: massa di un provino di platino-iridio conservato al International Bereau of Weights and Measurements di Sevres

Ampére: la corrente costante che, se mantenuta in due conduttori rettilinei paralleli di lunghezza infinita e di sezione circolare trascurabile, messi ad 1 metro di distanza, nel vuoto, producono fra i due conduttori una forza pari a

2×10^{-7} **N/m**

TUTTE LE GRANDEZZE ELETRICHE SONO ESPRIMIBILI IN TERMINI DI GRANDEZZE FONDAMENTALI

Es:

- CARICA ELETTRICA q [**C**]

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}$$

- INTENSITA' DI CAMPO ELETTRICO E [**V/m**]

poiché $\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{kg} \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{s}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}} = \frac{\mathbf{kg} \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}^3}$

da cui si ricava anche $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{kg} \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}^2}$

- INDUZIONE MAGNETICA B [**T**]

poiché $\overline{B} = \frac{\Phi}{S} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{m}^2} = \frac{\mathbf{kg} \cdot \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}^3 \cdot \mathbf{m}^2} = \frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}^2}$ $\quad \left(\Phi = \int e \cdot dt \Rightarrow [\mathbf{V} \cdot \mathbf{s}]\right)$

GRANDEZZE ELETTRICHE

GRANDEZZA	SIMBOLO	UNITA' DI MISURA	SIMBOLO
AMMETTENZA	Y	Siemens	S
CAMPO ELETTRICO	E	Volt/metro	V/m
CAMPO MAGNETICO	H	Ampére/metro	A/m
CAPACITA' ELETTRICA	C	Farad	F
CONDUCIBILITA'	γ	Siemens/metro	S/m
CARICA	Q , q	Coulomb	C
CONDUTTANZA	G	Siemens	S
CORRENTE	I , i	Ampére	A
DENSITA' DI CORRENTE	J	Ampére/metro quadro	A/m^2
DENSITA' VOLUMICA DI CARICA	δ , ρ	Coulomb/metro cubo	C/m^3
ENERGIA	W	Joule	J
FLUSSO MAGNTICO	Φ	Weber	Wb
FORZA	F	Newton	N
FORZA ELETTROMOTRICE	e , E	Volt	V
FORZA MAGNETOMOTRICE	F_{mm}	Ampére-spire	A , As
FREQUENZA	f	Hertz	Hz
IMPEDENZA	Z	Ohm	Ω
INDUTTANZA	L	Henry	H
INDUZIONE MAGNETICA	B	Tesla	T
MUTUA INDUTTANZA	M	Henry	H
PERMEABILITA' MAGNETICA	μ	Henry/metro	H/m
PERMEANZA	P	Weber/Ampére	Wb/A
PERMETTIVITA' ELETTRICA	ε	Farad/metro	F/m

GRANDEZZA	SIMBOLO	UNITA' DI MISURA	SIMBOLO
POLARIZZAZIONE ELETTRICA	Pe	**Coulomb/metro quadrato**	**C/m^2**
POLARIZZAZIONE MAGNETICA	Pm	**Tesla**	**T**
POTENZA ATTIVA	P	**Watt**	**W**
POTENZA REATTIVA	Q	**VoltAmpére reattivi**	**VAR**
POTENZA APPARENTE	S	**Volt Ampére**	**VA**
POTENZIALE ELETTRICO	V , v	**Volt**	**V**
POTENZIALE VETTORE	A	**Weber/metro**	**Wb/m**
REATTANZA	X	**Ohm**	**Ω**
RESISTENZA	R	**Ohm**	**Ω**
RESISTIVITA'	σ	**Ohm metro**	**Ω m**
RIGIDITA' DIELETTRICA	RD	**Volt/metro**	**V/m**
SPOSTAMENTO ELETTRICO (DENSITA' DI FLUSSO ELETTRICO)	D	**Coulomb/metro quadrato**	**C/m^2**
SUSCETTANZA	B	**Siemens**	**S**
TEMPO	t	**secondo**	**s**
TENSIONE	V , v	**Volt**	**V**

STORICAMENTE

OSSERVAZIONI
MISURE
ELAB. MATEMATICHE → RELAZIONI CIRCUITALI INQUADRABILI NELLA TEORIA DEI CIRCUITI → TEORIA DEI CAMPI

CONSEGUENTEMENTE: Le relazioni circuitali sono solo dei casi particolari delle equazioni dei campi e possono essere dedotte da esse

IN PARTICOLARE: la teoria circuitale non è più applicabile per tensioni e correnti con frequenza così elevata che la lunghezza d'onda associata risulti minore delle dimensioni trasversali, non di quelle longitudinali, del circuito.

IN TALI CASI SI DEVE RICORRERE ALLA TEORIA DEI CAMPI

TEORIA DEI CAMPI

•Mezzi Continui, Omogenei, Isotropi, Lineari

•Caratterizzati dalle seguenti proprietà:

γ conducibilità (**S/m**) ε permettività (**F/m**) μ permeabilità (**H/m**)

Valgono le Equazioni Costitutive:

$$\overline{D} = \varepsilon \cdot \overline{E} \qquad \overline{B} = \mu \cdot \overline{H}$$

Esistono anche relazioni miste tra grandezze scalari e vettoriali. Es:

$$V_{AB} = \int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{\ell} \qquad I = \oint \overline{H} \cdot d\overline{\ell}$$

FORME DIFFERENZIALI ED INTEGRALI

Teorema di Stokes: $\int_S \left(\nabla\times\overline{A}\right)\cdot d\overline{S} = \oint_\ell \overline{A}\cdot d\overline{\ell}$

Teorema della divergenza: $\int_V \nabla\cdot\overline{A}\cdot dV = \oint_S \overline{A}\cdot d\overline{S}$

Equazioni di Maxwell

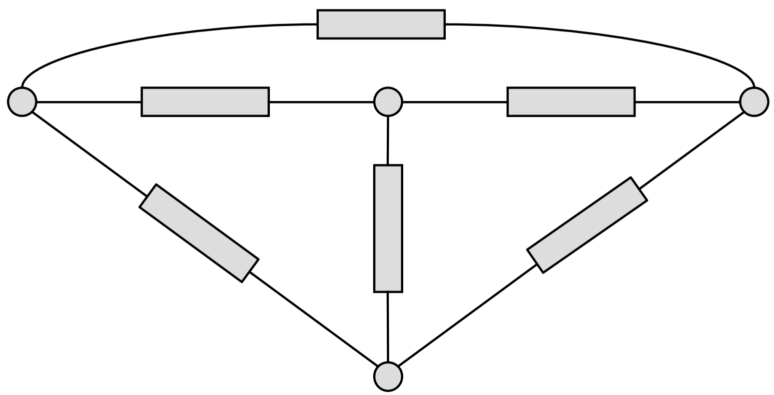
Forma Differenziale	Forma Differenziale	Altra Formulazione
$\nabla\times\overline{E} = rot\left(\overline{E}\right) = -\dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t}$	$\oint\overline{E}\cdot d\overline{\ell} = -\int_S \dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t}\cdot d\overline{S} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$	Legge di Faraday
$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} + \dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t}$	$\oint\overline{H}\cdot d\overline{\ell} = \overline{J} + \int_S \dfrac{\partial\overline{D}}{\partial t}\cdot d\overline{S}$	Legge di Ampére
$\nabla\cdot\overline{D} = \rho$	$\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S} = Q$	Legge di Gauss
$\nabla\cdot\overline{B} = 0$	$\oint_S \overline{B}\cdot d\overline{S} = 0$	Legge di Gauss

Il contributo fondamentale di Maxwell è stato quello di considerare che anche le correnti di spostamento elettrico producessero gli stessi effetti magnetici delle correnti di conduzione e di convezione

TEORIA DEI CIRCUITI: Molti Autori adottano l'approccio assiomatico, introducono come postulati le leggi fondamentali dei circuiti

CIRCUITO ELETTRICO

E' un insieme di elementi elettrici interconnessi in un certo modo



CIRCUITO ELETTRICO

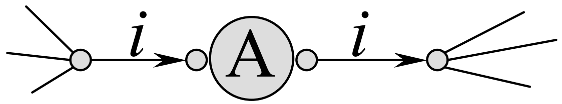
La teoria circuitale ha avuto il suo effettivo inizio nel Marzo del 1800, quando Alessandro Volta annunciò l'invenzione della pila elettrica.
da lui deriva il nome dell'unità di misura della forza elettromotrice, il Volt (**V**)
Un circuito è formato da due o più elementi, connessi per mezzo di "conduttori perfetti".
I conduttori perfetti sono dei collegamenti che presentano nessuna resisteza e permettono alla corrente di fluire liberamente senza accumulare né carica né energia.
Quest'ultima si può considerare residente o "concentrata" in ciascun componente circuitale. E' per questo che tali circuiti si dicono "a par<metri concentrati"

➢COMPONENTE ⇒ {Superficie Limite, Terminale, Morsetto}

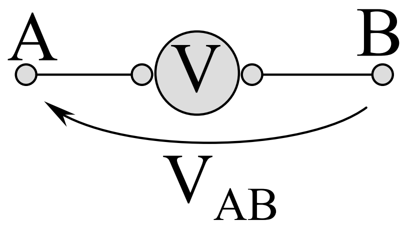
- ➢BIPOLI {Resistore, Induttore, Capacitore, Generatore ideale}
- ➢TRIPOLI {Transistor, Motore Trifase}

➢COLLEGAMENTO

➢CORRENTE {Convenzione, Ampére-metro, Unità di misura}



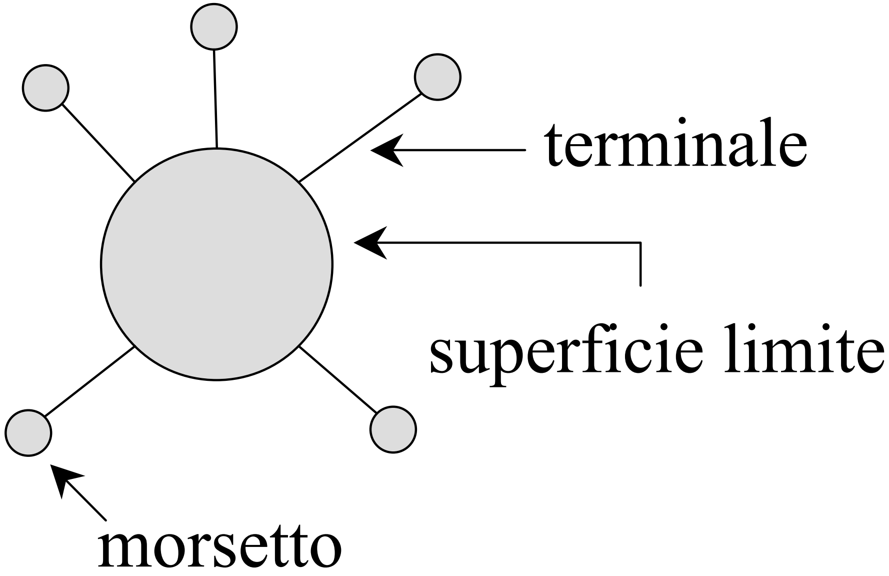
➢TENSIONE {Convenzione, Volt-metro, Unità di misura}

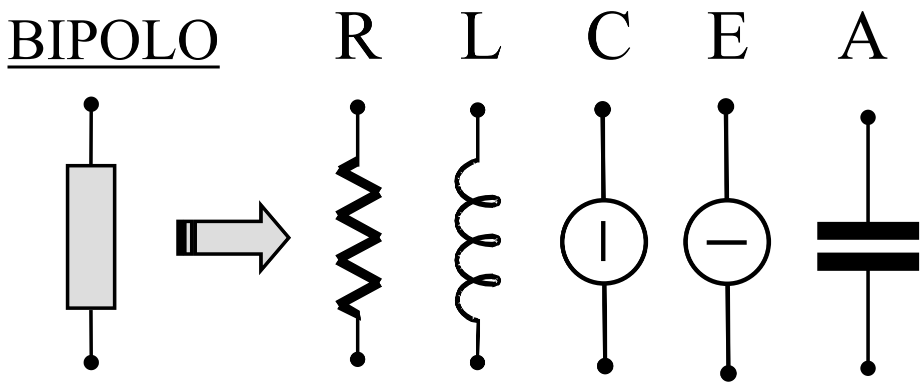


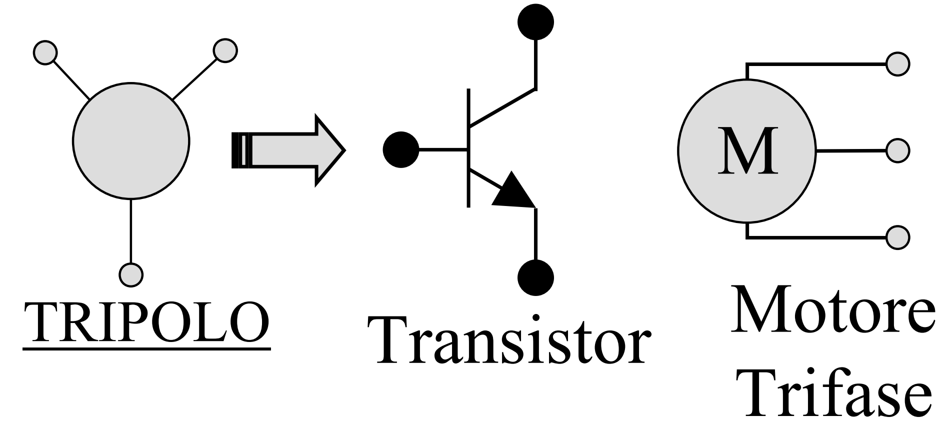
RISOLUZIONE DI PROBLEMI CIRCUITALI

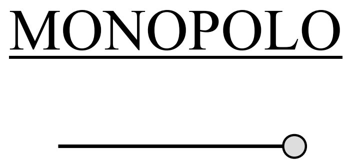
- •Equazioni dei Componenti
- •Equaizoni Topologiche

COMPONENTE







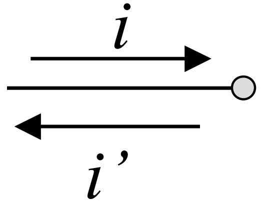


Non vengono inclusi fra i componenti nello studio della Teoria dei Circuiti

COLLEGAMENTO

Due o più componenti si dicono collegati se hanno uno o più morsetti in comune

<u>CORRENTE</u>

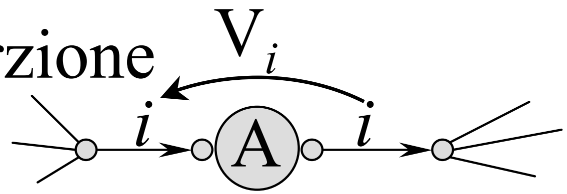


$$i = i(\,t\,)$$
$$i = -i'$$

UNITA' DI MISURA: Ampére (A)

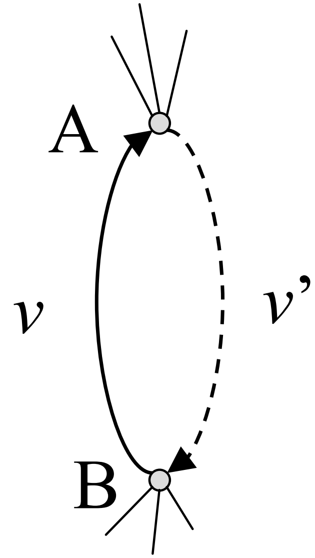
STRUMENTO DI MISURA: Ampéremetro

inserzione



V_i piccolissima $\rightarrow$ ideale $r_i = 0$

<u>TENSIONE</u>

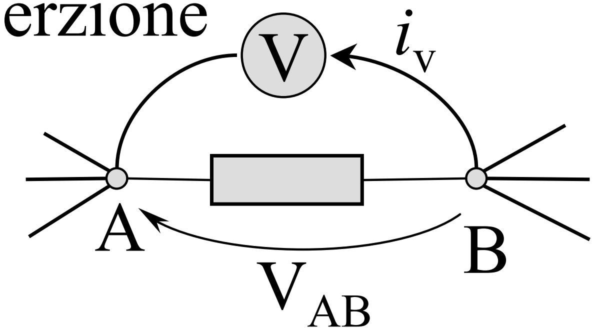


$$v = v(\,t\,)$$
$$v = v_{AB} = -v' = -v_{BA}$$

UNITA' DI MISURA: Volt (V)

STRUMENTO DI MISURA: Voltmetro

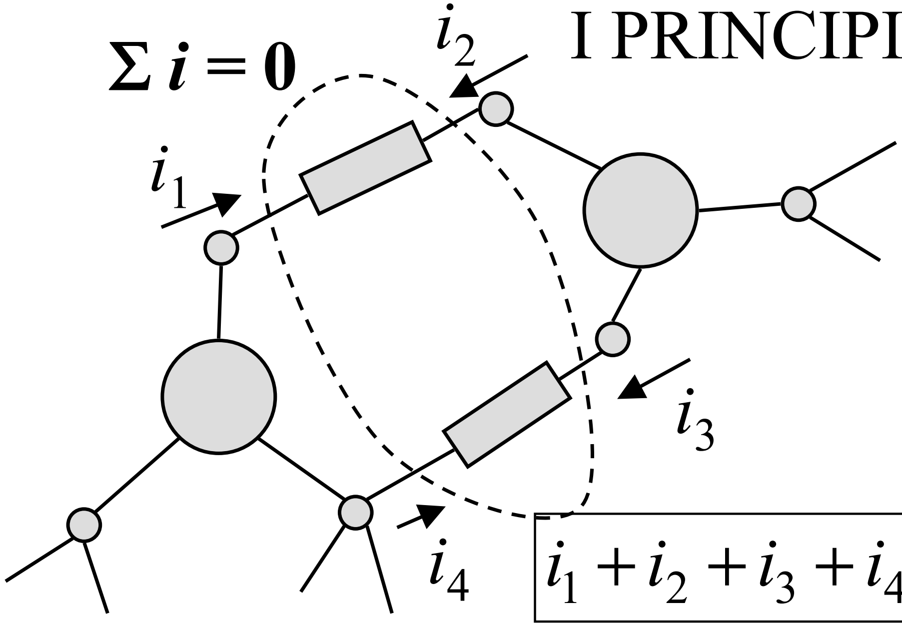
inserzione



i_v piccolissima $\rightarrow$ ideale $r_v = \infty$

I PRINCIPIO DI KIRCHHOFF

$\boldsymbol{\Sigma\, i = 0}$



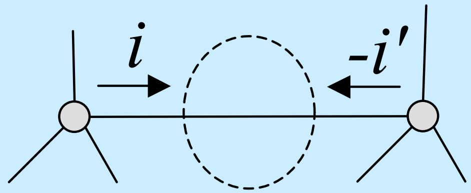
$$\boxed{i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0}$$

$$div\, \overline{J} = 0$$

Sotto le ipotesi fatte, esprime la solenoidalriltà della corrente

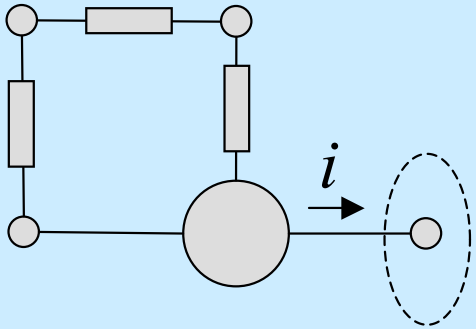
$$\sum_r a_r \cdot i_r = 0 \qquad a_r = \pm 1$$

a)



$$\sum i = 0 \Rightarrow i = -i'$$

b)



$$i = 0$$

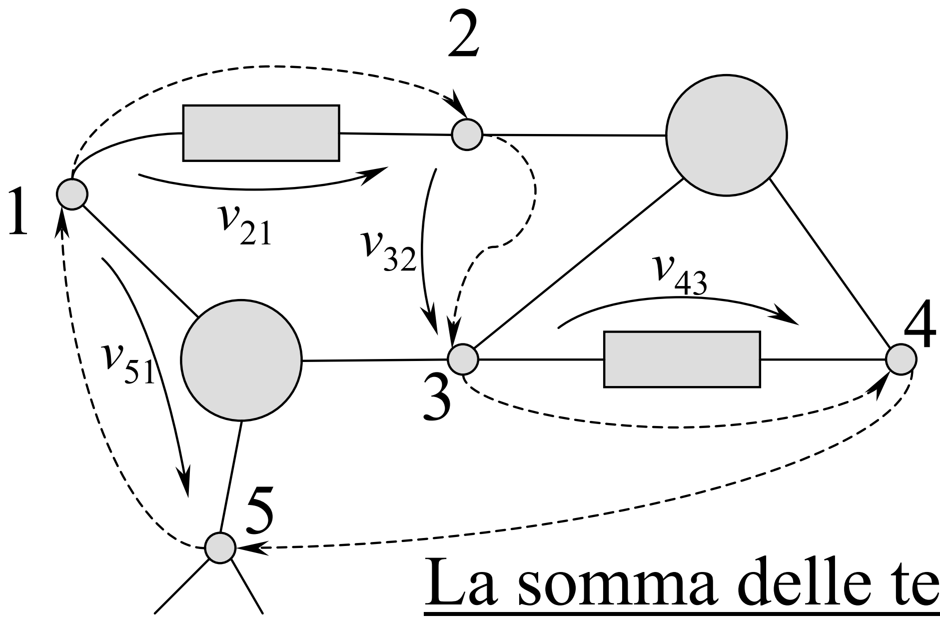
c) $i = \dfrac{dq}{dt}$

$$\sum i = 0 \Rightarrow \sum \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum q = 0 \Rightarrow \boxed{\sum q = \mathbf{cost}}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA

d) Le superfici chiuse non devono tagliare né morsetti né superfici limite dei componenti

II PRINCIPIO DI KIRCHHOFF



$$v_{21}+v_{32}+v_{43}+v_{54}+v_{15}=0$$

Sotto le ipotesi fatte, stabilisce l'irrotazionalità del Campo Elettrico

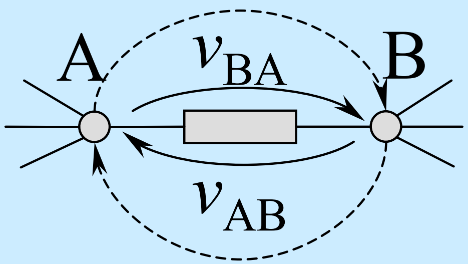
$$\oint_C \overline{E}\bullet dl=0$$

$$\sum_r a_r\cdot v_r=0 \qquad a_r=\pm 1$$

<u>La somma delle tensioni lungo una linea chiusa è nulla</u>

$$\oint_C \overline{E}\bullet dl=0 \Rightarrow \text{Irrotazionalità del Campo Elettrico}$$

Questo principio è valido in assenza di campi magnetici o quando sono <u>lentamente variabili</u>. Viceversa dovremmo servirci delle eq.ni di Maxwell. Questo conferma che: La Teoria dei Circuiti è un'approssimazione valida solo quando si può fare l'ipotesi che le dimensioni fisiche dei circuiti siano piccole rispetto alle lunghezze d'onda dei segnali

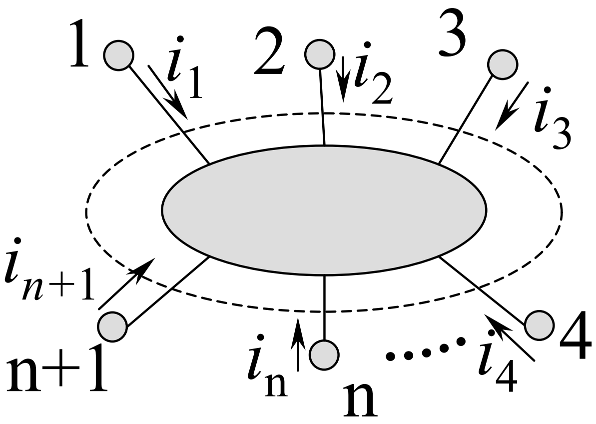


$$v_{AB}+v_{BA}=0\Rightarrow v_{AB}=-v_{BA}$$

Allora, per esempio:

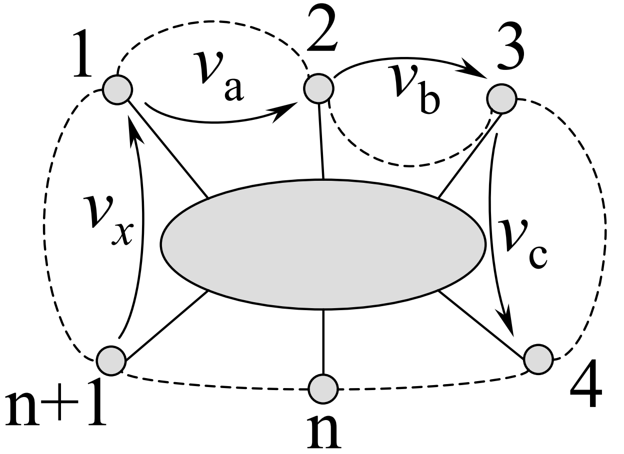
$$v_{21}-v_{23}+v_{43}-v_{45}+v_{15}=0$$

CONVENZIONI



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \ldots + i_n + i_{n+1} = 0$$

note n correnti la (n+1)-esima è determinata



$$v_a + v_b + v_c + \ldots + v_x = 0$$

note n tensioni la (n+1)-esima è determinata

Le n tensioni devono essere indipendenti fra loro

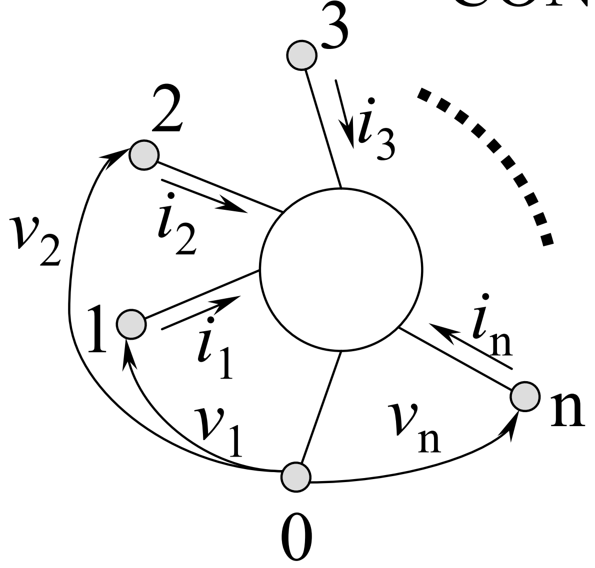
Ciascuna tensione deve potersi ottenere dalla misura delle altre n

I requisiti per la scelta delle n tensioni e delle n correnti sono:

<u>INDIPENDENZA</u> e <u>COMPLETEZZA</u>

Esiste un metodo sistematico per ricavare i "cosiddetti" <u>SISTEMI FONDAMENTALI</u> di tensioni e di correnti

CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI

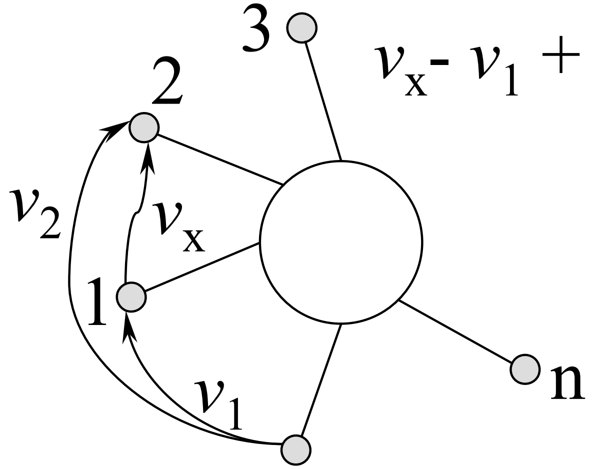


$\{i_1 , i_2 , \dots , i_n \}$ Indipendente

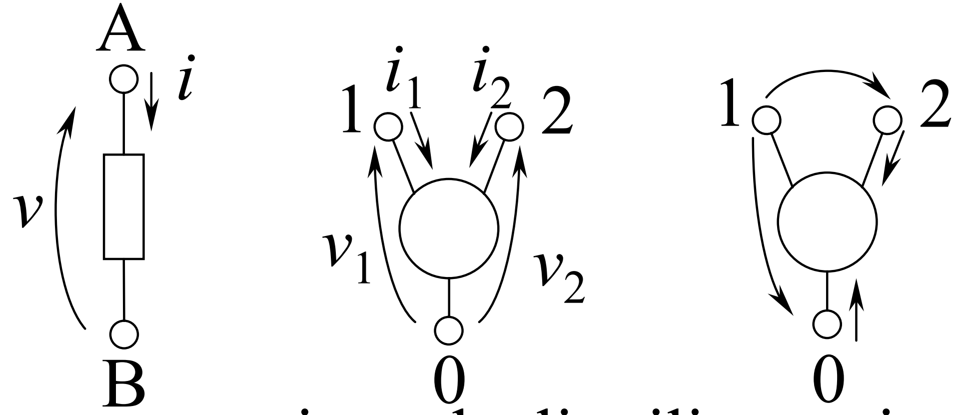
$\{v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ Completo

$\Downarrow$

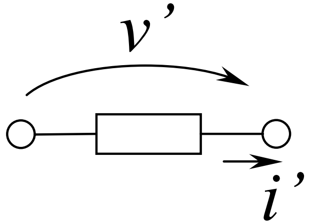
VARIABILI DESCRITTIVE



$$v_x - v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_x = v_1 - v_2$$



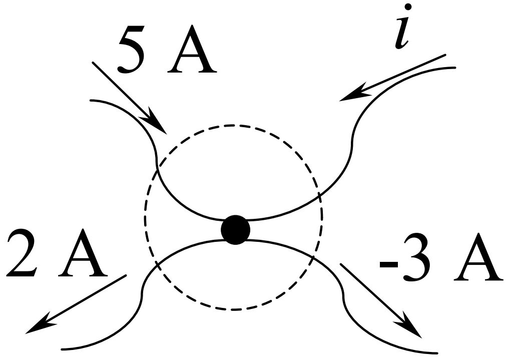
convenzione degli utilizzatori



Le convenzioni sono arbitrarie

ESEMPI:

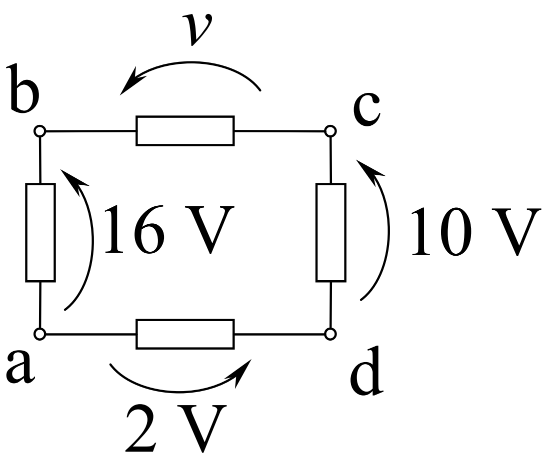
a)



$$5 + i - (-3) - 2 = 0$$

$$i = -6 \text{ A}$$

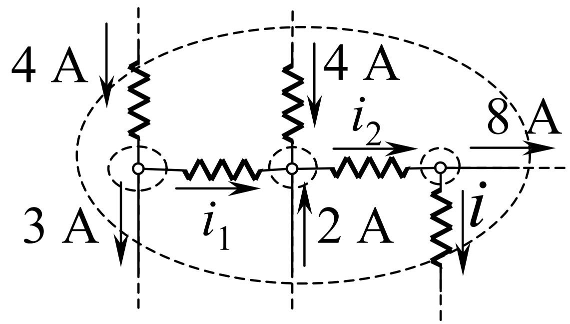
b)



$$-15 + v + 10 + 2 = 0$$

$$v = 3 \text{ V}$$

c)



trovare i

$$4 - 3 - i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 1 \text{ A}$$

$$1 + 4 + 2 - i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = 7 \text{ A}$$

$$7 - 8 - i = 0 \Rightarrow i = -1 \text{ A}$$

$$4 + 4 - 8 - i + 2 - 3 = 0 \Rightarrow i = -1 \text{ A}$$

COMPONENTI ELEMENTARI

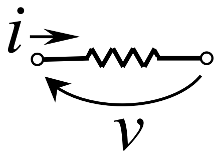
convenzione

⇩

- RESISTORE $v = \mathrm{R} \bullet i$ ………………………………………………… utilizzatori
- CONDENSATORE $i = \mathrm{C} \bullet \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ($q = \mathrm{C} \bullet v$) …………………………...... utilizzatori
- INDUTTORE $v = \mathrm{L} \bullet \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ ($\phi = \mathrm{L} \bullet i$) ……………………………… utilizzatori
- GENERATORE IDEALE DI TENSIONE $v = e$ ………………………… generatori
- GENERATORE IDEALE DI CORRENTE $i = a$ ………………………… generatori
- CORTO CIRCUITO $v = 0$ resistore degenere o gen. di tensione con $e(t) = 0$
- CIRCUITO APERTO $i = 0$ resistore degenere o gen. di corrente con $i(t) = 0$
- GENERATORI PILOTATI (o CONTROLLATI)
- TRASFORMATORE IDEALE $\begin{cases} v_1 = n \cdot v_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} \cdot i_2 \end{cases}$ ……………………ingresso: utilizzatori; ……………………uscita: generatori
- NULLORE
- MUTUA INDUTTANZA
- GIRATORE

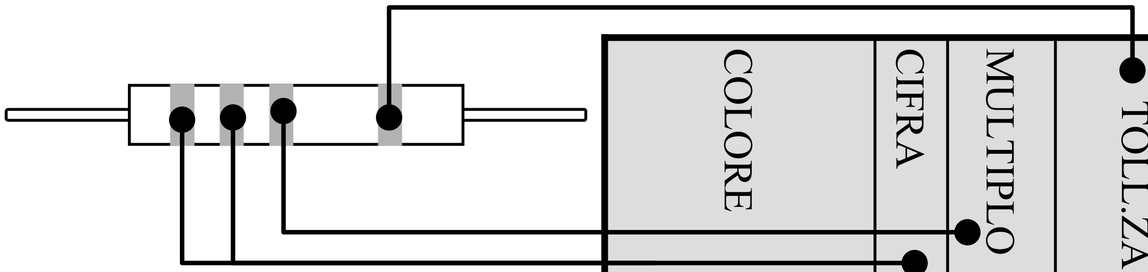
* $i = C \cdot \dfrac{dv}{dt}$ **ma :** $i = \dfrac{dq}{dt}$ $\Rightarrow$ $q = C \cdot v$ **(equazione caratteristica)**

$v = L \cdot \dfrac{di}{dt}$ **ma :** $v = \dfrac{d\phi}{dt}$ $\Rightarrow$ $\phi = L \cdot i$ **(equazione caratteristica)**

RESISTORE 

$$v = R \cdot i \qquad i = \frac{1}{R} \cdot v = G \cdot v$$

per un conduttore di lunghezza *l* e sezione *A*: $$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A}$$

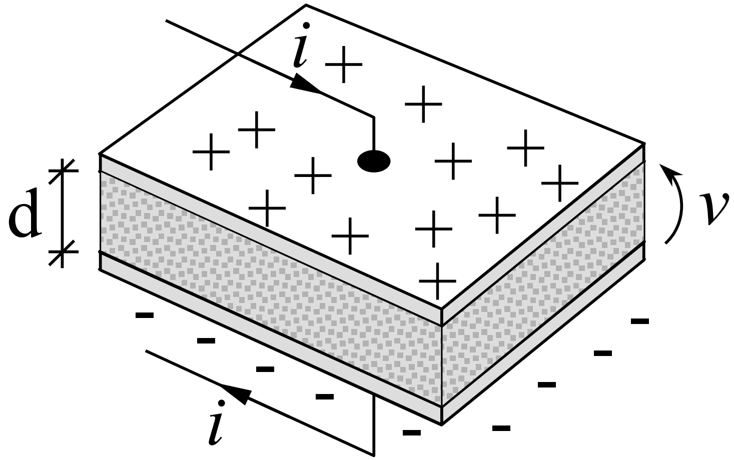


MATERIALE	ρ (Ω × m)
argento	$1{,}63 \times 10^{-8}$
rame	$1{,}72 \times 10^{-8}$
oro	$2{,}44 \times 10^{-8}$
alluminio	$2{,}83 \times 10^{-8}$
tungsteno	$6{,}52 \times 10^{-8}$
silicio	2 300

COLORE	CIFRA	MULTIPLO	TOLL.ZA
NERO	0	10^0	
MARRON	1	10^1	
ROSSO	2	10^2	
ARANCIO	3	10^3	
GIALLO	4	10^4	
VERDE	5	10^5	
BLU	6	10^6	
VIOLA	7	10^7	
GRIGIO	8	10^8	
BIANCO	9	-	
ORO		10^{-1}	±5%
ARGENTO		10^{-2}	±10%
NERO o null		-	±20%

prefisso	simbolo	significato
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	µ	10^{-6}
milli	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deca	da	10^{1}
etto	h	10^{2}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}
exa	E	10^{15}
peta	P	10^{18}

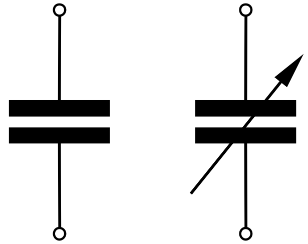
CAPACITORE



$$q = C \cdot v$$

$$\Downarrow$$

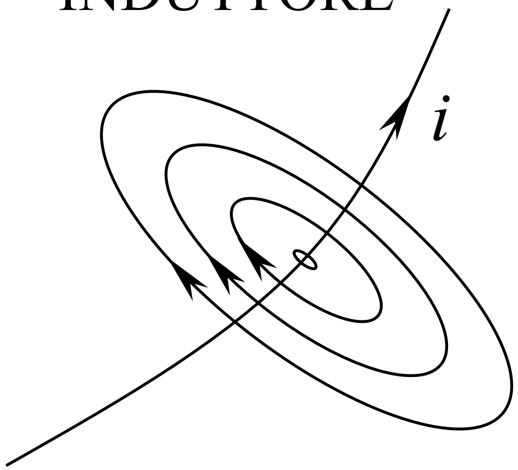
$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= C \cdot \frac{dv}{dt} \\ \frac{dq}{dt} &= i \end{aligned}\right\} \quad i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

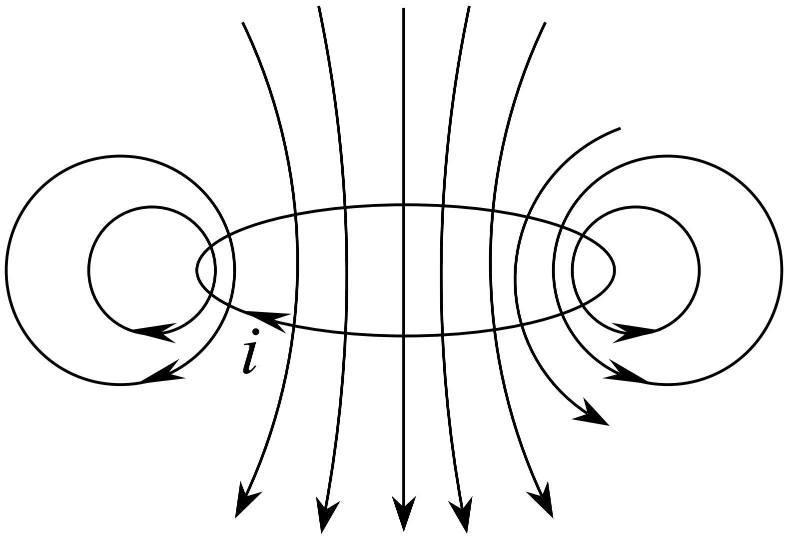


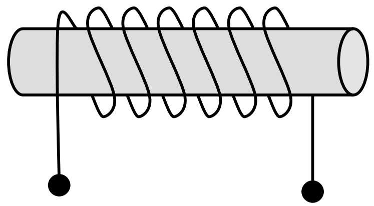
MATERIALE	ε_r
neoprene	6,46
silicone	3,20
mica	5,40 - 9,0
carta	2,99
acqua distillata	78,20
aria	1

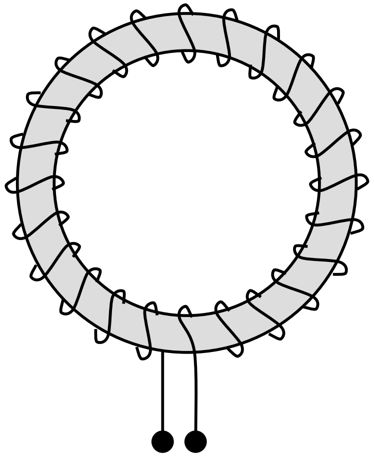
$$c = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

INDUTTORE





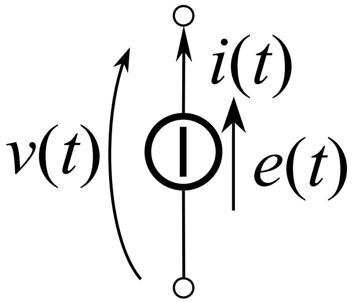




$$\phi = L \cdot i \qquad v = \frac{d\phi}{dt} \qquad v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

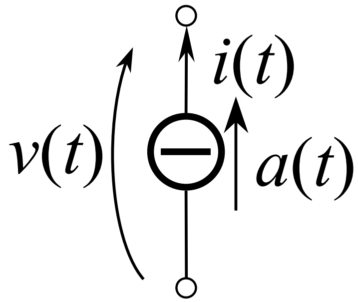
GENERATORI IDEALI

Generatore ideale di tensione



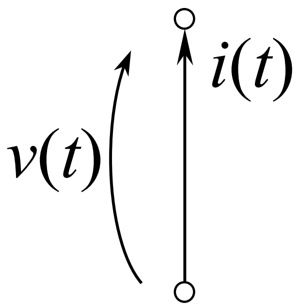
$$\boxed{v(t) = e(t)}$$

Generatore ideale di corrente



$$\boxed{i(t) = a(t)}$$

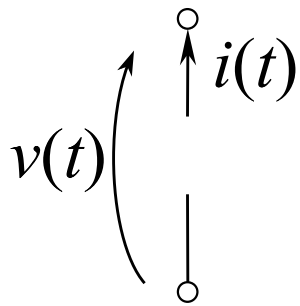
Corto Circuito



$$\boxed{v(t) = 0}$$

Caso degenere del generaore di tensione o del resistore di resistenza nulla

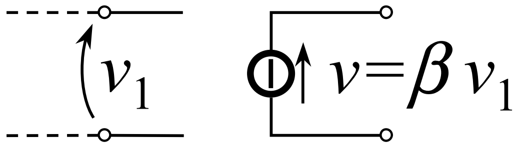
Circuito Aperto



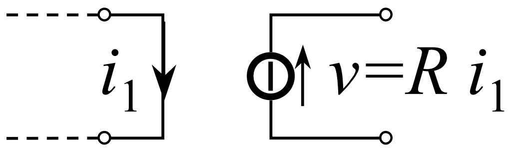
$$\boxed{i(t) = 0}$$

Caso degenere del generatore di corrente o del resistore di resistenza infinita o conduttanza nulla

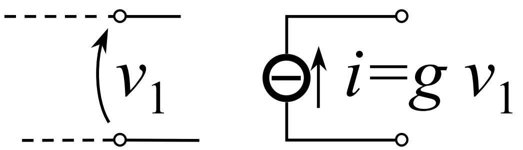
GENERATORI PILOTATI



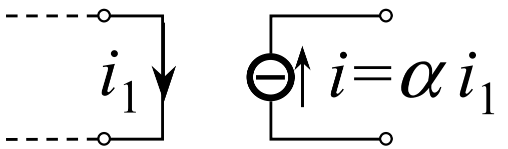
β : parametro di controllo a-dimensionale



R : parametro di controllo dimensionalmente è una resistenza

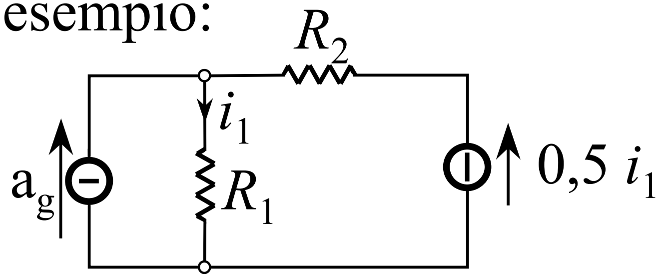


g : parametro di controllo dimensionalmente è una conduttanza



α : parametro di controllo a-dimensionale

esempio:

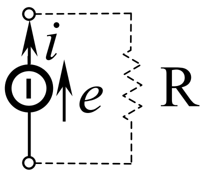


I generatori dipendenti o pilotati sono componenti essenziali nei circuiti amplificatori, in cui l'ampiezza dell'uscita è maggiore di quella dell'ingresso.
Inoltre servono ad isolare una porzione di circuito o a fornire una resistenza negativa

BASE DI DEFINIZIONE

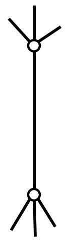
UN COMPONENTE SI DICE **DEFINITO SU BASE TENSIONE** SE, IMPONENDO LE TENSIONI, LE CORRENTI SONO NOTE UNIVOCAMENTE ATTRAVERSO LE CARATTERISTICHE O LE EQUAZIONI DEL COMPONENTE.
VICEVERSA, E' **DEFINITO SU BASE CORRENTE** SE, IMPONENDO LE CORRENTI, SI TROVANO UNIVOCAMENTE LE TENSIONI.

Esempi:



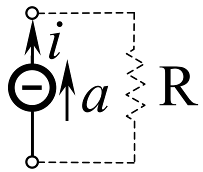
$$i = \frac{e}{R}$$

base corrente



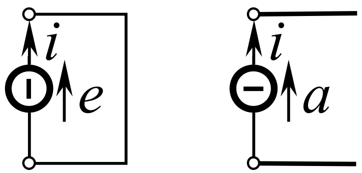
$v = 0$

base corrente

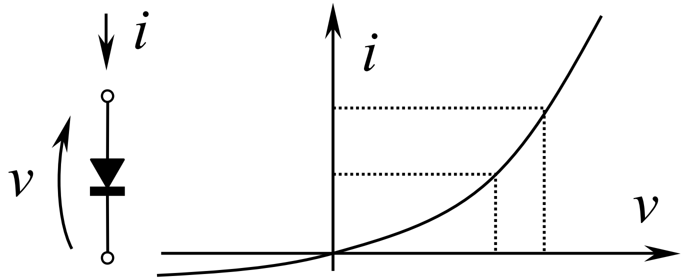


$$v = R \cdot i = R \cdot a$$

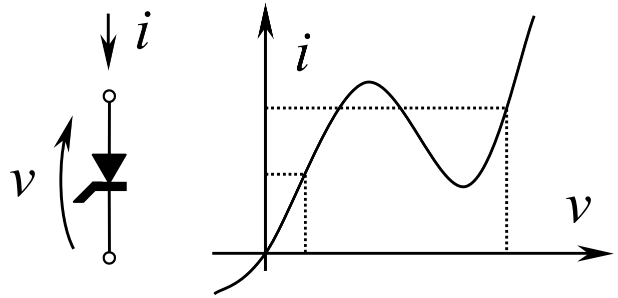
base tensione



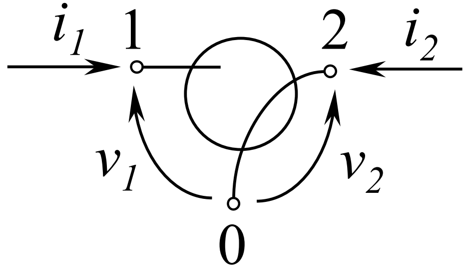
assurdi fisici



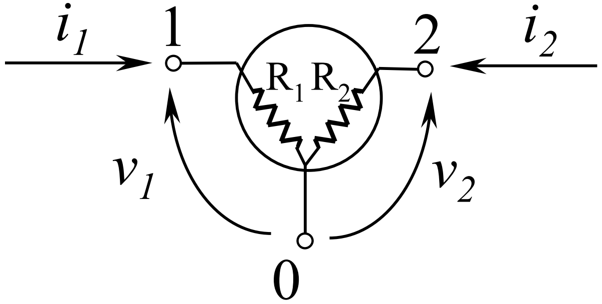
DIODO
entrambe le basi



DIODO TUNNEL
base tensione



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} \qquad [v_1, i_2] \qquad \text{BASE MISTA}$$

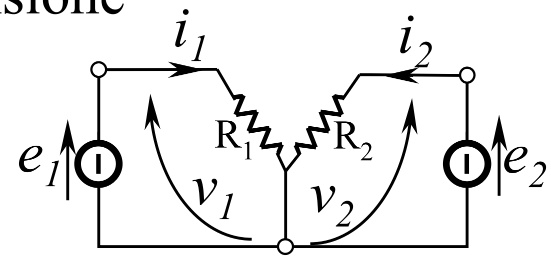


$R_1 \neq 0 \quad ; \quad \infty$

$R_2 \neq 0 \quad ; \quad \infty$

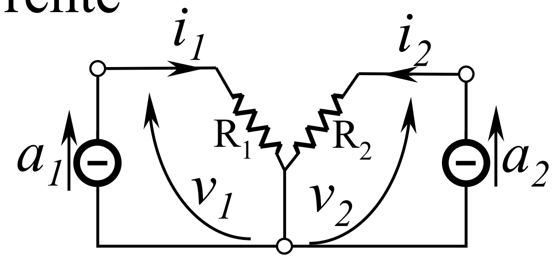
BASE TENSIONE, CORRENTE E MISTA

a) base tensione



fissati: $\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 \end{cases} \Longrightarrow$ trovati: $\begin{cases} i_1 = \dfrac{v_1}{R_1} = \dfrac{e_1}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{v_2}{R_2} = \dfrac{e_2}{R_2} \end{cases}$

a) base corrente



fissati: $\begin{cases} i_1 = a_1 \\ i_2 = a_2 \end{cases} \Longrightarrow$ trovati: $\begin{cases} v_1 = R_1 \cdot i_1 = R_1 \cdot a_1 \\ v_2 = R_2 \cdot i_2 = R_2 \cdot a_2 \end{cases}$

PROPRIETA' GENERALI

- **Linearità:** un componente si dice lineare se l'effetto dovuto ad una qualsiasi causa è proporzionale alla stessa
- **Tempo invarianza** o **Permanenza:** un componente si dice tempo-invariante se l'effetto non dipende dall'istante di applicazione della causa
- **Reciprocità**
- **Passività:** un componente si dice passivo se:

$$\int_{-\infty}^{t} p(\tau)\cdot d\tau \geq 0 \qquad \forall t$$

- **Causalità:** un componente si dice causale se, in un qualunque istante t_0, l'effetto dipende solo dalla causa per $t \leq t_0$

PROPRIETA' ENERGETICHE

- **Potenza Assorbita da un Bipolo:** $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ (convenzione normale) è la potenza che entra nella superficie limite del bipolo. Con la convenzione normale si parla di **potenza assorbita**. Unità di misura **Watt [W]**
- **Potenza Elettrica** assorbita in un intervallo δt: $\delta\omega = v(t) \cdot i(t) \cdot \delta$

a) $\delta\omega > 0 \quad \forall \delta t \Rightarrow$ elemento puramente dissipativo

b) $0 \leq \delta\omega \leq 0 \Rightarrow$ energia accumulata in bipoli di tipo L e C: $E = \dfrac{L \cdot i^2}{2}$ $\quad E = \dfrac{C \cdot v^2}{2}$

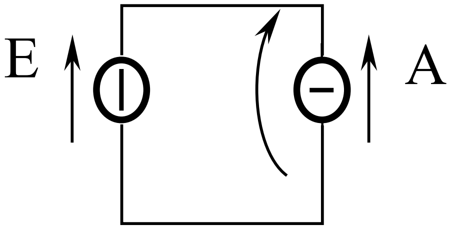
•in tali casi è possibile definire un livello zero, cioè gli elementi possono essere SCARICHI (STATO ZERO)

c) $0 < \delta\omega > 0 \Rightarrow$ elementi di capacità infinita, come i generatori ideali, che possono assorbire o cedere una quantità infinita di energia senza che mutino le sue caratteristiche. NON E' DEFINIBILE UN LIVELLO ZERO. Si tratta di energia scambiata all'interno della superficie limite, con accumulatori di capacità infinita (scambiatori).

I COMPONENTI ELEMENTARI SONO TALI PERCHE' INVESTONO IN UN SOLO TIPO DI ENERGIA

GENERATORI IDEALI

- di TENSIONE $v(t) = e(t)$
- di CORRENTE $i(t) = a(t)$ ES: $e(t) = \mathrm{E} \equiv \text{cost}$; $i(t) = \mathrm{A} \equiv \text{cost}$



$$\Delta\omega = \int_{t_0}^{t} p(t)\cdot dt = E\cdot A\cdot(t-t_0)$$ nel generatore di tensione

$$\Delta\omega' = \int_{t_0}^{t} p(t)\cdot dt = -E\cdot A\cdot(t-t_0)$$ nel generatore di corrente

La potenza assorbita dall'uno non è altro che quella generata dall'altro, e non si riesce a stabilire un LIVELLO ZERO di energia, cioè non esiste lo STATO ZERO

$$\left.\begin{array}{l}\text{➢CORTO CIRCUITO}\\ \text{➢CIRCUITO APERTO}\end{array}\right\}\ \text{CASI LIMITE}$$

BIPOLI PASSIVI

- RESISTORE $\quad v(t) = \mathrm{R} \cdot i(t)$

  $p(t) = v \cdot i = \mathrm{R} \cdot i^2(t) \qquad \mathrm{R} \cdot i^2(t) > 0$ sempre

  $\Delta\omega = \int_{t_0}^{t} p(\tau) \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t} R \cdot i^2 \cdot d\tau > 0$ sempre

- CONDENSATORE $\quad i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$

  $$p(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C v^2\right)$$

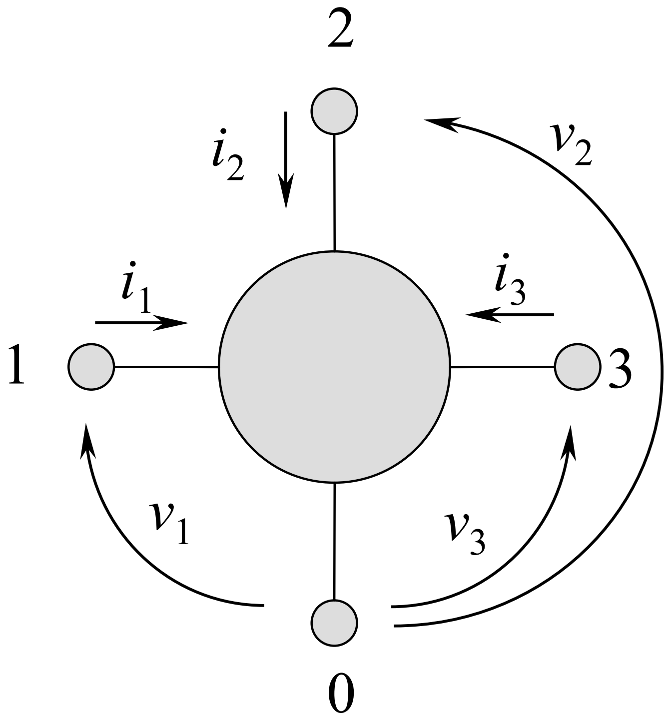
  $\Delta\omega = \int_{t_a}^{t_b} p(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{2} C \cdot \left[v^2(t_b) - v^2(t_a)\right] >=< 0$ variabile di stato: TENSIONE

- INDUTTORE $\quad v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$

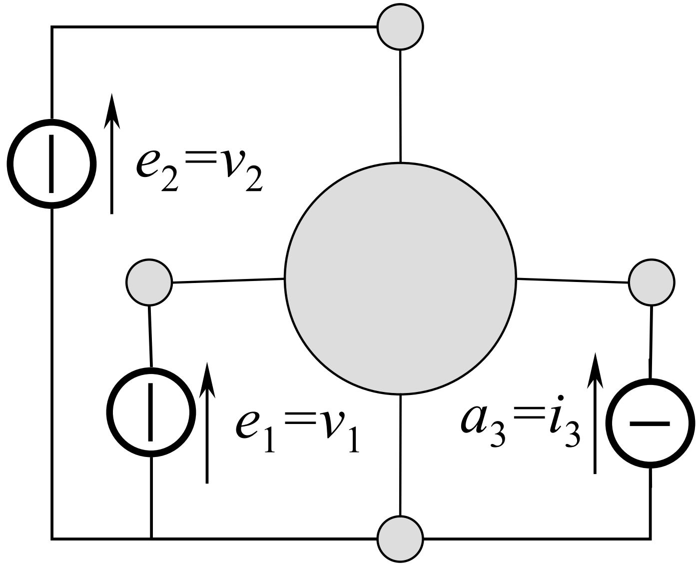
  $$p(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$$

  $\Delta\omega = \int_{t_a}^{t_b} p(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{2} L \cdot \left[i^2(t_b) - i^2(t_a)\right] >=< 0$ variabile di stato: CORRENTE

MULTIPOLI



Hp: base di definizione [v_1 ; v_2 ; i_3]



Principio di Conservazione dell'Energia

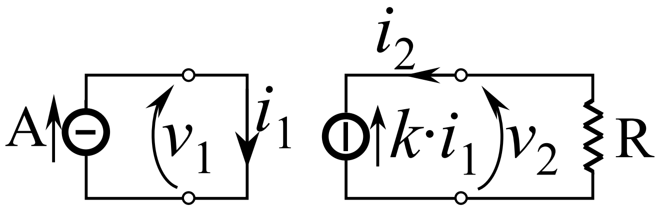
$$\delta\omega_a + \delta\omega_b + \delta\omega_c + \delta\omega = 0$$

$$p(t) = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3$$

$$\begin{cases} \delta\omega_a = v_1 \cdot (-i_1) \cdot \delta t \\ \delta\omega_b = v_2 \cdot (-i_2) \cdot \delta t \\ \delta\omega_c = v_3 \cdot (-i_3) \cdot \delta t \\ \delta\omega = p \cdot \delta t \end{cases}$$

LA POTENZA ASSORBITA DA UN COMPONENTE E' LA SOMMA DEI PRODOTTI TENSIONE-CORRENTE DELLE SUE VARIABILI DESCRITTIVE (CONVENZIONE NORMALE)

GENERATORI PILOTATI



$$\begin{cases} i_1 = A \\ v_2 = k \cdot i_1 \end{cases}$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = A \\ v_2 = k \cdot i_1 = k \cdot A \\ i_2 = -\dfrac{v_2}{R} = -\dfrac{k \cdot A}{R} \end{cases} \Longrightarrow \quad p(t) = k \cdot A \cdot \left(-\frac{k \cdot A}{R} \right) = -\frac{(k \cdot A)^2}{R}$$

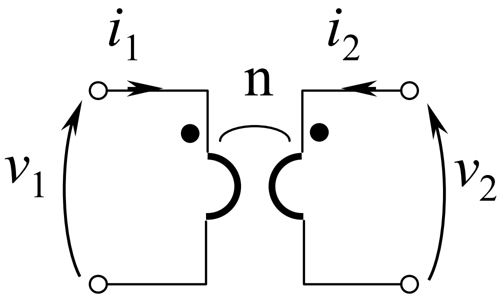
La condizione di passività $\int_{t_0}^{t} p(t) \cdot dt \geq 0$ non vale poiché l'integrando è negativo

$$\Downarrow$$

COMPONENTE ATTIVO

I generatori pilotati sono componenti attivi

TRASFORMATORE IDEALE



$$\begin{cases} v_1 = n \cdot v_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} \cdot i_2 \end{cases}$$

base di definizione mista:
[v_1 ; i_2] o [v_2 ; i_1]

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + \frac{v_1}{n}(-n \cdot i_1) = 0$$

Il trasformatore ideale è trasparente alle potenze

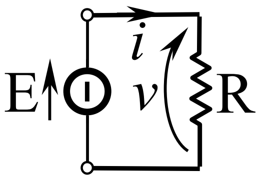
E' un componente PASSIVO non dissipativo

Non è dotato di stato

VERIFICA DELLA PASSIVITA'

$$\int_{-\infty}^{t} p(\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{t} \sum_{i=1}^{n-1} v_i i_i \cdot d\tau \geq 0 \qquad \forall t$$

➢RESISTORE



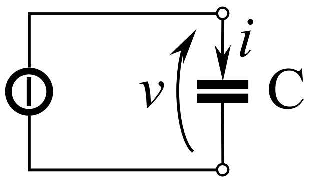
$$p = v\cdot i = R\cdot i^2$$

$$i = \frac{E}{R} \Rightarrow p = \frac{E^2}{R}$$

La funzione integranda è sempre ≥ 0

$$\int_{-\infty}^{t} p(\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{E^2}{R}\cdot d\tau \geq 0$$

➢CONDENSATORE



$$p = v\cdot i = v\cdot C\frac{dv}{dt}$$

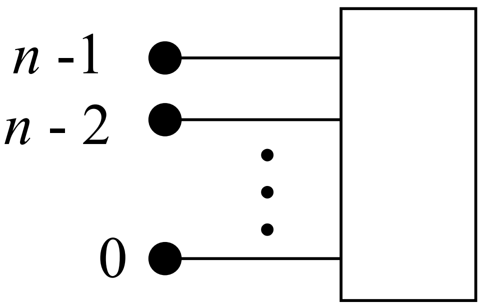
$$v = e(t) \Rightarrow p = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) \qquad \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right)d\tau \geq 0$$

per t = -∞ il condensatore è scarico

➢analogamente per l'INDUTTORE

Sono componenti che hanno lo STATO ZERO $\Delta W_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau)d\tau \leq\geq 0$

MULTIPOLI



***n* - polo**

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$p = v_1 i_1 + \cdots + v_{n-1} i_{n-1} = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

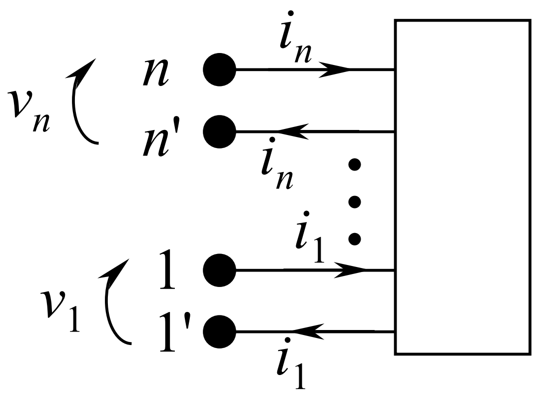
$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} \underline{v}^T \cdot \underline{i} \cdot d\tau$$

Se $\omega(t) \geq 0 \quad \forall\, t$ il multipolo si dice PASSIVO

Equazione Costituitiva: $[A] \cdot \underline{v} + [B] \cdot \underline{i} + \underline{C} = \underline{0}$ (lineari, tempo invarianti)

MULTI-PORTA

Un multiporta è un particolare multipolo con un numero pari di morsetti organizzati in coppie, in modo tale che, per ogni coppia, la corrente entrante in un morsetto è uguale a quella uscente dal secondo morsetto della coppia. Ogni coppia è detta PORTA.



$$\underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$p = v_1 i_1 + \cdots + v_n i_n = \underline{v}^T \cdot \underline{i}$$

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} \underline{v}^T \cdot \underline{i} \cdot d\tau$$

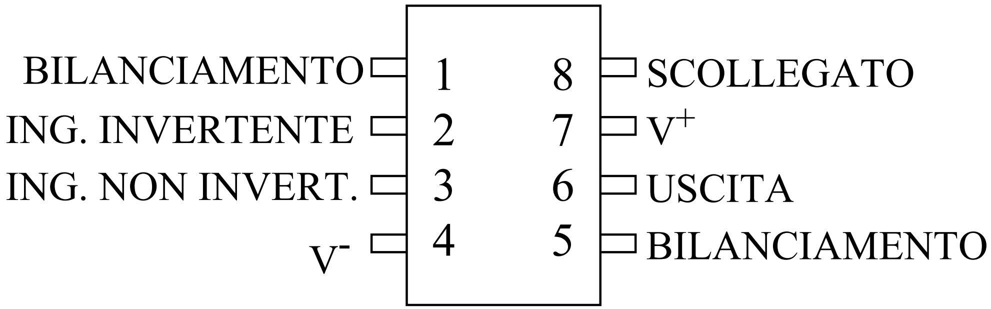
$$[A] \cdot \underline{v} + [B] \cdot \underline{i} + \underline{C} = \underline{0}$$

(lineari, tempo invarianti)

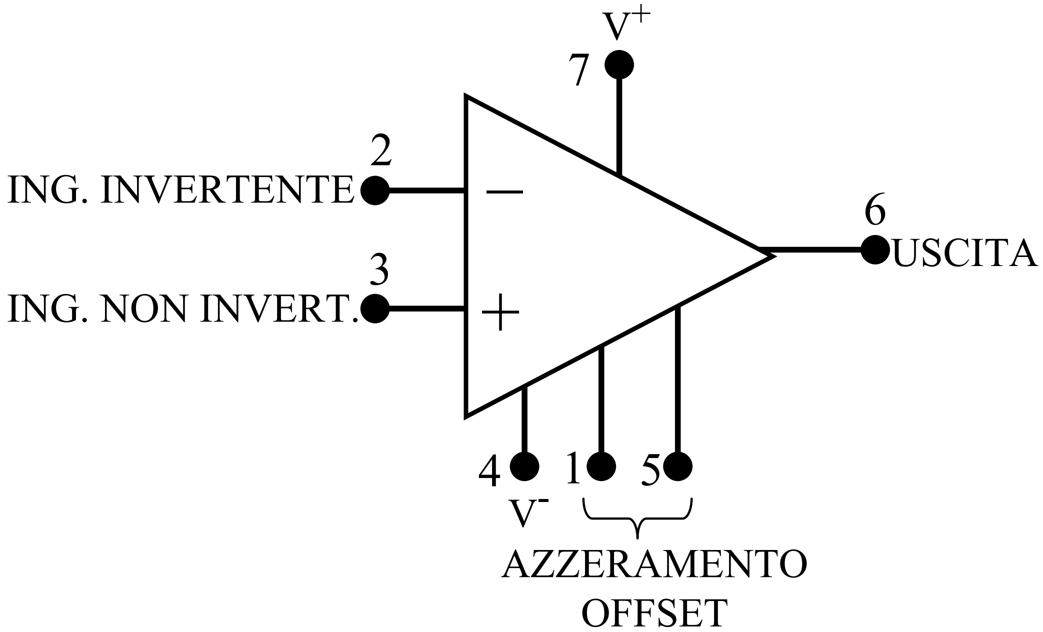
AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

L'Amplificatore Operazionale (Operational Amplifier - OP) è un dipositivo elettronico che si comporta come un generatore di tensione controllsto in tensione

CONFIGURAZIONE DEI PIN

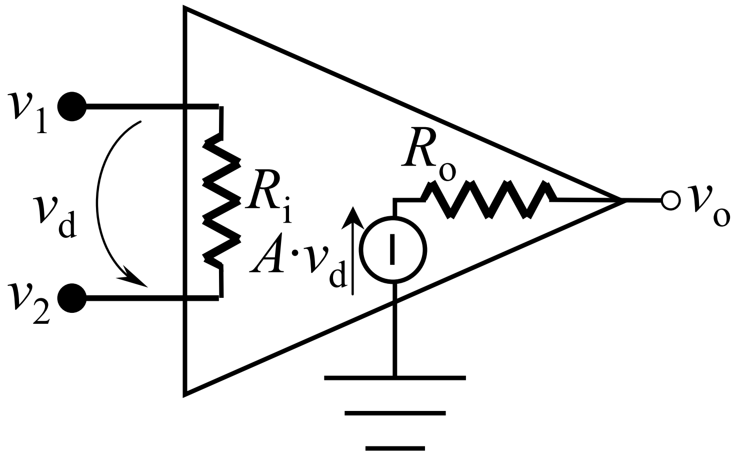


SIMBOLO CIRCUITALE



LE ALIMENTAZIONI VENGONO SPESSO OMESSE NEGLI SCHEMI CIRCUITALI, MA L'OP DEVE SEMPRE ESSERE ALIMENTATO

MODELLO CIRCUITALE



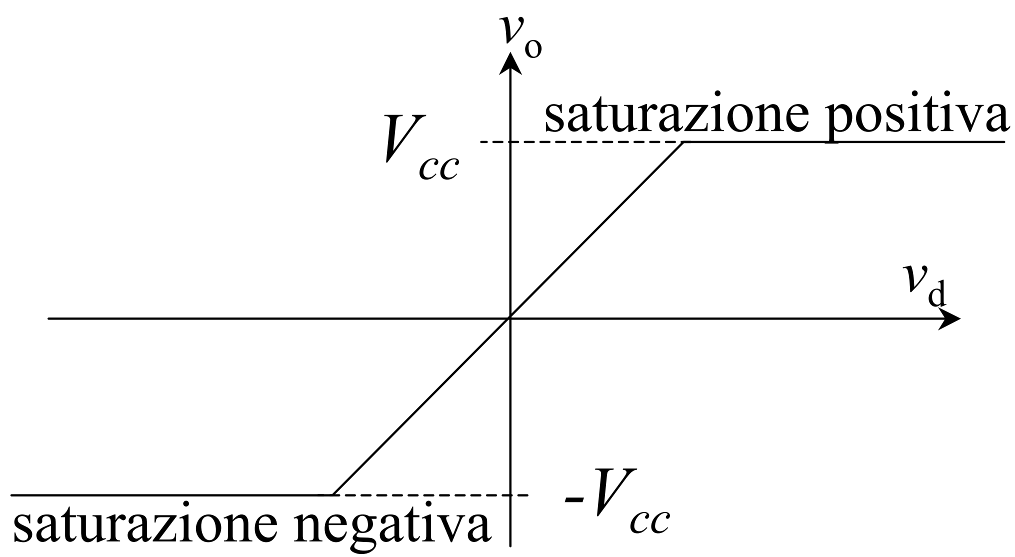
Generatore di tensione controllato in tensione

$$v_d = v_2 - v_1$$
$$v_o = A \cdot v_d = A \cdot \left(v_2 - v_1\right)$$

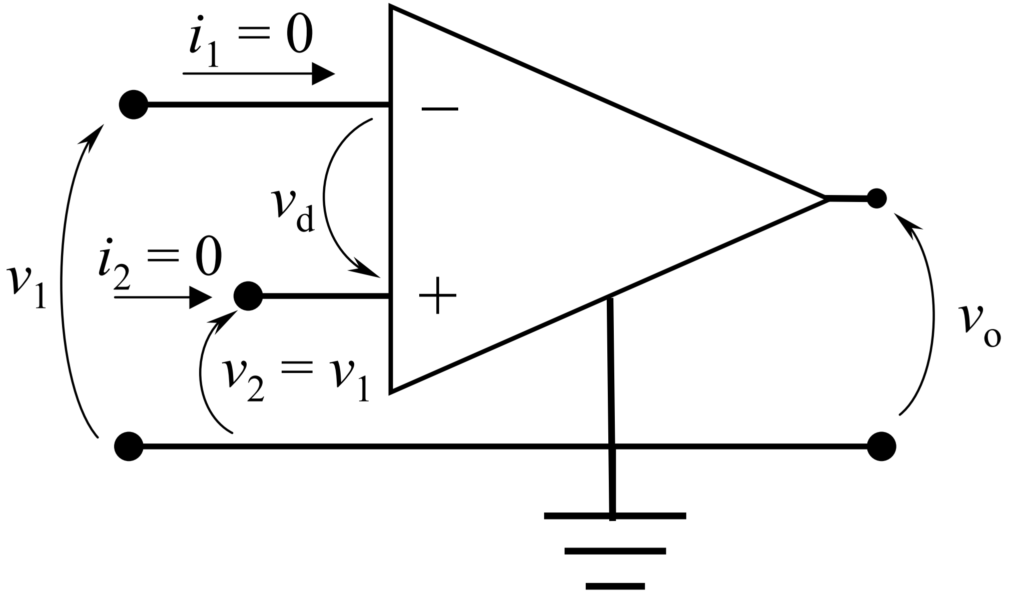
A: guadagno di tensione ad anello aperto

valori tipici

A	$10^5 \div 10^8$	
R_i	$10^6 \div 10^{13}$ **Ω**	
R_o	$10 \div 100$ **Ω**	
V_{cc}	$5 \div 24$ **V**	tensione di alimentazione



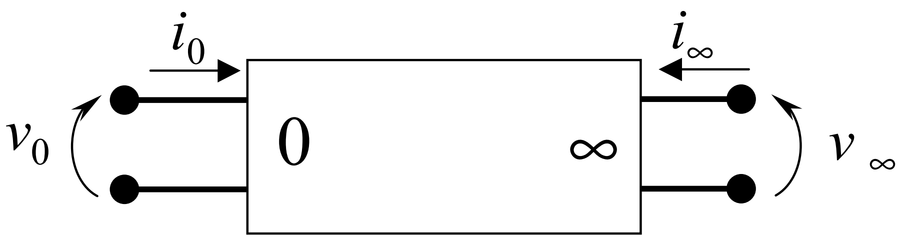
AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE



$$\begin{cases} A = \infty \\ R_i = \infty \\ R_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} i_1 = 0 \\ i_2 = 0 \\ v_d = v_2 - v_1 = 0 \\ v_2 = v_1 \end{array}$$

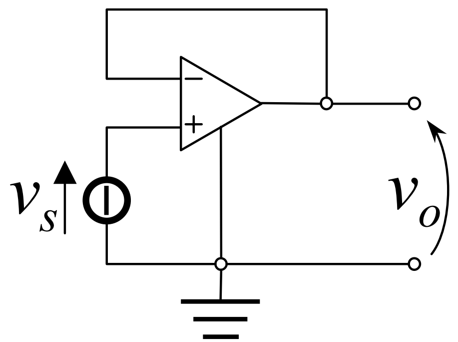
NELLA MAGGIOR PARTE DELLE APPLICAZIONI SI CONSIDERANO OP IDEALI NELLA REGIONE LINEARE DI FUNZIONAMENTO

$\Downarrow$ NULLORE

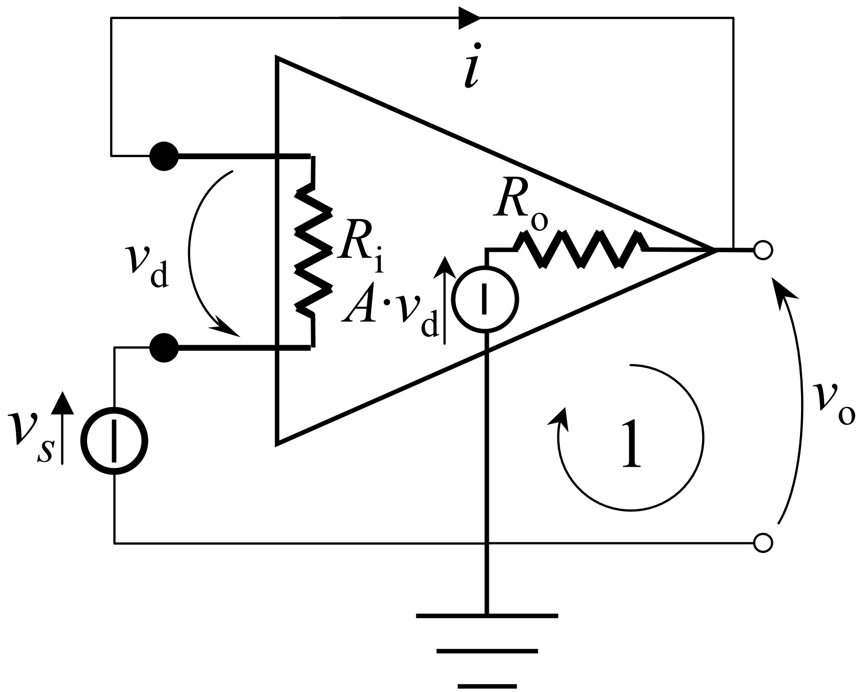


$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ i_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_\infty \ \textbf{qualsiasi} \\ i_\infty \ \textbf{qualsiasi} \end{cases}$$

INSEGUITORE DI TENSIONE



Un generatore di tensione è collegato al morsetto non invertente dell'operazionale, mentre il morsetto invertente è collegato direttamente all'uscita. Determinare la tensione in uscita v_o



R_i ed R_o sono in serie. Quindi la corrente i vale:

$$i = \frac{v_s - A \cdot v_d}{R_i + R_o} = \frac{v_s - A \cdot R_i \cdot i}{R_i + R_o}$$

per l'equilibrio delle tensioni alla maglia 1:

$$v_o = R_o \cdot i + A \cdot v_d = R_o \cdot i + A \cdot R_i \cdot i = \left(R_o + A \cdot R_i\right) \cdot i$$

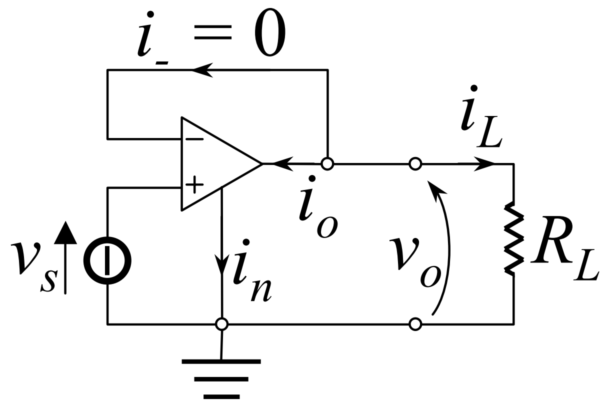
da cui, sostituendo:

$$\frac{v_o}{R_o + A \cdot R_i} = \frac{v_s}{R_i + R_o} - \frac{A \cdot R_i}{R_i + R_o} \cdot \frac{v_o}{R_o + A \cdot R_i} \Rightarrow$$

$$\frac{v_o}{R_o + A \cdot R_i} \cdot \frac{R_i + R_o + A \cdot R_i}{R_i + R_o} = \frac{v_s}{R_i + R_o} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_o = \frac{R_o + A \cdot R_i}{R_i + R_o + A \cdot R_i} \cdot v_s \approx v_s}$$

INSEGUITORE CON CARICO



Determinare il valore della corrente i_L che attraversa il carico R_L

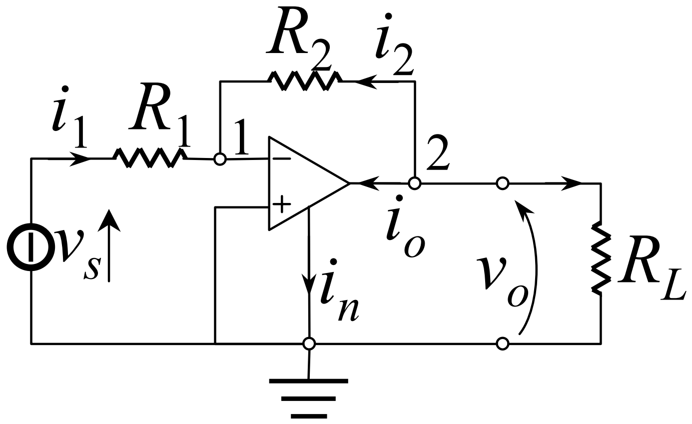
I due morsetti in ingresso all'operazionale hanno lo stesso potenziale. Il corto circuito riporta lo stesso potenziale al morsetto di uscita, quindi $v_o = v_s$.

LA TENSIONE IN USCITA NON DIPENDE DAL CARICO

Per il calcolo della corrente:

$$\boxed{i_L = \frac{v_o}{R_L} = \frac{v_s}{R_L}}$$

AMPLIFICATORE INVERTENTE



Determinare il valore della tensione v_o

$i_1 = -i_2$ equilibrio al nodo 1

$$i_1 = \frac{v_s - v_-}{R_1}$$ equazione del componente R_1

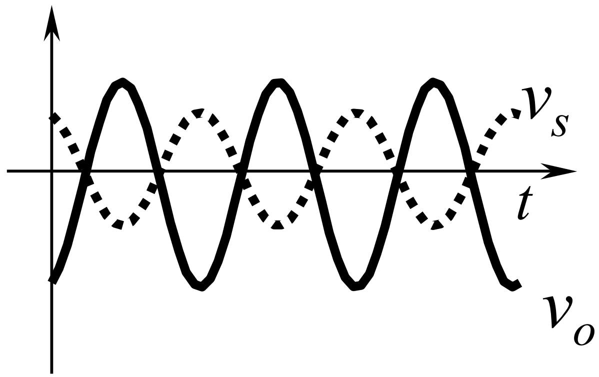
$$i_2 = \frac{v_o - v_-}{R_2}$$ equazione del componente R_2

ma, per l'idealità dell'operazionale: $v_1 = v_- = v_+ = 0$

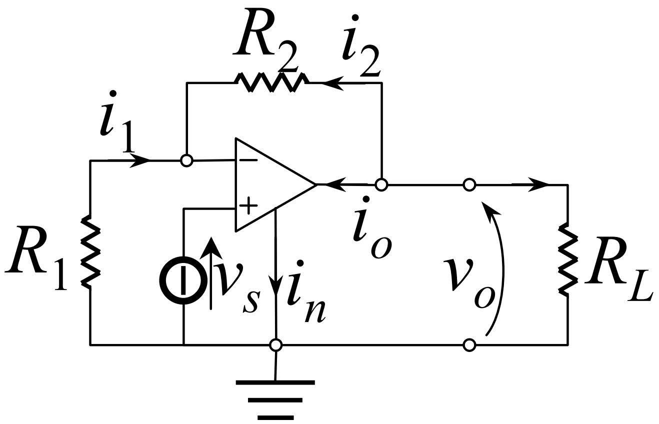
da cui:

$$\frac{v_s}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2}$$ e infine: $$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_s$$

Questa configurazione di operazionale amplifica l'ingresso in ragione del rapporto R_1/R_2 e ne inverte il segno.



AMPLIFICATORE NON INVERTENTE



Determinare il valore della tensione v_o

$i_1 = -i_2$ equilibrio al nodo 1

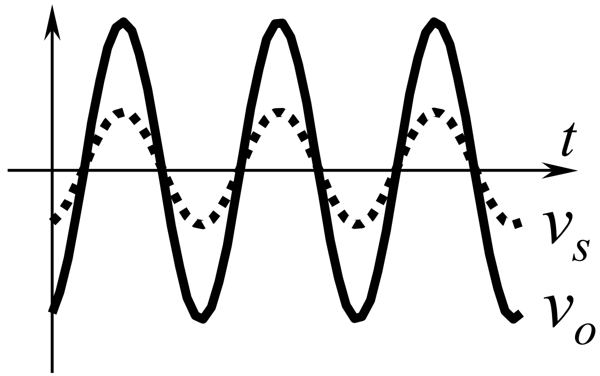
$i_1 = -\dfrac{v_-}{R_1}$ equazione del componente R_1

$i_2 = \dfrac{v_o - v_-}{R_2}$ equazione del componente R_2

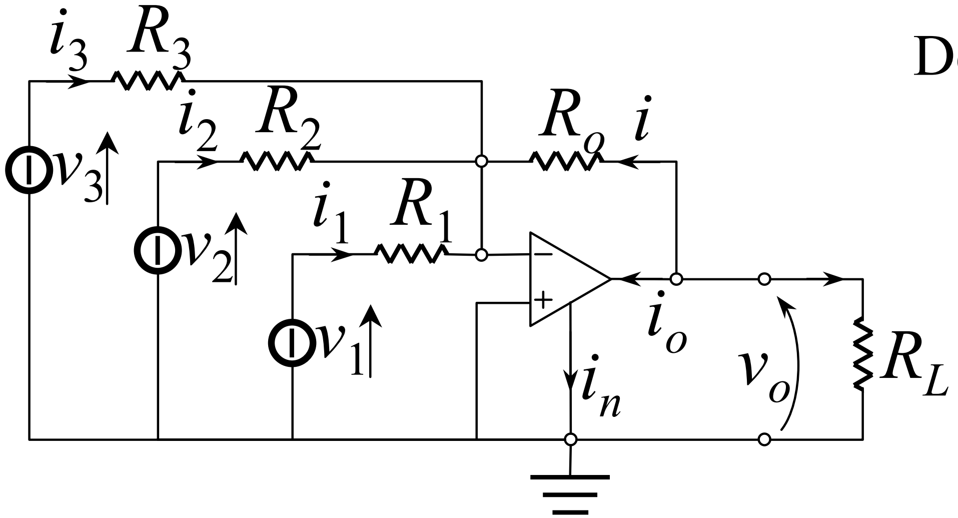
ma, per l'idealità dell'operazionale: $v_- = v_+ = v_s$
da cui:

$$-\frac{v_s}{R_1} = -\frac{v_o - v_s}{R_2}$$ e infine: $$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_s$$

Questa configurazione di operazionale amplifica l'ingresso della quantità $1+R_2/R_1$ e non inverte il segno.



AMPLIFICATORE SOMMATORE



Determinare il valore della tensione v_o

$$i + i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$-\frac{v_o}{R_o} - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0$$

da cui, riordinando

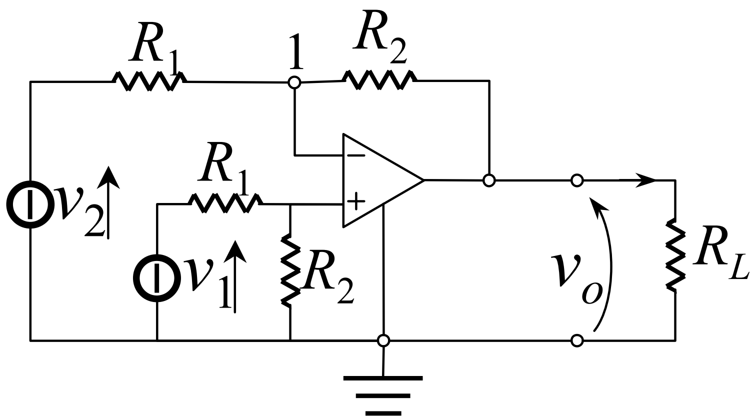
$$v_o = -R_o\left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}\right)$$

L'uscita è proporzionale alla somma pesata delle tensioni. Se $R_1 = R_2 = R_3 = R$:

$$v_o = -\frac{R_o}{R}\left(v_1 + v_2 + v_3\right)$$

Cioè l'uscita è proporzionale alla somma delle tensioni

AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE



Determinare il valore della tensione v_o

$$v_+ = v_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = v_- \quad \text{partitore di tensione}$$

$$\frac{v_2 - v_-}{R_1} + \frac{v_o - v_-}{R_2} = \frac{v_2}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot v_- = 0 \quad \text{equilibrio al nodo 1}$$

sostituendo:

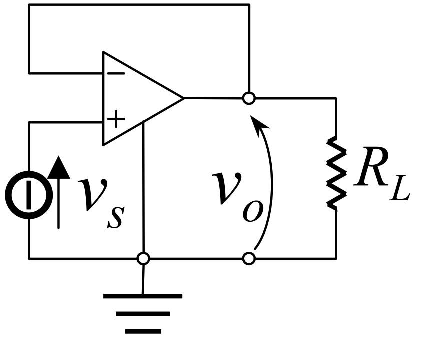
$$\frac{v_2}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot v_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{v_o = \frac{R_2}{R_1} \cdot (v_1 - v_2)}$$

Cioè l'uscita è proporzionale alla differenza tra le tensioni

AMPLIFICATORI ADINAMICI -TABELLA RIASSUNTIVA

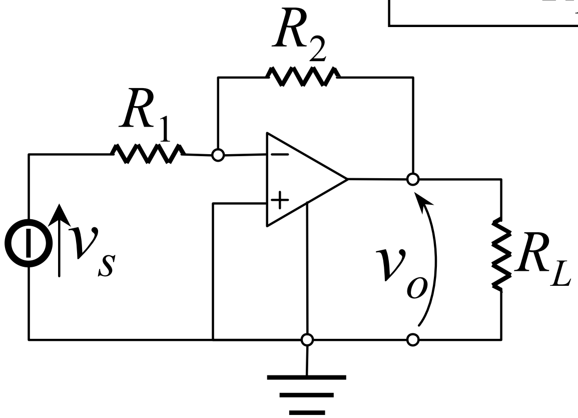
inseguitore di tensione

$$v_o = v_s$$



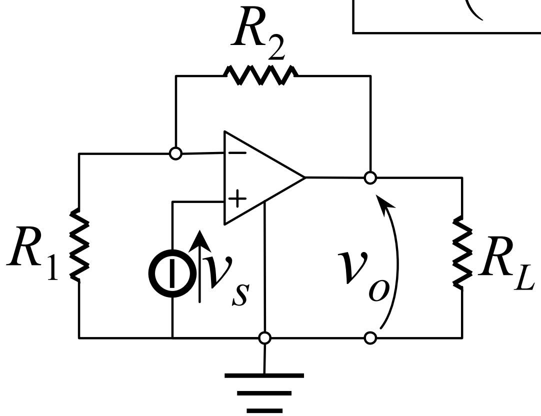
amplificatore invertente

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_s$$



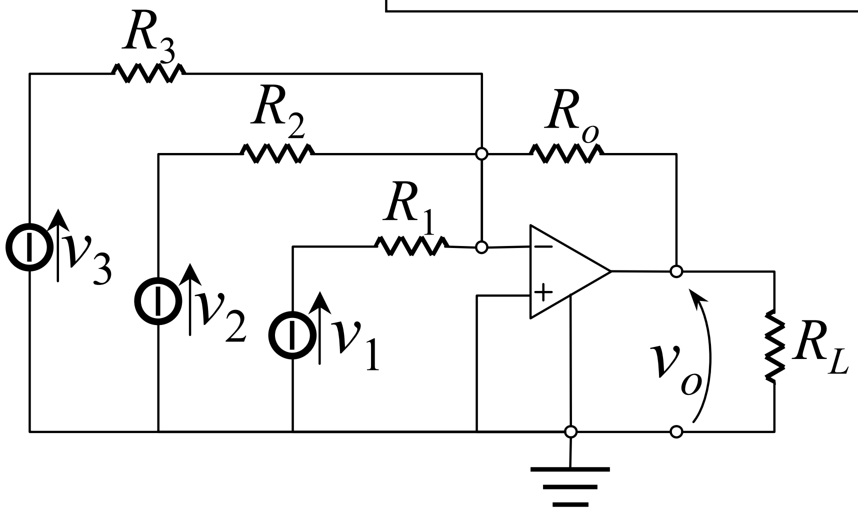
amplificatore non invertente

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_s$$



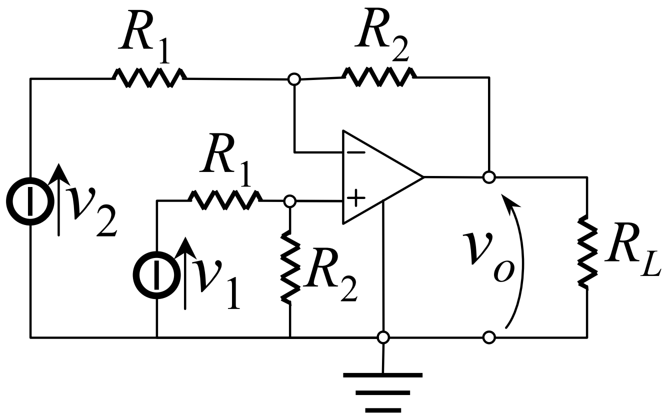
amplificatore sommatore

$$v_o = -R_o \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$



amplificatore differenziale

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \cdot (v_1 - v_2)$$



TEORIA DEI GRAFI

- nodi
- lati
- ordine del nodo
- percorso
- grafo connesso
- maglia
- albero
- co-albero

GRAFO DEL COMPONENTE

$\Downarrow$

GRAFO DEL CIRCUITO

- co-cicli fondamentali
- maglie fondamentali

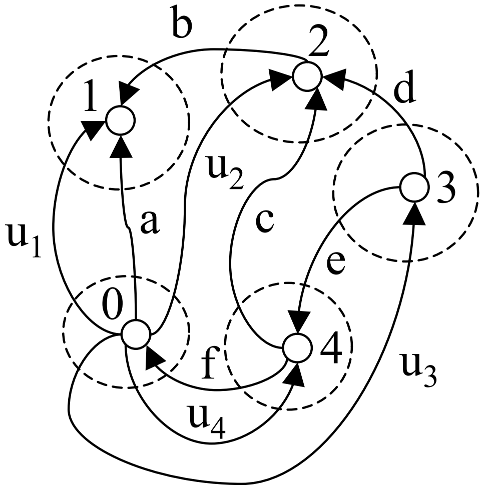
TEOREMA DI TELLEGEN

per ogni lato di una rete è $p(t) = v \cdot i$. Per il principio di conservazione dell'energia : $\sum_k \left(v_k \cdot i_k\right) \cdot \delta t = 0$

$$\sum_k v_k \cdot i_k = 0 \quad \begin{cases} \text{per qualsiasi insieme di } i \text{ compatibile con la I legge di Kirchhof} \\ \text{per qualsiasi insieme di } v \text{ compatibile con la II legge di Kirchhof} \end{cases}$$

$\underline{v}$ e $\underline{i}$ sono ORTOGONALI

TEOREMA DI TELLEGEN



$$\begin{cases} v_a = u_1 \\ v_b = u_1 - u_2 \\ v_c = u_2 - u_4 \\ v_d = u_2 - u_3 \\ v_4 = u_4 - u_3 \\ v_f = -u_4 \end{cases}$$

Esistono infiniti $\{u_i\}$ purché compatibili col grafo cioè purché indipendenti.

Consideriamo: $\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix}$

eseguiamo il prodotto $\underline{v}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{i} = v_a \cdot i_a + \ldots + v_f \cdot i_f =$

$$= u_1 \cdot i_a + (u_1 - u_2) \cdot i_b + (u_2 - u_4) \cdot i_c + (u_2 - u_3) \cdot i_d + (u_4 - u_3) \cdot i_e - u_4 \cdot i_f =$$

$$= u_1 \cdot (i_a + i_b) + u_2 \cdot (-i_b + i_c + i_d) + u_3 \cdot (-i_d - i_e) + u_4 \cdot (-i_c + i_e - i_f)$$

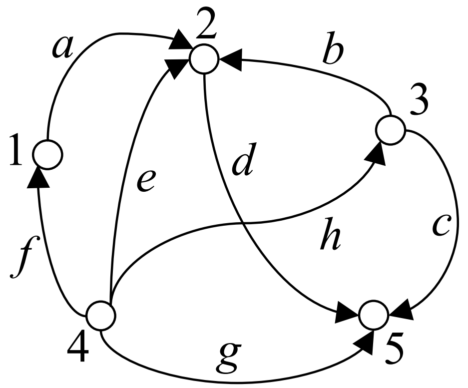
Se l'insieme delle correnti è compatibile con il grafo le quantità tra parentesi sono nulle

$$\underline{v}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{i} = 0$$

Il Principio di Conservazione dell'Energia è un caso particolare del Teorema di Tellegen

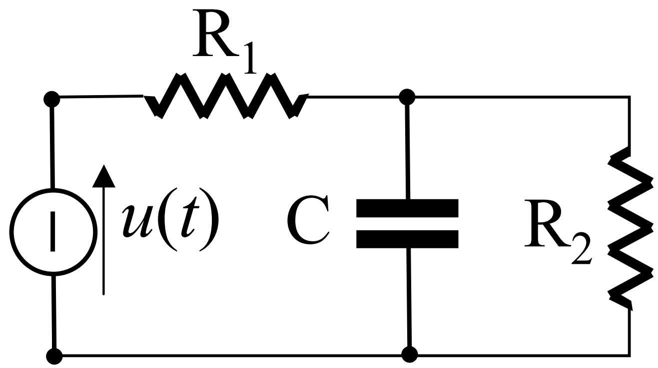
ESEMPI

a)



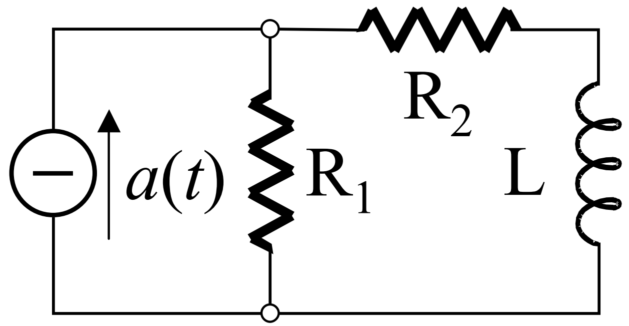
Scrivere le equazioni topologiche

b)



Scrivere le equazioni topologiche
e dei componenti

c)



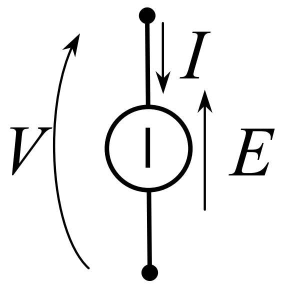
Scrivere le equazioni topologiche
e dei componenti

Reti in Regime Stazionario

COMPONENTI ELEMENTARI IN REGIME STAZIONARIO

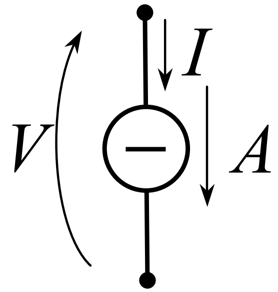
Per circuiti assolutamente stabili, in presenza di eccitazioni costanti nel tempo:

•Generatore indipendente di tensione



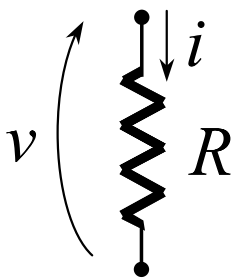
$$V = E \equiv \text{cost}$$

•Generatore indipendente di corrente



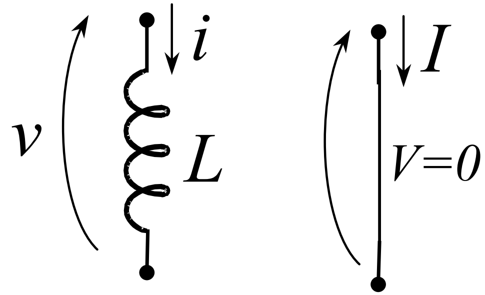
$$I = A \equiv \text{cost}$$

•Resistore



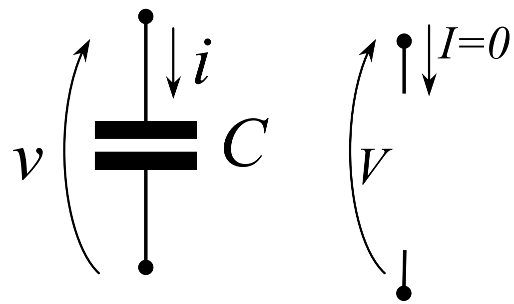
$$v = R \cdot i \Rightarrow$$
$$V = R \cdot I$$

•Induttore



$$v = L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$V = 0 \ \text{(cto} - \text{cto)}$$

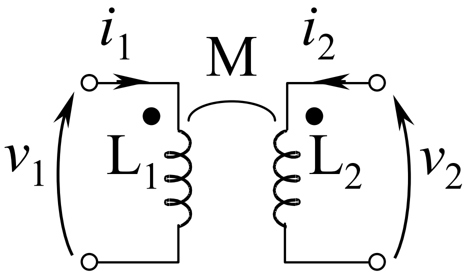
•Condensatore



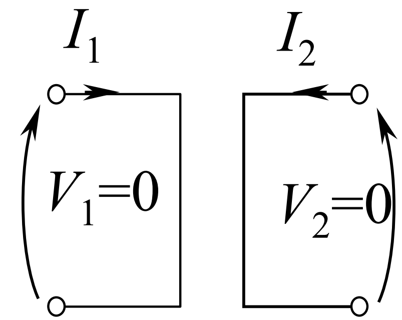
$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$I = 0 \ \text{(circuito aperto)}$$

Vedremo in seguito i casi di circuiti con generatori pilotati, nullori e giratori

•Mutua Induttanza



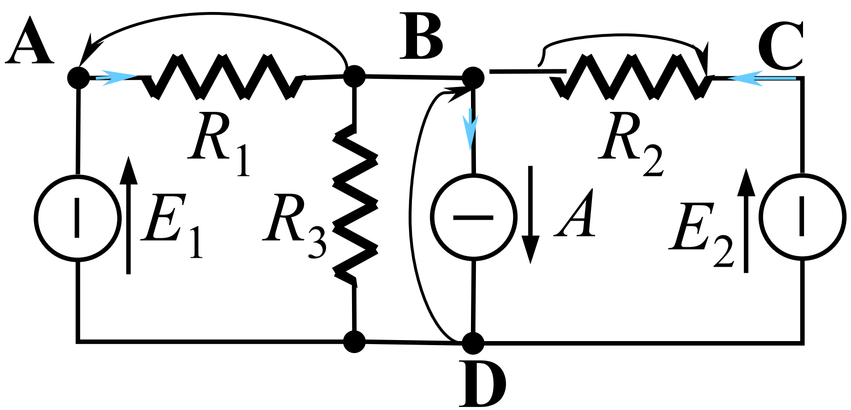
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \cdot \dfrac{di_1}{dt} + M \cdot \dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ v_2 = M \cdot \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \dfrac{di_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

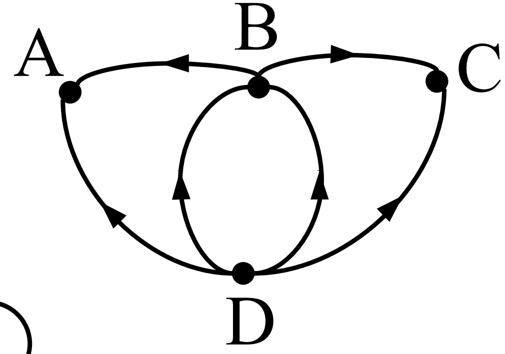


Tutti i condensatori si comportano come circuiti aperti,
Tutti gli induttori si comportano come corto-circuiti

RETI DI SOLI GENERATORI E RESISTORI

Esempio:

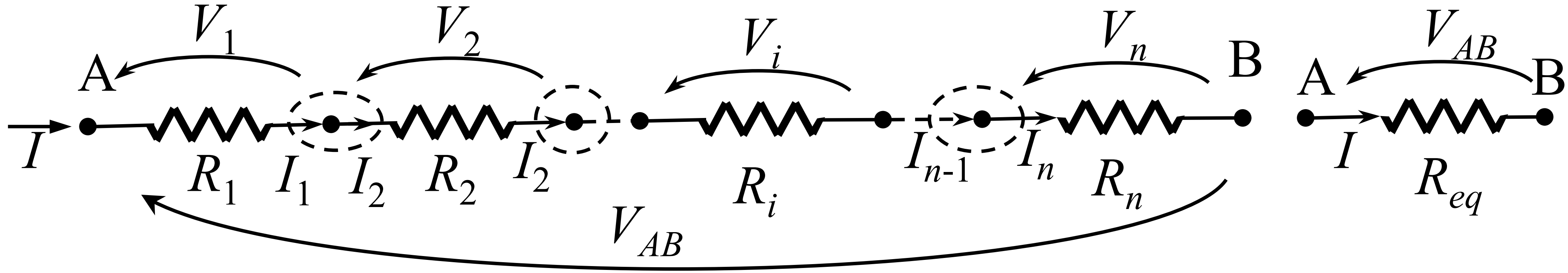




$N = 4 \quad L = 6$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N\text{-1 eq KI} \rightarrow 3 \\ L\text{-}N\text{+1 eq KV} \rightarrow 3 \end{array}\right\} \text{Eq. topologiche} \\ \\ L = 6 \text{ eq. componenti} \end{array} \right.$$

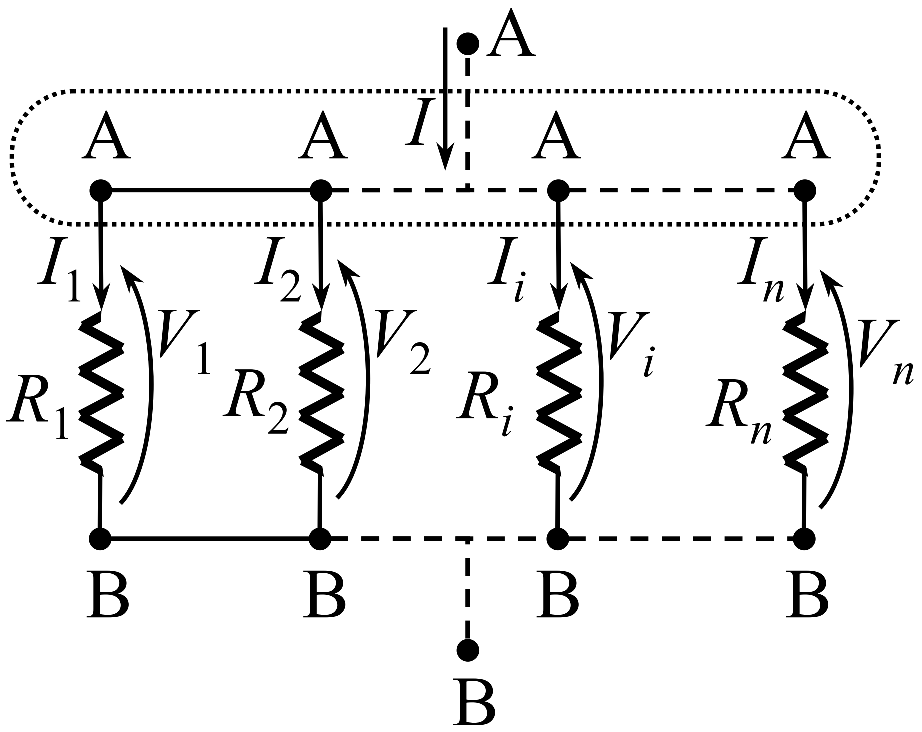
RESISTORI IN SERIE



$$I_1 = I_2 = \cdots = I_i = \cdots = I_n = I$$

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + \cdots + V_i + \cdots + V_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_n I_n = \left(R_1 + \cdots + R_n\right) \cdot I = R_{eq} \cdot I \Rightarrow R_{eq} = \sum_i R_i$$

PARALLELO DI RESISTORI



$$V_i = R_i I_i \quad I_i = \frac{V_i}{R_i} = G_i V_i$$

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_i = V_n = V$$

$$I = I_1 + \cdots + I_n = \frac{V_1}{R_1} + \cdots + \frac{V_n}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) \cdot V$$

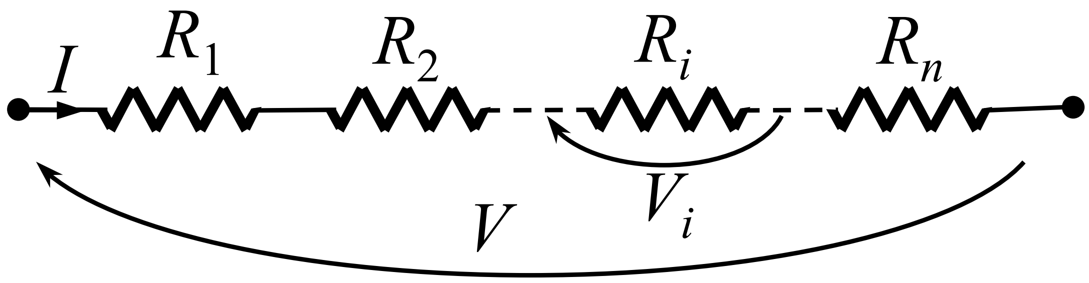
$$G_{eq} = \sum_i G_i = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{eq}}$$

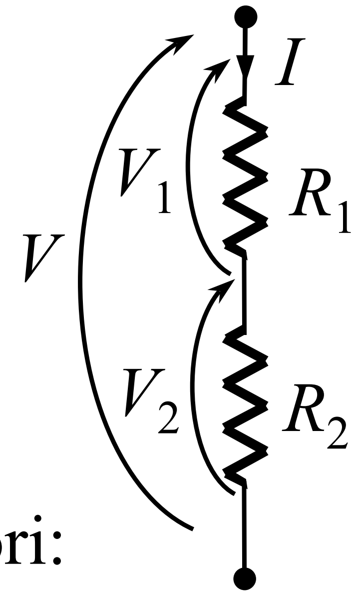
Nel caso di due soli resistori:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad G_{eq} = G_1 + G_2$$

PARTITORI

Partitore di Tensione





$$V_i = R_i I \qquad V = \left(R_1 + \cdots + R_n\right) I \Rightarrow I = V \Big/ \sum_i R_i$$

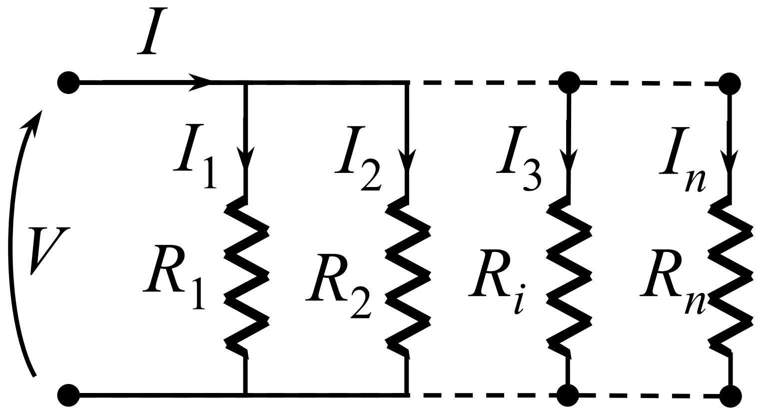
$$V_i = V \cdot \frac{R_i}{\sum_i R_i}$$

Nel caso di due soli resistori:

$$\begin{cases} V_1 = V \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \\ V_2 = V \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

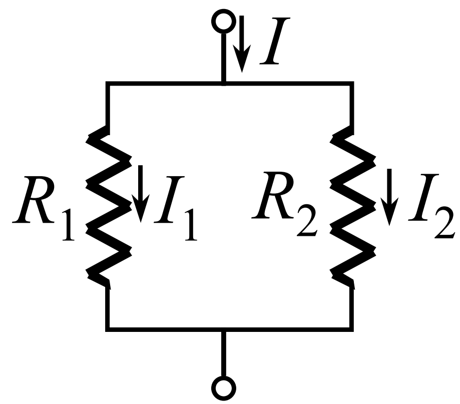
Partitore di Corrente

$$I_i = \frac{V}{R_i} = V \cdot G_i$$



$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = V \cdot \left(G_1 + G_2 + \cdots + G_n\right) \Rightarrow \quad V = \frac{I}{\sum_i G_i}$$

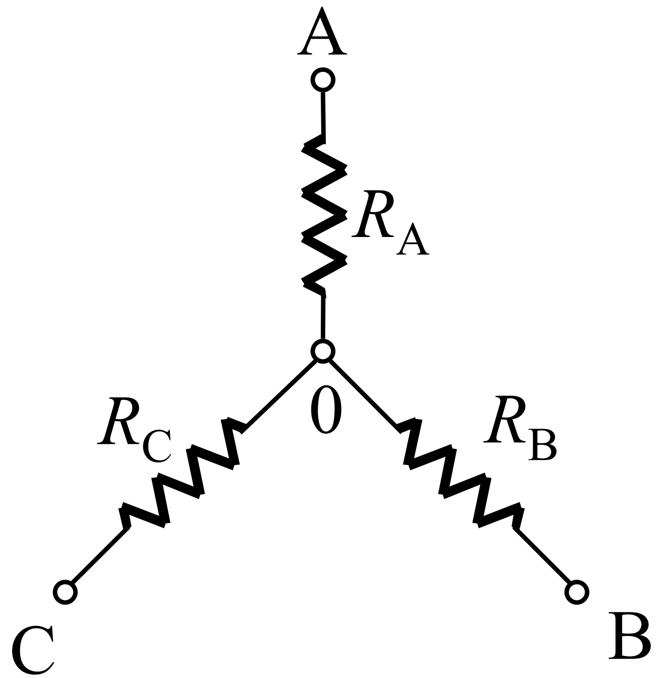
$$I_i = I \cdot \frac{G_i}{\sum_i G_i}$$

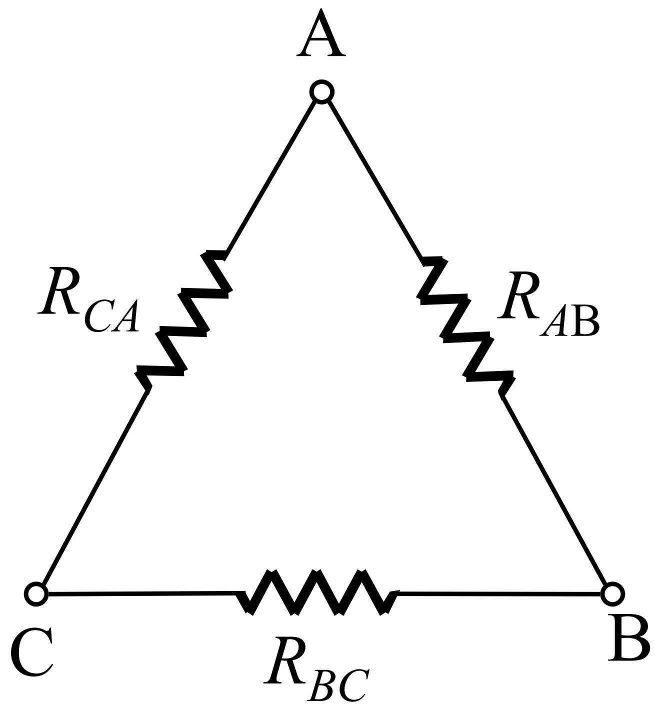


Nel caso di due soli resistori:

$$\begin{cases} I_1 = I \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \\ I_2 = I \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE STELLA-TRIANGOLO





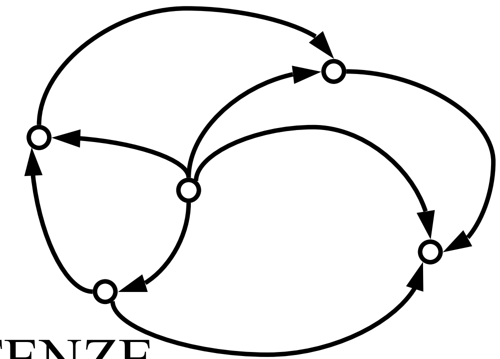
$$\begin{cases} R_A = \dfrac{R_{AB}R_{CA}}{R_0} \\ R_B = \dfrac{R_{BC}R_{AB}}{R_0} \\ R_C = \dfrac{R_{CA}R_{BC}}{R_0} \end{cases} \qquad R_0 = R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}$$

$$\begin{cases} R_{AB} = R_A \cdot R_B \cdot G_0 \\ R_{BC} = R_B \cdot R_C \cdot G_0 \\ R_{CA} = R_C \cdot R_A \cdot G_0 \end{cases} \qquad G_0 = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

Nel caso di tre resistenze uguali sarà: $R_Y = \dfrac{R_\Delta}{3}$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

In una rete lineare, comunque complessa, contenente bipoli lineari, le tensioni e le correnti in ciascun lato possono essere determinate sommando i contributi dovuti ai singoli generatori presenti, agenti uno alla volta.
(Passivazione dei generatori)

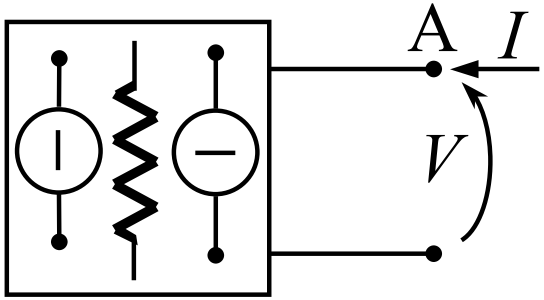


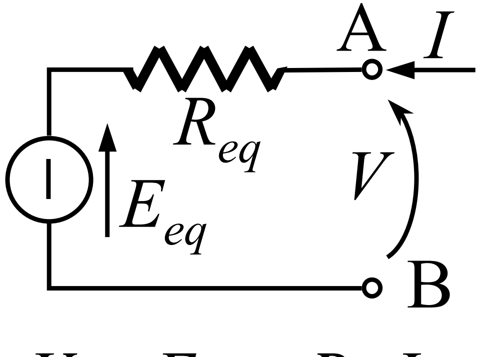
TEOREMA DI TELLEGEN $\quad \sum_h V_h I_h = 0$

⇓

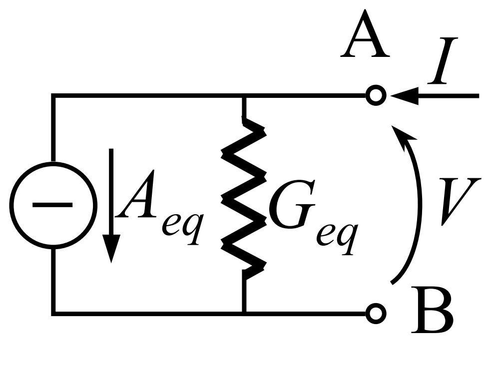
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLE POTENZE

•TEOREMA DI THEVENIN
•TEOREMA DI NORTON





$$V = E_{eq} + R_{eq} I$$



$$I = A_{eq} + G_{eq} V$$

TEOREMA DI THEVENIN

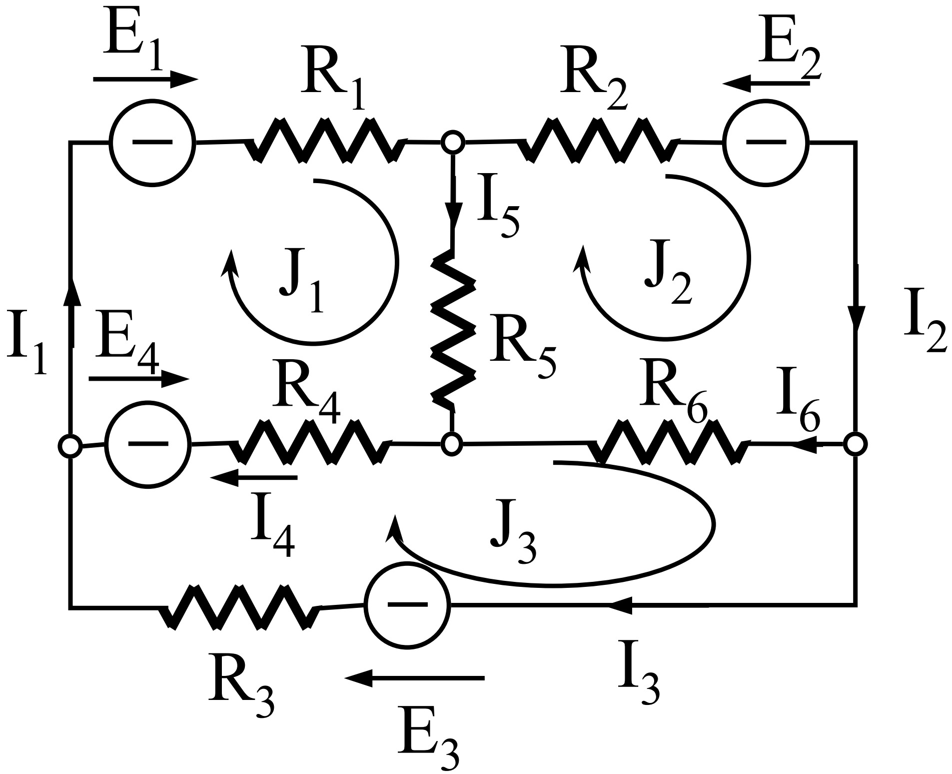
SE IL CIRCUIRO CONTIENE:

- RESISTORI E GENERATORI INDIPENDENTI E PILOTATI (LA GRANDEZZA PILOTANTE INTERNA ALLA RETE):
  - E_{TH}: tensione a vuoto fra A e B
  - I_{cc}: corrente di corto-circuito fra A e B
  - $R_{TH} = E_{TH}/ I_{cc}$
- RESISTORI E GENERATORI PILOTATI (NESSUN GENERATORE INDIPENDENTE)
  - $E_{TH} = 0$

➢ COLLEGARE UN GENERATORE DI CORRENTE DA 1 **A** FRA A E B
➢ CALCOLARE V_{AB}
➢ $R_{TH} = V_{AB}/1$

ANALOGAMENTE PER IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON

METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



$$I_1 = J_1$$
$$I_2 = J_2$$
$$I_3 = J_3$$
$$I_4 = J_1 - J_3$$
$$I_5 = J_1 - J_2$$
$$I_6 = J_2 - J_3$$

Le equazioni ai nodi sono identità

$$\begin{cases} E_1 - E_4 = R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_4 I_4 \\ -E_2 = R_2 I_2 + R_6 I_6 - R_5 I_5 \\ E_3 + E_4 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_6 I_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 - E_4 = R_1 J_1 + R_5 (J_1 - J_2) + R_4 (J_1 - J_3) \\ -E_2 = R_2 J_2 + R_6 (J_2 - J_3) - R_5 (J_1 - J_2) \\ E_3 + E_4 = R_3 J_3 - R_4 (J_1 - J_3) - R_6 (J_2 - J_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 - E_4 = (R_1 + R_5 + R_4) J_1 - R_5 J_2 - R_4 J_3 \\ -E_2 = -R_5 J_1 + (R_2 + R_5 + R_6) J_2 - R_6 J_3 \\ E_3 + E_4 = -R_4 J_1 - R_6 J_2 + (R_3 + R_4 + R_6) J_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1M} \\ \vdots & & & \\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix}$$

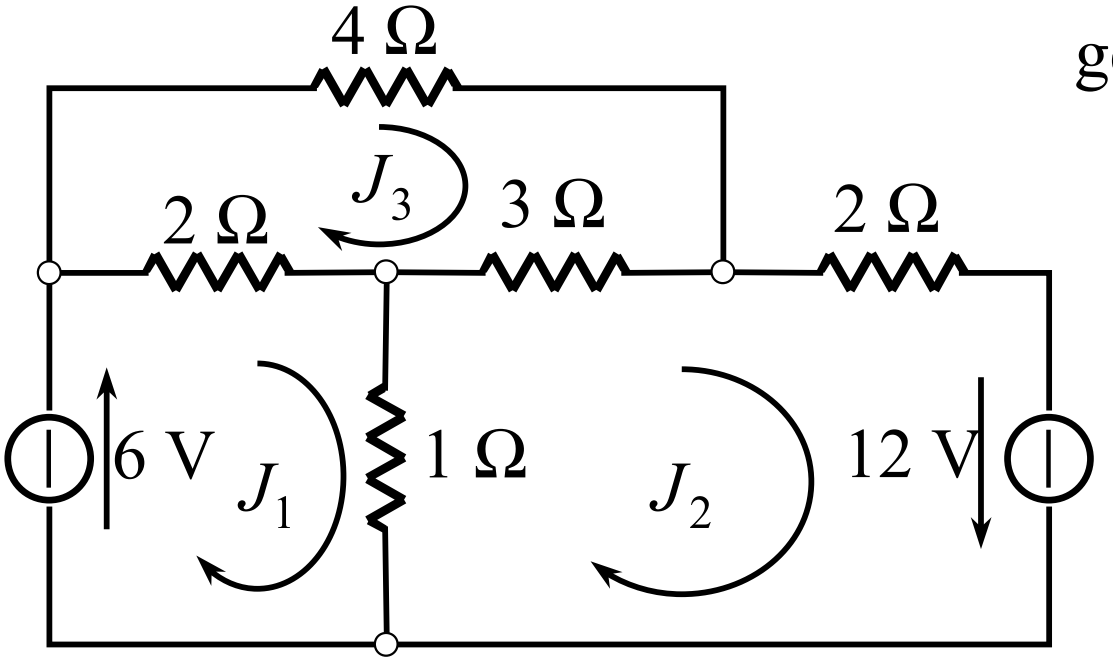
R_{ii} : auto-resistenza della maglia *i*

R_{ij} : mutua resistenza tra la maglia *i*-esima e la maglia *j*-esima

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{V1} \\ \vdots \\ E_{VM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{I1} \\ \vdots \\ E_{IM} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Trovare la potenza fornita dal generatore da 6 V



$$[Z]\cdot \underline{J} = \underline{E}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 12 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6(54-9)-12(-9-6)}{3(54-9)+(-9-6)-2(3+12)} = 5\ \mathbf{A}$$

$$P = V \cdot I = 30\ \mathbf{W}$$

METODO DEI POTENZIALI NODALI

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & & & \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$n = N - 1$

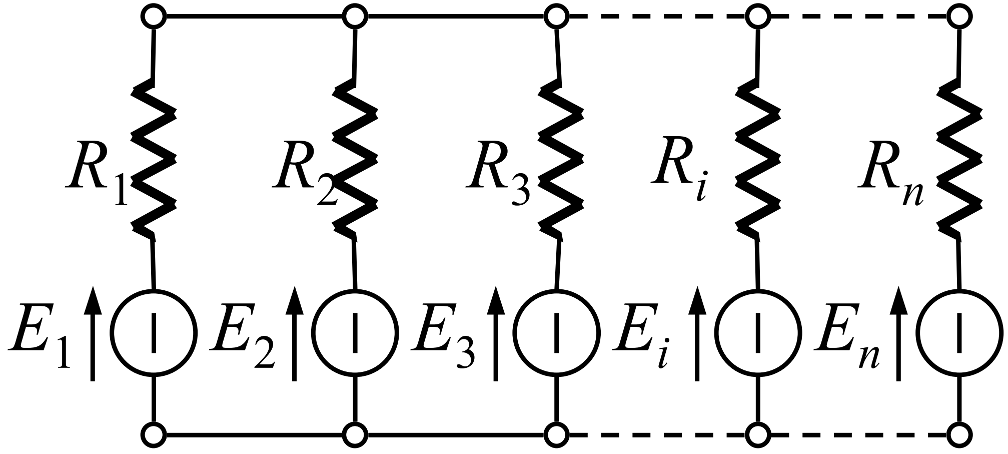
G_{ii} : conduttanza propria del nodo i

G_{ij} : conduttanza mutua tra i nodi i e j

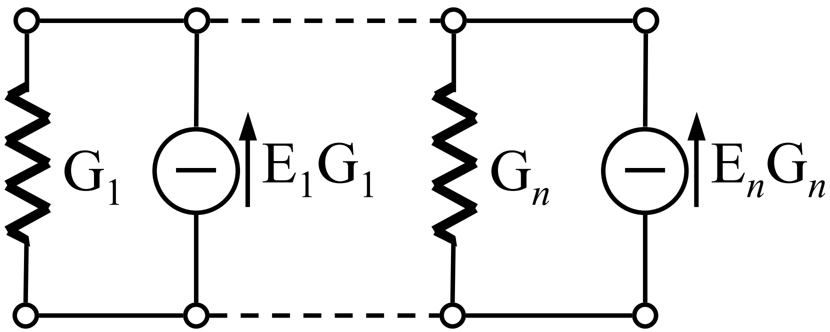
$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{I1} \\ \vdots \\ A_{In} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{V1} \\ \vdots \\ A_{Vn} \end{bmatrix}$$

Noti i potenziali si può risalire a tutte le incognite

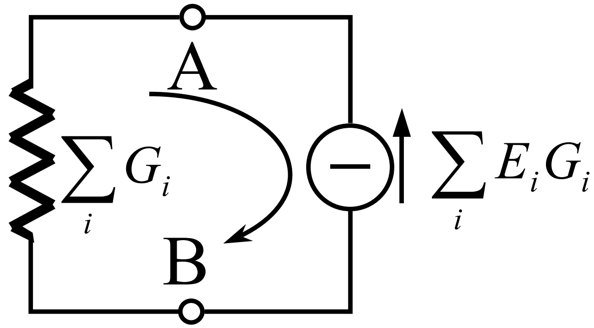
TEOREMA DI MILLMANN



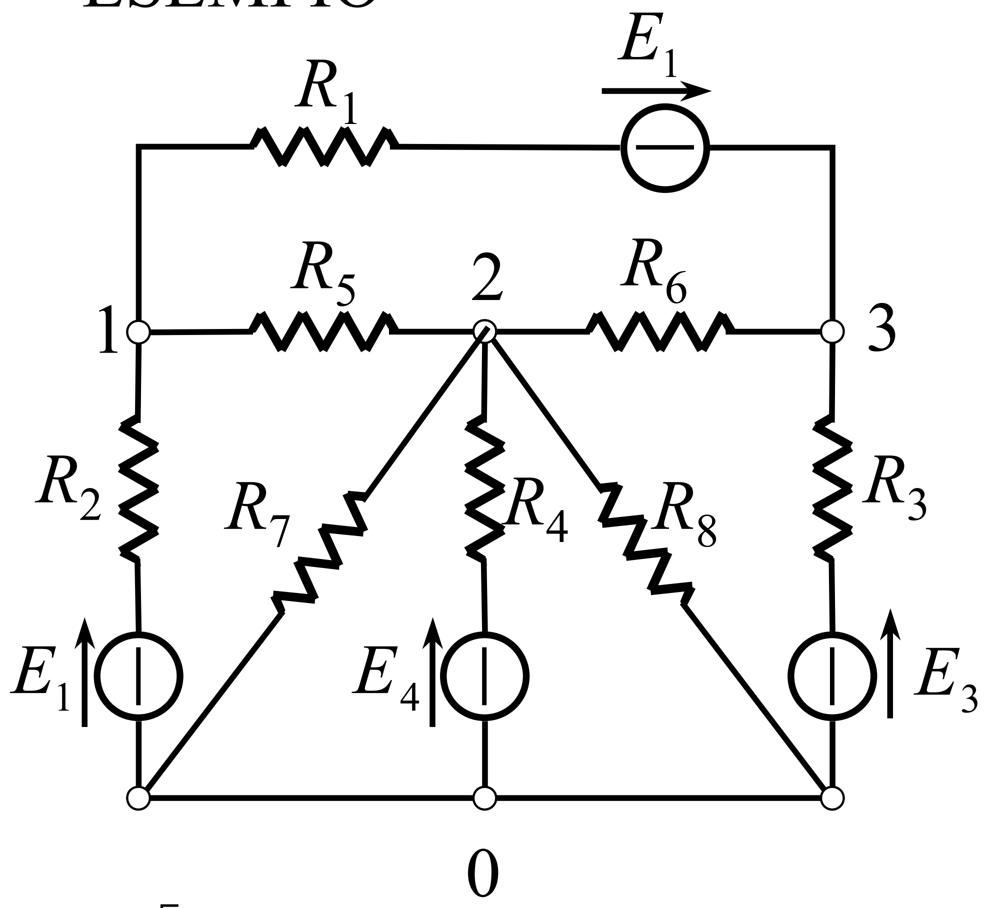
Caso limite di rete con due soli nodi



$$V_{AB} = \frac{\sum_i G_i E_i}{\sum_i G_i}$$



ESEMPIO



$E_1 = 100\ \text{V}; \quad E_2 = 50\ \text{V}$

$E_3 = -50\ \text{V}; \quad E_4 = 150\ \text{V}$

$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = R_4 = 5\ \Omega$

$R_5 = 2\ \Omega$

$R_6 = R_7 = 4\ \Omega$

$R_8 = 1\ \Omega$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2} \\ \frac{E_4}{R_4} \\ \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,5 & -0,1 \\ -0,5 & 2,2 & -0,25 \\ -0,1 & -0,25 & 0,55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = 3,61\,\mathrm{V}$$

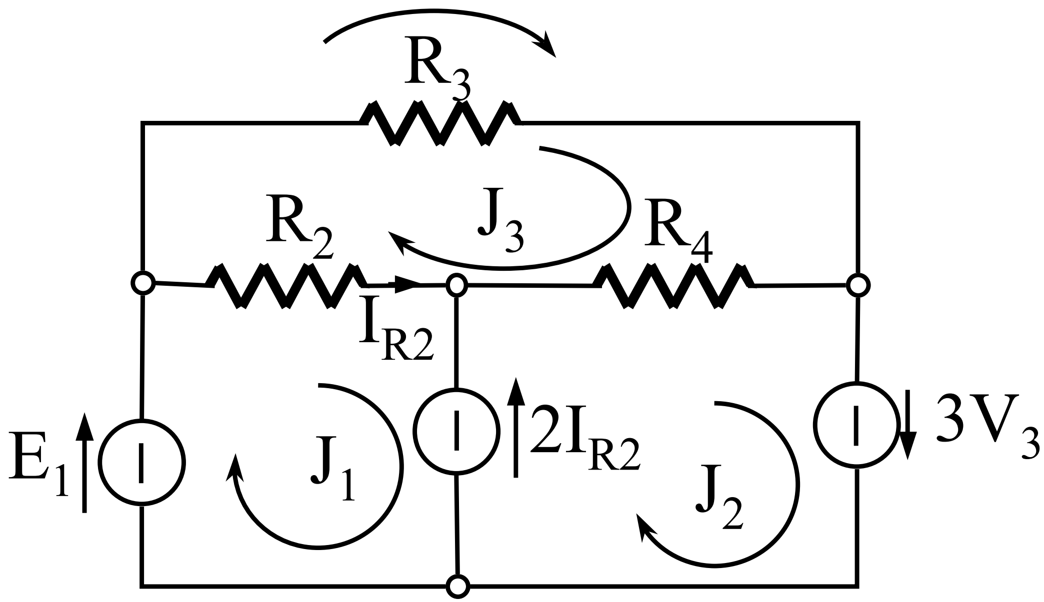
$$U_2 = 13,68\,\mathrm{V}$$

$$U_3 = 6,87\,\mathrm{V}$$

CASO IN CUI SONO PRESENTI GENERATORI PILOTATI

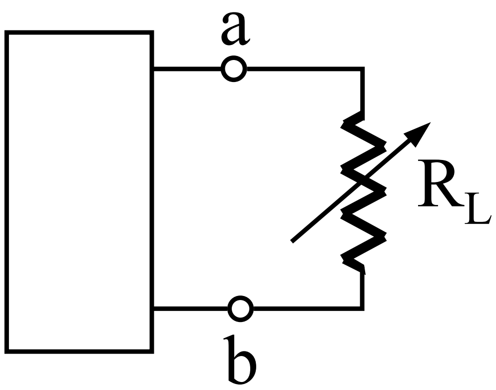
- La matrice dei coefficienti nel metodo delle maglie non è più simmetrica
- Il metodo si destruttura

Esempio:

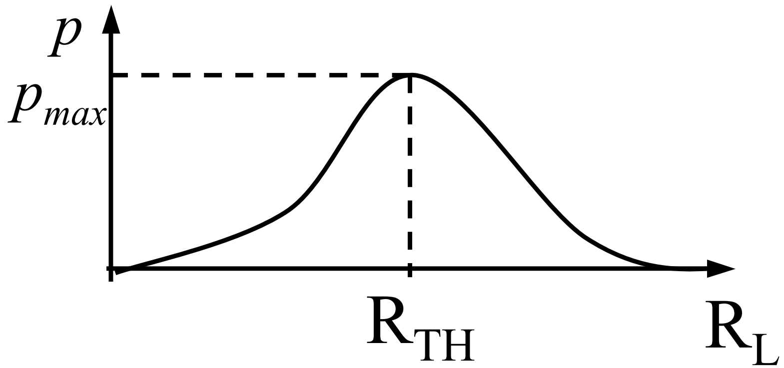


$$\begin{cases} R_2J_1 - R_2J_3 = E_1 - 2(J_1 - J_3) \\ R_4J_2 - R_4J_3 = 2(J_1 - J_3) + 3(-R_3J_3) \\ (R_2 + R_5 + R_4)J_3 - R_2J_1 - R_4J_2 = 0 \end{cases}$$

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA



THEVENIN



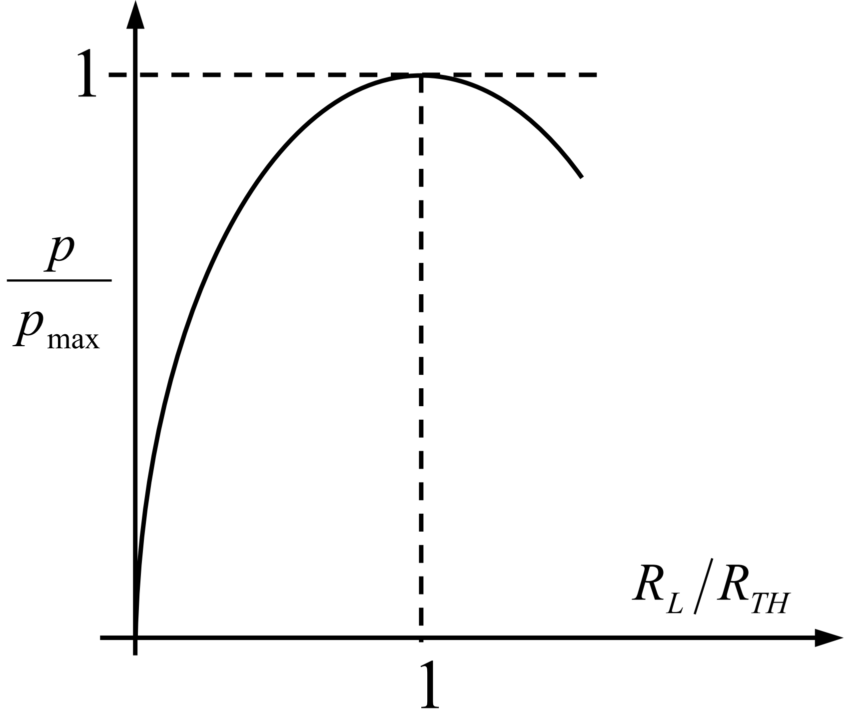
$$p = R_L i^2 = R_L \cdot \left(\frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2$$

SI HA LA MASSIMA POTENZA TRASFERITA AL CARICO QUANDO LA RESISTENZA DEL CARICO E' UGUALE ALLA RESISTENZA DI THEVENIN VISTA DAL CARICO: $R_L = R_{TH}$

Dimostrazione:

$$\frac{dp}{dR_L} = E_{TH}^2 \left[\frac{(R_{TH} + R_L)^2 - 2R_L(R_{TH} + R_L)}{(R_{TH} + R_L)^4} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{TH} + R_L - 2R_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_L = R_{TH}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{\max} = \frac{E_{TH}^2}{4R_{TH}}}$$



Rendimento in potenza:

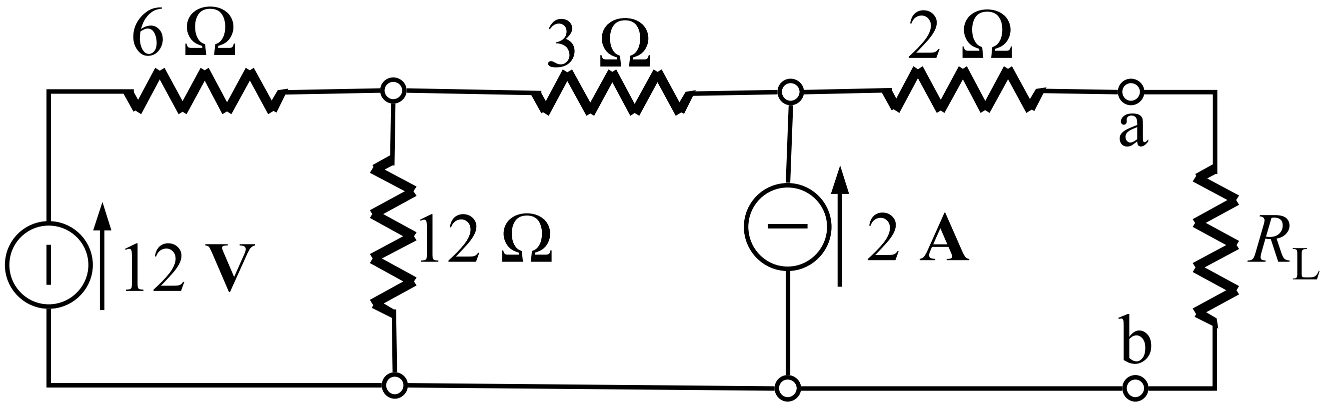
$$\eta = \frac{P_{carico}}{P_{generatore}}$$

Se $R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{TH}}$ allora:

$$\left.\begin{aligned} P_{carico} &= p_{\max} = \frac{E_{TH}^2}{4R_{TH}} \\ P_{generatore} &= E_{TH} \cdot i = E_{TH} \cdot \left(\frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right) = \frac{E_{TH}^2}{2R_{TH}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{2}$$

IN CONDIZIONI DI MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA SI HA UN RENDIMENTO PARI AL 50%

ESEMPIO



Determinare R_L affinché si abbia il massimo trasferimento di potenza al carico. Determinare la potenza massima

Risposta:

$$R_L = R_{TH} = 9\,\Omega$$

$$V_{TH} = 22\text{ V}$$

$$p_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_L} = 13{,}44\text{ W}$$

Reti in Regime Sinusoidale

INGRESSO CISOIDALE

$y_p(t)$ dipende dall'ingresso $u(t)$

INGRESSO CISOIDALE: $u(t) = U\, e^{\sigma t}\, cos(\omega\, t + \varphi)\cdot \delta_{-1}(t) \qquad U > 0$

a) $\sigma = 0;\ \omega = 0 \ \Rightarrow\ u(t) = U\, cos\varphi \cdot \delta_{-1}(t)$ GRADINO
b) $\sigma = 0; \ \Rightarrow\ u(t) = U\, cos\,(\omega\, t + \varphi)\cdot \delta_{-1}(t)$ SINUSOIDE
c) $\sigma < 0;\ \omega = 0 \ \Rightarrow\ u(t) = U\, e^{\sigma t}\, cos\varphi \cdot \delta_{-1}(t)$ ESPONENZIALE DECRESCENTE
d) $\sigma < 0;\ \omega \neq 0 \ \Rightarrow\ u(t) = U\, e^{\sigma t}\, cos(\omega\, t + \varphi)\cdot \delta_{-1}(t)$ OSCILLATORIO SMORZATC

DALL'INGRESSO CISOIDALE SI POSSONO RICAVARE COME SOTTOCASI ALCUNI TIPI DI INGRESSI COMUNEMENTE UTILIZZATI.

Una rappresentazione compatta di $u(t)$ è la seguente:

$$u(t) = \Re e\left\{\overline{U}\cdot e^{st}\right\} \qquad s = \sigma + j\omega \qquad \overline{U} = \left|\overline{U}\right|\cdot e^{j\varphi}$$

$$y_p(t) = \Re e\left\{\overline{A}\cdot e^{st}\right\} \qquad \overline{A} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}\cdot \overline{U}$$

$$\overline{A} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DELLA RETE E NON DALL'INGRESSO

RIASSUMENDO:

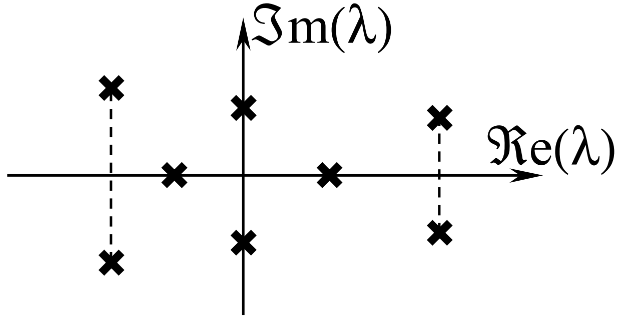
REL. I/O

- $a_n \dfrac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_0 y = b_m \dfrac{d^n u}{dt^n} + \cdots + b_0 u$
- $\begin{cases} y(0^+) \\ \vdots \\ \left.\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{0^+} \end{cases}$ CONDIZIONI INIZIALI NOTE
- $u(t) = \Re e\{\overline{U} \cdot e^{st}\}$ $\Rightarrow$INGR. CISOIDALE

$$y(t)\big|_{t>0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}}_{\text{RISP.LIBERA}} + \underbrace{\Re e\{\overline{H}(s) \cdot \overline{U}(s) \cdot e^{st}\}}_{\text{RISP.FORZATA}}$$

- λ_i FREQ. LIBERE DELLA RETE (soluzioni dell'eq. caratteristica)
- $\sum_{i=1}^{n} A_i e \lambda_i t$ Rappresenta il modo di evolvere della rete, indipendentemente dall'ingresso
- La risposta forzata evolve, nel tempo, come l'ingresso

FREQUENZE LIBERE



se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo. Per $t \to \infty$ RIMANE LA SOLA RISPOSTA FORZATA

- se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ RETE ASSOLUTAMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} = 0$ RETE SEMPLICEMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} < 0$ RETE INSTABILE

REGIME SINUSOIDALE

se $s = j\,\omega$ (ingresso sinusoidale), dopo un certo tempo si instaura il regime sinusoidale

$$\overline{A} = \dot{H}(j\omega)\cdot\overline{U}$$

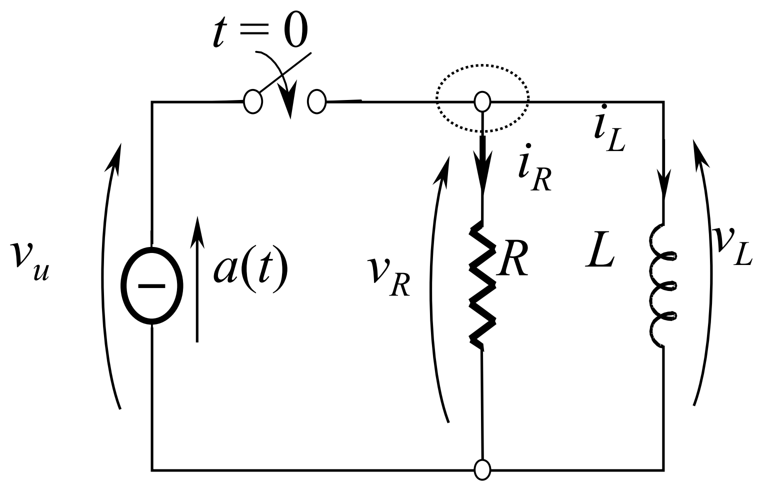
Per tempi molto grandi, possiamo prescindere dall'origine dei tempi e pensare di lavorare direttamente nel campo complesso.
La riconversione al dominio del tempo è immediata:

$$y(t) = \Re e\left\{\overline{A}\cdot e^{j\omega t}\right\} \quad \textbf{se} \quad u(t) = \Re e\left\{\overline{U}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Downarrow$$

SI UTILIZZA IL METODO SIMBOLICO

ESEMPIO



$$u(t)=a(t)$$

$$\textbf{eq. top.}\begin{cases} u(t)=i_R+i_L & \textbf{KLI} \\ v_u=v_R=v_L & \textbf{KLV} \end{cases}$$

$$\textbf{eq. comp.}\begin{cases} v_R=R\cdot i_R \\ v_L=L\cdot\dfrac{di_L}{dt} \\ a(t)=u(t) \end{cases}$$

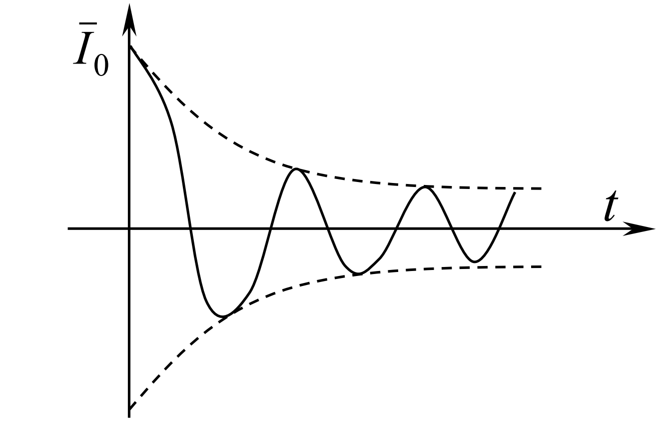
$$\boxed{u(t)=\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L}$$

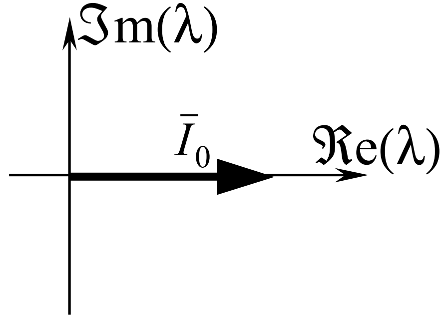
RELAZIONE I/O

Se $$u(t) = \left(I_0 \cdot e^{\sigma t} \cos \omega t\right) \cdot \delta_{-1}(t) \quad I_0 > 0 \quad \rightarrow$$
$$u(t) = \Re e\left\{\bar{I}_0 \cdot e^{st}\right\} \qquad \bar{I}_0 = I_0 \cdot e^{j0} = I_0$$

Hp: **stato nullo** : $i_L(0^-) = 0$

$$i_{Lp} = \Re e\left\{\overline{B} \cdot e^{st}\right\} = \Re e\left\{\overline{H}(s) \cdot \overline{U} \cdot e^{st}\right\} \quad H(s) = \frac{1}{s\frac{L}{R}+1} \quad i_L = -\Re e\left\{\frac{I_0}{s\frac{L}{R}+1}\right\} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{st}}{s\frac{L}{R}+1}\right\}$$



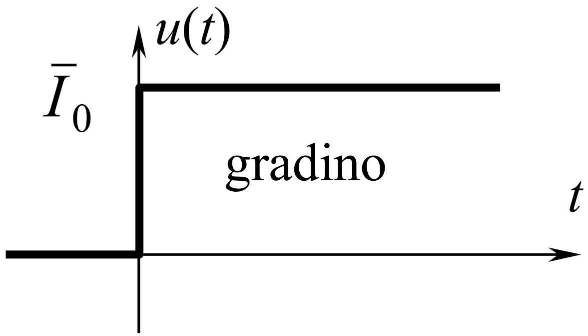


a) $\sigma = 0; \omega = 0$ ingresso a gradino
b) $\sigma = 0; \omega \neq 0$ ingresso sinusoidale

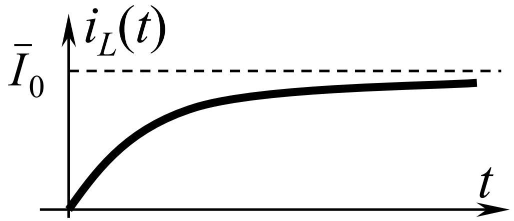
PER $t \rightarrow \infty$ LA RISPOSTA TENDE ALLA SOLA RISPOSTA FORZATA!

CASI PARTICOLARI

$\boxed{\text{a)}\ \boldsymbol{\sigma = 0;\ \omega = 0}}$ λ valore negativo $\rightarrow$ Rete assolutamente stabile



$$i_L = -I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + I_0 = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

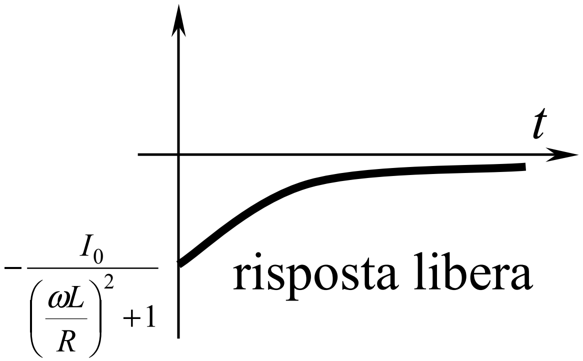


$\boxed{\text{b) } \boldsymbol{\sigma = 0;\ \omega \neq 0}}$ $u(t) = I_0 \cos \omega t$ sinusoidale

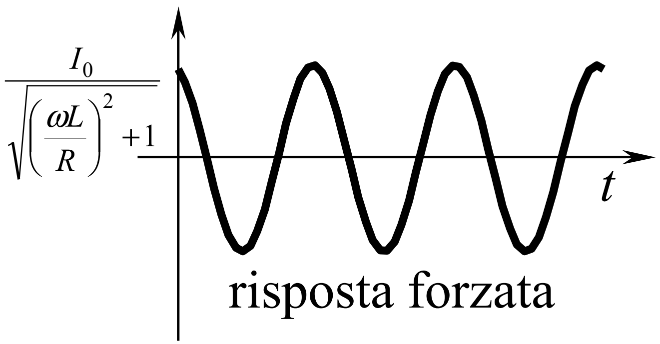
$$A = -\Re e\left\{\frac{I_0}{j\omega L/R + 1}\right\} = -\frac{I_0}{(\omega L/R)^2 + 1}$$

$$i_{Lp} = \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{j\omega t}}{j\omega L/R + 1}\right\} = \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{j\omega t}\left(1 - j\,\omega L/R\right)}{(\omega L/R)^2 + 1}\right\} =$$

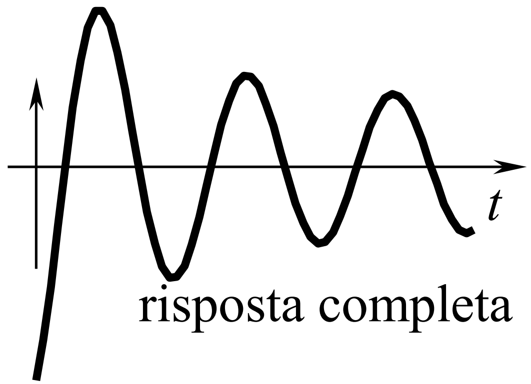
$$= \frac{I_0}{(\omega L/R)^2 + 1} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t\right)$$



risposta libera



risposta forzata

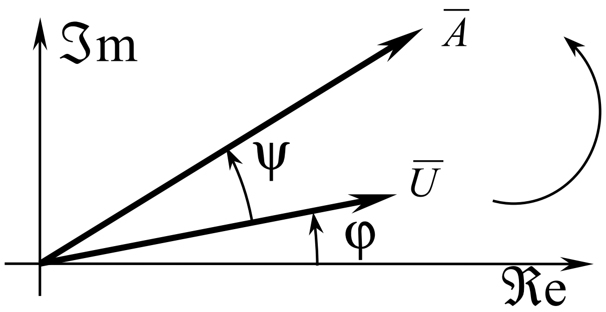


risposta completa

IN UNA RETE ASSOLUTAMENTE STABILE, IL REGIME SINUSOIDALE VIENE CONSEGUITO DA TUTTE LE VARIABILI DELLA RETE

METODO SIMBOLICO

$\overline{U}, \overline{A}$ sono due fasori



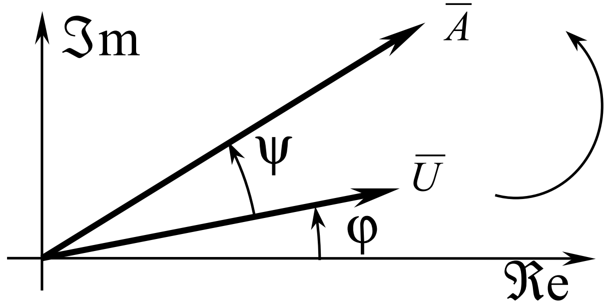
verso positivo
per le fasi
(convenzionalmente)

$$\overline{U} = \left|\overline{U}\right| \cdot e^{j\varphi}$$

$$\overline{H} = \left|\overline{H}\right| \cdot e^{j\psi}$$

$$\overline{A} = H \cdot U \cdot e^{j(\varphi+\psi)}$$

Le grandezze sono iso-frequenziali, quindi, dopo un certo tempo, l'istante iniziale perda significato ed è superfluo indicare il riferimento degli assi. L'importante è che le diverse grandezze fasoriali stiano in un determinato rapporto di fase tra loro



Nella figura, $\overline{A}$ è in anticipo rispetto a $\overline{V}$

ANTICIPO $\rightarrow$ ANGOLO POSITIVO
RITARDO $\rightarrow$ ANGOLO NEGATIVO

CASI PARTICOLARI:

a) $\psi = \pi/2$ i fasori sono in quadratura
b) $\psi = \pi$ i fasori sono in opposizione di fase
c) $\psi = 0$ i fasori sono in fase

PRINCIPI DI KIRCHHOFF

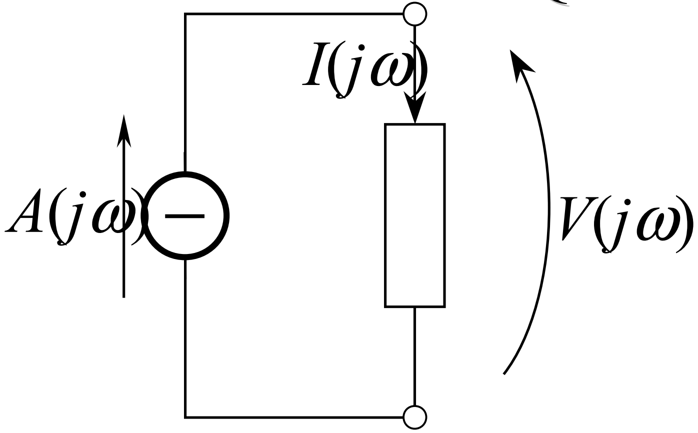
Dominio del Tempo

$$\begin{cases} \sum v = 0 \\ \sum i = 0 \end{cases}$$

Dominio della Frequenza

$$\begin{cases} \sum \overline{V} = 0 \\ \sum \overline{I} = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONE DEI COMPONENTI



$$\overline{V}(j\varpi) = \dot{H}(j\omega) \cdot \overline{I}(j\omega)$$

$H(j\omega)$ prende il nome di IMPEDENZA $\dot{Z}(j\varpi)$

$$\dot{Z}(j\omega) = \dot{Z}$$

$$\overline{V} = \dot{Z} \cdot \overline{I}$$

Se esiste l'inversa della funzione di trasferimento:

AMMETTENZA $\dot{Y}(j\omega) = \dfrac{1}{\dot{Z}(j\omega)} = \dot{Y}$

VALORE EFFICACE. In elettrotecnica si utilizzano spesso i valori efficaci delle grandezze sinusoidali, soprattutto quando si parla degli aspetti energetici. Il valore efficace è definibile per tutte le grandezze periodiche:

$$\boxed{\text{VALORE EFFICACE} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}}$$

Nel caso sinusoidale:

$$V_{eff} = V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_M^2 \sin^2(\omega t)\cdot dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

VALORE EFFICACE = $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$

Se $f(t) = A_M \cos(\varpi t + \varphi)$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A_M^2 \cos^2(\varpi t + \varphi)dt} = \sqrt{\frac{1}{T} A_M^2 \int_0^T \cos^2(\varpi t + \varphi)dt}$$

ma: $\int \cos^2(x)dx = \int \cos x \cdot \cos x dx =$ (integrando per parti)

$$\sin x \cos x + \int \sin x \cdot \sin x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx =$$

$$\sin x \cos x + \int (1-\cos^2 x)dx = \sin x \cos x + \int dx + \int -\cos^2 x dx \Rightarrow$$

$$2\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

allora

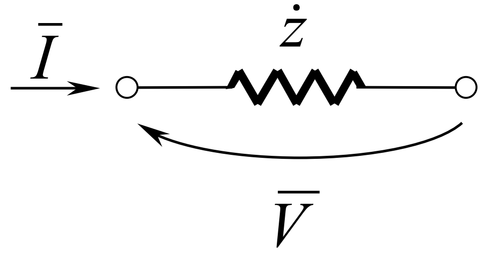
$$\int_0^T \cos^2(\varpi t + \varphi)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\varpi}\left[\sin \varpi T \cos \varpi T + \varpi T - \sin 0 \cos 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{2\pi}\left[\sin \frac{2\pi}{T}T \cos \frac{2\pi}{T}T + \frac{2\pi}{T}T\right] = \frac{1}{2}\frac{T}{2\pi}\frac{2\pi}{T}T = \frac{T}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} A_M^2 \frac{T}{2}} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

RESISTORE

$$v = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = R \cdot \overline{I} \qquad \dot{z} = R \qquad \dot{y} = \frac{1}{R} = G$$

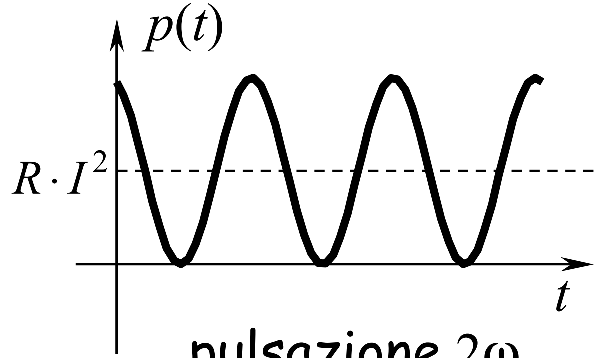


$$p(t) = v \cdot i = R \cdot I_{\max}^2 \cos^2 \omega t$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \Rightarrow \quad p(t) = R \cdot I_{\max}^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

$$I_{\max} = \sqrt{2} \cdot I_{eff} = \sqrt{2} \cdot I$$

$$p(t) = R \cdot I^2 (1 + \cos 2\omega t) = V \cdot I + V \cdot I \cdot \cos 2\omega t$$



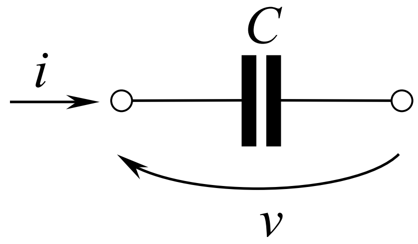
pulsazione 2ω

NOTA: La potenza assorbita dal resistore è sempre positiva o, al più, nulla, è pulsante di pulsazione doppia rispetto a quella della tensione o della corrente

IL VALORE $V \cdot I$ E' IL VALORE MEDIO DI $p(t)$ NEL PERIODO E VIENE CHIAMATO <u>POTENZA ATTIVA</u>

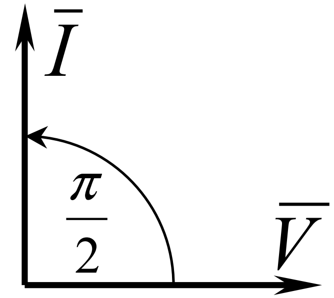
$$P = R \cdot I^2 = V \cdot I$$

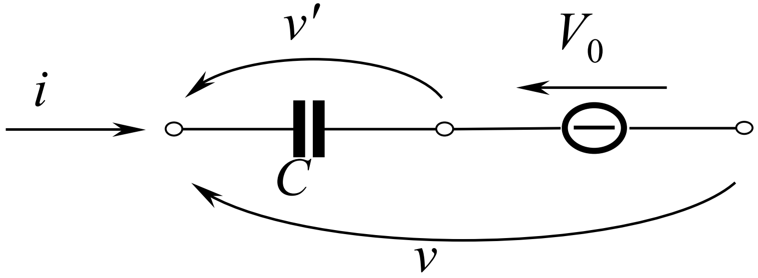
CAPACITORE



$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V}(j\omega)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \qquad \dot{Y} = j\omega C$$



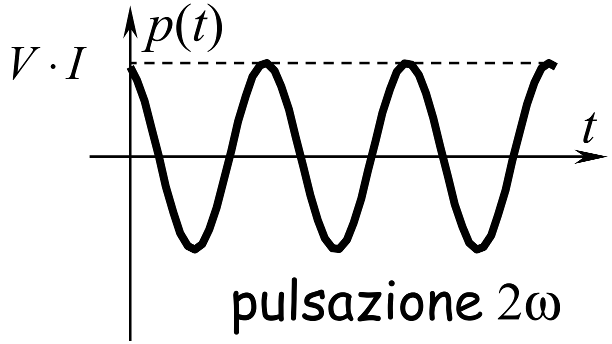


$$v'(0^-) = 0$$

$$i(t) = C\frac{dv'}{dt} \qquad t > 0$$

NOTA: SI PUO' PARLARE DI IMPEDENZA DI UN COMPONENTE SOLO SE TALE COMPONENTE E' NELLO STATO ZERO

$$p(t) = v \cdot i = \frac{I_{\max}^2}{\omega C} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = 2VI \sin \omega t \cdot \cos \omega t = VI \sin 2\omega t$$



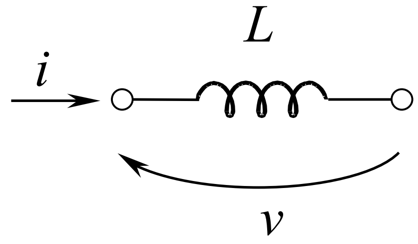
La potenza assorbita è sinusoidale di pulsazione doppia rispetto a tensione e corrente ed ha valore medio nullo. LA POTENZA ATTIVA E' NULLA

La quantità $Q = V \cdot I$ pari all'ampiezza massima dell'oscillazione della potenza istantanea è detta POTENZA REATTIVA.
La potenza reattiva si misura in VAR

Se $\omega = 0 \rightarrow j\omega C = 0$ (regime permanente) Il condensatore si comporta da circuito aperto

- PARALLELO DI CAPACITORI
- SERIE DI CAPACITORI

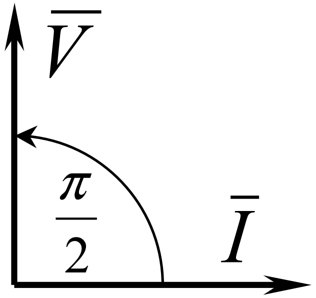
INDUTTORE



$$v = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = j\omega L \cdot \overline{I}(j\omega)$$

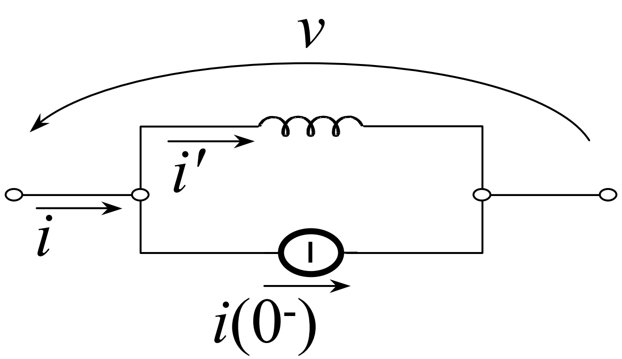
$$\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dot{Z}(j\omega) = j\omega L \qquad \dot{Y} = \frac{1}{j\omega L}$$

RAPPRESENTAZIONE FASORIALE



$\overline{V}$ è in anticipo di π /2 rispetto a $\overline{I}$

Se lo stato iniziale non è nullo si può ricorrere al circuito equivalente:

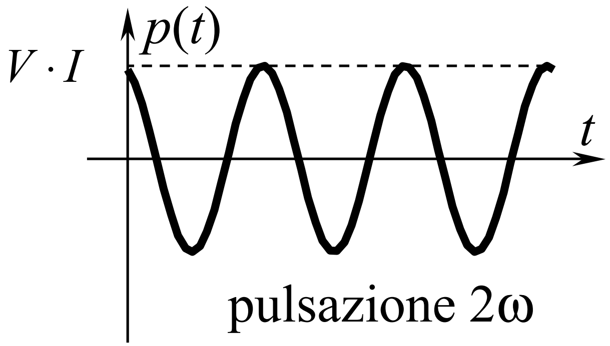


$$v = L\frac{di'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = j\omega L \cdot \overline{I}'(j\omega)$$

$$p(t) = v \cdot i = -\sqrt{2} I \cos \omega t \cdot \sqrt{2} \omega L \sin \omega t =$$

$$= -\omega L I^2 2 \cos \omega t \sin \omega t =$$

$$= -\omega L I^2 \sin 2\omega t = -VI \sin 2\omega t$$



La potenza istantanea è una sinusoide di pulsazione doppia rispetto a tensione e corrente.

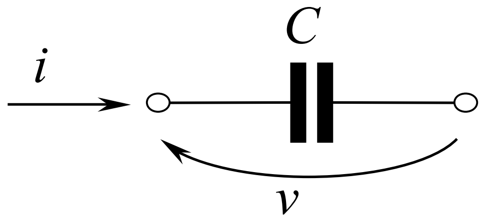
LA POTENZA ATTIVA E' NULLA

Q = V·I POTENZA REATTIVA

- SERIE DI INDUTTORI
- PARALLELO DI INDUTTORI

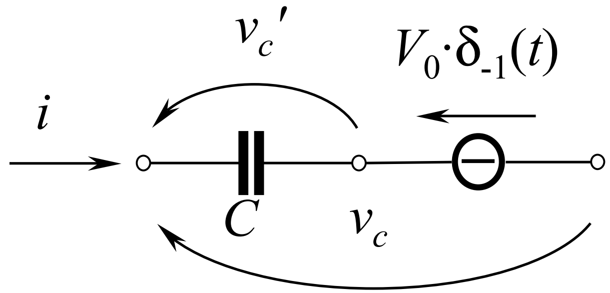
MEMORIZZAZIONE DELLO STATO INIZIALE

SE NON SI E' NELLO STATO ZERO NON SI PUO' PARLARE DI IMPEDENZA DI UN COMPONENTE



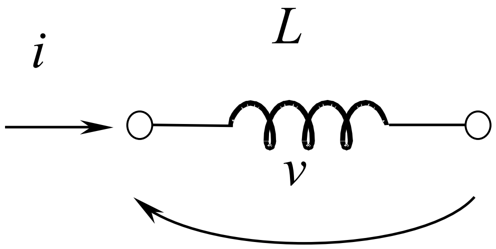
$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau)\, d\tau + \mathrm{cost} \qquad v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{t} i\, d\tau + V_0 = \frac{1}{C} \cdot q\left(t \geq 0^-\right) + V_0$$



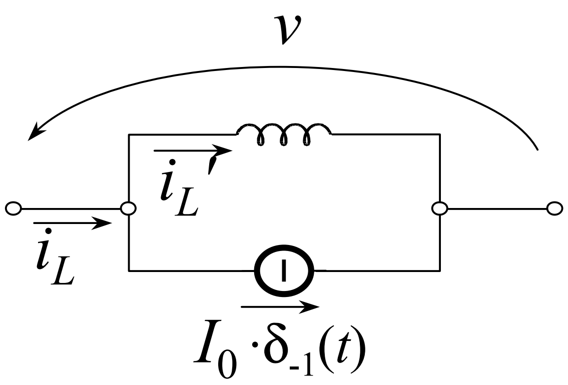
$$v_c'\left(0^-\right) = 0 \qquad i(t) = C\,\frac{dv'}{dt}$$

Lo stato del capacitore può essere "memorizzato" mediante un generatore di tensione



$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{L} v(\tau)\, d\tau + \text{cost} \qquad i(t) = \frac{\varphi(t)}{L}$$

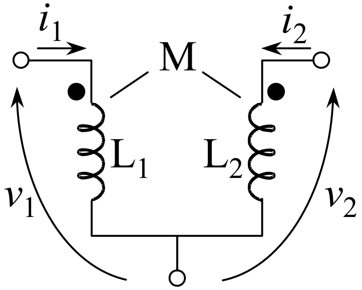
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{t} v\, d\tau + I_0 = \frac{1}{L} \cdot \varphi\left(t \geq 0^-\right) + I_0$$



$$i_L{}'\left(0^-\right) = 0 \qquad v(t) = L\,\frac{di_L{}'}{dt}$$

Lo stato dell'induttore può essere "memorizzato" mediante un generatore di corrente

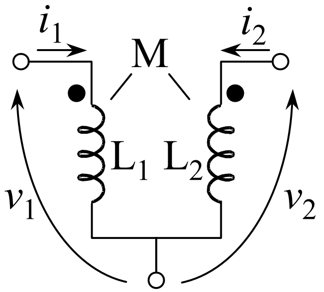
MUTUA INDUTTANZA -1



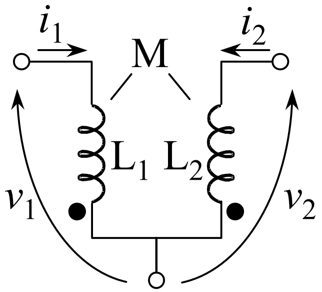
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M_{12} \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M_{21} \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Hp: $\begin{cases} \text{non dissipativo} \\ \text{passivo} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} M_{12} = M_{21} = M \\ L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \end{matrix}$

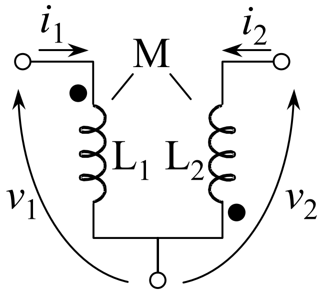
$k = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$ COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO ($k \leq 1$)



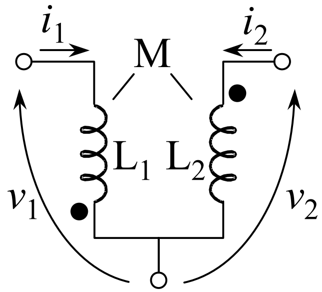
a) M > 0



b) M > 0



c) M < 0



d) M < 0

I regime sinusoidale:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \bar{I}_2 \\ \overline{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M_{21} \bar{I}_1 \end{cases}$$

Se inizialmente si è nello stato zero, $j\omega L_1$, $j\omega L_2$ e $j\omega M$ sono delle impedenze (Ω).

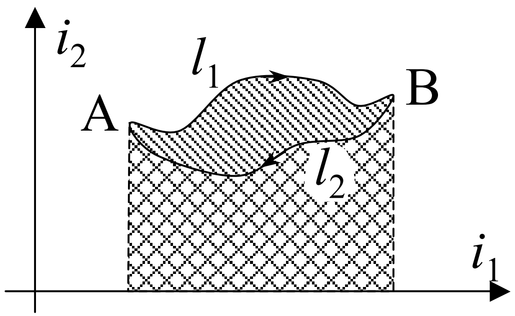
LA MUTUA A 4 TERMINALI HA LE STESSE EQUAZIONI DI QUELLA A 3 TERMINALI

MUTUA INDUTTANZA -2

Hp: PASSIVO
NON DISSIPATIVO

$$M_{12} \neq M_{21} \quad \Rightarrow \quad M_{21} = M_{12} + g$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2\right) + g \cdot i_2 \frac{di_1}{dt}$$



Per la condizione di NON DISSIPATIVITA':

$$\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint p(t) \cdot dt = 0$$

$\Delta\omega_1$ e $\Delta\omega_2$ devono dipendere solo dagli estremi →
$p(t)$ deve essere un differenziale esatto →

$$g = 0 \rightarrow M_{12} = M_{21} = M$$

Infatti: $\oint g \cdot i_2 di_1 = 0$ AREA A TRATTEGGIO SEMPLICE

Lungo le l_1 e l_2 $\int g \cdot i_2 di_1$ assume valori differenti . Per la condizione di passività:

$$\omega = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt \geq 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \geq 0 \; \forall t \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

FORMA QUADRATICA SEMIDEFINITA POSITIVA → MINORI ≥ 0 →

$L_1 \geq 0$ $\qquad$ $L_2 \geq 0$ $\qquad$ $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$

TRASFORMATORE IDEALE

Se $k = 1$ (accoppiamento stretto)

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \sqrt{L_1 L_2}\dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\dfrac{di_2}{dt} \\ \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} v_2 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} \cdot v_2 = n \cdot v_2$$

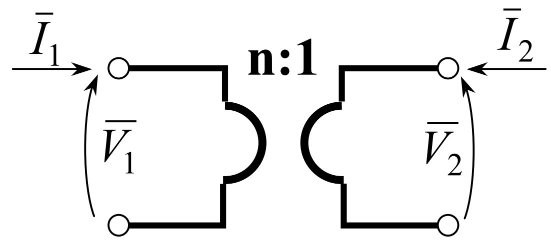
Nel dominio della frequenza:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega\sqrt{L_1 L_2}\bar{I}_2 \\ \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} \cdot \bar{V}_2 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega\sqrt{L_1 L_2}\bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{V}_1 = n \cdot \bar{V}_2 \qquad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{1}{j\omega L_1}\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

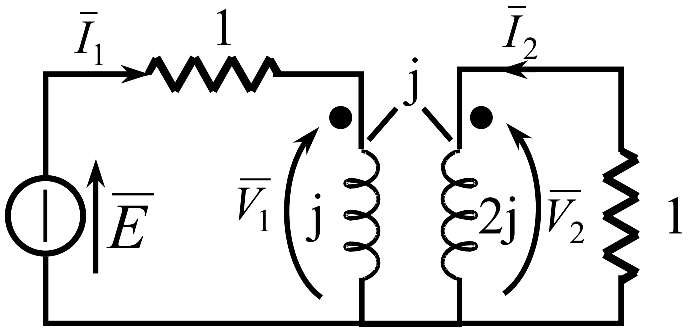
Per L_1 , $L_2 \to \infty$ si può trascurare il termine $\dfrac{1}{j\omega L_1}\dfrac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}$ mentre $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} = \dfrac{1}{n}$ da cui:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

TRASFORMATORE IDEALE



ESEMPIO



Calcolare $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ a regime

$e(t) = \sqrt{2} \cdot 30 \cos \omega t$

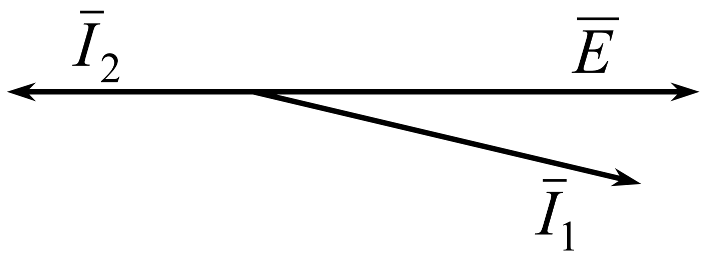
$$\begin{cases} 30 = 1 \cdot \bar{I}_1 + j \cdot \bar{I}_1 + j \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = j \cdot \bar{I}_1 + 2j \cdot \bar{I}_2 + 1 \cdot \bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30 = (1 + j) \cdot \bar{I}_1 + j \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = j \cdot \bar{I}_1 + (1 + j2) \cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{-j}{1 + j2} \cdot \bar{I}_1 = \frac{-j \cdot (1 - j2)}{5} \cdot \bar{I}_1 = \frac{-2 - j}{5} \cdot \bar{I}_1$$

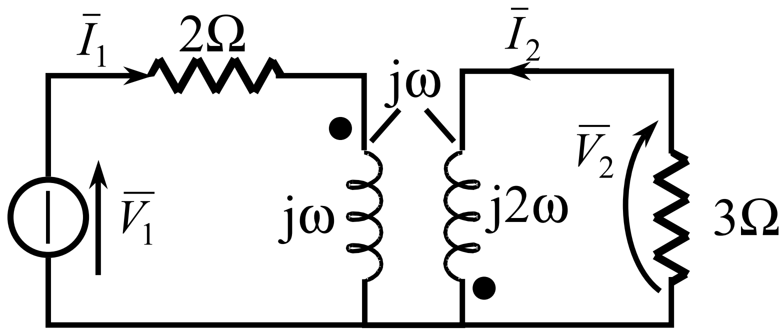
$$30 = \left(1 + j - \frac{1 - 2j}{5}\right) \cdot \bar{I}_1 = \left(\frac{6}{5} + j\frac{3}{5}\right) \cdot \bar{I}_1$$

$$\bar{I}_1 = \frac{30 \cdot 5}{6 + j3} = \frac{30 \cdot 5}{3 \cdot (2 + j)} = \frac{10 \cdot 5 \cdot (2 - j)}{5} = 10 \cdot (2 - j)\ \mathbf{A} = 22{,}4 \angle -26{,}6°\ \mathbf{A}$$

$$\bar{I}_2 = -2 \cdot (2 - j) \cdot (2 + j) = -2 \cdot (4 + 1) = -10\ \mathbf{A}$$



ESEMPIO



$v_1 = 100\cos 10t$

trovare la tensione $\overline{V_2}$ e $v_2(t)$

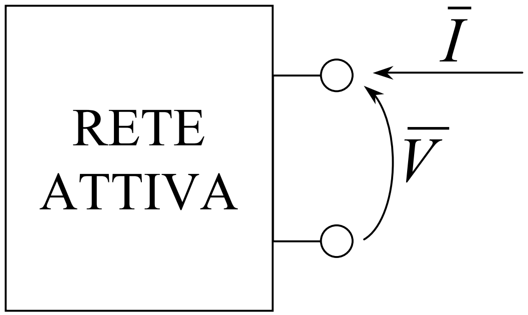
$$\begin{cases} \overline{V_1} = (2 + j\omega)\cdot \bar{I}_1 - j\omega \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = -j\omega \cdot \bar{I}_1 + (3 + j2\omega)\cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & \overline{V_1} \\ -j\omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -j\omega \\ -j\omega & 3 + j2\omega \end{vmatrix}} = \frac{j\omega \cdot \overline{V_1}}{(2 + j\omega)(3 + j2\omega) + \omega^2} = \frac{j\omega \cdot \overline{V_1}}{6 + j4\omega + j3\omega - 2\omega^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{j\omega \cdot \overline{V}}{\left(6 - \omega^2\right) + j7\omega} = \frac{j10^3}{-94 + j70} = \frac{j10^3}{117{,}2\angle -36{,}674°} = 8{,}53\angle 126{,}7°\ \mathbf{A}$$

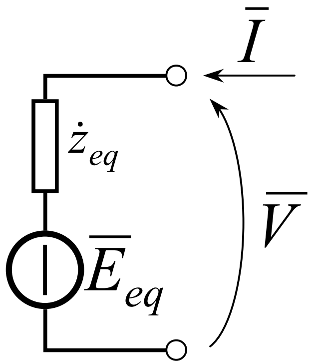
$$\overline{V_2} = -R \cdot \bar{I}_2 = -3 \cdot 8{,}53\angle 126{,}7° = -25{,}6\angle 126{,}7°\ \mathbf{V} \qquad v_2(t) = -25{,}6\cos(10t + 2{,}21)\ \mathbf{V}$$

TEOREMI DI THEVENIN E NORTON



Rete attiva costituita da componenti lineari tempo-invarianti

THEVENIN

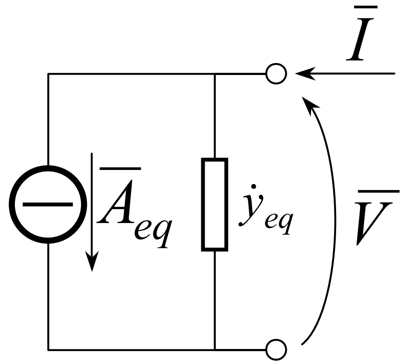


EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\boxed{\overline{V} = \dot{Z}_{eq}\overline{I} + \overline{E}_{eq}}$$

Il duale è il teorema di Norton

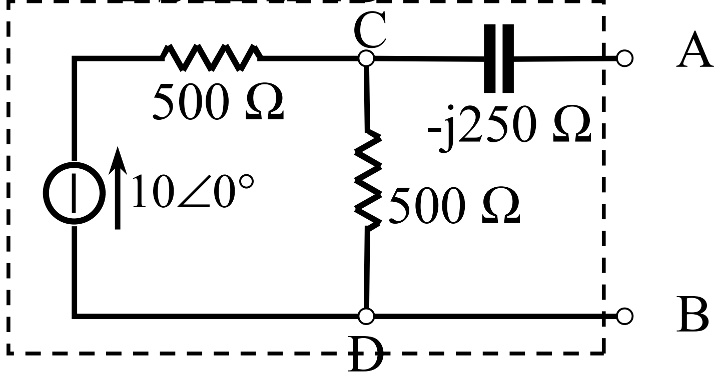
NORTON



EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\boxed{\overline{I} = \dot{Y}_{eq} \cdot \overline{V} + \overline{A}_{eq}}$$

ESEMPIO

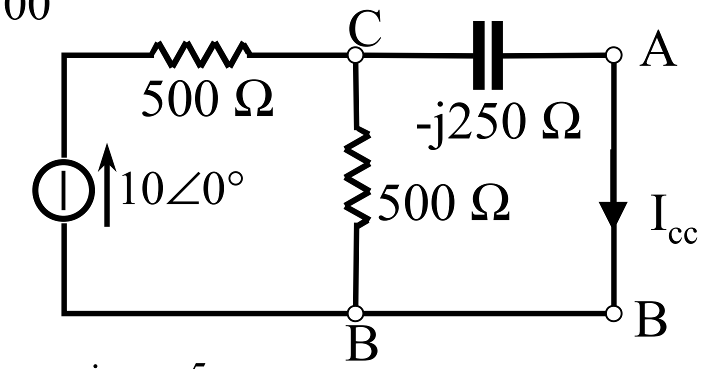


Trovare gli equivalenti di Thevenin e Norton

THEVENIN

$$\overline{E}_{eq} = 10 \cdot \frac{500}{500+500} = 5\angle 0° \ \mathbf{V} \qquad \dot{z}_{eq} = -j250 + \frac{500 \cdot 500}{500+500} = 250 - j250 = 250 \cdot \sqrt{2}\angle -45° \ \Omega$$

NORTON



$$\dot{y}_{eq} = \frac{1}{\dot{z}_{eq}} = \frac{1}{250 \cdot \sqrt{2}}\angle 45° \ \Omega = 2{,}828 \cdot 10^{-3}\angle 45°$$

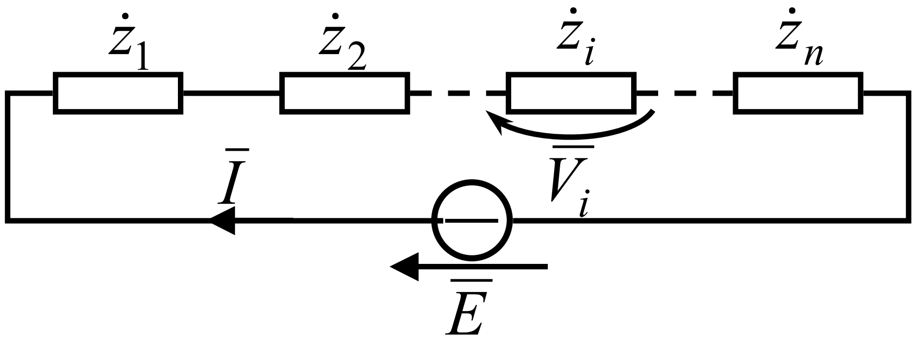
$$\overline{I}_{cc} = \frac{\overline{V}_{CB}}{-j250} \qquad \overline{V}_{CB} = 10\angle 0° \cdot \frac{\frac{500(-j250)}{500-j250}}{500 + \frac{500(-j250)}{500-j250}} = 10\angle 0° \cdot \frac{-j}{2-j2} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle -45°$$

$$\overline{I}_{cc} = \frac{5\angle -45°}{\sqrt{2} \cdot 250\angle -90°} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 50}\angle 45° = 0{,}01414\angle 45° = \overline{A}_{eq}$$

$$\overline{E}_{eq} \cdot \dot{y}_{eq} = \frac{5}{250 \cdot \sqrt{2}}\angle 45° = 0{,}01414\angle 45° = \overline{A}_{eq}$$ c.v.d.

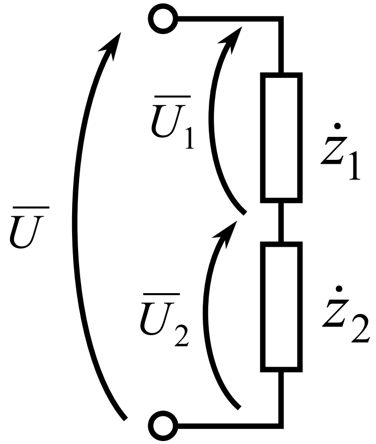
PARTITORI

PARTITORE DI TENSIONE:



$$\begin{cases} \overline{V}_i = \dot{z}_i \cdot \overline{I} \\ \overline{E} = \left(\sum_i \dot{z}_i \right) \cdot \overline{I} \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{V}_i = \overline{E} \cdot \frac{\dot{z}_i}{\sum_i \dot{z}_i}$$

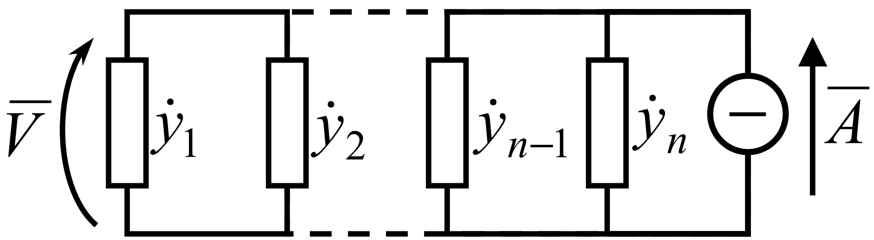
$n = 2$



$$\overline{U}_1 = \overline{U} \cdot \frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

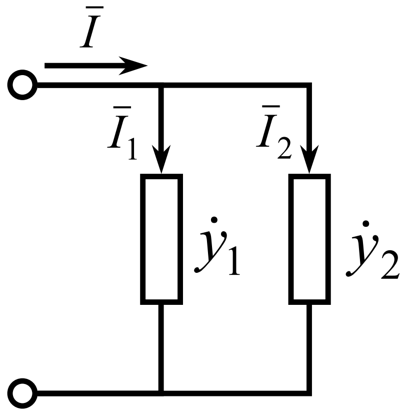
$$\overline{U}_2 = \overline{U} \cdot \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

PARTITORE DI CORRENTE:



$$\begin{cases} \overline{I}_i = \dot{y}_i \cdot \overline{V} \\ \overline{A} = \left(\sum_i \dot{y}_i \right) \cdot \overline{V} \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{I}_i = \overline{A} \cdot \frac{\dot{y}_i}{\sum_i \dot{y}_i}$$

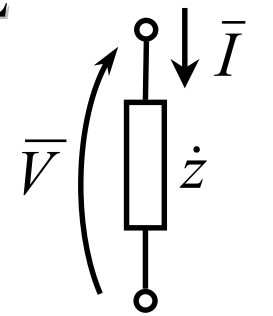
$n = 2$



$$\overline{I}_1 = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Y}_1}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2} = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

$$\overline{I}_2 = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE



$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t = \Re e\left\{\sqrt{2} \cdot \bar{I} \cdot e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \bar{I} = I \cdot e^{j0}$$

$$\dot{z} = z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\bar{V} = \dot{z} \cdot \bar{I} = z \cdot e^{j\varphi} \cdot I \cdot e^{j0} = z \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$

$$v(t) = \Re e\left\{\sqrt{2} \cdot zI \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = v \cdot i = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2}I \cos \omega t = 2VI \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t$$

$$\text{ma :} \quad 2\cos(\omega t + \varphi)\cos \omega t = \cos\varphi(1 + \cos 2\omega t) - \sin\varphi \sin 2\omega t$$

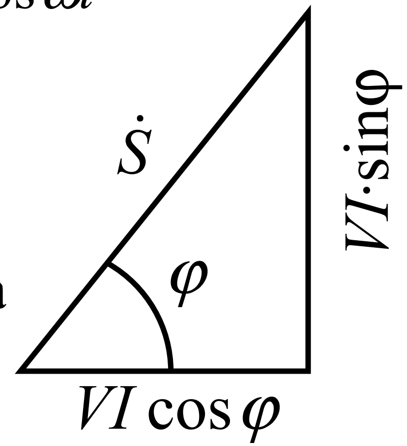
$$p(t) = \underbrace{VI \cdot \cos\varphi(1 + \cos 2\omega t)} \quad - \quad \underbrace{VI \cdot \sin\varphi \sin 2\omega t}$$

Potenza Attiva istantanea **Potenza Reattiva istantanea**

valore medio $\Downarrow$ valore massimo $\Downarrow$

$$P = VI \cos\varphi \qquad Q = VI \sin\varphi$$

Potenza Attiva [W] **Potenza Rettiva [VAR]**



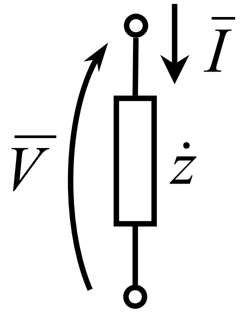
TRIANGOLO DELLE POTENZE

$\dot{S} = P + jQ$ **Potenza Complessa**

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{V^2 I^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = VI$ **Potenza Apparente [VA]**

Si dimostra facilmente che: $\dot{S} = \overline{V} \cdot \overline{I}^*$

Infatti:



$$\dot{z} = R + jX = |\dot{z}| \cdot e^{j\varphi}$$

se $\overline{I} = I \cdot e^{j\psi}$ allora:

$$\overline{V} = \dot{z} \cdot \overline{I} = zI \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} = V \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi}$$

Perciò:

$$\overline{V} \cdot \overline{I}^* = Ve^{j\varphi} e^{j\psi} \cdot I \cdot e^{-j\psi} = VI \cdot e^{j\varphi} =$$
$$= VI \cdot \cos\varphi + jVI \cdot \sin\varphi = P + jQ = \dot{S}$$

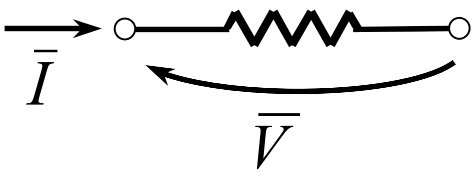
P rappresenta la potenza dissipata

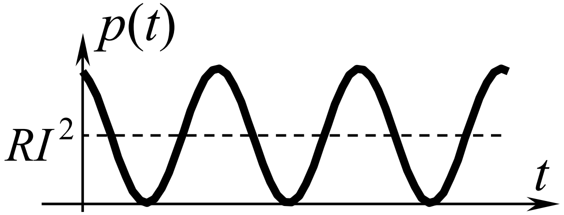
Q rappresenta la potenza scambiata con altri accumulatori di energia

cos φ : fattore di potenza del carico

CASI PARTICOLARI

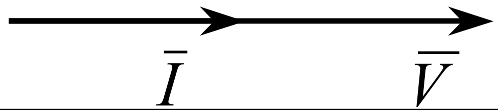
➢RESISTORE $\varphi = 0$ $p(t) = VI(1+\cos 2\omega t) = RI^2(1+\cos 2\omega t)$



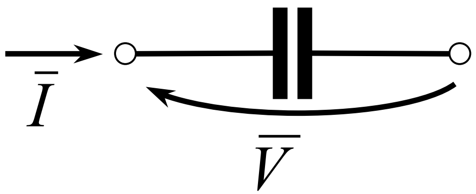


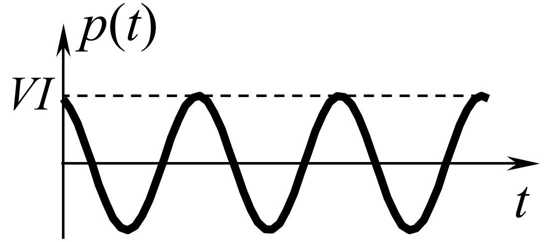
valore medio: $P = VI$

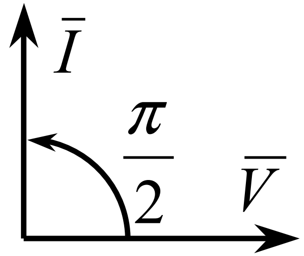
$Q = 0$



➢CAPACITORE $\varphi = \pi/2$ anticipo $p(t) = -VI \sin 2\omega t$



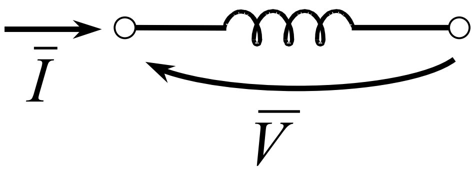


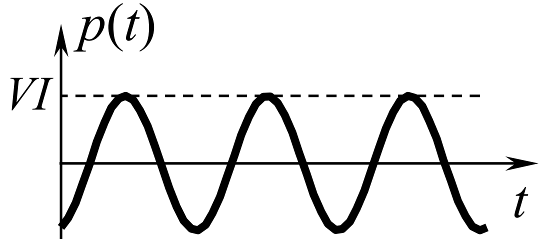


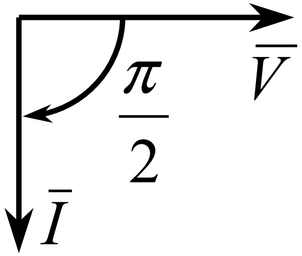
$P = 0$

$Q = \text{-}VI$

➢INDUTTORE $\varphi = \pi/2$ ritardo $p(t) = VI \sin 2\omega t$







$P = 0$

$Q = VI$

TEOREMA DI BOUCHEROT

Dal teorema di Tellegen: $\sum_h v_h^{'} \cdot i_h^{''} = 0$

In regime sinusoidale: $\left\{ \overline{V}_h \right\}$; $\left\{ \overline{I}_h^* \right\}$

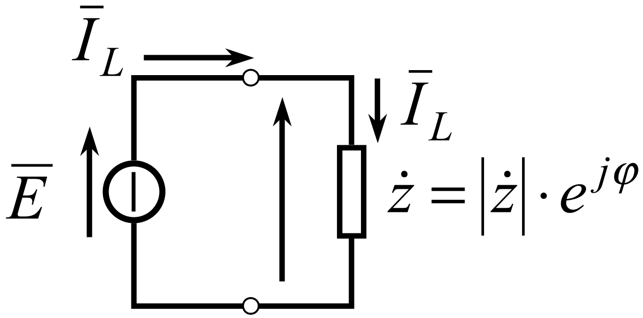
Applichiamo Tellegen agli insiemi delle $\left\{ \overline{V}_h \right\}$ e $\left\{ \overline{I}_h^* \right\}$

$$\sum_h \overline{V}_h \cdot \overline{I}_h^* = \sum_h \left(P_h + jQ_h \right) = 0$$

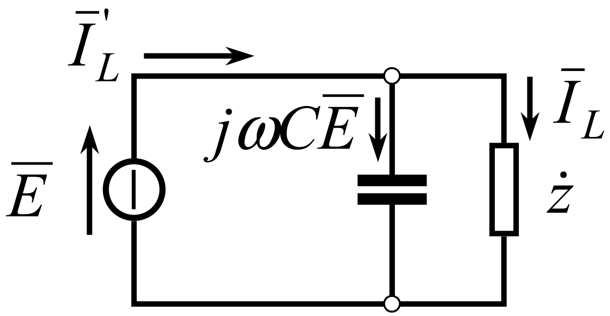
Affinché sia verificata deve essere:

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_h P_h = 0 \\ \sum_h Q_h = 0 \end{gathered}}$$

RIFASAMENTO



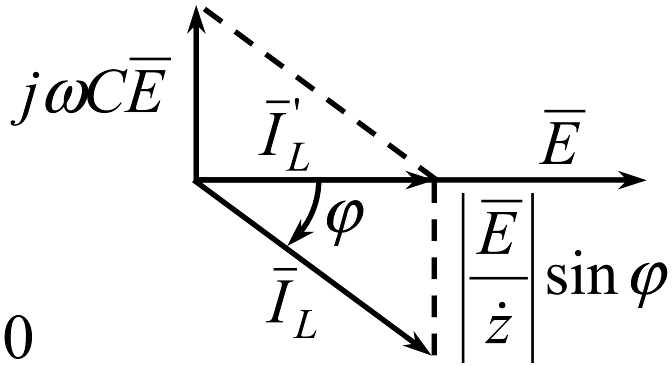
$$P = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\cos\varphi \; ; \; Q = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\sin\varphi$$



$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{\dot{z}}$$

Per Boucherot:

$$Q_g + Q_c + Q_z = 0$$



RIFASARE SIGNIFICA IMPORRE: $Q_g = 0$ CIOE': $Q_c + Q_z = 0$

$$Q_z = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\sin\varphi \; ; \quad Q_c = \frac{E^2}{1/\omega C}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\omega C E^2 \Rightarrow \qquad C = \frac{\sin\varphi}{|\dot{z}|\omega}$$

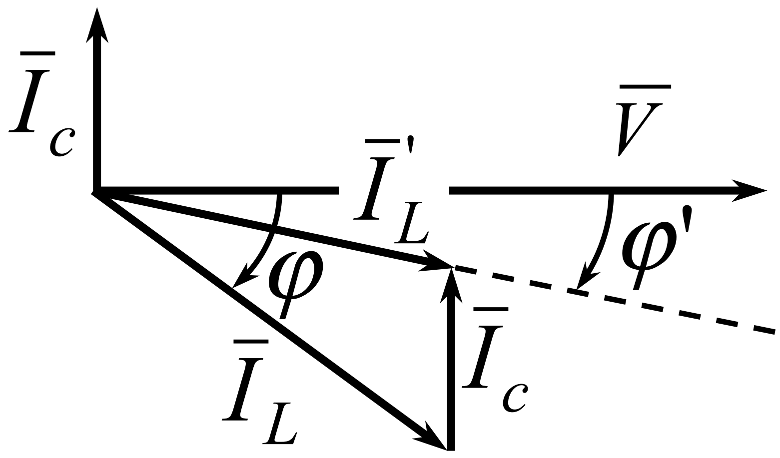
LA CAPACITÀ DIPENDE SOLO DAL CARICO E DALLA PULSAZIONE

$$\bar{I}'_L = \bar{E}\left(j\omega C + \frac{1}{|\dot{z}| \cdot e^{j\varphi}}\right) = \bar{E}\left(j\omega C + \frac{\cos\varphi - j\sin\varphi}{|\dot{z}|}\right) = \frac{\bar{E}\cos\varphi}{|\dot{z}|}$$

IN FASE CON $\bar{E}$ (GENERALMENTE $\cos\varphi' \cong 0{,}9$)

$$P_g + P_z = 0$$

$$Q_g + Q_c + Q_z = 0$$



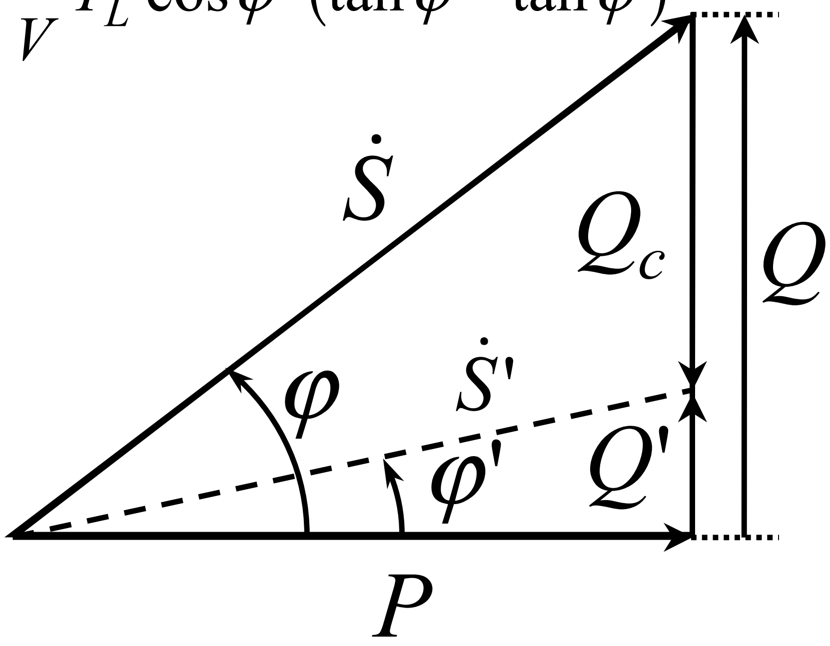
$$I_L' \cos\varphi' = I_L \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad I_L' = I_L \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

$$I_c = I_L \sin\varphi - I_L' \sin\varphi' = I_L \sin\varphi - I_L \cos\varphi \cdot \tan\varphi'$$

$$I_c = I_L \cos\varphi \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi \tan\varphi'}{\cos\varphi} \right) = \frac{V}{V} I_L \cos\varphi \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$I_c = \omega C V = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2}}$$



TRA I CARICHI CHE OCCORRE RIFASARE:

- MOTORI ASINCRONI
- LAMPADE A SCARICA CON REATTORE DI STABILIZZAZIONE
- FORNI AD INDUZIONE
- etc

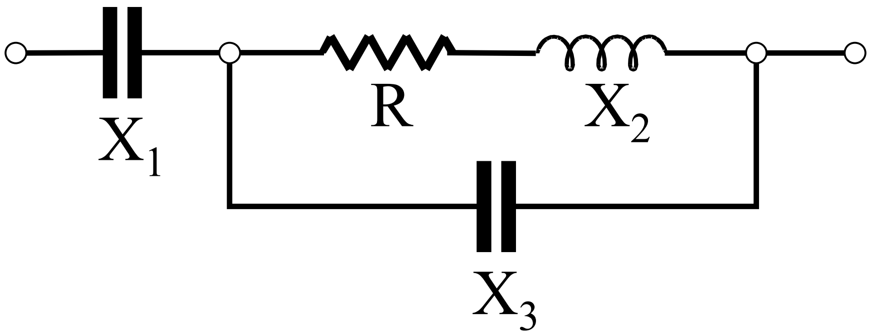
Es: Lampada fluorescente da 20 **W** $\rightarrow C \cong 5$ **μF**
Lampata fluorescente da 100 **W** $\rightarrow C \cong 18$ **μF**

MASSIMO TORNACONTO PER L'ENTE $\cos\varphi = 0{,}95 \div 0{,}97$

Norme: Per $P \geq 15$ **kW**

$\cos\varphi \geq 0{,}9$	Nessuna Penale
$0{,}7 \geq \cos\varphi \geq 0{,}9$	Penale: $f\left(\int Qdt / \int Pdt\right)$ nel periodo di fatturazione
$\cos\varphi \leq 0{,}7$	Obbligo di Rifasamento

ESEMPIO: impedenza equivalente

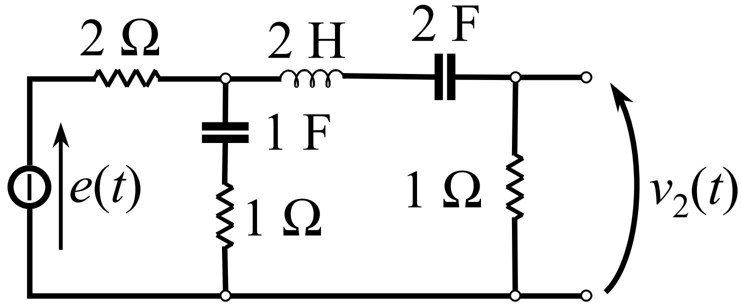


R = 10 Ω
$X_1 = 2\ \Omega$
$X_2 = 5\ \Omega$
$X_3 = 6\ \Omega$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{(R + jX_2)(-jX_3)}{R + jX_2 - jX_3} - jX_1 = \frac{(10 + j5)(-j6)}{10 - j} - j2 =$$

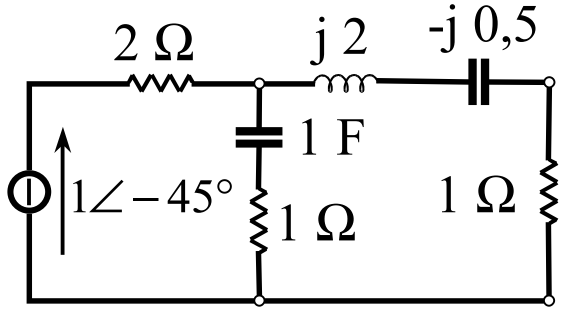
$$= \frac{-j60 + 30 - j20 - j2}{10 - j} = \frac{28 - j80}{10 - j} = \boxed{8{,}43\angle -64{,}9^\circ}$$

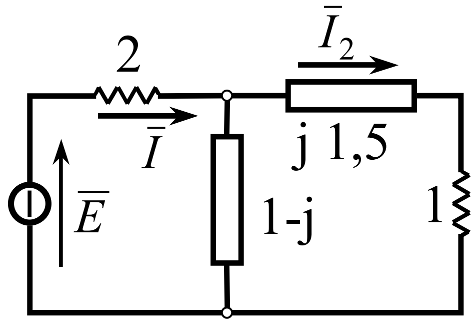
ESEMPIO

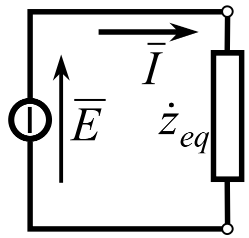


$v_2(t) = ?$

$e(t) = \cos(t\text{-}\pi/4)$







$\bar{I} = \overline{E} \big/ \dot{z}_{eq}$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}\,\frac{1-j}{(1-j)+(1+j25)}$$

$\overline{V}_2 = 1 \cdot \bar{I}_2$

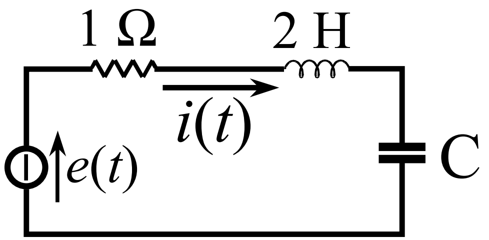
$$\dot{z}_{eq} = \frac{(1+j1{,}5)(1-j)}{1+j1{,}5+1-j} + 2 = \frac{1-j+j1{,}5+1{,}5+4+j}{2-j0{,}5} = \frac{6{,}5+j1{,}5}{2-j0{,}5} = \frac{6{,}67\angle 13^\circ}{2{,}06\angle 14^\circ} = 3{,}24\angle -1^\circ$$

$$\bar{I} = \frac{1\angle -45^\circ}{3{,}24\angle -1^\circ} = 0{,}31\angle -44^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 0{,}31\angle -44^\circ \cdot \frac{1-j}{2+j0{,}5} = \frac{0{,}31\angle -44^\circ \cdot \sqrt{2}\angle -45^\circ}{2{,}06\angle 14^\circ} = 0{,}21\angle -103^\circ$$

$\overline{V}_2 = 0{,}21\angle -103^\circ$ $\qquad v_2(t) = 0{,}21 \cdot \cos(t - 103^\circ)$

ESEMPIO



$e(t) = 3 \cos t - \sin t$
$i(t) = 2 \cos t + \sin t$
$C = ?$

$$e(t) = \sqrt{10} \cos(t - 0{,}322)$$

$$i(t) = \sqrt{5} \cos(t + 0{,}464)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{E} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \angle -0{,}322$$

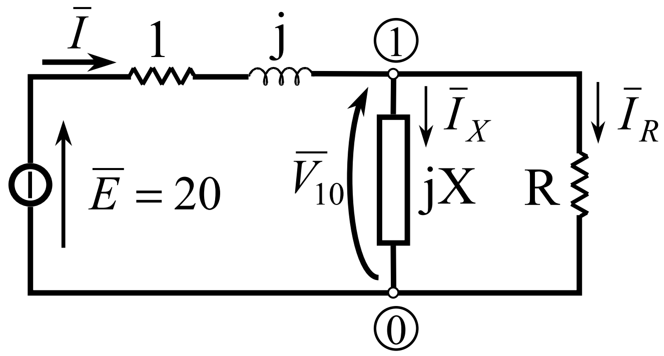
$$i(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \angle 0{,}464$$

$$\dot{z}_{eq} = 1 + j2 - jx_c$$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{\overline{E}}{\overline{I}} = \sqrt{2} \angle -\pi/4 = 1 - j$$

$$1 - j = 1 + j2 - jx_c \;\Rightarrow\; x_c = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{C = 1\,\mathbf{F}}$$

ESEMPIO (Teorema di Boucherot)



La potenza complessa erogata dal generatore è:

$$\dot{S} = 100 \cdot (1 - j)$$

Calcolare i valori di *R* ed *X*

$$\dot{S} = \overline{E} \cdot \overline{I}^*$$

$$\overline{I}^* = \dot{S}/\overline{E} = 100 \cdot (1 - j)/20 = 5 - j5 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{I} = 5 + j5 = \sqrt{50}\angle 45°$$

$$\overline{V}_{10} = \overline{E} - (1 + j)\overline{I} = 20 - (1 + j)(5 + j5) = 20 - 5(1 + 2j - 1) = 20 - j10$$

$$\overline{I}_X = \frac{\overline{V}_{10}}{jX} = \frac{20 - j10}{jX} = \frac{10 + j20}{X} \Rightarrow \left|\overline{I}_X\right| = \frac{\sqrt{500}}{X}$$

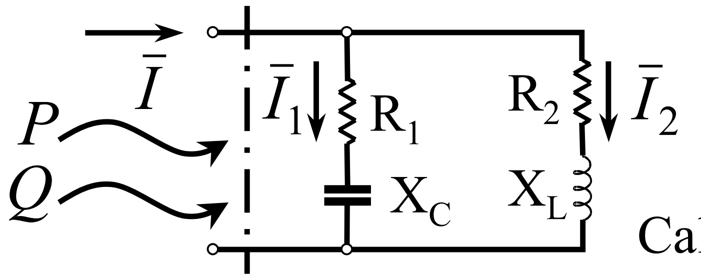
$$\overline{I}_R = \frac{\overline{V}_{10}}{R} = \frac{20 - j10}{R} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{I}_R\right| = \frac{\sqrt{500}}{R}$$

Essendo:

$$\begin{aligned} P &= \Re e\{\dot{S}\} = 100 = 1 \cdot I^2 + R \cdot I_R^2 = 50 + 500/R \\ Q &= \Im m\{\dot{S}\} = -100 = 1 \cdot I^2 + X \cdot I_X^2 = 50 + 500/X \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 100R - 50R = 600 \\ -100X - 50X = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 10\,\Omega \\ X = -10/3 \end{cases}$$

Reattanza Capacitiva

ESEMPIO (Teorema di Boucherot)



$$I_1 = 20\ \mathbf{A}\ ;\ I_2 = 20\ \mathbf{A}\ ;\ I = 24\ \mathbf{A}$$

$$P = 2{,}4\,\mathbf{kW}\ ;\ Q = 0\,\mathbf{VAR}$$

Calcolare R_1 , X_C e la potenza reattiva assorbita da X_C

$$\begin{cases} Q = Q_C + Q_L = X_C \cdot I_1^2 + X_L \cdot I_2^2 \\ P = P_1 + P_2 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 \end{cases} \Rightarrow \quad Q = 0 \Rightarrow X_C \cdot I_1^2 + X_L \cdot I_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = -X_L \ (I_1 = I_2)$$

$$(R_1 + jX_C)\cdot \bar{I}_1 = (R_2 + jX_L)\cdot \bar{I}_2 = \overline{U}$$

(Teorema di Boucherot)

Essendo le correnti uguali in modulo e le reattanze uguali in modulo, ed essendo i due rami in parallelo, sarà: $R_1 = R_2$, da cui:

$$P = 2R_1I_1^2 = 2R_2I_2^2 \quad \Rightarrow R_1 = R_2 = P/2I_1^2 = 2400/(2\cdot 400) = 3\,\Omega$$

inoltre è:

$$\left|\overline{U}\right| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}\cdot\left|\bar{I}_1\right| \quad \Rightarrow \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \frac{\left|\overline{U}\right|}{\left|\bar{I}_1\right|} \quad \Rightarrow R_1^2 + X_1^2 = \frac{U^2}{I^2}$$

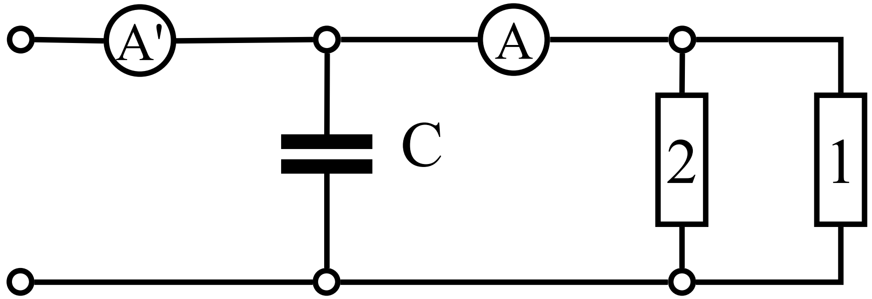
ma:

$$\dot{S} = P + jQ = P \Rightarrow S = P = U\cdot I \Rightarrow U = \frac{P}{I} = \frac{2400}{24} = 100\,\mathbf{V} \quad X_C = \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R_1^2} = \sqrt{\frac{100^2}{20^2} - 3^2} = 4\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Q_C = X_C \cdot I_1^2 = 4\cdot 400 = 1600\,\mathbf{VAR}$$

capacitivi

ESEMPIO (Rifasamento)



Si valuti il fattore di potenza complessivo cos φ_t e il valore efficace della corrente totale per i carichi 1 e 2, alimentati con una tensione di 500 V alla frequenza industriale di 50 Hz

Si rifasi eventualmente il carico a cos $\varphi'_t = 0{,}95$ e si valuti l'indicazione dell'ampermetro A' dopo il rifasamento.

Dati: $P_1 = 10$ **kW** , $Q_1 = 10$ **kVAR** , $Q_2 = 8$ **kVAR** , cos $\varphi_2 = 0{,}5$

$$P_2 = \frac{Q_2}{\tan\varphi_2} = \frac{8000}{1{,}732} = 4619\ \mathbf{W} \qquad P_t = P_1 + P_2 = 14619\ \mathbf{W} \qquad Q_t = Q_1 + Q_2 = 1800\ \mathbf{VAR}$$

$$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \sqrt{14619^2 + 18000^2} = 23189\ \mathbf{VA} \Rightarrow I_t = S_t/U = 46{,}38\ \mathbf{A}$$

$$\cos\varphi_t = \cos\left(\arctan Q_t/P_t\right) = \cos\left(\arctan\left(18000/14619\right)\right) = 0{,}63$$

occorre rifasare a cos $\varphi = 0{,}95$:

$$C = P_t \frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{\omega U^2} = 4619 \cdot \frac{1{,}23\text{-}0{,}329}{2\pi \cdot 50 \cdot 500^2} = 168\ \mu\mathbf{F}$$

dopo il rifasamento:

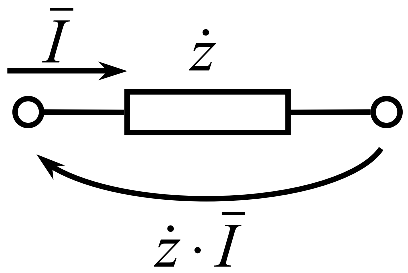
$$Q'_t = Q_t - Q_C = 18000 - \omega C U^2 = 18000 - 13195 = 4805\ \mathbf{VAR}\ ;\ S'_t = \sqrt{14619^2 + 4805^2} = 15389\ \mathbf{VA}$$

$$I'_t = \frac{S'_t}{U} = \frac{15389}{500} = 30{,}78\ \mathbf{A}$$

(Lettura dell'ampermetro A')

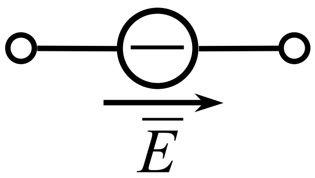
METODO DI ELIMINAZIONE DELLE TENSIONI

Rete di bipoli (non vincolante)

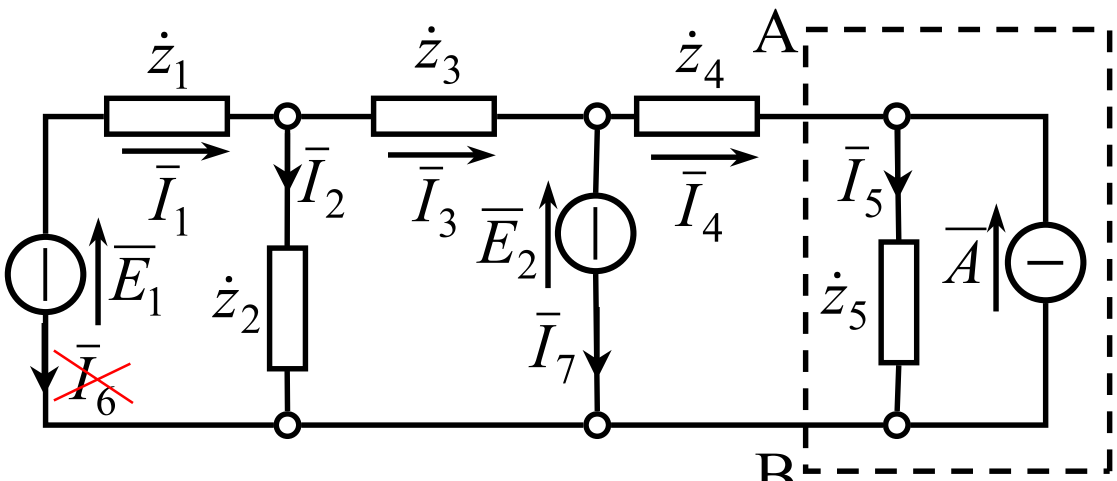


$$n-1 \qquad \sum I_k = 0$$

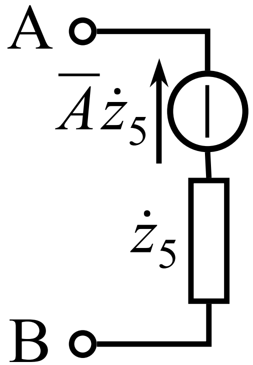
$$l-n+1 \qquad \sum E_k + \sum \dot{z}_k \bar{I}_k = 0$$

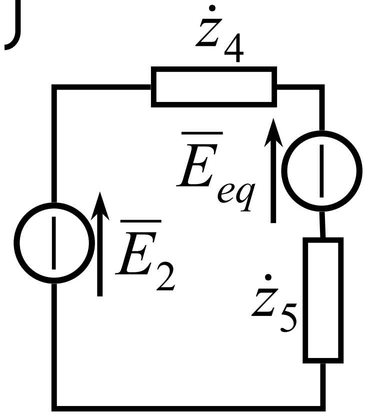


ESEMPIO



$\left.\begin{array}{l}\text{7 lati}\\ \text{5 nodi}\end{array}\right\}$ 7 equazioni





$$\begin{cases} \overline{I}_1 + \overline{I}_6 = 0 \\ \overline{I}_1 - \overline{I}_2 - \overline{I}_3 = 0 \\ \overline{I}_4 - \overline{I}_5 = -\overline{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{E}_1 - \dot{z}_1\overline{I}_1 - \dot{z}_2\overline{I}_2 = 0 \\ \dot{z}_2\overline{I}_2 - \dot{z}_3\overline{I}_3 - \overline{E}_2 = 0 \\ \overline{E}_2 - \dot{z}_4\overline{I}_4 - \dot{z}_5\overline{I}_5 = 0 \end{cases}$$

Correnti indispensabili: $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$, $\overline{I}_7$
Le correnti dei generatori si possono eventualmente ricavare in seguito.

E' indispensabile conservare le equazioni ai co-cicli dove non compaiono le correnti dei generatori. Le 4 equazioni sono:

$$\begin{cases} \overline{E}_1 - \dot{z}_1\overline{I}_1 - \dot{z}_2\overline{I}_2 = 0 \\ \dot{z}_2\overline{I}_2 - \dot{z}_3\overline{I}_3 - \overline{E}_2 = 0 \\ \overline{E}_2 - \dot{z}_4\overline{I}_4 - \dot{z}_5\overline{I}_5 = 0 \\ \overline{I}_1 - \overline{I}_2 - \overline{I}_3 = 0 \end{cases}$$

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

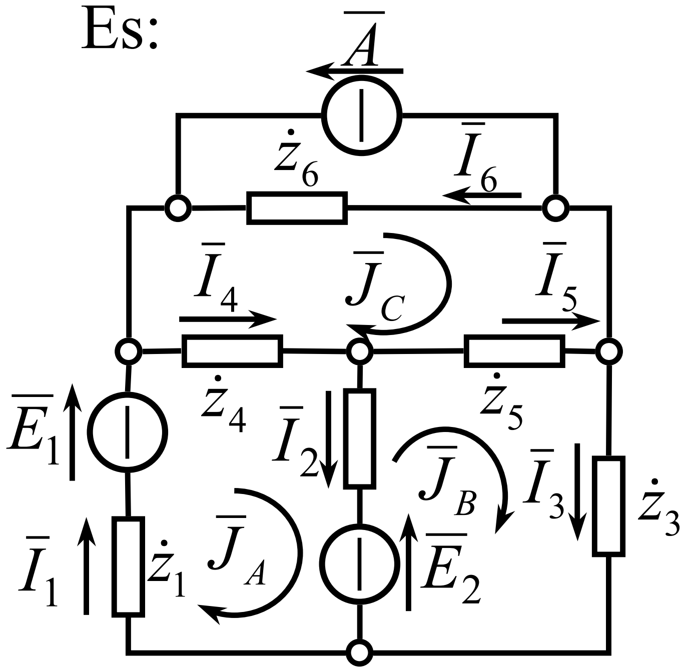
METODO DELLE CORRENTI CICLICHE

Discende dalle equazioni di Maxwell →
Solenoidalità delle Correnti
Si introducono delle **correnti fittizie** che siano di per sé solenoidali (base vettoriale su cui si proiettano le correnti reali $\bar{I}$)

$$\left[\dot{Z}\right]\cdot \underline{\bar{J}} = \underline{\bar{E}}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \dot{z}_{11} & \dot{z}_{12} & \cdots & \dot{z}_{1M} \\ \dot{z}_{21} & \dot{z}_{22} & \cdots & \dot{z}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{z}_{M1} & \dot{z}_{M2} & \cdots & \dot{z}_{MM} \end{bmatrix}$$

Es:



$$M = l - (n - 1) \qquad \dot{z}_{ij} = \dot{z}_{ji}$$

$\dot{z}_{ii}$ Impedenza propria della maglia i

$\dot{z}_{ji}$ Impedenza mutua tra le maglie *i* e *j* della maglia i

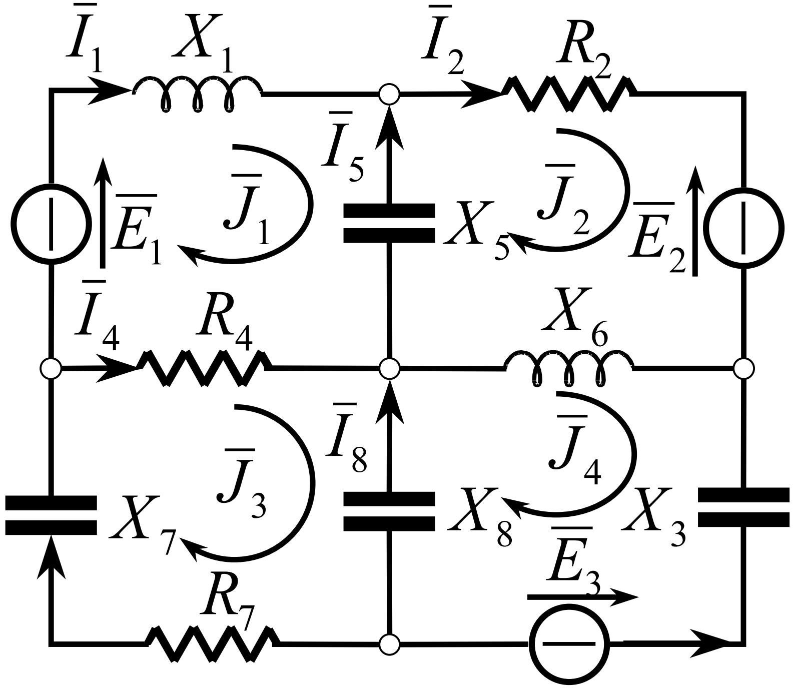
$$\left[\bar{J}_1\right] = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \vdots \\ \bar{J}_2 \end{bmatrix}$$ Correnti cicliche Nelle maglie

$$\left[\bar{E}\right] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{v1} \\ \vdots \\ \bar{E}_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_{i1} \\ \vdots \\ \bar{E}_{iM} \end{bmatrix}$$

- **E_{vi} è la somma dei generatori di tensione nella maglia *i*, prese con segno + se concordi con il verso di J_i e viceversa**

- **E_{ii} è la somma delle tensioni dovute ai generatori di corrente collegati agli estremi dei lati della maglia *i* (prodotto della corrente per l'impedenza del ramo a cui è collegato) preso con il segno + se la caduta di tensione provocata in quel ramo dalla sola corrente del generatore è concorde con J_i e viceversa**

ESEMPIO



$$e_1(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$e_2(t) = 200\sqrt{2}\cos\omega t$$

$$e_3(t) = 100\cos(\omega t + \pi/4)$$

$$R_2 = R_4 = R_7 = 6 \ \ \Omega$$

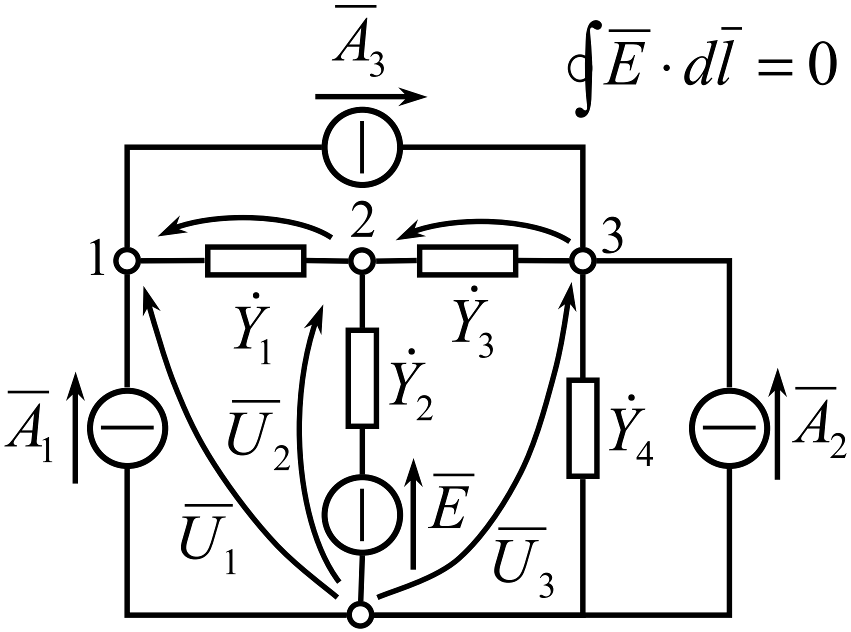
$$X_1 = X_3 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = 3\ \Omega$$

$$\bar{E}_1 = j100; \qquad \bar{E}_2 = 200; \qquad \bar{E}_3 = 50 + j50$$

$$\begin{bmatrix} 6 & j3 & -6 & 0 \\ j3 & 6 & 0 & -j3 \\ -6 & 0 & 12 - j6 & j3 \\ 0 & -j3 & j3 & -j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \\ \bar{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j100 \\ -200 \\ 0 \\ -50 - j50 \end{bmatrix}$$

METODO DEI POTENZIALI NODALI

SI BASA SULLA PROPRIETA’ DI IRROTAZIONALITA’ DELLE TENSIONI



$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

Legge di Kirchhoff delle tensioni

Qualsiasi tensione di lato è esprimibile come somma algebrica dei potenziali di nodo.

LE $\overline{U}_2$ COSTITUISCONO UNA BASE PER LE TENSIONI

$$[Y][U] = [A]$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{1,1} & \dot{Y}_{1,2} & \cdots & \dot{Y}_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{Y}_{N-1,1} & \dot{Y}_{N-1,2} & \cdots & \dot{Y}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \vdots \\ \overline{U}_{N-1} \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{iN-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{v1} \\ \vdots \\ A_{vN-1} \end{bmatrix}$$

$$[Y][U]=[A]$$

$N = n - 1$ nodi indipendenti

$\dot{Y}_{ij} = \dot{Y}_{ji}$

$$[Y]=\begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \cdots & \dot{Y}_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{Y}_{N1} & \dot{Y}_{N2} & \cdots & \dot{Y}_{NN} \end{bmatrix}$$

$\dot{Y}_{ii}$ = ammettenza propria del nodo i

$\dot{Y}_{ij}$ = ammettenza del lato che collega i nodi i e j presa col segno negativo

$$[U]=\begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \vdots \\ \overline{U}_N \end{bmatrix}$$

Potenziali degli n–1 nodi rispetto all'n-esimo

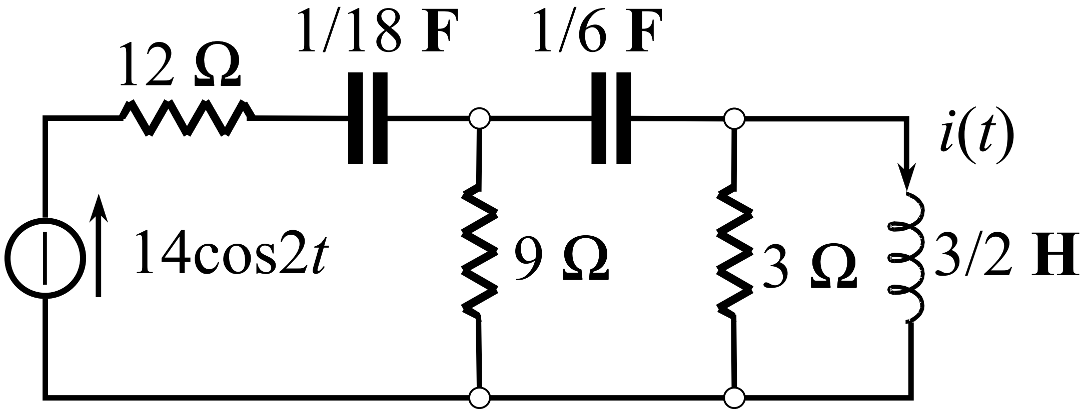
$$[A]=\begin{bmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{iN} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_{v1} \\ \vdots \\ A_{vN} \end{bmatrix}$$

A_{ij} = somma delle correnti dei generatori di corrente che incidono sul nodo i, positivi se entranti

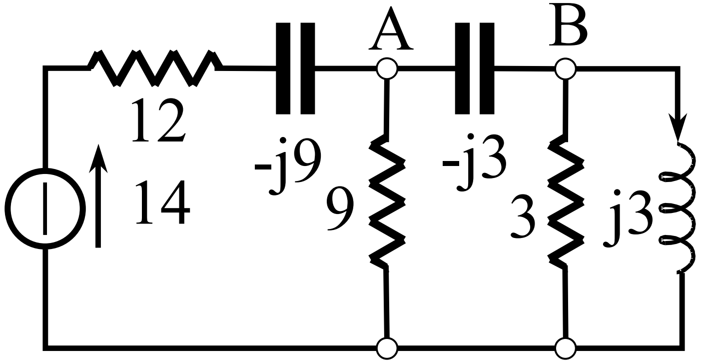
A_{vi} = correnti dovute ai generatori di tensione inseriti in lati convergenti nel nodo i (f.e.m. × ammettenza del lato) positivi se il generatore da solo fa circolare corrente entrante

NOTA: SI PARLA DI NODI CHE SONO CASI PARTICOLARI DI CO-CICLI. IN PRATICA SI CONSIDERANO I CO-CICLI FONDAMENTALI RIFERITI AD UN ALBERO A STELLA

ESEMPIO



Trovare $i(t)$ con l'analisi nodale

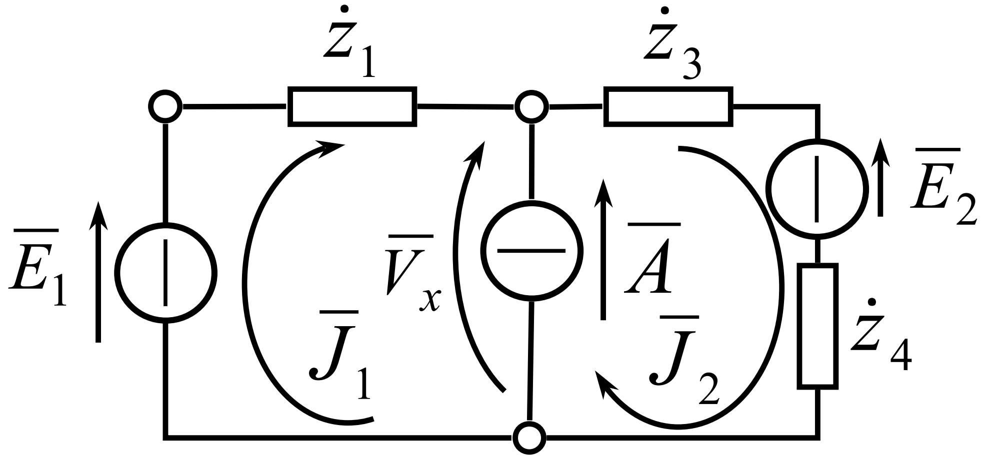


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12-j9}+\frac{1}{9}+\frac{j}{3} & -\frac{j}{3} \\ -\frac{j}{3} & \frac{j}{3}+\frac{1}{3}-\frac{j}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_A \\ \overline{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{12-j9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{U}_B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{12-j9}+\frac{1}{9}+\frac{j}{3} & \frac{14}{12-j9} \\ -\frac{j}{3} & 0 \end{vmatrix}}{0{,}1669+j0{,}1244} = j1{,}5 \qquad \overline{I} = \frac{\overline{U}_B}{j3} = 0{,}5 \qquad i(t) = 0{,}5\cos 2t$$

N.B. ho lavorato con i valori massimi

METODO DELLE CORRENTI CICLICHE: OSSERVAZIONI



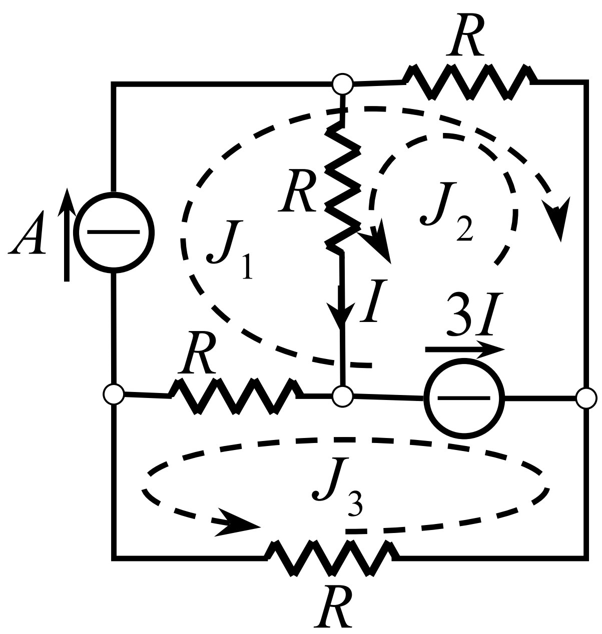
$$
\begin{cases}
\overline{E}_1 - \dot{z}_1\overline{J}_1 - \overline{V}_x = 0 \\
\overline{V}_x - (\dot{z}_3 + \dot{z}_4)\overline{J}_2 = \overline{E}_2 \\
\overline{J}_1 + \overline{A} - \overline{J}_2 = 0
\end{cases}
$$

LA PRESENZA DI GENERATORI DI CORRENTE INTRODUCE UNA DESTRUTTURAZIONE DEL METODO, INTRODUCENDO INCOGNITE MISTE (V, J) E TERMINI NOTI MISTI (E , A).

ANALOGAMENTE PER IL METODO DEI POTENZIALI NODALI.

E’ IMPORTANTE LA SCELTA OCULATA DELLE MAGLIE E DEI NODI.

ESEMPIO:

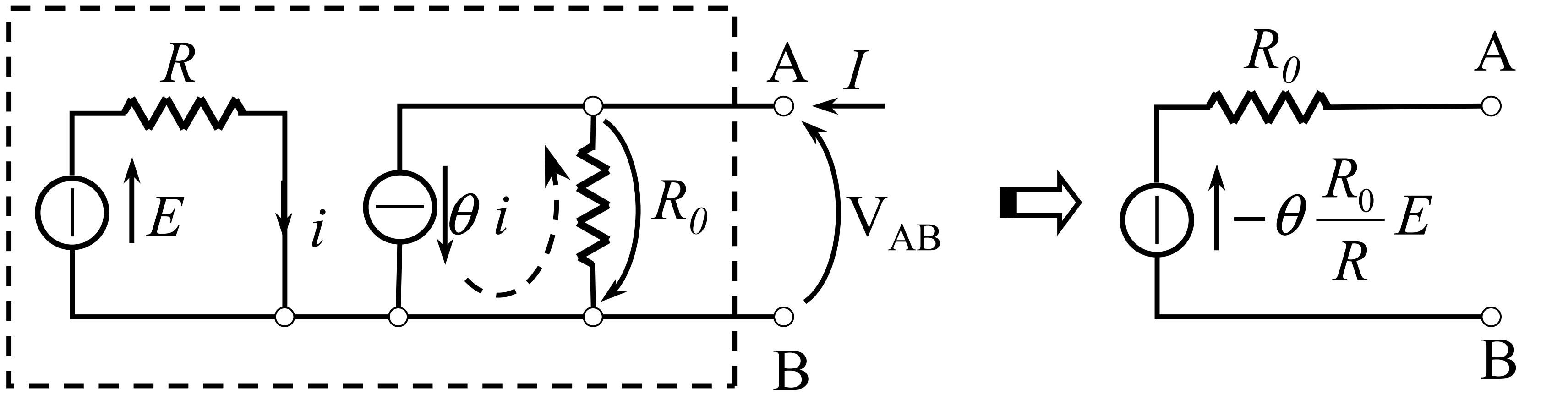


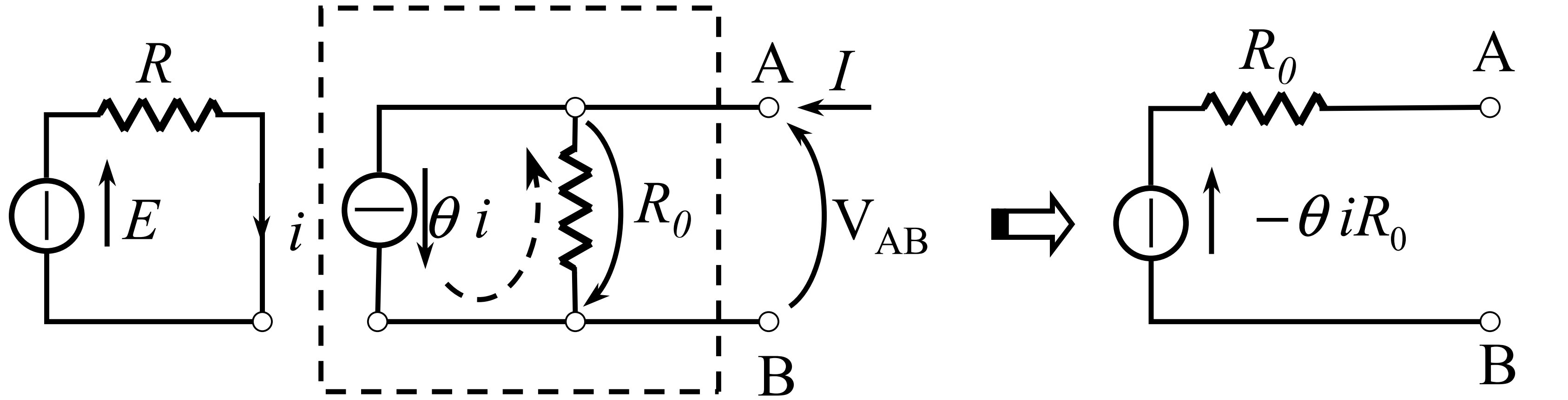
$$A = 10\ \mathbf{A} \qquad R = \mathbf{1}\ \Omega$$

$$\begin{cases} J_1 = A \\ 3J_2 = 2J_2 - J_1 \\ -3J_2 = 2J_3 + J_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_2 = -10\ \text{A} \\ J_3 = 10\ \text{A} \end{cases}$$

THEVENIN IN PRESENZA DI GENERATORI PILOTATI



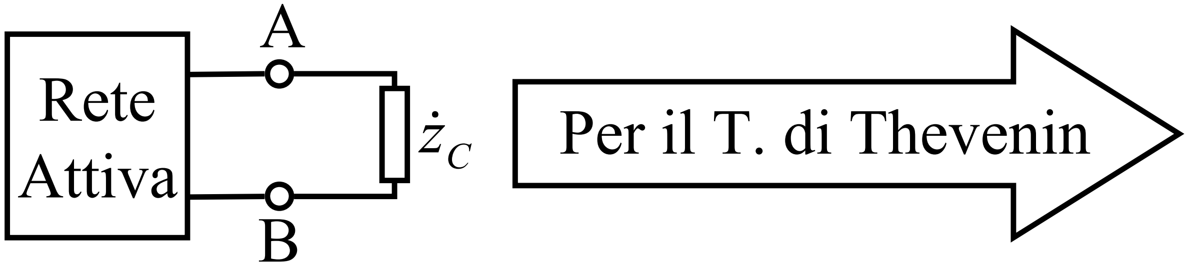


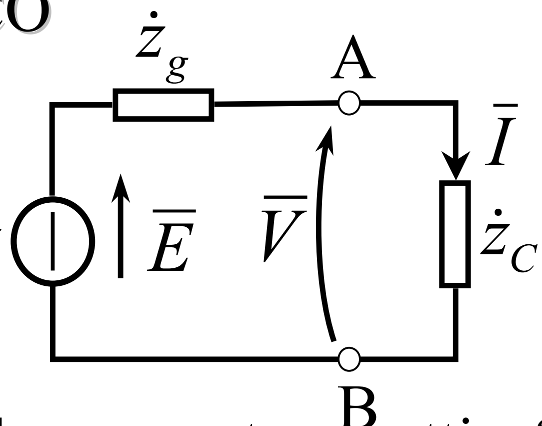
N.B.

GRANDEZZA PILOTANTE ESTERNA: POSSIAMO PASSIVARE

GRANDEZZA PILOTANTE INTERNA: NON POSSIAMO PASSIVARE

ADATTAMENTO ENERGETICO





Quali sono le condizioni nelle quali $\dot{z}_C$ assorbirà la max potenza attiva?

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\dot{z}_g + \dot{z}_C}; \quad \overline{V} = \frac{\overline{E} \cdot \dot{z}_C}{\dot{z}_g + \dot{z}_C}; \quad \dot{z}_C = R_C + jX_C;$$

$$\dot{S} = P + jQ = \overline{V} \cdot \overline{I}^* = \frac{\overline{E} \cdot \dot{z}_C}{\dot{z}_g + \dot{z}_C} \cdot \frac{\overline{E}^*}{\left(\dot{z}_g + \dot{z}_C\right)^*} = \frac{\left|\overline{E}\right|^2}{\left|\dot{z}_g + \dot{z}_C\right|^2} \cdot \dot{z}_C$$

$$P = \Re e\{\dot{S}\} = \frac{\left|\overline{E}\right|^2}{\left|\dot{z}_g + \dot{z}_C\right|^2} \cdot \dot{z}_C = \frac{E^2}{\left(R_g + R_C\right)^2 + \left(X_g + X_C\right)^2} \cdot R_C$$

Max P:

Poiché $X_C \gtreqless 0 \rightarrow X_C + X_g = 0 \rightarrow \boxed{X_C = -X_g}$ $\Rightarrow$

$$P = \frac{E^2}{\left(R_g + R_C\right)^2} \cdot R_C \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{dR_C} = E^2 \frac{\left(R_g + R_C\right)^2 - 2R_C\left(R_g + R_C\right)}{\left(R_g + R_C\right)^4} = E^2 \frac{R_g + R_C - 2R_C}{\left(R_g + R_C\right)^3} = E^2 \frac{R_g - R_C}{\left(R_g + R_C\right)^3}$$

$$\frac{dP}{dR_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = R_g \quad \Rightarrow \boxed{\dot{Z}_C = \dot{Z}_g^*}$$

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA