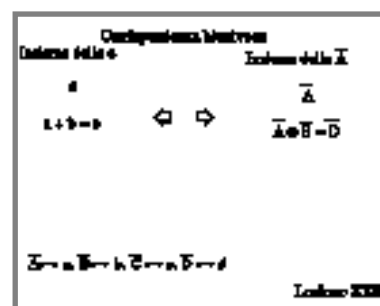
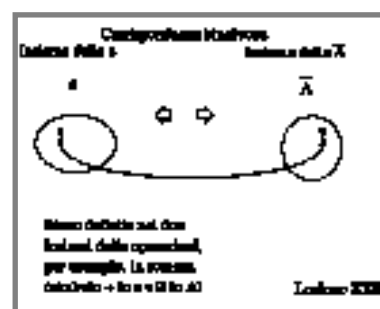


I regimi sinusoidali

Siamo dunque alla ricerca di una tecnica che ci consenta di semplificare le operazioni sulle grandezze sinusoidali. Osserviamo che nelle equazioni relative alla LKC ed alla LKT intervengono essenzialmente le seguenti operazioni:

- a) moltiplicazione per una costante, come nella caratteristica di un resistore.
- b) somma, come nella somma dei vari termini in una equazione.
- c) derivata, come nelle caratteristiche di induttori e condensatori.

Immaginiamo ora di trovare un insieme di grandezze, che chiameremo insieme delle " \bar{A} " - mentre chiameremo " a " l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione ω - e supponiamo che esista una *corrispondenza biunivoca* che metta in relazione ogni elemento di a con uno di " \bar{A} ". Supponiamo anche che tale corrispondenza conservi le operazioni che abbiamo in precedenza elencato; con questa affermazione intendiamo che se il



Corrispondenza biunivoca
 Insieme delle a Insieme delle \bar{A}

$a + b = c \Leftrightarrow \bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$

L'operazione è commutativa
 della corrispondenza.

$\bar{A} + \bar{B} = \bar{C} \Leftrightarrow a + b = c$

Lezione 3.1.1

risultato di una determinata operazione - per esempio la somma - fatta su elementi di "a" è un certo elemento c, cioè:

$$a + b = c,$$

e se il risultato della operazione corrispondente - simbolo \oplus - fatta sugli elementi corrispondenti di " \bar{A} " è \bar{C} :

$$\bar{A} \oplus \bar{B} = \bar{C},$$

allora risulta anche che \bar{C} è l'elemento associato a c nella corrispondenza in esame. Dunque, se esiste un tale insieme " \bar{A} " ed una tale *applicazione*, e se operare su " \bar{A} " risulta più agevole che operare su "a", si potrà in ogni caso trasformare tutte le grandezze di "a" nelle corrispondenti di " \bar{A} ", operare su queste e, una volta ottenuto il risultato, ritornare in "a" mediante l'applicazione inversa.

Orbene, facciamo vedere che l'insieme di tutte le funzioni complesse di variabile reale del tipo $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$ è un possibile candidato insieme " \bar{A} ". Infatti, dato che ogni elemento di "a" del tipo $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$ dipende da tre parametri, e precisamente A_M , ω ed α , e che lo stesso accade per ogni elemento di " \bar{A} " (perché $\bar{A} = Ae^{j(\omega t + \alpha)}$), è evidente che tra gli insiemi "a" e " \bar{A} " descritti esiste una corrispondenza biunivoca se ad ogni valore A_M facciamo corrispondere un opportuno valore A. Naturalmente la scelta più immediata sarebbe di porre $A = A_M$. Per motivi che saranno chiari in seguito, si preferisce porre $A = A_M / \sqrt{2}$, cioè pari al valore efficace della corrispondente grandezza sinusoidale invece che al suo valore massimo.

Notiamo che, per la formula di Eulero,

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha),$$

si può affermare che l'applicazione introdotta fa corri-

Trasformare la grandezza dell'insieme a nell'insieme \bar{A} .
 Operare nell'insieme \bar{A} per ottenere il risultato dell'operazione.
 Trasformare il risultato dell'operazione \bar{A} nell'insieme a.

Lezione 3.1.1

Corrispondenza biunivoca
 Insieme delle a Insieme delle \bar{A}
 Funzioni sinusoidali Funzioni complesse
 $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \bar{A} = A e^{j(\omega t + \alpha)}$
 $A_M, \omega, \alpha \Leftrightarrow A, \omega, \alpha$
 $A_M \sin(\omega t + \alpha) = A [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)]$

Lezione 3.1.1

Le operazioni: la moltiplicazione per una costante

$a = A_M \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \bar{A} = A e^{j(\omega t + \alpha)} + j A \sin(\omega t + \alpha)$

La moltiplicazione per una costante è commutativa

Lezione 3.1.1

spondere ad ogni elemento di " \bar{A} " un elemento di " a " che, a meno del fattore $\sqrt{2}$, coincide con il coefficiente della parte immaginaria di \bar{A} .

Che una tale applicazione conservi le operazioni che abbiamo elencato in precedenza, è cosa semplice da dimostrare. Per quanto riguarda la somma e la moltiplicazione per una costante, il fatto è di per sé evidente. Per quel che riguarda l'operazione di derivazione, notiamo che:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[Ae^{j(\omega t + \alpha)}] &= j\omega Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \\ &= j\omega A \cos(\omega t + \alpha) - \omega A_M \sin(\omega t + \alpha).\end{aligned}$$

Anche in questo caso, quindi, il coefficiente della derivata è, sempre a meno del fattore $\sqrt{2}$, uguale alla derivata dell'elemento di partenza, $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$. È facile verificare, invece, che l'operazione di prodotto, come è usualmente definita nei due insiemi in esame, non viene conservata dall'applicazione introdotta. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}Ae^{j(\omega t + \alpha)} Be^{j(\omega t + \beta)} &= AB e^{j(2\omega t + \alpha + \beta)} = \\ &= AB [\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + j \sin(2\omega t + \alpha + \beta)].\end{aligned}$$

Il coefficiente dell'immaginario dell'espressione trovata non coincide con il prodotto delle due funzioni sinusoidali corrispondenti.

In conclusione in regime sinusoidale si può così operare: in primo luogo si trasformano tutte le grandezze - tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale - nelle corrispondenti funzioni complesse del tipo $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$; d'ora in poi useremo il termine *fasori* per tali grandezze e conserveremo il simbolo \bar{A} per indicarle. Successivamente si scrivono le equazioni che rappresentano le condizioni imposte dalla LKC e dalla LKT, tenendo conto delle caratteristiche dei singoli bipoli -

Le operazioni di somma

Base: la a	Derivata: la \bar{A}
$a + b =$	$\bar{A} + \bar{B} =$
$= A_M \sin(\omega t + \alpha) +$	$= A_M \cos(\omega t + \alpha) +$
$+ B_M \sin(\omega t + \beta) =$	$+ B_M \cos(\omega t + \beta) +$
$C_M \sin(\omega t + \gamma)$	$+ [A_M \sin(\omega t + \alpha) +$
	$+ B_M \sin(\omega t + \beta)]$

$C_M \cos(\omega t + \gamma) + j \sin(\omega t + \gamma)]$

La somma è conservata

Lecione XXII

Le operazioni di derivazione

$\frac{da}{dt} =$	$\frac{d\bar{A}}{dt} =$
$= \frac{d}{dt} [A_M \sin(\omega t + \alpha)] =$	$= \frac{d}{dt} [A_M \cos(\omega t + \alpha)] =$
$= \omega A_M \cos(\omega t + \alpha) =$	$= -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) =$
$= \omega A_M \sin(\omega t + \alpha)$	$= -\omega A_M \cos(\omega t + \alpha)$

L'operazione di derivazione è conservata

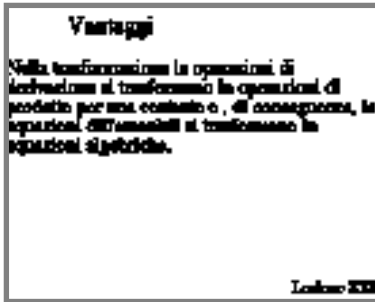
Lecione XXII

Le operazioni di prodotto

$a \cdot b =$	$\bar{A} \cdot \bar{B} =$
$= A_M \sin(\omega t + \alpha) \cdot$	$= A_M \sin(\omega t + \alpha) \cdot$
$B_M \sin(\omega t + \beta) =$	$+ B_M \sin(\omega t + \beta) =$
	$+ j \cos(\omega t + \alpha) \cdot$
	$+ j \cos(\omega t + \beta)]$

Il prodotto non è conservato

Lecione XXII



esprese in termini di fasori - e ricordando che ogni operazione di derivazione equivale ad una moltiplicazione per $j\omega$. Così facendo le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche ed è, dunque, semplice risolverle, ricavando i fasori rappresentativi delle grandezze incognite. A questo punto si può ritornare alle funzioni sinusoidali e determinare le grandezze incognite nel dominio del tempo.

Proviamo ad applicare questo metodo al circuito RL serie già risolto in precedenza. L'equazione all'unica maglia presente si scrive

$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}, \quad (\text{VI.1})$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L}. \quad (\text{VI.2})$$

Il modulo del numero complesso rappresentativo della corrente è, dunque, il rapporto tra i moduli

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

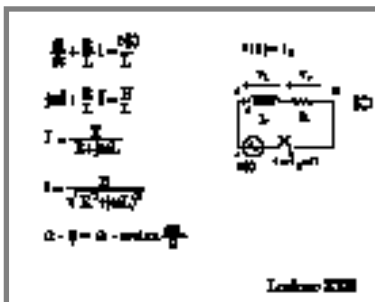
e la sua fase è la differenza tra le fasi del numeratore e del denominatore:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Il che è in perfetto accordo, se si tiene conto della relazione tra valor massimo e valor efficace di una funzione sinusoidale, con i risultati già trovati.

Come si vede, la tecnica che abbiamo costruito semplifica notevolmente tutte le operazioni. In pratica, per un circuito in regime sinusoidale, basterà scrivere direttamente le equazioni relative alla LKC ed alla LKT in termini di fasori, esprimendo anche le caratteristiche dei bipoli presenti nella rete come relazioni tra fasori.

In particolare, per il resistore, $v=Ri$ si trasforma in:



$$\bar{V} = R \bar{I};$$

per l'induttore, $v = L di/dt$ si trasforma in:

$$\bar{V} = j \omega L \bar{I};$$

per il condensatore, $i = C dv/dt$ si trasforma in:

$$\bar{I} = j \omega C \bar{V}.$$

Il rapporto tra i due fasori rappresentativi della tensione e della corrente prende il nome di *impedenza* e verrà indicato d'ora in poi con il simbolo \dot{Z} :

$$\dot{Z} = R + j X. \quad (\text{VI.3})$$

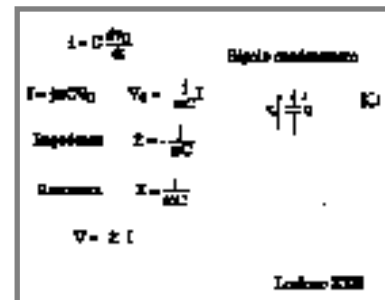
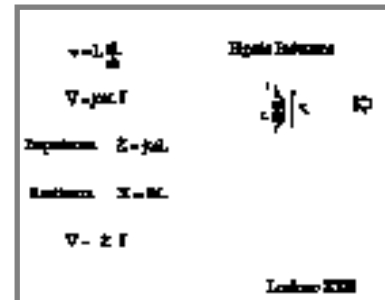
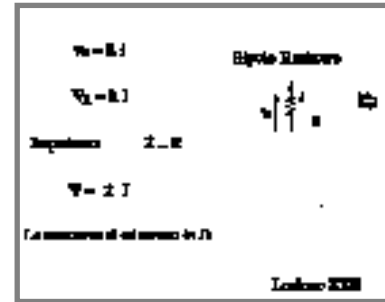
L'impedenza \dot{Z} è dunque un numero complesso; la sua parte reale conserva il nome di resistenza, mentre il coefficiente della parte immaginaria è detto *reattanza*. Si noti che, coerentemente alle definizioni date, si può affermare che l'impedenza caratteristica di un induttore è pari a $jX = j\omega L$ e che la sua reattanza è $X = \omega L$, positiva per definizione. Un condensatore invece presenterà una impedenza $-jX = -j/\omega C$, ed una reattanza $X = 1/\omega C$. Infine chiameremo *ammettenza* \dot{Y} l'inverso di una impedenza. In questo caso:

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + j X} = \frac{R}{j R^2 + X^2} - j \frac{X}{j R^2 + X^2}. \quad (\text{VI.4})$$

Anche l'ammettenza è dunque un numero complesso la cui parte reale è una conduttanza mentre il coefficiente dell'immaginario prende il nome di *suscettanza*. Come tutti i numeri complessi, anche l'impedenza e l'ammettenza possono essere rappresentate in forma polare,

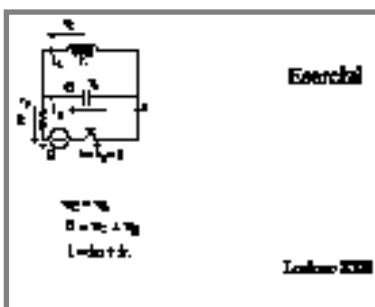
$$\dot{Z} = |Z| e^{j\varphi}; \quad \dot{Y} = |Y| e^{-j\varphi},$$

Si ha, quindi:



$$\bar{I} = \frac{E e^{j(\omega t + \alpha)}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{E}{|Z|} e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)}.$$

La corrente $i(t)$ è dunque sfasata di un angolo $-\varphi$ rispetto alla tensione $e(t)$, dove φ è l'angolo di fase dell'impedenza. Osserviamo che, nella equazione (VI.1), sia il fasore rappresentativo della tensione, a primo membro, che il fasore rappresentativo della corrente, presente a secondo membro, contengono come fattore il termine $e^{j\omega t}$; tale fattore è dunque inessenziale e può essere eliminato. È evidente che ciò si verifica in ogni equazione scritta in termini fasoriali. In pratica questa scelta equivale a utilizzare, come grandezze simboliche rappresentative delle funzioni sinusoidali, numeri complessi del tipo $E e^{j\alpha}$ e non funzioni complesse del tipo $E e^{j(\omega t + \alpha)}$. Il fattore $e^{j\omega t}$ è comune a tutti i termini. Sarebbe giusto riservare simboli diversi per le grandezze $E e^{j(\omega t + \alpha)}$ ed $E e^{j\alpha}$, ma in pratica si è soliti utilizzare lo stesso simbolo per le due grandezze, dato che il contesto, in generale, chiarisce l'oggetto del discorso. Il senso di questa scelta sarà ancora più chiaro quando si introdurrà una rappresentazione grafica dei fasori. Questa lunga introduzione al metodo simbolico può sembrare un po' eccessiva, data la semplicità dell'argomento. Essa ha un unico scopo: mettere bene in evidenza che l'insieme delle "a" e quello delle " \bar{A} " sono due insiemi completamente distinti, ognuno dei quali può essere usato per rappresentare l'altro. Non è lecito però mescolare elementi dei due insiemi; non è lecito, per esempio, sommare una funzione sinusoidale $a = a(t)$ ed un fasore rappresentativo $\bar{A} = A e^{j(\omega t + \alpha)}$!



Esercizi

Per l'esercizio proposto precedentemente, le equazioni

alle maglie forniscono:

$$E = v_L + v_R ; \quad v_L = v_C.$$

Mentre l'equazione ad uno dei due nodi è:

$$i = i_C + i_L.$$

Con facili passaggi si ricava l'unica equazione:

$$\frac{E}{RCL} = \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{CL}.$$

L'altro esercizio proposto richiede di calcolare le reattanze di alcuni bipoli assegnati. Notare il ruolo giocato dalla frequenza angolare: al suo aumentare la reattanza dell'induttore aumenta mentre quella del condensatore diminuisce in valore assoluto.

Il circuito RLC con forzamento sinusoidale

Proviamo ad applicare il metodo dei fasori per calcolare la soluzione di regime in un caso più complesso: il circuito RLC serie con forzamento costante.

La soluzione dell'omogenea associata è già nota; limitiamoci quindi a calcolare la soluzione a regime con il metodo dei fasori. L'equazione alla maglia è:

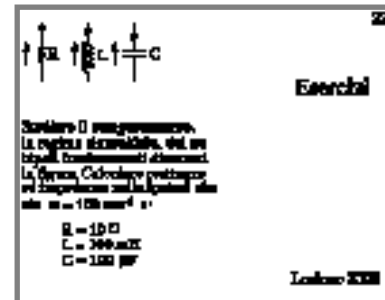
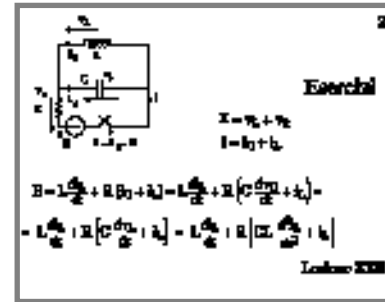
$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}. \quad (\text{VI.5})$$

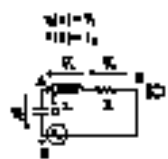
Si ricava immediatamente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}. \quad (\text{VI.6})$$

Da cui:

$$\bar{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}. \quad (\text{VI.7})$$





$$\begin{aligned} \bar{V}_L + \bar{V}_C + \bar{V}_R &= \bar{E} \\ R\bar{I} + j\omega L\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I} &= \bar{E} \\ \bar{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] &= \bar{E} \\ \bar{I} &= \frac{\bar{E}}{Z} \\ Z &= \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \end{aligned}$$

L. De Menna

Ricordando che

$$-j = e^{-j\pi/2},$$

la VI.7 può anche essere scritta:

$$\bar{V}_c = \frac{1}{\omega C} \frac{E e^{j(\omega t + \eta - \varphi - \pi/2)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (VI.8)$$

dove η è la fase iniziale del generatore di f.e.m. e φ ,

$$\varphi = \arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}, \quad (VI.9)$$

è l'angolo di sfasamento tra la tensione del generatore e la corrente:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \eta - \varphi) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \eta - \varphi). \quad (VI.10)$$

In conclusione abbiamo:

$$v_{cp}(t) = \sqrt{2} V_c \sin(\omega t + \gamma). \quad (VI.11)$$

Dove

$$V_c = \frac{1}{\omega C} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (VI.12)$$

e:

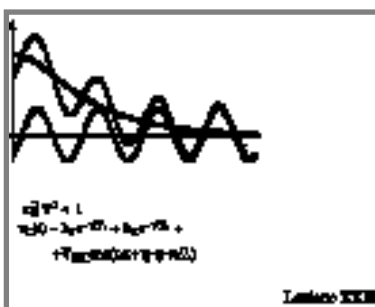
$$\gamma = \eta - \varphi - \pi/2. \quad (VI.13)$$

Aggiungendo questa soluzione di regime all'integrale generale della omogenea associata, si ottiene l'integrale generale della equazione completa.

Anche in questo caso abbiamo i tre regimi caratteristici del circuito RLC, sopracritico, critico e subcritico:

$$v_c(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} + \sqrt{2} V_c \sin(\omega t + \gamma). \quad (VI.14)$$

$$v_c(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t} + \sqrt{2} V_c \sin(\omega t + \gamma). \quad (VI.15)$$



$$v_c(t) = ke^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi) + \sqrt{2} V_c \sin(\omega t + \gamma). \quad (\text{VI.16})$$

Nelle immagini a lato sono mostrati alcuni tipici andamenti.

Naturalmente, per determinare la soluzione del particolare problema in esame, occorre imporre le condizioni iniziali e determinare le costanti di integrazione.

Per il caso subcritico, per esempio, con facili passaggi si ha:

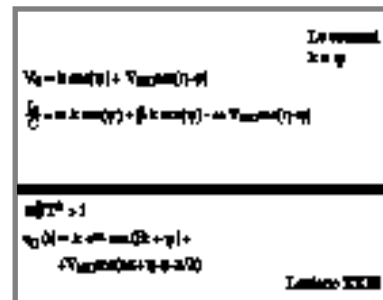
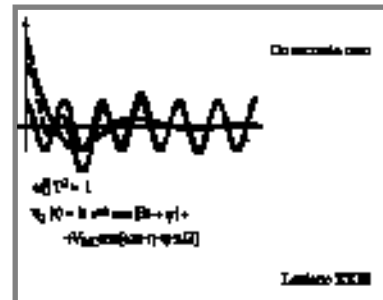
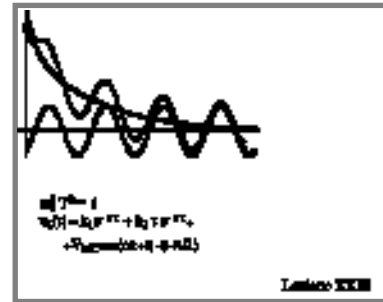
$$V_0 = k \sin \psi - \sqrt{2} V_c \cos(\eta - \varphi), \quad (\text{VI.17})$$

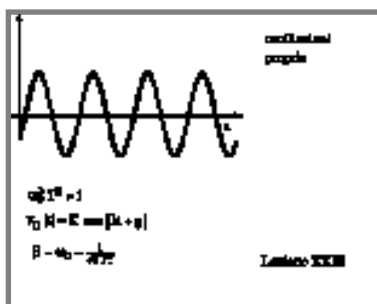
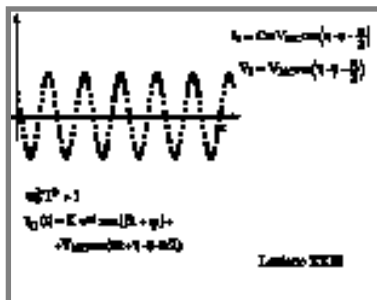
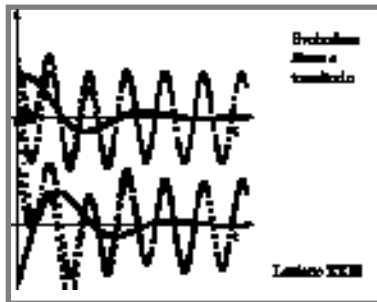
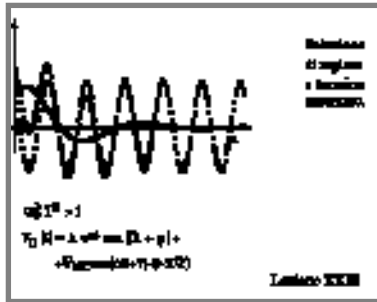
$$\frac{I_0}{C} = \alpha k \sin \psi + \beta k \cos \psi + \omega \sqrt{2} V_c \sin(\eta - \varphi).$$

Dalle (VI.17) si ricavano i valori di k e ψ .

Si osservi ancora una volta che le condizioni iniziali vanno imposte all'integrale generale dell'equazione completa, e non a quello dell'omogenea associata, anche se, e questo può indurre in errore, le costanti da determinare sono tutte contenute in quest'ultimo.

Le formulazioni (VI.14), (VI.15) e (VI.16) della soluzione sono tutte del tipo “termine transitorio + termine di regime”; come abbiamo visto non è questo l'unico punto di vista dal quale guardare a tali espressioni. Infatti, dalla (VI.17) si vede che le costanti k e ψ non dipendono soltanto dalle condizioni iniziali, ma anche dal forzamento $e(t)$, attraverso η ed E , che è contenuto in V_c (vedi la VI.12). Si può quindi guardare alla soluzione (VI.16) immaginando di separare il termine che dipende esclusivamente dalle particolari condizioni iniziali da quello che dipende dal forzamento e che sarebbe nullo in sua assenza. Ma, a differenza del caso discusso nel capitolo V, questa volta una tale separazione non è immediata. Che essa sia sempre possibile, in condizioni di linearità, lo assicura, però, il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti, possiamo immagi-





nare che la dinamica del circuito sia in realtà determinata dalla sovrapposizione di due fenomeni: l'evoluzione libera del circuito, dovuta alle assegnate condizioni iniziali, e la dinamica con cui il forzamento, partendo da condizioni iniziali tutte nulle, porta il circuito al suo regime.

I due diversi punti di vista sono graficamente mostrati nelle due ultime immagini a lato, per il caso in esame. L'evoluzione libera si sviluppa indipendentemente dal forzamento ed è destinata comunque ad estinguersi per la presenza di una causa dissipativa e di una energia disponibile limitata. Il generatore, invece, disponendo di energia illimitata, potrà imporre alla lunga il suo regime.

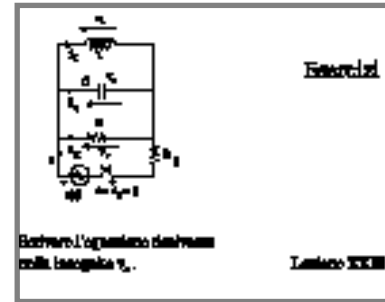
Queste considerazioni portano, ancora una volta, alla conclusione che bisogna aspettarsi che, per particolari condizioni iniziali che assicurano la completa compatibilità tra regime "voluto" dal forzamento e "tendenza spontanea" del circuito, il fenomeno transitorio non abbia luogo ed il regime si stabilisca istantaneamente. Dalla VI.16 si vede che ciò effettivamente si verifica, nel nostro caso, per $k=0$. Perché ciò accada le condizioni iniziali debbono essere:

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{2} V_c \cos(\eta - \varphi), \\ \frac{I_0}{C} &= -\omega \sqrt{2} V_c \sin(\eta - \varphi). \end{aligned} \quad (VI.18)$$

Si noti che la frequenza di oscillazione a regime è, naturalmente, quella imposta dal forzamento, diversa, in generale, da quella ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$) alla quale il circuito è in grado di oscillare in evoluzione libera, in assenza di una causa dissipatrice ($R=0$). C'è da attendersi un comportamento singolare, e quindi interessante, quando tali frequenze coincidono!

Esercizi

Per il circuito mostrato, scrivere l'equazione risolvante in termini della incognita v_C .



È utile prendere dimestichezza con il passaggio dall'insieme delle grandezze sinusoidali a quello dei fasori, come è indicato negli esercizi proposti a lato.

$$5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$$

$$10\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/3)$$

$$2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/6)$$

Trasformare le seguenti funzioni sinusoidali in fasori.

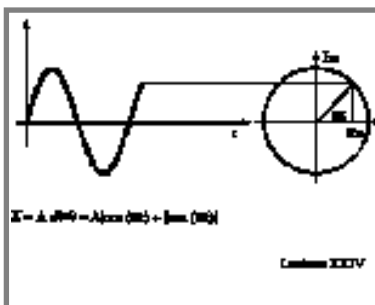
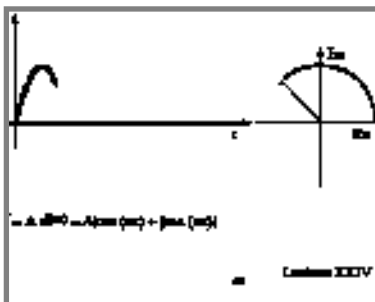
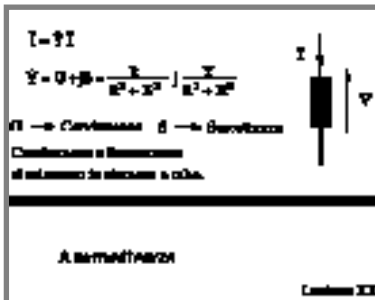
$$(5 + j5) e^{j\omega t}$$

$$(5 + j10) e^{j\omega t}$$

$$10e^{j\pi/2} e^{j\omega t}$$

$$5e^{j\pi/3} e^{j\omega t}$$

Trasformare i seguenti fasori in funzioni sinusoidali di pulsazione ω .



Fasori e vettori rappresentativi

Come abbiamo visto, in regime sinusoidale è possibile caratterizzare ogni bipolo attraverso la sua impedenza: un numero complesso con una parte reale, che continueremo a chiamare resistenza, ed una parte immaginaria il cui coefficiente prende il nome di reattanza. L'impedenza è il rapporto tra il fasore rappresentativo della tensione ai morsetti del bipolo e quello rappresentativo della corrente che lo attraversa. Se sul bipolo si è assunta una convenzione dell'utilizzatore, la resistenza è necessariamente positiva, almeno per i componenti fin qui introdotti. Analogamente è possibile caratterizzare lo stesso bipolo attraverso la sua ammettenza: il rapporto tra fasore rappresentativo della corrente e fasore rappresentativo della tensione. La parte reale dell'ammettenza prende il nome di conduttanza e, con una convenzione dell'utilizzatore, è definita positiva; il coefficiente della parte immaginaria prende il nome di suscettanza e può essere positivo o negativo. Resistenze e reattanze si misurano in ohm, mentre conduttanze e suscettanze si misurano in siemens.

Introduciamo una rappresentazione grafica dei fasori che ci sarà di grande utilità nel seguito. Consideriamo il piano complesso $\{\text{Re}(\bar{A}), \text{Im}(\bar{A})\}$ e seguiamo in esso il punto rappresentativo della funzione $Ae^{j\omega t}$ durante lo scorrere del tempo.

All'istante 0 tale punto è sull'asse reale ad una distanza pari al modulo A del numero complesso. Negli istanti successivi il punto rappresentativo, essendo il modulo di \bar{A} costante, si muove lungo una circonferenza di raggio pari ad A con una velocità angolare ω . Il fasore \bar{A} può dunque essere rappresentato con un vettore rotante che ha un estremo nell'origine delle coordinate e l'altro nel punto sulla circonferenza. Se rappresentia-

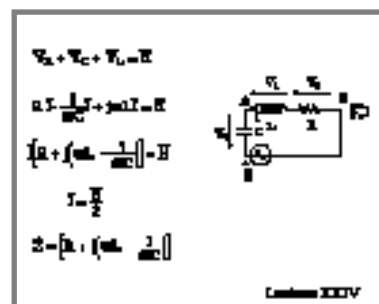
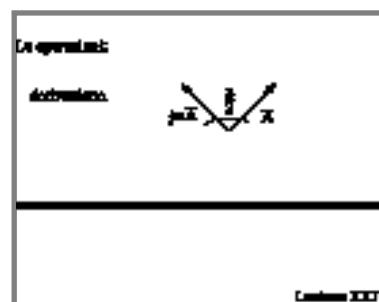
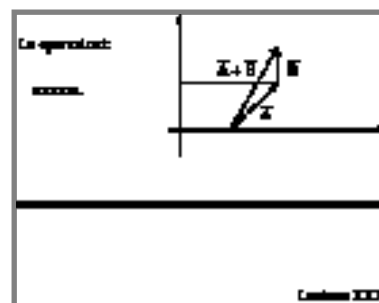
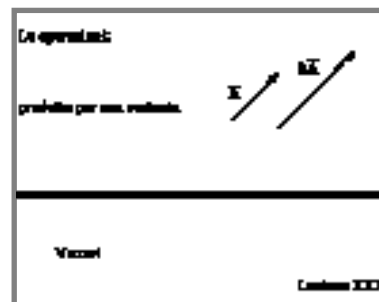
mo tutte le grandezze sinusoidali del nostro circuito sullo stesso piano, essendo esse tutte caratterizzate dalla stessa frequenza, i vettori rappresentativi ruoteranno tutti con la stessa velocità angolare ω , e si conserveranno, quindi, tra loro gli stessi sfasamenti che si presentavano all'istante 0. Se siamo dunque interessati esclusivamente alle relazioni in modulo e fase tra i vari fasori basta prendere in considerazione il diagramma vettoriale rappresentativo all'istante 0, o ad un qualsiasi altro istante t .

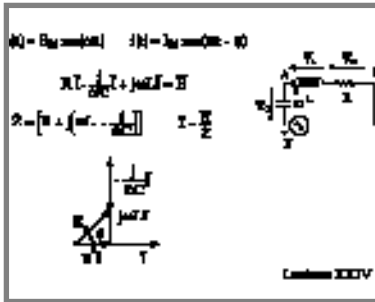
Tutte le operazioni necessarie nel campo complesso per la soluzione di una rete hanno le loro corrispondenti operazioni grafiche nel piano complesso; per esempio, è immediato rendersi conto che l'operazione di somma di due fasori corrisponde, nel diagramma vettoriale rappresentativo alla consueta somma di vettori (regola del parallelogramma). L'operazione di derivazione corrisponde a ruotare il vettore rappresentativo di $\pi/2$ in verso antiorario (anticipo) oltre che a moltiplicare il suo modulo per ω .

Si noti che mentre il fasore $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$ corrisponde ad un vettore rotante con velocità angolare ω , il fasore $Ae^{j\alpha}$ corrisponde al vettore fermo alla sua posizione all'istante 0. In generale è consentito utilizzare lo stesso simbolo \bar{A} per tutte queste grandezze, non potendo ciò generare alcuna confusione.

Il diagramma vettoriale del circuito RLC serie è molto semplice da costruire. Si parte dall'assegnare il vettore rappresentativo della corrente \bar{I} . La somma della caduta di tensione resistiva $R \bar{I}$, in fase con la corrente, di quella induttiva $j\omega L \bar{I}$, sfasata di 90° in anticipo, e di quella capacitiva $-1/j\omega C \bar{I}$, sfasata di 90° in ritardo, fornisce il vettore rappresentativo della tensione \bar{E} del generatore.

È immediato, a questo punto, determinare graficamen-



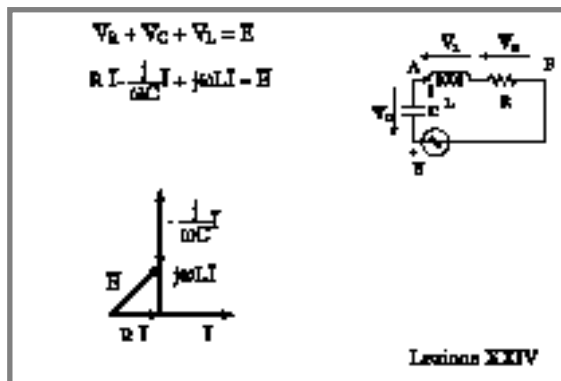
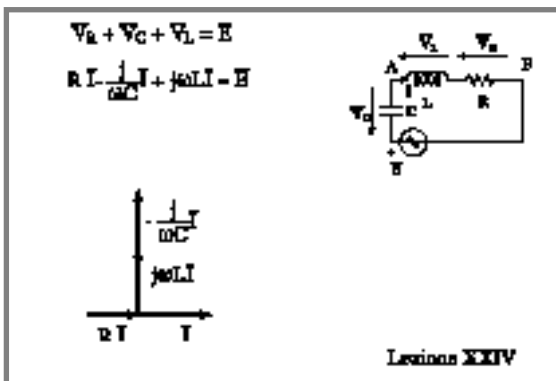
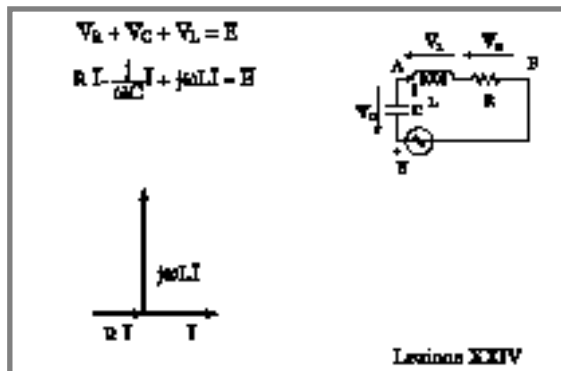
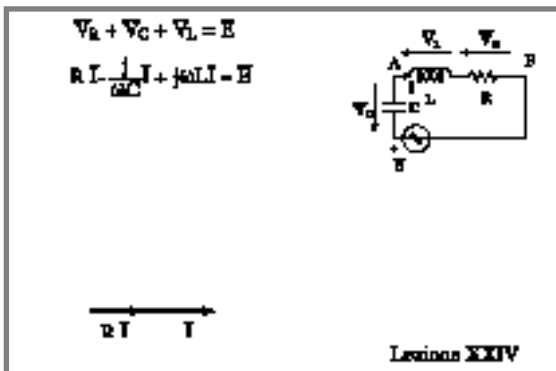
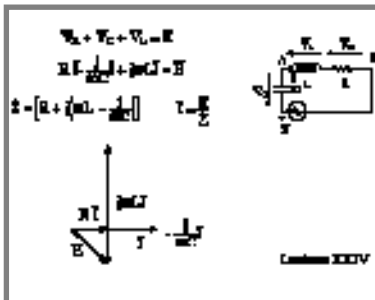


te lo sfasamento φ fra tensione e corrente.

Nel caso rappresentato nella prima immagine a lato si è supposto che il modulo della caduta induttiva sia maggiore del modulo della caduta capacitiva. Naturalmente se accade l'inverso il diagramma prende la forma rappresentata nella successiva immagine.

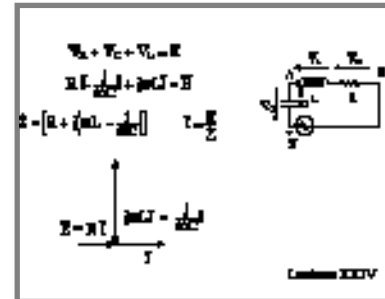
Nel primo caso la corrente è sfasata in ritardo rispetto alla tensione (carico prevalentemente induttivo, $\varphi > 0$); nel secondo caso, in anticipo (carico prevalentemente capacitivo, $\varphi < 0$).

Osserviamo che nel caso particolare in cui $\omega L = 1/\omega C$ il diagramma vettoriale assume la caratteristica forma descritta nella prima immagine della pagina seguente. In pratica le cadute induttive e capacitive si compensano mutuamente con il risultato che al generatore il carico appare puramente resistivo; l'impedenza complessiva si riduce alla sola resistenza ed ha quindi solo parte

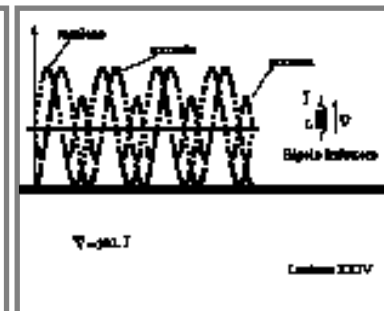
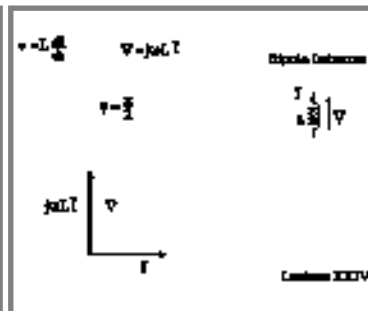
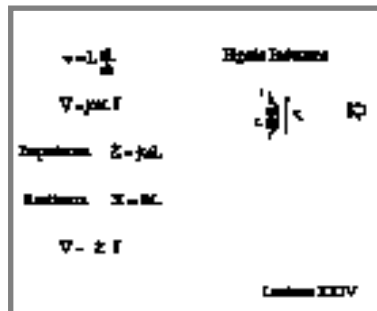


reale. È questo il fenomeno della risonanza che esamineremo in dettaglio in uno dei prossimi paragrafi.

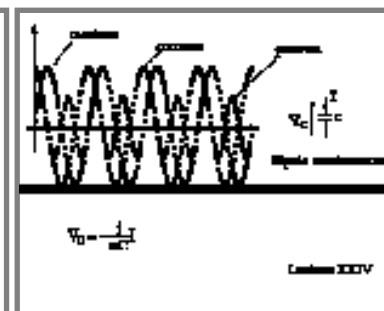
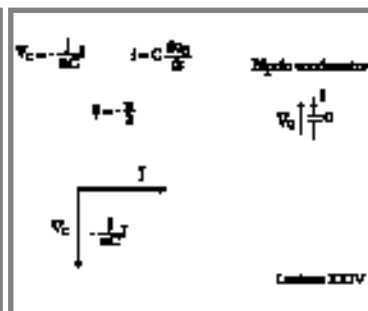
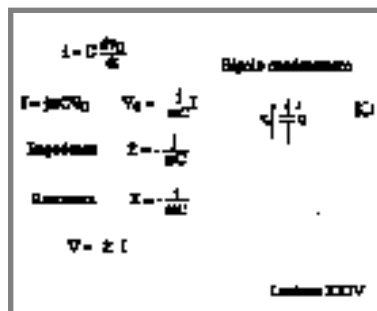
Per ora limitiamoci a riepilogare il comportamento dei tre bipoli introdotti in regime sinusoidale, induttore, condensatore e resistore, mostrandone le relazioni caratteristiche nelle diverse formulazioni.



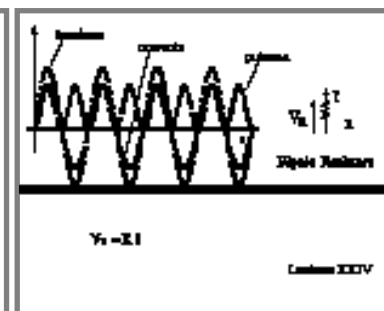
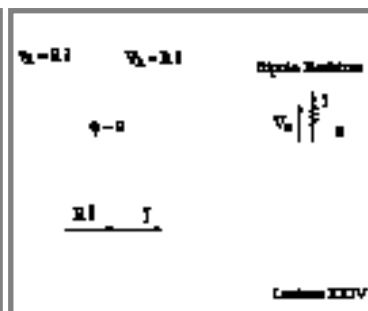
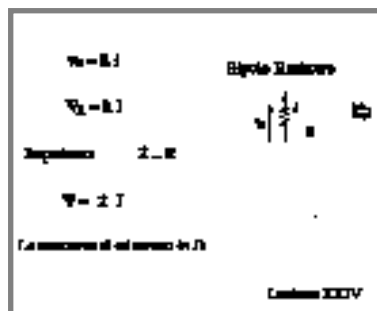
Bipolo induttore:



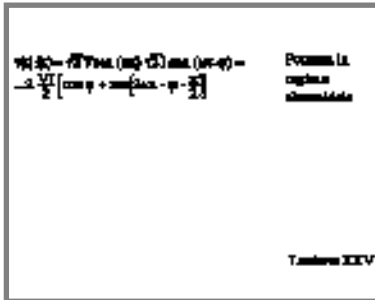
Bipolo condensatore:



Bipolo resistore:



Insieme agli andamenti di tensione e corrente nei tre casi è stato riportato anche l'andamento del prodotto $v(t)i(t)$. Per definizione tale prodotto rappresenta, istante per istante, la potenza assorbita dal bipolo - convenzione dell'utilizzatore. Si noti che solo per il resistore tale potenza è sempre positiva; per l'induttore e per il condensatore, invece, la potenza è positiva in un semiperiodo - pari ad un quarto del periodo di tensione e corrente - e negativa nel successivo. Ma questo argomento merita una trattazione a parte.



Potenza nei regimi sinusoidali

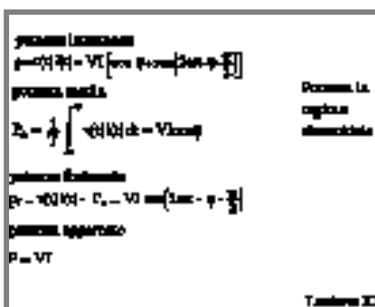
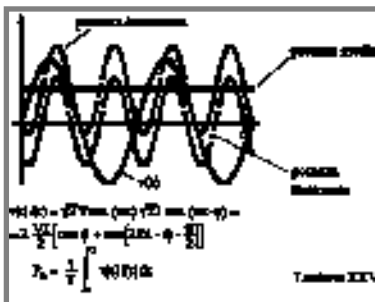
Affrontiamo il problema dal punto di vista generale. La potenza istantanea assorbita da un qualsiasi bipolo sottoposto alla tensione $v(t)$ e percorso dalla corrente $i(t)$ è, per definizione, $p(t) = v(t) i(t)$. Nel caso particolare di un regime sinusoidale si ha:

$$p(t) = v(t) i(t) = \sqrt{2} V \sin \omega t \sqrt{2} I \sin (\omega t - \varphi) = V I [\cos \varphi + \sin (2\omega t - \varphi - \pi/2)], \quad (\text{VI.19})$$

In altri termini, la potenza in regime sinusoidale è la somma di un termine costante, pari al prodotto del valore efficace della tensione per il valore efficace della corrente per il coseno dell'angolo φ tra i due fasori, più un termine oscillante di frequenza 2ω . Dato che il termine oscillante ha valor medio nullo, il valore medio della potenza istantanea è pari al termine costante $VI \cos \varphi$:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = V I \cos \varphi. \quad (\text{VI.20})$$

Ciò giustifica anche la nostra scelta di utilizzare il valore efficace anziché il valore massimo quale modulo del



fasore rappresentativo di tensioni e correnti. In particolare, con questa scelta, se si dà all'operatore *prodotto scalare* tra due vettori l'usuale significato di prodotto dei moduli dei vettori per il coseno dell'angolo che essi formano, si può affermare che in regime sinusoidale la potenza media è pari al prodotto scalare del vettore rappresentativo della tensione per quello rappresentativo della corrente:

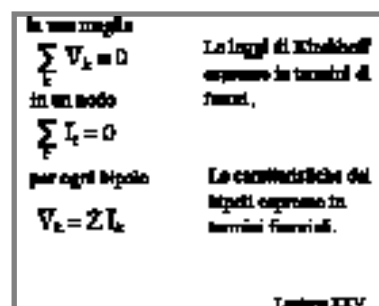
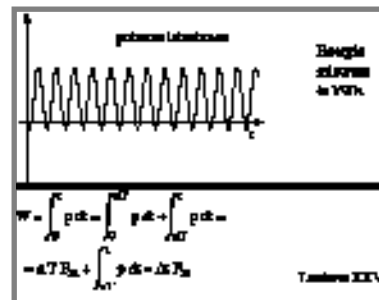
$$P = \bar{V} \cdot \bar{I} = V I \cos \varphi. \quad (\text{VI.21})$$

La potenza media viene anche detta potenza attiva. In effetti il valore della potenza media consente di calcolare agevolmente la quantità di energia, trasferita in un determinato intervallo di tempo $t-t_0$, come il prodotto della potenza media per l'intervallo stesso (si presume, naturalmente che l'intervallo $t-t_0$ contenga molti periodi T).

Ci aspettiamo dunque che per la potenza media valga, così come per l'energia, un teorema di conservazione: la potenza attiva fornita dai generatori deve essere eguale a quella utilizzata dagli utilizzatori.

Proprietà delle reti in regime sinusoidale

Come abbiamo visto, a condizione di trasformare tutte le grandezze sinusoidali nei corrispondenti fasori, si può operare in regime sinusoidale alla stessa maniera in cui si è operato in regime continuo. Ai concetti di resistenza e di conduttanza dei bipoli si sostituiscono quelli di impedenza ed ammettenza. Tali grandezze, a differenza delle precedenti, sono espresse da numeri complessi, e ciò naturalmente comporterà inizialmente qualche lieve complicazione. Per superarle basta ricordare le principali operazioni sui numeri complessi, nella loro forma cartesiana:



$$\begin{aligned}
 (a+jb) + (c+jd) &= a+c + j(b+d) \\
 (a+jb)(c+jd) &= (ac-bd) + j(ad+bc) \\
 \frac{(a+jb)(c+jd)}{(c+jd)(c-jd)} &= \frac{(ac-bd) + j(ad+bc)}{c^2+d^2} \\
 &= \frac{(ac-bd) + j(ad+bc)}{c^2+d^2}
 \end{aligned}$$

Operazioni con i numeri complessi.

Teorema XXV

$$(a+jb) + (c+jd) = a+c + j(b+d),$$

$$(a+jb)(c+jd) = (ac-bd) + j(ad+bc),$$

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(ac+bd) + j(bc-ad)}{c^2+d^2},$$

ed in quella polare:

$$(a+jb) = A e^{j\varphi}, \text{ con } A = \sqrt{a^2+b^2} \text{ e } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

$$A e^{j\varphi} B e^{j\gamma} = A B e^{j(\varphi+\gamma)},$$

$$\frac{A e^{j\varphi}}{B e^{j\gamma}} = \frac{A}{B} e^{j(\varphi-\gamma)}.$$

Così, per esempio, serie e parallelo di due bipoli portano alle stesse formule utilizzate in continua.

Serie:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2, \quad \dot{Y} = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}.$$

Parallelo:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2.$$

In generale potremo affermare che tutte le proprietà ed i teoremi sulle reti, dimostrati in regime continuo sulla base delle leggi di Kirchhoff, hanno un loro equivalente in regime sinusoidale in termini di fasori. Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione; ripercorrendo i passi della dimostrazione a suo tempo sviluppata, non sarà difficile evidenziarne il motivo.

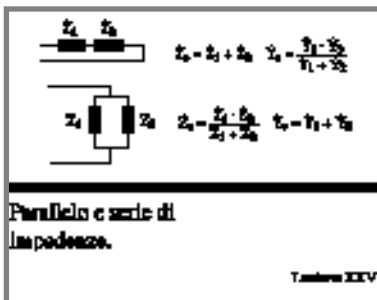
Il teorema di Tellegen, merita una discussione più approfondita. Naturalmente tale teorema è valido istante per istante:

$$\sum_k v(t) i(t) = 0, \quad (\text{VI.22})$$

$$\begin{aligned}
 (a+jb) &= A e^{j\varphi} \text{ con } A = \sqrt{a^2+b^2} \\
 &= \cos \varphi - j \sin \varphi \\
 A e^{j\varphi} B e^{j\gamma} &= A B e^{j(\varphi+\gamma)} \\
 \frac{A e^{j\varphi}}{B e^{j\gamma}} &= \frac{A}{B} e^{j(\varphi-\gamma)}
 \end{aligned}$$

Operazioni con i numeri complessi.

Teorema XXVI



Proprietà delle reti.

Tutte le proprietà delle reti che dipendono dalle relazioni delle leggi di Kirchhoff e dalle proprietà delle costituenti restano valide anche nel regime in corrente alternata.

Teorema XXV

in quanto le tensioni e le correnti ad ogni istante soddisfano le leggi di Kirchhoff. La (VI.22) è l'espressione di un teorema di conservazione delle potenze istantanee che avremmo potuto dedurre anche da semplici considerazioni sulla conservazione dell'energia.

Ma dato che il sistema dei fasori rappresentativi delle tensioni sui lati e quello rappresentativo delle correnti nei rami soddisfano anche essi alle leggi di Kirchhoff, si può certamente affermare che anche la somma di tutti i prodotti $\bar{V} \bar{I}$, estesa all'intera rete deve essere identicamente nulla. Con facili passaggi si può sviluppare il generico termine, ma il risultato non è particolarmente significativo.

Più interessante è invece il caso in cui al posto dei fasori rappresentativi delle correnti si utilizzano i rispettivi coniugati. È evidente infatti che anche tali coniugati - in cui, si ricorderà, cambia solo il segno della parte immaginaria - debbono sottostare alla prima legge di Kirchhoff. Si avrà dunque:

$$\sum_k \bar{V}_k \tilde{I}_k = \sum_k V_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} I_k e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = 0. \quad (\text{VI.23})$$

Lo sviluppo del generico termine della sommatoria fornisce:

$$\bar{V}_k \tilde{I}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k). \quad (\text{VI.24})$$

Tale grandezza viene detta potenza complessa; la sua parte reale coincide con la potenza media o attiva.

La (V.23) esprime un teorema di conservazione per le potenze complesse: in una rete in regime sinusoidale la somma delle potenze complesse fornite dai generatori deve essere uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dagli utilizzatori. D'altra parte l'annullarsi di un numero complesso implica l'annullarsi della sua parte reale e di quella immaginaria. L'annullamento della somma delle parti reali delle potenze complesse

Teorema di Tellegen.

$$\sum_k V_k = 0 \quad \sum_k I_k = 0$$

Teorema XXV

$$\sum_k V_k \tilde{I}_k = 0$$

$$V_k \tilde{I}_k = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k + \varphi_k)} = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = V_k I_k [\cos(\omega t + \alpha_k - \varphi_k) + j \sin(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)]$$

Teorema di Tellegen.

Teorema XXV

$$\sum_k I_k = 0$$

$$\sum_k \tilde{I}_k = 0$$

$$I_k = I_k e^{j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} \quad \tilde{I}_k = I_k e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)}$$

Teorema di Tellegen.

Teorema XXV

$$\sum_k V_k \tilde{I}_k = 0$$

$$V_k \tilde{I}_k = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k + \varphi_k)} = V_k I_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = V_k I_k [\cos(\omega t + \alpha_k - \varphi_k) + j \sin(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)]$$

Teorema di Tellegen.

Teorema XXV

$$\sum_k \frac{1}{2} V_k I_k = 0$$

$$\sum_k \frac{1}{2} V_k I_k \cos \varphi_k = \sum_k P_{a,k} = 0$$

$$\sum_k \frac{1}{2} V_k I_k \sin \varphi_k = \sum_k Q_k = 0$$

Teorema di Tellegen.

T. Anderson XXV

$P_a = VI \cos \varphi$ = potenza attiva o potenza reale o attiva
 $Q = VI \sin \varphi$ = potenza reattiva
 $P = P_a + jQ$ = potenza complessa
 $|P| = \sqrt{P_a^2 + Q^2} = P$ = potenza apparente

Teorema di Tellegen.

T. Anderson XXV


La potenza attiva si misura in watt
 La potenza reattiva si misura in Volt-ampere-reattivi (VAR)
 La potenza apparente si misura in Volt-ampere (VA)

Teorema di Tellegen.

T. Anderson XXV

$P = P_a + jQ$ = potenza complessa
 $|P| = \sqrt{P_a^2 + Q^2} = P$ = potenza apparente

con $\varphi = \frac{Q}{P_a}$



Teorema di Tellegen.

T. Anderson XXV

fornisce di nuovo il teorema di conservazione delle potenze attive che avevamo già dedotto in base a semplici considerazioni energetiche. L'annullamento della parte immaginaria, invece, introduce la conservazione di un'altra grandezza, rappresentata per ogni bipolo da $VI \sin \varphi$. A tale grandezza, che ha evidentemente le dimensioni di una potenza, si dà il nome di *potenza reattiva*, e si usa per essa il simbolo Q . In un resistore, la potenza reattiva assorbita è evidentemente nulla, mentre diversa da zero è la potenza attiva che è pari a VI , dato che $\cos \varphi = 1$. Per l'induttore ed il condensatore, invece, la potenza attiva assorbita è nulla, $\cos \varphi = 0$, mentre la potenza reattiva è rispettivamente pari a VI ed a $-VI$.

Una potenza reattiva non nulla in una rete è indubbiamente indice della presenza di energie immagazzinate associate al campo elettrico o al campo magnetico; per ogni induttore presente nella rete si avrà, infatti:

$$Q_L = VI = \omega L I^2 = \omega \frac{1}{2} L I_M^2 = \omega W_{BM}. \quad (\text{VI.25})$$

mentre per ogni condensatore:

$$\begin{aligned} Q_C &= -VI = -\omega C V^2 = \\ &= -\omega \frac{1}{2} C V_M^2 = -\omega W_{EM}. \end{aligned} \quad (\text{VI.26})$$

La potenza reattiva totale è dunque proporzionale, secondo il fattore ω , alla differenza tra i valori massimi dell'energia associata al campo magnetico e di quella associata al campo elettrico nella rete. Ma questa relazione non è particolarmente utile.

Infine va ricordato che al prodotto VI viene dato il nome di *potenza apparente*. Si noti che tra le tre potenze, attiva P_a , reattiva Q ed apparente P , sussiste la relazione:

$$P = \sqrt{P_a^2 + Q^2}. \quad (\text{VI.27})$$

Tale relazione può utilmente essere rappresentata graficamente in un cosiddetto *triangolo delle potenze*.

Il fatto che la potenza reattiva sia una grandezza che si conserva può essere di grande utilità nella risoluzione delle reti. Si consideri per esempio il caso di due carichi in parallelo di cui siano note le potenze attive e reattive assorbite da ognuno di essi; si può affermare che il complesso dei due carichi è equivalente ad un unico carico che assorbe una potenza attiva e reattiva che sono la somma algebrica (la potenza reattiva può essere negativa!) delle rispettive potenze dei singoli carichi. A riprova del fatto che questo non è un risultato banale, si osservi che la stessa affermazione non può essere fatta per le potenze apparenti, come è facile verificare con i semplici calcoli mostrati nella successiva immagine a lato.

Esercizi

Per il circuito proposto in precedenza l'equazione risolvente è:

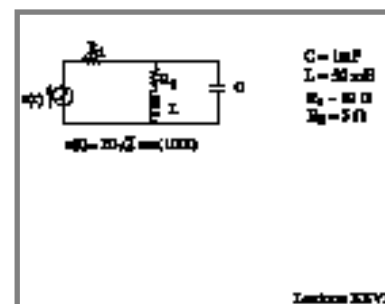
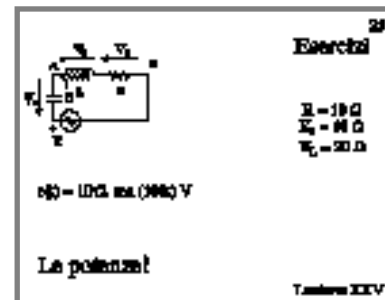
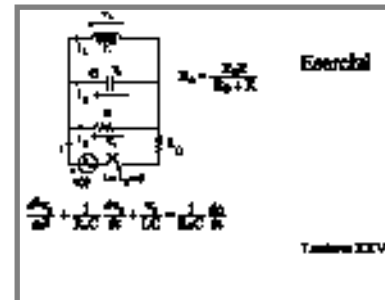
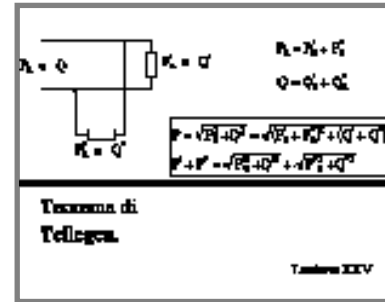
$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{R_e C} \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{LC} = \frac{1}{R_0 C} \frac{de}{dt},$$

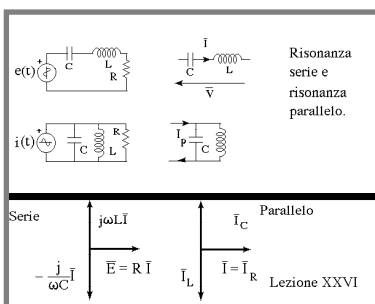
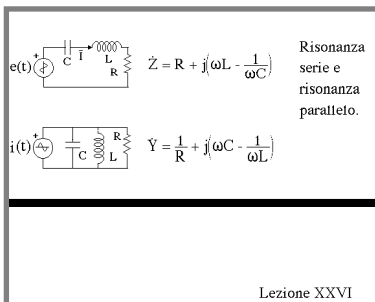
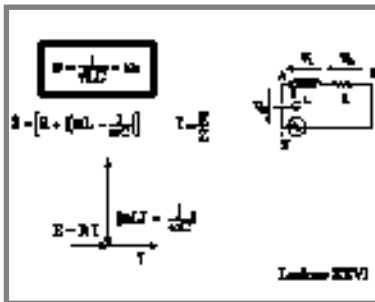
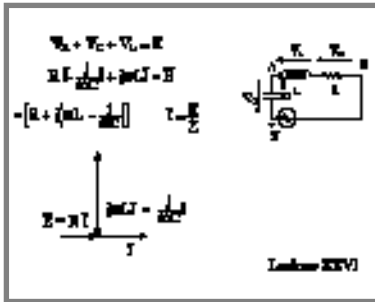
con:

$$R_e = \frac{R R_0}{R + R_0}.$$

Si noti che R_e è il parallelo tra le due resistenze R ed R_0 . Per la rete nella successiva immagine si calcolino le potenze attive, reattive ed apparenti assorbite dai singoli bipoli e quelle erogate dal generatore e si verifichino i teoremi di conservazione.

Si risolva la rete mostrata nell'ultima immagine.





Il circuito risonante

Abbiamo visto che in un circuito RLC serie, alimentato da un generatore di forza elettromotrice sinusoidale di frequenza angolare ω , si può verificare la condizione per cui la caduta capacitiva compensa perfettamente la caduta induttiva ed il circuito appare al generatore come puramente ohmico. Per assegnati valori di L e C , ciò accade per una frequenza del generatore pari ad ω_0 ,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (\text{VI.28})$$

che è proprio la frequenza alla quale il circuito, in assenza di cause dissipative ($R = 0$), è in grado di oscillare liberamente. Siamo dunque nella già menzionata condizione di *risonanza* tra la frequenza del forzamento e quella propria del sistema. Un circuito di tal genere è detto anche *circuito risonante*.

Del tutto equivalente è il caso del circuito RLC parallelo, a volte detto anche *antirisonante*. In esso la corrente erogata dal generatore, che è somma delle tre correnti rispettivamente nell'induttore, nel resistore e nel condensatore, si riduce ad essere uguale alla sola corrente nel resistore perché le altre due si compensano perfettamente, essendo eguali ed opposte.

Mentre nel circuito serie, in assenza della resistenza R , l'impedenza risultante è nulla, nel circuito parallelo, sempre in assenza di resistenza (questa volta $R = \infty$), l'impedenza risultante è infinita.

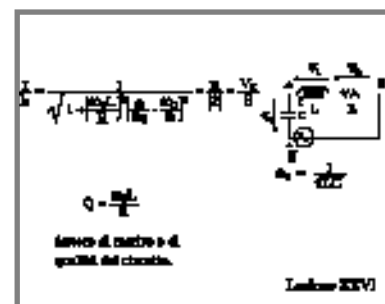
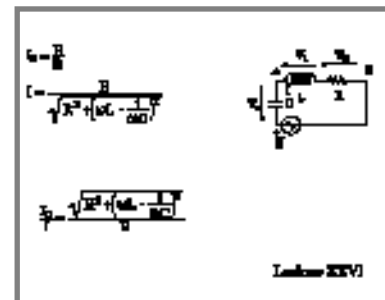
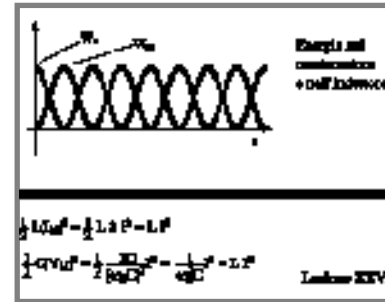
Si noti che nel circuito antirisonante senza perdite, cioè per $R = 0$, pur essendo la corrente totale fornita dal generatore identicamente nulla, non sono nulle le correnti nell'induttore e nel condensatore, che si calcolano agevolmente come rapporto tra tensione applicata e relativa impedenza.

Per comprendere il fenomeno della risonanza bisogna

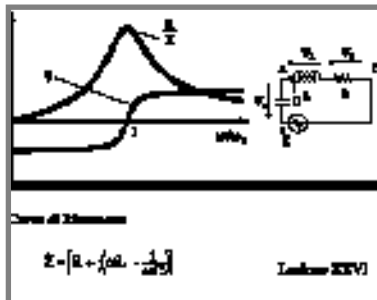
tener presente che implicitamente si è assunto che la rete sia a regime; il che vuol dire che si suppone vi sia stato un transitorio - in tempi lontani di cui sembra non essere rimasto traccia - che ha portato all'attuale situazione di regime. Durante il transitorio il generatore ha fornito al complesso dei due elementi con memoria presenti nella rete una certa quantità di energia; d'altra parte, dato che l'energia immagazzinata nel condensatore è proporzionale al quadrato della tensione su di esso e quella nell'induttore è proporzionale al quadrato della corrente che lo attraversa, è evidente che se tensione e corrente non sono in fase, ma in quadratura, come nel nostro caso, accadrà che quando l'energia associata al campo elettrico (condensatore) è massima, quella associata al campo magnetico (induttore) è nulla e viceversa. Se poi in particolare tali energie massime sono eguali, una volta raggiunto il regime si assisterà ad un periodico scambio di energia tra campo elettrico e campo magnetico che vede completamente estraneo il generatore; esso dovrà solo occuparsi di fornire la potenza dissipata nel resistore.

Il fenomeno della risonanza, caratteristico di qualsiasi sistema che abbia la capacità di oscillare su frequenze proprie, è molto importante anche dal punto di vista applicativo, specialmente nel campo dei circuiti. Esaminiamolo dunque in maggior dettaglio.

Supponiamo che, nel circuito risonante serie, il generatore di tensione sia a frequenza variabile; si possa cioè variare a piacimento tra 0 ed ∞ la frequenza della tensione che esso eroga. Riportiamo in un diagramma la curva del modulo della corrente I in funzione della frequenza; evidentemente tale diagramma è anche il diagramma dell'inverso del modulo della impedenza. Per



$\omega = 0$, $I = 0$ perché il condensatore a tale "frequenza" presenta una impedenza infinita; analogamente per ω che va all'infinito la corrente è nulla, questa volta per merito dell'induttore. Per $\omega = \omega_0$ il modulo della corrente ha un massimo pari ad E/R , così come mostrato nel diagramma a lato, dove è riportato l'andamento di I normalizzato al suo valore massimo E/R . Nello stesso diagramma è rappresentata la fase φ della impedenza al variare di ω . Come era prevedibile, per frequenze inferiori a quella di risonanza il circuito si comporta globalmente come un carico prevalentemente capacitivo: l'impedenza offerta dal condensatore prevale. Per frequenze invece superiori a quella di risonanza, il carico è prevalentemente induttivo. Alla frequenza di risonanza, come abbiamo visto, il carico si comporta come se fosse puramente resistivo. La curva di cui al diagramma precedente è, in effetti, la rappresentazione della funzione:



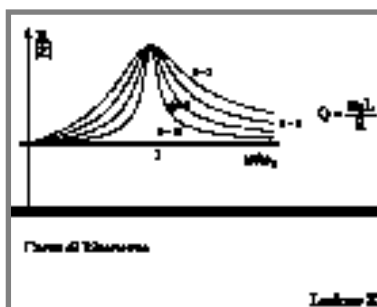
$$f(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (\text{VI.29})$$

Con qualche semplice passaggio, avendo posto

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \quad (\text{VI.30})$$

si ottiene anche:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \quad (\text{VI.31})$$



La curva che descrive la funzione $f(\omega)$ prende il nome di *curva di risonanza* ed il parametro Q quello di *fatto - re di qualità* o di *merito* del circuito.

All'aumentare del fattore di qualità del circuito, la curva di risonanza diventa sempre più ripida nell'intor-

no della frequenza di risonanza ω_0 .

Le motivazioni di tale terminologia si comprendono facilmente se si considera la seguente situazione. Si immagini che la tensione del generatore non sia sinusoidale ma semplicemente periodica. Come si è visto, una tale tensione può essere scomposta in una somma di infiniti termini sinusoidali di frequenza diversa (le armoniche della serie di Fourier). Vediamo il circuito come un doppio bipolo che abbia in ingresso il generatore a frequenza variabile e dal quale si prelevi in uscita la tensione sul resistore R . Evidentemente, per la sovrapponibilità degli effetti, anche la tensione in uscita può essere vista come somma delle risposte alle singole armoniche. D'altra parte ogni armonica della tensione in ingresso vede una diversa impedenza del circuito a causa della diversa frequenza. Se ne conclude che le ampiezze delle armoniche con frequenze vicine a quella di risonanza risulteranno amplificate rispetto alle altre.

Per questo motivo si dice che il circuito si è comportato come un *filtro*, lasciando "passare" di preferenza un determinato intervallo di frequenze (banda), e attenuando le altre. Così, per esempio, se in ingresso abbiamo una onda quadra, il cui sviluppo in serie di Fourier abbiamo già visto, in uscita avremo un andamento temporale che sarà tanto più vicino ad una sinusoida quanto più alto è il fattore di qualità (curva di risonanza più ripida!). Se la frequenza di risonanza del circuito è pari a quella della fondamentale armonica dell'onda quadra, in uscita si avrà una sinusoida a quella frequenza; essa sarà leggermente deformata per la presenza delle armoniche di ordine superiore che, seppur attenuate, sono sempre presenti. Ma se la frequenza di risonanza del circuito è uguale a quella della successiva armonica (di frequenza tripla di quella fondamentale, nel nostro

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$$

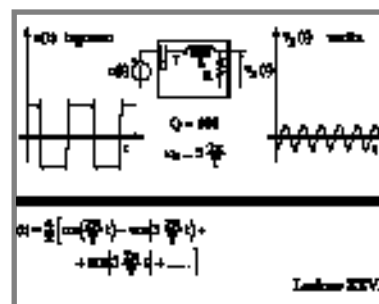
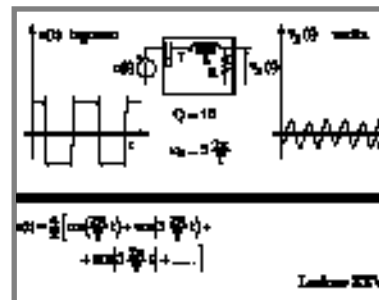
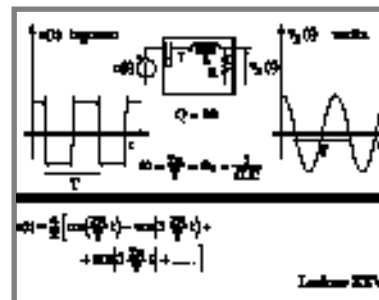
Serie di Fourier

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(n\omega t) dt$$

Lombard XXIV



periodo è pari a $R I^2 T$ per cui si ha:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L I^2 T}{R I^2 T} = \frac{2\pi L I^2}{R I^2 T}. \quad (\text{VI.33})$$

Se ne deduce dunque:

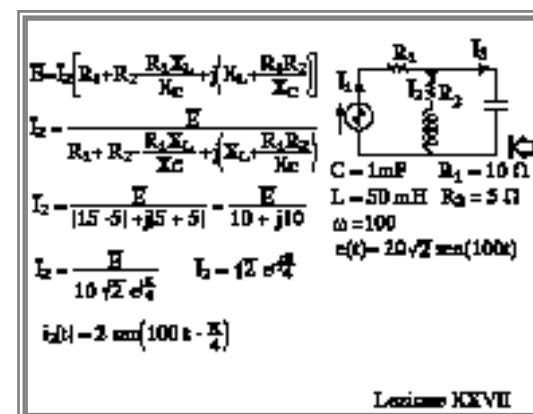
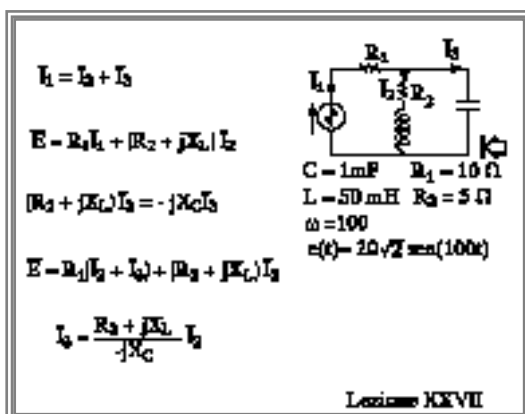
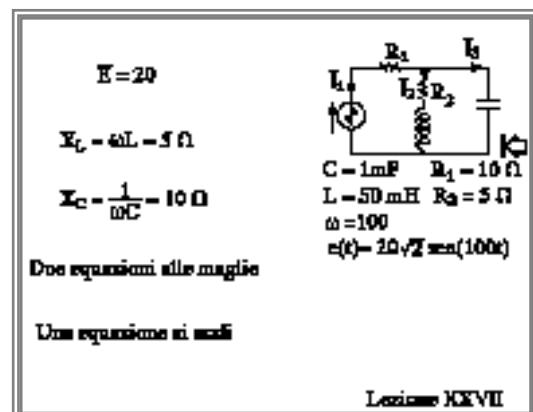
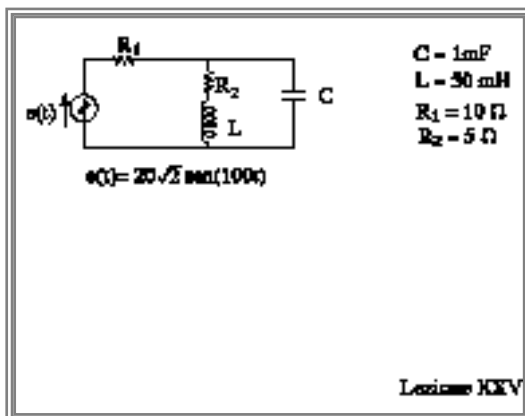
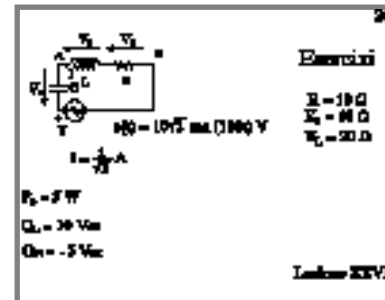
$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{energia dissipata in un periodo}}. \quad (\text{VI.34})$$

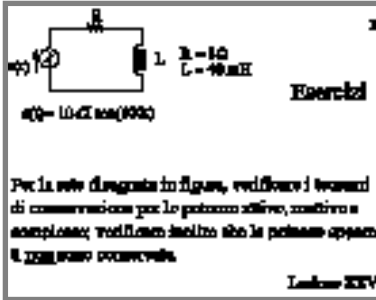
Esercizi

Le potenze richieste, nell'esercizio proposto in precedenza sono:

$$P_a = 5 \text{ W}; \quad Q_c = 10 \text{ VAR}; \quad Q_L = -5 \text{ VAR}.$$

Per l'esercizio successivo ci limitiamo a mostrare alcuni passi della soluzione.



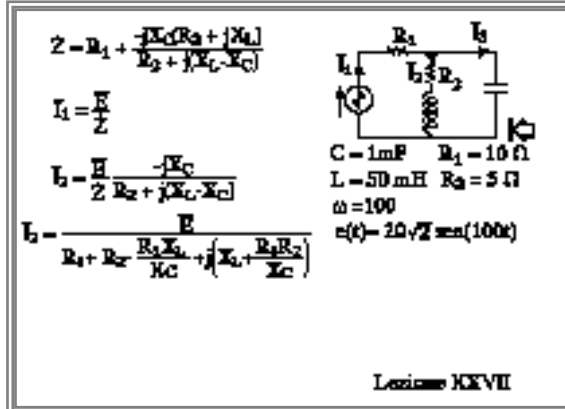


Esercizio

Per la rete disegnata in figura, verificare i teoremi di conservazione per le potenze attive, reattive e complesse; verificare inoltre che le potenze apparenti sono conservate.

Lezione XXIV

La stessa soluzione può anche essere ottenuta applicando la regola del partitore di corrente.



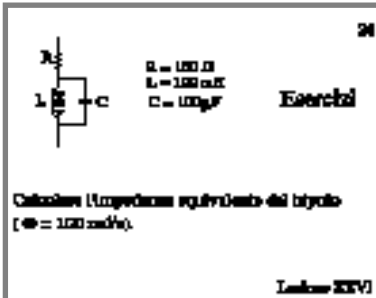
Esercizio

Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo.

($\omega = 100 \text{ rad/s}$).

Lezione XXVII

Ancora un esercizio sulla verifica della conservazione delle potenze nella prima immagine in colonna.

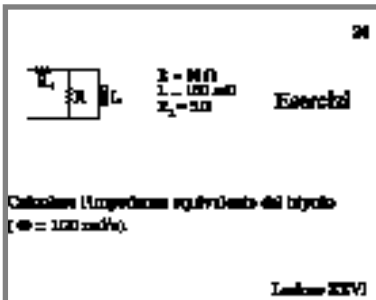


Esercizio

Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo.

($\omega = 100 \text{ rad/s}$).

Lezione XXV



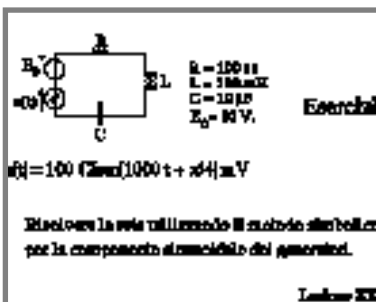
Esercizio

Calcolare l'impedenza equivalente del bipolo.

($\omega = 100 \text{ rad/s}$).

Lezione XXVI

Nei due esercizi successivi si chiede il calcolo delle impedenze equivalenti dei bipoli mostrati.



Esercizio

Risolvere la rete utilizzando il metodo dei fasori per la componente sinusoidale del generatore.

Lezione XXVIII

Infine l'ultimo esercizio richiede la soluzione della rete con il metodo dei fasori.

Gli n-poli e gli N-bipoli in regime sinusoidale

La teoria degli n-poli e degli N-bipoli in regime sinusoidale si sviluppa in maniera del tutto analoga a quanto fatto per gli stessi dispositivi in corrente continua. Così avremo una matrice delle impedenze ed una matrice delle ammettenze del tutto analoghe a quelle delle resistenze e delle conduttanze introdotte per il regime continuo. Gli elementi delle matrici avranno definizioni analoghe a quelle già introdotte per i corrispondenti parametri in continua; l'unica differenza sarà nel fatto che si dovrà operare con fasori e numeri complessi piuttosto che con numeri reali. Le proprietà dei parametri \dot{Y} o \dot{Z} sono le stesse già dimostrate per i parametri G ed R , salvo quelle per la dimostrazione delle quali si è fatto uso del teorema di non amplificazione delle tensioni o delle correnti che, come abbiamo più volte rilevato, non sono validi se non in regime continuo.

Per i doppi bipoli, in particolare, abbiamo le due rappresentazioni, della matrice delle impedenze,

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{Z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= \bar{Z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \bar{I}_2,\end{aligned}\quad (\text{VI.35})$$

e delle ammettenze,

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11} \bar{V}_1 + \bar{Y}_{12} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21} \bar{V}_1 + \bar{Y}_{22} \bar{V}_2.\end{aligned}\quad (\text{VI.36})$$

Nei regimi dinamici ha senso introdurre un particolare doppio bipolo, che non ha il suo equivalente in c.c.: l'accoppiamento magnetico mutuo tra due circuiti. Vediamo di cosa si tratta.

Abbiamo già visto che un induttore altro non è che un avvolgimento di un certo numero di spire su di un supporto che, in generale, ha anche il compito di amplifi-

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11} \bar{V}_1 + \bar{Y}_{12} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21} \bar{V}_1 + \bar{Y}_{22} \bar{V}_2 \\ \bar{Y}_{11} &= \bar{Y}_{22}\end{aligned}$$

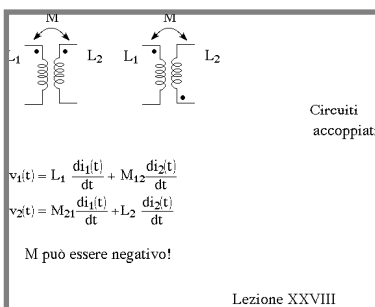
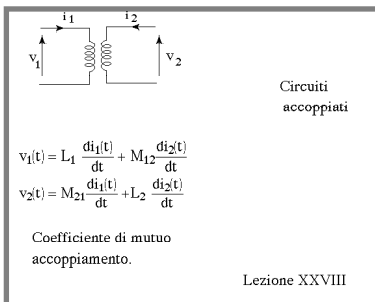
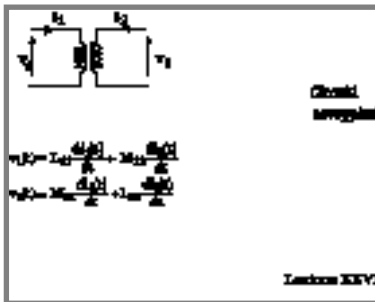
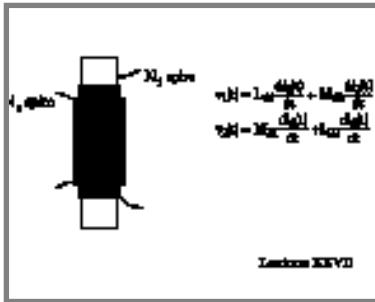
Matrice delle
Ammettenze

L'esercizio VI.35

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{Z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= \bar{Z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \bar{I}_2 \\ \bar{Z}_{11} &= \bar{Z}_{22}\end{aligned}$$

Matrice delle
Impedenze

L'esercizio VI.36



care il fenomeno sul quale il sistema fonda le sue proprietà: il campo magnetico prodotto dalla corrente che circola nell'avvolgimento. I due estremi dell'avvolgimento costituiscono i morsetti del bipolo.

Supponiamo che il campo magnetico prodotto dalla corrente in un avvolgimento si estenda anche in una regione di spazio in cui è presente un altro avvolgimento. Avremo, in tal caso, un sistema a quattro morsetti, e quindi un doppio bipolo. Sarebbe facile dimostrare in base alle leggi fondamentali del campo elettromagnetico che le relazioni caratteristiche di un tale doppio bipolo sono, in condizioni abbastanza generali:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (VI.37)$$

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt},$$

dove i coefficienti M_{12} ed M_{21} prendono il nome di coefficienti di mutua induzione, e, per contrasto, quelli L_1 ed L_2 , rispettivamente, di coefficienti di auto induzione primaria e secondaria. A differenza dei coefficienti di autoinduzione, i coefficienti di mutua induzione possono essere sia negativi che positivi.

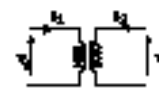
Per una introduzione del doppio bipolo mutuo accoppiamento, che metta meglio in risalto il ruolo svolto dal campo magnetico, si consiglia di leggere l'appendice A4.

Un sistema di questo genere si presenta dunque intrinsecamente come un doppio bipolo e sarà schematizzato con il simbolo di cui alle immagini a lato, dove i due puntini neri stanno ad indicare che, se si sceglie come verso positivo per le correnti quello entrante nel morsetto contrassegnato con il punto, e si adotta una convenzione dell'utilizzatore, allora il segno di M è quello

fornito.

La semplice applicazione del teorema di reciprocità induce a richiedere che: $M_{12} = M_{21}$. Infatti $M_{21} di_1/dt$ non è nient'altro che la tensione prodotta al secondario per la presenza della corrente i_1 al primario, e, viceversa, $M_{12} di_2/dt$ la tensione prodotta al primario per la presenza della corrente i_2 al secondario. D'altra parte allo stesso risultato si giunge anche in base a considerazioni energetiche, che ci aiuteranno a fare ulteriori passi nella comprensione del comportamento di un tale doppio bipolo. Infatti la potenza istantanea assorbita (convenzioni dell'utilizzatore ad entrambe le porte) dal doppio bipolo è:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \quad (\text{VI.38})$$



$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt}$$

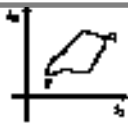
$$W = \int p dt$$

Lecture XXV

Quindi l'energia assorbita dW in un intervallo infinitesimo di tempo dt è:

$$dW = p dt = \frac{1}{2} L_1 di_1^2 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + \frac{1}{2} L_2 di_2^2 \quad (\text{VI.39})$$

D'altra parte la variazione infinitesima di energia deve essere un differenziale esatto: solo in tal caso infatti la variazione finita di energia che si ottiene integrando quella infinitesima tra due "punti" (i_1^-, i_2^-) ed (i_1^+, i_2^+) del piano delle correnti $[i_1, i_2]$, sarà indipendente dal "percorso", cioè dal modo in cui si è andati dalla condizione in cui le correnti erano (i_1^-, i_2^-) a quella in cui esse erano (i_1^+, i_2^+) - vedi l'immagine a lato. Perché ciò sia vero occorre che $M_{12} = M_{21} = M$ e, in tal caso, dW è il differenziale esatto della funzione W :



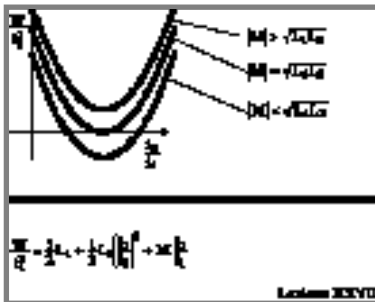
$$dW = \frac{1}{2} L_1 di_1^2 + \frac{1}{2} L_2 di_2^2 + M di_1 di_2 + M di_2 di_1$$

Lecture XXV



$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \quad (\text{VI.40})$$

La VI.40 è l'espressione della energia magnetica immagazzinata in un accoppiamento mutuo. Essa ci consente ulteriori deduzioni; infatti, l'energia magnetica immagazzinata deve, evidentemente, essere definita positiva. Tale sarà dunque anche il rapporto tra l'energia immagazzinata ed il quadrato della corrente alla porta primaria

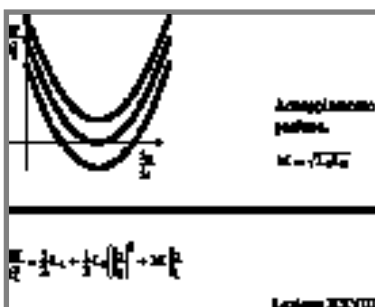


$$\begin{aligned} \frac{W}{i_1^2} &= \frac{1}{2} L_1 + M \frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2} L_2 \frac{i_2^2}{i_1^2} = \\ &= \frac{1}{2} L_1 + M x + \frac{1}{2} L_2 x^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

dove si è detto x il rapporto tra le due correnti. La parabola che la VI.41 descrive nel piano $[x, W]$ è rappresentata nella immagine a lato. È evidente che, solo nel caso in cui la parabola non interseca l'asse delle x , non esisterà alcuna coppia di valori delle correnti per cui l'energia immagazzinata è negativa - il che corrisponde al fatto che l'equazione, che si ottiene annullando la VI.41, ha radici complesse. Questa condizione si verifica quando:

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}. \quad (\text{VI})$$

La condizione limite $M^2 = L_1 L_2$ si dice di accoppiamento perfetto; infatti se tale condizione è verificata, esiste una coppia di valori di i_1 ed i_2 per i quali risulta $W = 0$. Ma dato che per annullare l'energia magnetica associata ad un campo magnetico bisogna necessariamente annullare lo stesso campo magnetico in ogni punto dello spazio, l'affermazione precedente equivale alla seguente: se l'accoppiamento è perfetto, è possibile annullare completamente il campo prodotto dalla corrente in uno dei due circuiti, facendo circolare nel-



l'altro una opportuna corrente. E ciò giustifica evidentemente il fatto che tale condizione si dica di accoppiamento perfetto. Al coefficiente k ,

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (\text{VI.43})$$

viene dato il nome di coefficiente di accoppiamento; esso varia tra -1 ed 1.

Esercizi

Le impedenze dei due bipoli assegnati precedentemente sono, nel primo caso,

$$\dot{Z}_e = 100 - j 90,$$

e nel secondo caso,

$$\dot{Z}_e = 10 + j 5.$$

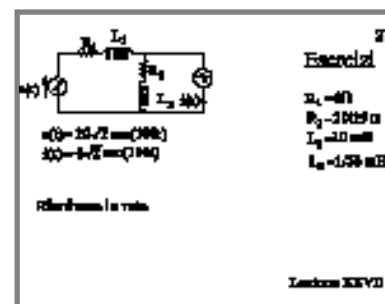
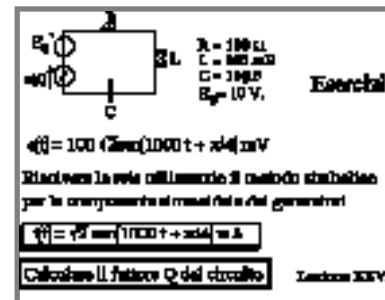
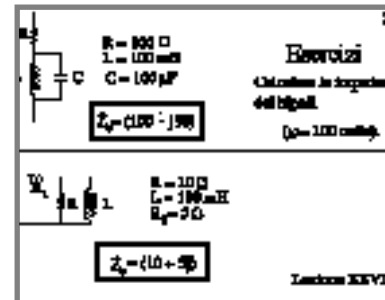
Per l'esercizio successivo diamo il valore della corrente:

$$i(t) = \sqrt{2} \sin(1000 t + \pi/4) \text{ mA}.$$

Per risolvere la rete, naturalmente, si sarà utilizzato la sovrapposizione degli effetti considerando i due generatori separatamente; ciò è necessario in quanto i generatori hanno frequenza diversa - uno dei generatori ha frequenza nulla -. Si noti che la rete è in risonanza rispetto alla componente sinusoidale e quindi la corrente da essa prodotta è in fase con la tensione. La componente continua della tensione non produce una corrispondente corrente per la presenza del condensatore che non consente il passaggio di una corrente continua. Si noti che la tensione sul condensatore (convenzione dell'utilizzatore), però, ha una componente continua:

$$v_c(t) = 10 + \sqrt{2} 0,1 \sin(1000 t - \pi/4) \text{ V}$$

Quando i generatori presenti invece hanno la stessa frequenza non è necessario utilizzare la sovrapposizione degli effetti, come nel caso dell'esercizio seguente.



L'accoppiamento mutuo in regime sinusoidale

In particolare, se il doppio bipolo accoppiamento mutuo è in regime sinusoidale, si potrà fare uso del simbolismo vettoriale e parlare di impedenza propria o autoimpedenza ed impedenza mutua. Le equazioni saranno:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{Z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2 = j \omega L_1 \bar{I}_1 + j \omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= \bar{Z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \bar{I}_2 = j \omega M \bar{I}_1 + j \omega L_2 \bar{I}_2.\end{aligned}\quad (\text{VI.44})$$

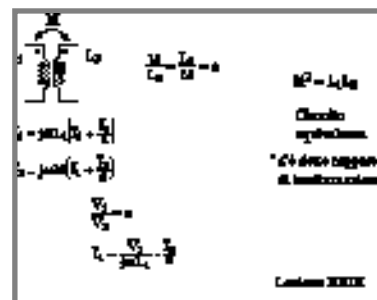
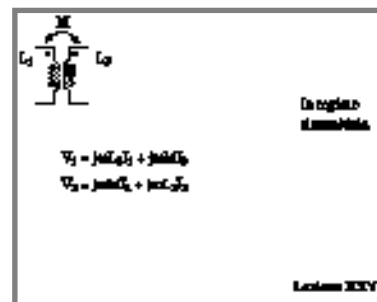
Il doppio bipolo accoppiamento magnetico in regime sinusoidale è dunque caratterizzato globalmente dai valori delle tre impedenze \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{22} ed \bar{Z}_m , corrispondenti ai tre parametri indipendenti che lo individuano L_1 , L_2 ed M . È possibile, però, costruire un *circuito equivalente* del doppio bipolo in esame, nel quale la dipendenza da tre parametri indipendenti è messa in particolare evidenza. Cominciamo dal caso dell'accoppiamento perfetto; sarà allora $M^2 = L_1 L_2$ e quindi $L_1/M = M/L_2$. A tale quantità daremo il nome di *rapporto di trasformazione* e lo indicheremo con il simbolo a . Consideriamo ora le equazioni (VI.44) e riscriviamole mettendo in evidenza nella prima equazione il fattore $j\omega L_1$ e nella seconda $j\omega M$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}_1}{j \omega L_1} &= \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a} \\ \frac{\bar{V}_2}{j \omega M} &= \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}.\end{aligned}\quad (\text{VI.45})$$

Dividendo membro a membro le due ultime equazioni si ottiene ancora:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a. \quad (\text{VI.46})$$

Mentre dalla prima delle (VI.45) si ha:

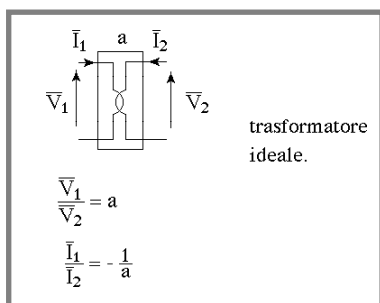


$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} \quad (\text{VI.47})$$

Le due equazioni (VI.46) e (VI.47), essendo equivalenti alle equazioni (VI.44), descrivono anche esse il doppio bipolo accoppiamento magnetico perfetto.

Nella ipotesi che L_1 sia molto grande, al limite per L_1 che tende all'infinito, si ha:

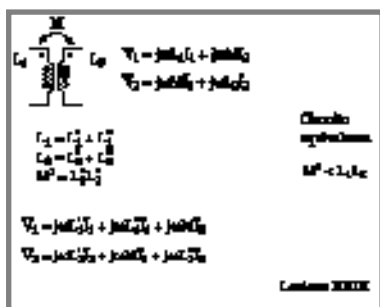
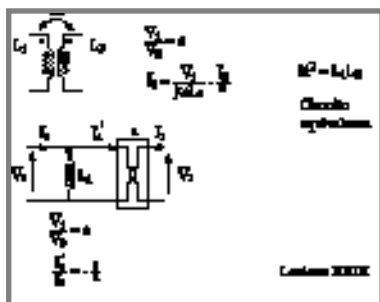
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a, \quad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a} \quad (\text{VI.48})$$



Le equazioni (VI.48) definiscono un doppio bipolo ideale che chiameremo *trasformatore ideale* e che rappresenteremo con il simbolo mostrato nell'immagine a lato; esso è ideale in quanto descrive un doppio bipolo accoppiamento magnetico perfetto solo nel limite in cui l'induttanza primaria di tale accoppiamento vada all'infinito. Il trasformatore ideale è caratterizzato da un solo parametro: il suo *rapporto di trasformazione* a .

Se ora ritorniamo alle equazioni (VI.46) e (VI.47), che descrivono il doppio bipolo accoppiamento perfetto, vediamo che mentre la prima di esse afferma che le tensioni sono nello stesso rapporto che avrebbero in un trasformatore ideale, la seconda ci dice che la corrente al primario può essere vista come somma di una corrente, che è la stessa che si avrebbe in un trasformatore ideale, più la corrente che circola nell'induttanza L_1 quando essa è sottoposta alla tensione primaria. In altri termini le stesse equazioni (VI.46) e (VI.47) caratterizzano anche un circuito del tipo mostrato nelle immagini a lato, e quindi tale circuito è equivalente all'accoppiamento magnetico perfetto.

Il caso dell'accoppiamento non perfetto si risolve ora con grande semplicità. Supponiamo, infatti, di scomporre le due induttanze L_1 ed L_2 in due parti L_1' ed L_2' , e L_1'' ed L_2'' tali che $L_1'' L_2'' = M^2$:



$$\begin{aligned} L_1' + L_1'' &= L_1, \\ L_2' + L_2'' &= L_2, \\ L_1'' L_2'' &= M^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.49})$$

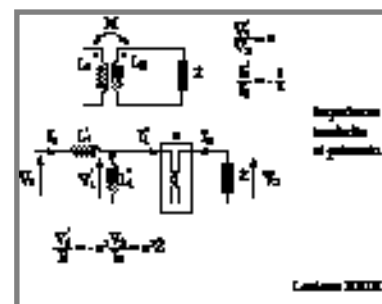
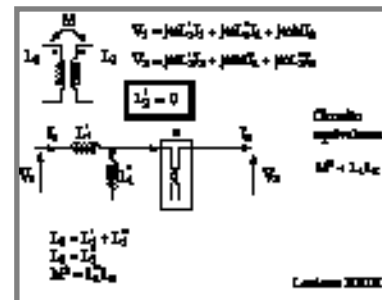
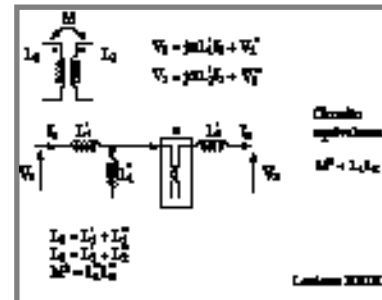
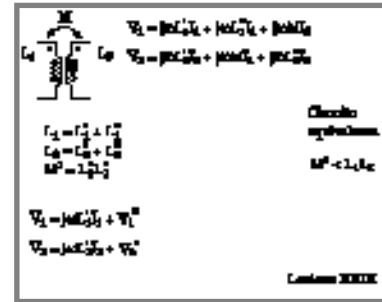
Evidentemente, le tre equazioni (VI.49) definiscono i quattro parametri L con un grado di libertà in quanto le equazioni che li determinano sono solo tre. Esistono dunque infinite scelte possibili per la scomposizione descritta; per ottenerne una basterà fissare ad arbitrio uno dei parametri ed ottenere gli altri dalle (VI.49). Introduciamo ora le posizioni fatte nelle equazioni (VI.44):

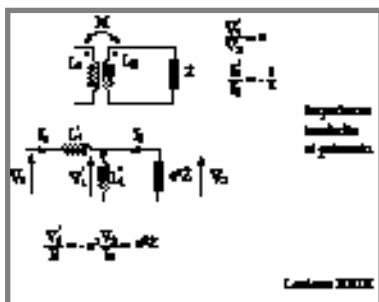
$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= j \omega L_1' \bar{I}_1 + (j \omega L_1'' \bar{I}_1 + j \omega M \bar{I}_2), \\ \bar{V}_2 &= j \omega L_2' \bar{I}_2 + (j \omega M \bar{I}_1 + j \omega L_2'' \bar{I}_2). \end{aligned} \quad (\text{VI.50})$$

È evidente che i termini in parentesi, per come li abbiamo costruiti, descrivono un accoppiamento perfetto. Per ottenere il circuito equivalente di un accoppiamento non perfetto, basterà aggiungere, a quello di un accoppiamento perfetto, le due cadute di tensione $j\omega L_1' \bar{I}_1$ e $j\omega L_2' \bar{I}_2$ rispettivamente al primario ed al secondario, così come mostrato nella seconda immagine a lato.

Naturalmente, data l'arbitrarietà della scelta di cui alla (VI.49), si possono costruire infiniti circuiti equivalenti dell'accoppiamento dato; in particolare sono possibili le due scelte $L_1' = 0$ oppure $L_2' = 0$: in questo secondo caso il circuito equivalente che ne risulta è quello mostrato in figura.

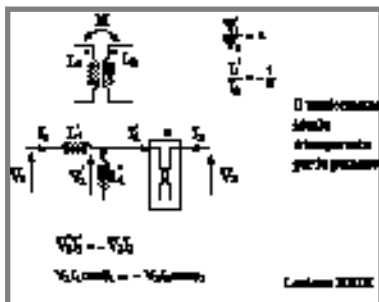
Si noti che se i morsetti secondari di un doppio bipolo trasformatore ideale sono chiusi su di una impedenza \bar{Z} , il rapporto tra tensione e corrente al primario è dato da:



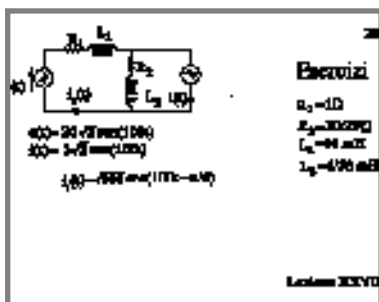


$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = -a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 Z. \quad (\text{VI.51})$$

Cioè il primario vede una impedenza a^2 volte più grande di quella su cui è chiuso il secondario. Questa osservazione fornisce un metodo generale per eliminare gli accoppiamenti mutui presenti in un circuito e ricondurre la rete ad una equivalente così come mostrato nelle immagini a lato.

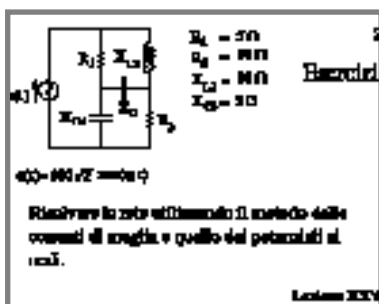


L'accoppiamento mutuo, e a maggior ragione il trasformatore ideale, sono, evidentemente, trasparenti per le potenze attive; infatti in tali doppi bipoli non sono presenti elementi dissipativi e quindi la potenza attiva alla porta primaria è eguale ed opposta a quella alla porta secondaria - si ricordi che si è assunta una convenzione dell'utilizzatore ad entrambe le porte - di modo che la potenza attiva totale assorbita dal doppio bipolo è identicamente nulla.



Mentre però il trasformatore ideale è trasparente anche per le potenze reattive - ed in generale per qualsiasi tipo di potenza - l'accoppiamento mutuo invece assorbe una certa potenza reattiva; si dimostri che tale potenza può essere messa nella forma:

$$Q = \omega L_1 I_1^2 + \frac{V_1^2}{\omega \frac{M^2}{L_2}}. \quad (\text{VI.52})$$



Esercizi

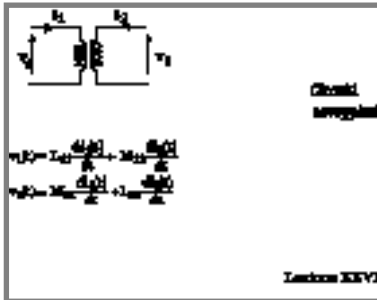
Per il primo esercizio a lato, proposto in precedenza, diamo la corrente i_1 , per verificare i risultati ottenuti:

$$i_1(t) = \sqrt{100} \sin(100t - \pi/4).$$

Si provi a risolvere la stessa rete applicando la sovrapposizione degli effetti.

Nell'esercizio successivo si propone la soluzione con il metodo delle correnti di maglia o dei potenziali ai nodi.

Il trasformatore



Il nome "trasformatore ideale" dato al doppio bipolo introdotto per costruire il circuito equivalente di un accoppiamento mutuo, deriva dal fatto che "trasformatore" viene detto un dispositivo, di larghissimo uso nelle pratiche applicazioni, del quale il trasformatore ideale è, appunto, una idealizzazione. Si tratta di un accoppiamento mutuo realizzato con due avvolgimenti, che, con accorgimenti tecnici sui quali non è possibile ora soffermarsi, vengono fatti interagire in maniera molto stretta (coefficiente di accoppiamento in modulo prossimo ad 1!). La relazione (VI.46) stabilisce che in tali condizioni le tensioni primarie e secondarie sono nel rapporto a , mentre, trascurando la corrente derivata dalla induttanza L_1 del circuito equivalente, la (VI.47) afferma che le correnti primarie e secondarie sono nel rapporto $-1/a$. Sarebbe facile dimostrare che tale rapporto di trasformazione altro non è che, con buona approssimazione, il rapporto tra il numero delle spire dell'avvolgimento primario e quello dell'avvolgimento secondario. Un tale dispositivo, dunque, consente con grande semplicità di ridurre o elevare una tensione, aumentando o riducendo nel contempo la corrente; da ciò il suo nome. Si noti che tutto ciò accade, almeno nel caso teorico che stiamo qui esaminando, senza nessuna dissipazione di potenza attiva. Il trasformatore dunque consente di adattare la tensione alla particolare applicazione. Ma c'è di più e, per comprenderlo, bisogna sviluppare qualche considerazione elementare sul problema della produzione e della distribuzione dell'energia elettrica.

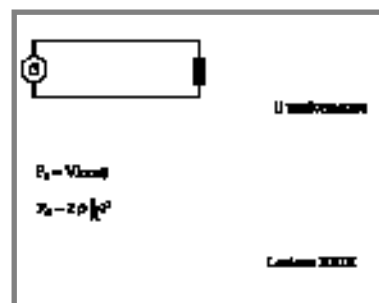
Motivi di sicurezza degli operatori, e ragioni di ordine economico, consigliano l'uso di tensioni relativamente basse per la distribuzione capillare dell'energia elettri-

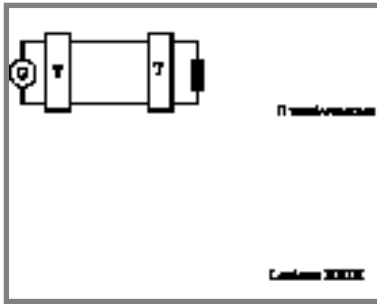
ca. È abbastanza intuitivo infatti comprendere che il danno prodotto sugli organismi viventi, a parità di condizioni, è tanto maggiore quanto maggiore è la tensione. Inoltre gli "isolamenti", sempre necessari in un dispositivo elettrico, diventano sempre più costosi e delicati quando la tensione cresce. Nell'Europa continentale, come è noto, il valore efficace della tensione alla distribuzione è di 220 V. D'altra parte il trasporto dell'energia elettrica, dal punto di produzione a quello di utilizzo, avviene mediante conduttori che, naturalmente, non essendo perfetti, presentano una certa resistenza. In una situazione schematica di un generatore G ad una distanza L dal carico che assorbe una corrente I con un determinato $\cos\varphi$, sotto una tensione V, la potenza dissipata lungo la linea è:

$$P_d = 2\rho \frac{L}{S} I^2, \quad (\text{VI.53})$$

dove ρ è la resistività del materiale di cui i conduttori di linea sono fatti ed S la loro sezione. Tale potenza dipende soltanto dal quadrato del valore efficace della corrente richiesta dal carico! È evidente che se a monte dell'utilizzatore disponessimo un trasformatore riduttore di tensione in modo da mantenere bassa la tensione sul carico ma da elevare quella sulla linea di trasporto, potremmo nel contempo ridurre la corrente di linea - vedi le VI.48 - e quindi le perdite su di essa. Se si pensa ai chilometri e chilometri di linee di trasmissione elettrica che caratterizzano il panorama di un qualsiasi paese sviluppato, si comprende la convenienza del trasportare l'energia elettrica, sulle grandi *tratte*, ad alta tensione e relativamente bassa corrente.

Si potrebbe pensare di produrre l'energia elettrica direttamente a tale tensione elevata. Ma anche questo non è conveniente economicamente perché, come si è



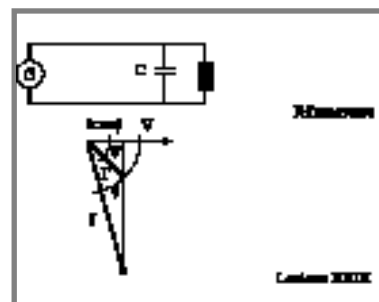
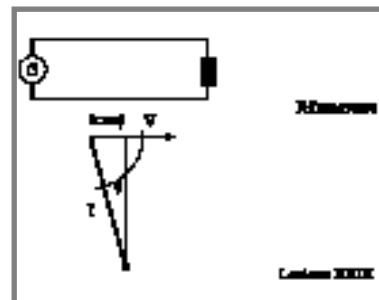


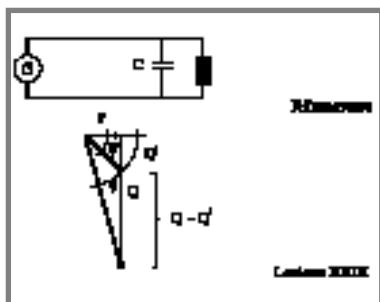
detto, la complicazione ed il costo di un qualsiasi dispositivo elettrico - e quindi anche di un generatore - cresce notevolmente al crescere della tensione. Ciò porta al classico schema, rappresentato a lato, che prevede un trasformatore elevatore di tensione a valle dei generatori ed a monte della linea, ed un trasformatore riduttore a monte del carico. Naturalmente le cose sono in realtà molto più complesse ed articolate di quanto queste semplici considerazioni possano far credere; si pensi, per esempio, al semplice fatto che supporre un trasformatore privo di perdite è chiaramente una idealizzazione, non foss'altro perché gli avvolgimenti di cui esso è costituito presentano necessariamente una certa resistenza e quindi introducono una dissipazione aggiuntiva. Queste ed altre problematiche sono oggetto di studio di altre discipline che si occupano in modo specifico delle *macchine elettriche* e degli *impianti elettrici*; a noi basta qui aver evidenziato, in linea di principio, il fondamentale ruolo svolto nella tecnica dal dispositivo "trasformatore".

Il problema del rifasamento nelle reti elettriche.

La necessità di lunghe linee di trasmissione dell'energia elettrica che collegano i luoghi della generazione con quelli della utilizzazione e la presenza di una inevitabile dissipazione in linea dovuta alla resistenza dei conduttori, ha anche altre interessanti conseguenze che cercheremo ora di illustrare in maniera molto elementare.

Consideriamo un carico che sotto una determinata tensione V , assorbe una potenza attiva P ed una potenza reattiva Q . Supponiamo ancora che la fase della impedenza equivalente del carico, $\varphi = \arctg(Q/P)$, sia positiva (carico induttivo), come in realtà si verifica nella maggioranza dei carichi industriali. Il diagramma fasoriale corrispondente alla situazione descritta è rappresentato a lato. Nella successiva figura è rappresentata anche una diversa condizione di funzionamento in cui la stessa potenza attiva P è assorbita con una differente potenza reattiva Q' . La potenza attiva è la stessa nei due casi perché la componente $I \cos \varphi$ del fasore rappresentativo della corrente, la sola che entra a determinare la potenza attiva, non è variata. Il fatto è ancora più chiaro se si considera il triangolo delle potenze nei due casi considerati, così come mostrato in figura. È evidente però che, nei due casi, è diverso il modulo della corrente I , e quindi diverse sono le potenze dissipate lungo la linea che collega il carico ai generatori che lo alimentano. Tali potenze, infatti, sono proporzionali al quadrato del modulo della corrente secondo un fattore R che rappresenta, appunto, la resistenza equivalente della linea. Queste perdite potrebbero, dunque, essere ridotte se si disponesse in parallelo al carico un secondo carico, puramente reattivo - nelle nostre ipotesi, capacitivo - in grado di assorbire una





potenza reattiva pari a $-(Q - Q')$; ciò senza variare in alcun modo la potenza attiva assorbita dal carico stesso. In tali condizioni il carico si dirà *rifasato* da $\cos \varphi$ a $\cos \varphi'$. In pratica con il rifasamento si evita che l'energia immagazzinata nel carico, che, come è noto, oscilla tra un punto di massimo ed uno di nullo, venga continuamente trasferita lungo la linea, avanti ed indietro, con le conseguenti perdite; l'aver disposto un "serbatoio di energia" in *controfase* in prossimità del carico - è questa appunto la funzione che svolgono i condensatori posti in parallelo al carico - consente che tale scambio di energia avvenga tra il "serbatoio" ed il carico e non tra i generatori ed il carico stesso. Gli Enti produttori di energia elettrica, interessati a questo risparmio di energia, cercano di favorire l'uso di tale tecnica adottando opportune politiche contrattuali e tariffarie. In pratica l'energia utilizzata viene fatturata a prezzi diversi a seconda del $\cos \varphi$, quando esso scende al di sotto di un certo valore. In Italia tale valore è $\cos \varphi = 0,9$.

In conclusione il problema del rifasamento si riduce al calcolo della capacità del banco di condensatori da disporre in parallelo al carico per ottenere il voluto rifasamento. Tale banco dovrà assorbire la potenza reattiva:

$$Q_c = -(Q - Q') = -P(\tan \varphi - \tan \varphi').$$

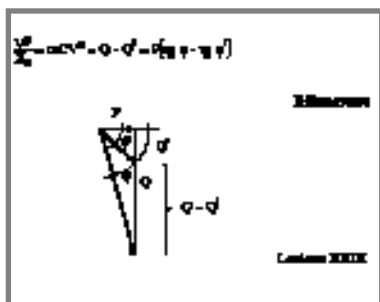
Si avrà, quindi:

$$Q_c = -\frac{V^2}{X_c} = -\omega C V^2, \quad (\text{VI.54})$$

da cui:

$$C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}, \quad (\text{VI.55})$$

dove φ è l'angolo di fase del carico non rifasato e φ' quello che si vuole ottenere dopo il rifasamento.



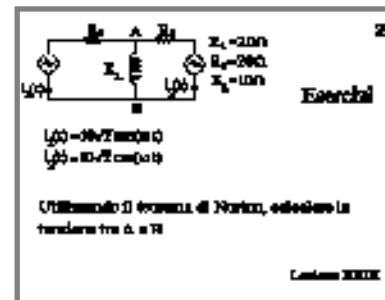
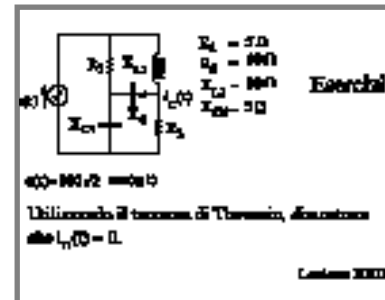
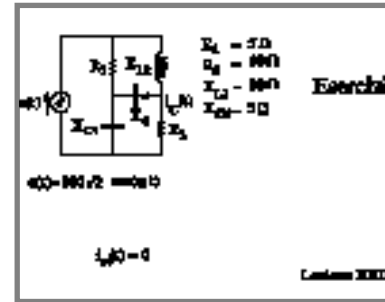
Esercizi

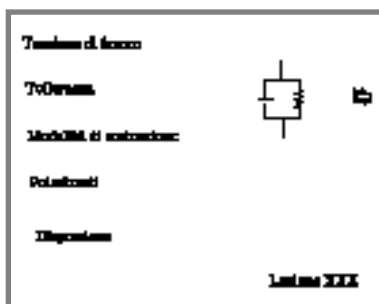
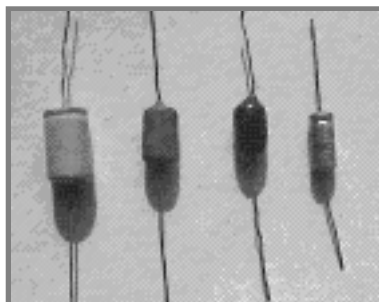
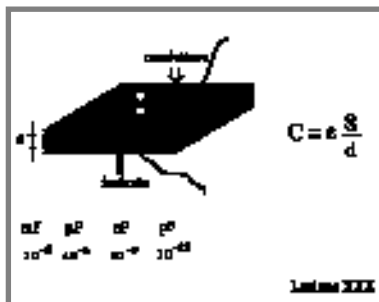
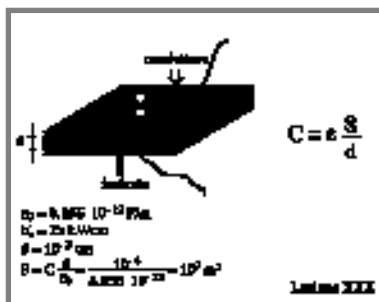
La corrente che circola nel condensatore centrale, della rete assegnata in precedenza, è nulla. Il circuito ha, infatti, un grafo a ponte - di cui si è già parlato in regime continuo - con i lati del ponte che verificano la condizione di equilibrio:

$$jX_{L2} (-jX_{C4}) = R_1 R_3 .$$

Allo stesso risultato si può arrivare rapidamente applicando il teorema del generatore equivalente di tensione ai morsetti del condensatore centrale.

L'ultimo esercizio richiede di applicare il teorema del generatore equivalente di corrente ai morsetti A e B della rete mostrata.





Bipoli e strumenti di misura in regime dinamico

Anche i bipoli introdotti in regime dinamico, nella loro concreta realizzazione, si discostano in alcuni aspetti dalla loro idealizzazione, che fin qui abbiamo preso in considerazione. Abbiamo già visto che un condensatore può essere realizzato con una semplice struttura piana di due armature conduttrici con un isolante (dielettrico) interposto. Se S è l'area delle armature, d la distanza tra le stesse, ed ϵ la costante dielettrica del mezzo interposto, la capacità del condensatore è:

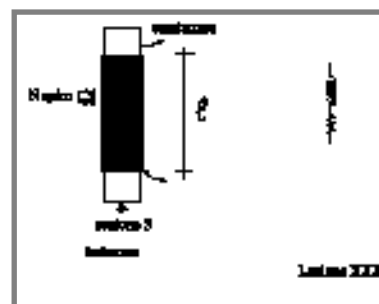
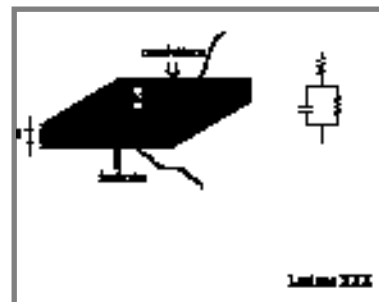
$$C = \epsilon \frac{S}{d}. \quad (\text{VI.56})$$

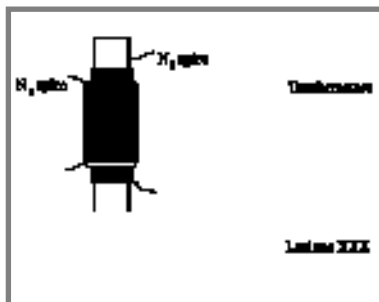
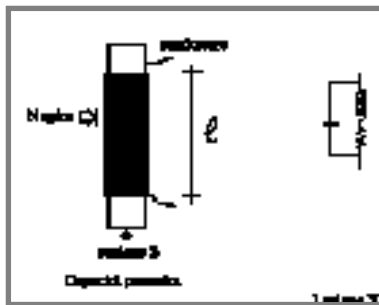
Cominciamo con l'osservare che l'unità di misura farad è in realtà molto grande; è facile verificare, per esempio, che per ottenere una capacità di un farad con un condensatore ad armature piane separate da uno spazio vuoto - o con aria - di un decimo di millimetro, occorrerebbe una superficie delle armature di dieci milioni di metri quadri. Per questo motivo sono molto usati, come unità di misura delle capacità, i sottomultipli del farad: millifarad, microfarad, nanofarad e picofarad.

Come per i resistori, il valore della capacità del condensatore non è l'unico parametro che caratterizza il componente. Tra gli altri parametri importanti ricordiamo la *tolleranza*, il margine di incertezza, cioè, con cui il valore della capacità è dato, e la *tensione di lavoro* che è la tensione per la quale lo spessore di isolante è stato progettato; tensioni maggiori mettono a rischio l'integrità del componente. A caratterizzare ulteriormente il componente, intervengono a volte, le modalità di costruzione dello stesso; alcuni condensatori, per esempio, detti *polarizzati*, hanno le polarità dei loro morsetti fissate a priori, nel senso che uno dei morset-

ti, opportunamente contrassegnato, deve necessariamente essere mantenuto nel circuito ad un potenziale maggiore rispetto a quello dell'altro. Essi sono realizzati con particolari tecniche che consentono di ottenere sottilissimi strati di dielettrico e quindi capacità molto elevate. Va osservato infine che nessun isolante, naturalmente, è perfetto, e quindi tra le due armature si avrà necessariamente anche un passaggio di ordinaria corrente di conduzione. Ciò implica una dissipazione dovuta alla resistività del "materiale isolante". È come se esistesse in effetti un'altra via di passaggio in parallelo per la corrente; ciò giustifica lo schema equivalente spesso adottato che vede connesso in parallelo al condensatore un opportuno resistore che, naturalmente, avrà, in generale, una elevata resistenza, detta *resistenza di dispersione* del condensatore. A volte, per tenere in conto anche gli effetti dovuti alle connessioni interne alle armature ed alla non perfetta conducibilità delle armature stesse, si dispone anche un resistore in serie al condensatore nel suo circuito equivalente; quest'ultimo avrà, naturalmente, una resistenza molto bassa.

Per quanto riguarda il bipolo induttore, si è già detto che esso può immaginarsi costituito da un avvolgimento di un certo numero di spire su di un supporto materiale. Tale supporto può avere l'unico scopo di sostenere semplicemente l'avvolgimento, o svolge esso stesso una funzione, amplificando il valore dell'induttanza, quando è realizzato con particolari materiali detti *ferromagnetici*. In tal caso però non si può evitare una certa non linearità del componente. Essendo l'avvolgimento realizzato con un conduttore necessariamente non perfetto, un circuito equivalente adeguato dell'induttore prevede una resistenza, di norma di bassa resistenza, in serie all'induttore stesso. Uno schema più





raffinato contempla anche un condensatore, di relativamente bassa capacità, in parallelo alla serie dell'induttore e del resistore. Tale condensatore tiene in conto, in modo complessivo, la capacità, detta *parassita*, che necessariamente viene a stabilirsi tra spira e spira dell'avvolgimento. Le singole spire giocano il ruolo delle armature e l'isolante di cui esse sono ricoperte, per impedire il contatto elettrico, quello del dielettrico interposto. Ciò spiega anche perché si parla a volte, in alcune applicazioni, del fattore di qualità - si ricordi il circuito risonante - di un induttore.

Del trasformatore e dei suoi usi abbiamo già fatto cenno; possiamo immaginarlo costituito da due avvolgimenti sovrapposti o comunque messi in condizione di interagire in modo molto stretto (alto fattore di accoppiamento) utilizzando particolari strutture realizzate con materiali ferromagnetici. Del trasformatore occorrerà conoscere la *tensione nominale primaria* e quella *secondaria* che sono le tensioni per le quali il dispositivo è stato costruito e, di conseguenza, per le quali è stato proporzionato l'isolamento. In luogo di una delle due tensioni può essere assegnato equivalentemente il rapporto di trasformazione. Sarà necessario conoscere anche la *corrente nominale* che possiamo intendere come la corrente per la quale sono stati proporzionati i conduttori degli avvolgimenti - si pensi alla dissipazione che in essi si produce ed al conseguente sviluppo di calore -. Altri due fattori che caratterizzano un trasformatore e che fanno parte dei così detti *dati di targa* del dispositivo, sono la *tensione di cortocircuito* e la *corrente primaria a vuoto*. La prima è la tensione con cui bisogna alimentare il primario perché nel secondario, messo in cortocircuito, circoli la corrente nominale. La seconda è la corrente che circola nel primario quando il secondario è a vuoto. Non possiamo, in que-

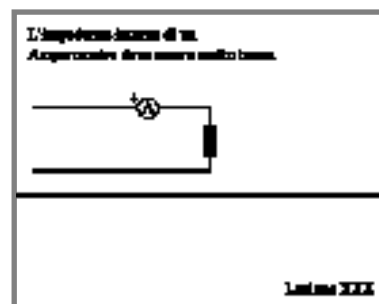
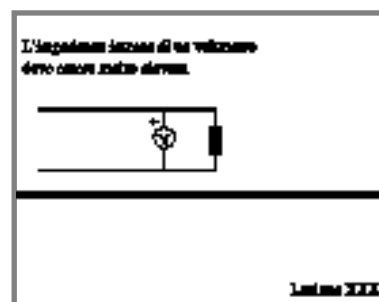
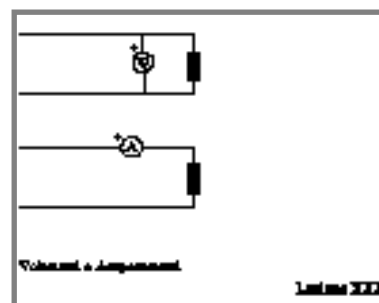
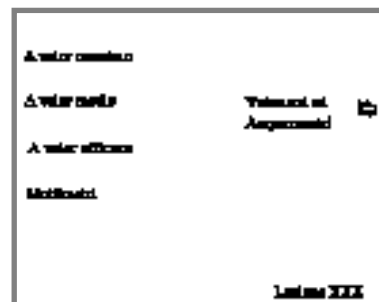
sto contesto, approfondire oltre sull'argomento; ci basti dire che i due ultimi dati citati sono nel complesso indicativi della qualità del dispositivo, delle sue dissipazioni interne e del suo grado di accoppiamento.

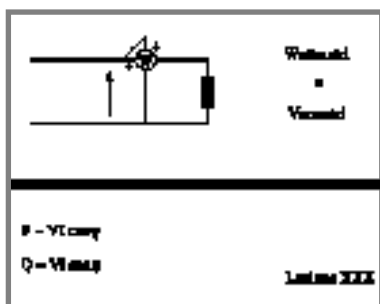
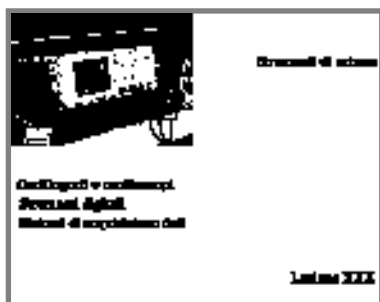
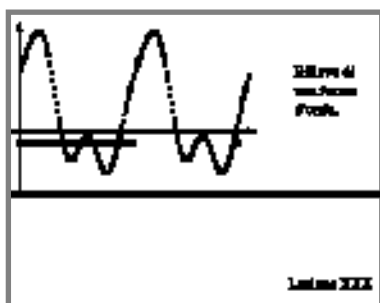
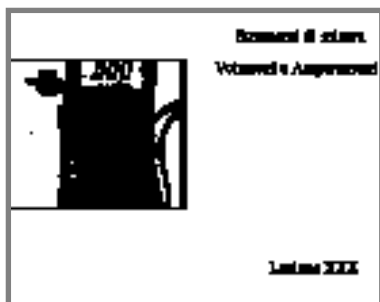
Daremo ora un rapido cenno agli strumenti di misura di tensione e corrente in regime dinamico. Come nel regime continuo, voltmetri e amperometri vanno inseriti il primo in parallelo al carico ed il secondo in serie allo stesso. Trattandosi però di grandezze che variano nel tempo occorrerà stabilire cosa intendiamo in effetti misurare. Per il regime sinusoidale, o più in generale alternativo, abbiamo diverse scelte: possiamo avere voltmetri o amperometri che forniscono il valor massimo della tensione o della corrente nella loro evoluzione temporale, o strumenti che forniscano il valor medio in un periodo od in un semiperiodo della grandezza da misurare. Per quanto detto in precedenza sulla potenza nei regimi sinusoidali, è chiaro però che il caso più interessante è quello del voltmetro e dell'amperometro che forniscono il valore efficace della tensione o della corrente.

Naturalmente, per gli stessi motivi descritti per gli analoghi strumenti in continua, occorrerà che il voltmetro abbia una elevata impedenza interna, mentre l'amperometro dovrà presentare una bassa impedenza interna.

Uno strumento molto diffuso nei laboratori o, comunque, nella pratica operativa, è il *multimetro*. Si tratta di un dispositivo molto duttile che può essere voltmetro, amperometro ed altro ancora, semplicemente variando la posizione di opportuni commutatori.

In regime dinamico, però, può sorgere la necessità di misurare, istante per istante, l'andamento temporale di una grandezza elettrica; gli oscilloscopi, o anche oscillografi, siano essi digitali o analogici, svolgono appunto una tale funzione. Il risultato della misura è un gra-





fico, evidenziato su di uno schermo o tracciato su di un foglio, che rappresenta appunto l'andamento nel tempo della grandezza. Particolare complessità e raffinatezza richiedevano, un tempo, gli oscilloscopi in grado di rilevare anche grandezze non periodiche. Oggi un tale problema è brillantemente risolto con l'uso del calcolatore come strumento di misura o, comunque, di sistemi di *acquisizione dati* sotto forma digitale. In pratica il segnale viene misurato automaticamente, utilizzando un opportuno *trasduttore*, in un gran numero di istanti egualmente distanziati nel tempo; i risultati delle misure vengono memorizzati come dati e possono successivamente essere visionati nella modalità desiderata. È chiaro che una volta memorizzato il risultato della misura sotto forma di sequenza di numeri, è possibile immaginare ogni sorta di successiva elaborazione degli stessi mediante calcolatore. Ciò ha fatto oggi del calcolatore - o di dispositivi digitali progettati per scopi specifici - lo strumento principe di ogni sistema di misura in laboratorio.

Esistono in commercio software molto raffinati ai quali è possibile demandare, con estrema semplicità, tutta la gestione di un esperimento o di un processo.

Un strumento di cui non si sentiva particolare necessità in continua, ma che è di interesse in regime sinusoidale, è il wattmetro: lo strumento che misura la potenza attiva. In continua infatti, la potenza è data dal prodotto VI , e può essere facilmente ottenuta con due misure, rispettivamente, di tensione e di corrente. In alternata invece la potenza attiva è $VI \cos \varphi$, e sarebbero quindi necessarie tre misurazioni, avendo però a disposizione uno strumento in grado di misurare lo sfasamento tra tensione e corrente. Fortunatamente esistono strumenti in grado di fornire direttamente il prodotto $VI \cos \varphi$ con una sola misura. Nel wattmetro dovremo distin-

guere due coppie di morsetti: i morsetti voltmetrici, che verranno collegati ai punti tra i quali insiste la d.d.p., e quelli amperometrici che dovranno essere attraversati dalla corrente, così come mostrato nelle immagini a lato. Si parlerà di circuito amperometrico e circuito voltmetrico del wattmetro.

Il wattmetro dunque è, per sua natura intrinseca, un doppio bipolo ed è facile convincersi in base a ragionamenti simili a quelli già sviluppati per il voltmetro e per l'amperometro, che esso deve presentare, per essere ideale, una impedenza infinita ai suoi morsetti voltmetrici ed una impedenza nulla a quelli amperometrici. Esistono anche strumenti che misurano la potenza reattiva assorbita da un carico: essi vengono detti *Varmetri* dal nome della unità di misura che abitualmente si utilizza per le potenze reattive, i volt-ampere reattivi.

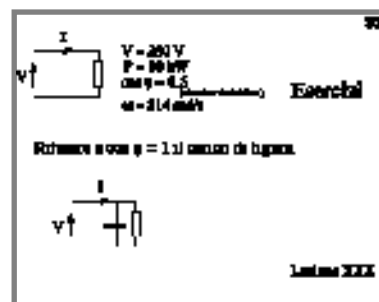
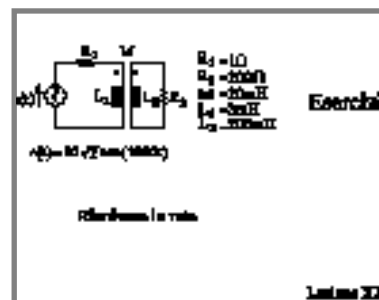
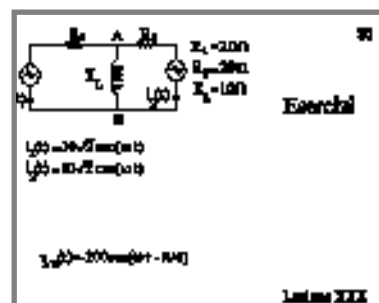
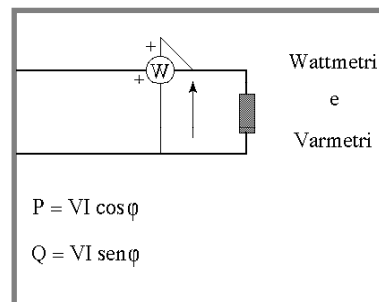
Esercizi

Per la rete di figura, già proposta, la tensione ai morsetti A e B, ottenuta applicando il teorema del generatore equivalente di corrente, è:

$$v_{AB}(t) = 200 \sin(\omega t - \pi/4).$$

Nell'esercizio successivo è presente un accoppiamento mutuo; non sarà difficile risolverlo se si utilizzerà il circuito equivalente dell'accoppiamento e si ricondurrà l'impedenza secondaria al primario.

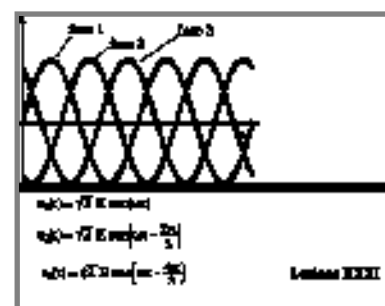
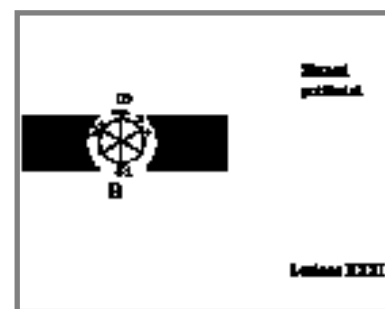
L'ultimo esercizio proposto richiede di rifasare un carico, di cui sono date le caratteristiche, a $\cos\varphi = 1$. È un caso puramente teorico, scelto per semplificare i calcoli, in quanto, per motivi che sarebbe lungo spiegare in questa sede, non si richiede mai un rifasamento totale.

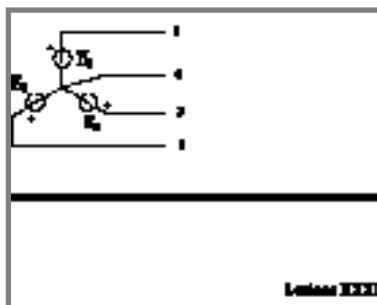
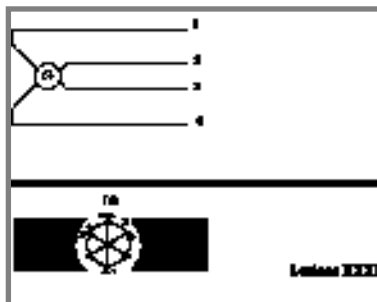
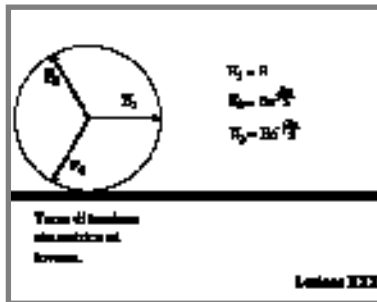
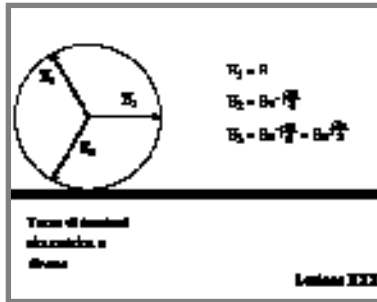


I sistemi trifasi

Nell'introdurre il regime sinusoidale abbiamo accennato a come sia, in linea di principio, molto semplice immaginare un generatore di tensione sinusoidale costruito in base ai principi generali della interazione elettromagnetica: una semplice spira rotante in un campo magnetico ne è stata la concreta esemplificazione. È immediato osservare che, una volta prodotto il campo magnetico, appare logico sfruttarlo in maniera più completa disponendo più spire rotanti nella regione in cui esso agisce. Si osservi che a nulla servirebbe distribuire un unico avvolgimento lungo tutta la periferia del *rotore*; il motivo apparirà immediatamente chiaro in seguito. Il generatore, che stiamo qui descrivendo solo in linea di principio, produrrà, invece di una sola, più tensioni sinusoidali che risulteranno tra di loro sfasate nel tempo di angoli corrispondenti agli angoli che separano nella disposizione spaziale le singole spire. Infatti, nella sua rotazione, una spira sperimenterà le stesse condizioni di quella che la precede dopo un tempo pari a quello necessario a percorrere l'angolo che le separa.

Un sistema di tensioni di tale tipo prende il nome di





sistema *polifase*; in particolare se le tensioni sono eguali in modulo (o valore efficace) e sfasate tra di loro di uno stesso angolo (il che corrisponde ad una disposizione spaziale delle spire perfettamente simmetrica) il sistema si dirà *simmetrico*; nel caso contrario esso si dirà *dissimmetrico*. Ragioni pratiche consigliano in generale di limitarsi al caso di tre sole tensioni; avremo, dunque, sistemi di tensioni trifase simmetrici o non, a secondo del caso. Se diciamo $e_1(t)$, $e_2(t)$ ed $e_3(t)$ le tre tensioni dei generatori, sarà, in generale:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \sqrt{2} E_1 \sin \omega t, \\ e_2(t) &= \sqrt{2} E_2 \sin (\omega t - \alpha_2), \\ e_3(t) &= \sqrt{2} E_3 \sin (\omega t - \alpha_3). \end{aligned} \quad (\text{VII.1})$$

Se in particolare $E_1 = E_2 = E_3$ ed $\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = 4\pi/3$, allora il sistema è simmetrico.

È naturalmente ancora simmetrico il sistema con $\alpha_2 = 4\pi/3$ ed $\alpha_3 = 2\pi/3$. Per distinguerli diremo il primo sistema *simmetrico diretto* ed il secondo *simmetrico inverso*. Nella rappresentazione vettoriale i due sistemi sono descritti dai diagrammi mostrati a lato.

Un generatore trifase si può sempre immaginare realizzato con tre generatori monofase, del tipo già introdotto, e disposti come nell'ultima immagine a lato; tale disposizione si dice, per ovvie ragioni, a stella.

Si noti che dal punto di vista elettrico un tale sistema può anche essere disegnato come mostrato nell'immagine successiva.

Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di *tensioni concatenate* e vengono di regola indicate utilizzando la lettera V, mentre si riserva la lettera E per le tensioni tra i conduttori ed il punto comune dei tre generatori che prende il nome di *centro stella dei generatori*. Tali tensioni vengono dette *stellate* o di *fase*. Si avrà evidentemente:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2, \\ \bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3, \\ \bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1.\end{aligned}\quad (\text{VII.2})$$

Le stesse relazioni sono descritte graficamente nel relativo diagramma vettoriale riportato nella terza immagine a lato: il triangolo delle *tensioni concatenate* ha per vertici i tre punti 1, 2 e 3, estremi dei vettori rappresentativi delle rispettive tensioni di fase.

Supponiamo ora di collegare i tre generatori a tre impedenze di carico, come descritto nella successiva immagine. Il sistema così ottenuto si distingue da quello che si otterrebbe collegando i tre generatori sui rispettivi carichi separatamente, solo per il fatto che il conduttore di ritorno dei tre generatori è in comune. Supponiamo ora, però, che il sistema, oltre ad essere simmetrico diretto (o inverso, non ha importanza) sia anche caratterizzato dall'avere le tre impedenze di carico eguali tra di loro: un tale sistema si dirà *equilibrato nelle correnti* (o anche *nel carico*). In queste condizioni le tre correnti i_1 , i_2 ed i_3 sono:

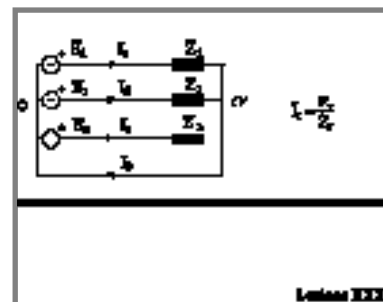
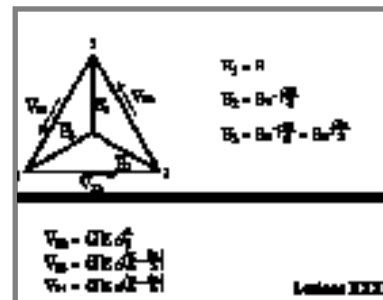
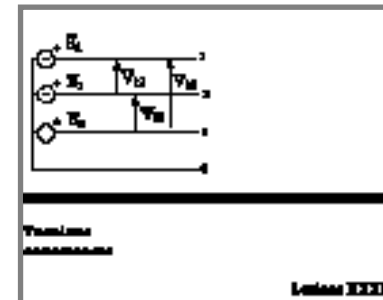
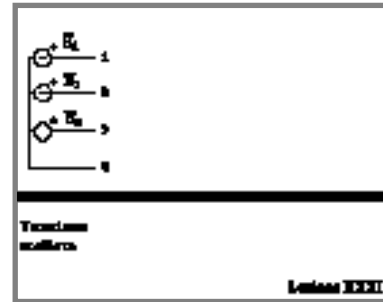
$$\begin{aligned}i_1(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi), \\ i_2(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - 2\pi/3 - \varphi), \\ i_3(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - 4\pi/3 - \varphi).\end{aligned}\quad (\text{VII.3})$$

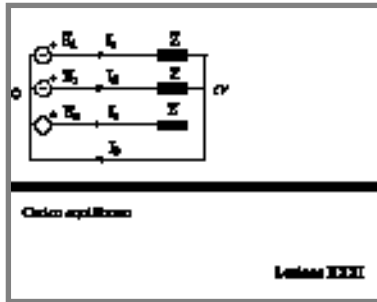
dove si è indicato con φ l'angolo di fase comune delle tre impedenze.

È facile verificare che nel caso descritto è:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0.$$

Il fatto è particolarmente evidente nella rappresentazione vettoriale mostrata nella seconda immagine della pagina successiva. I tre fasori rappresentativi sono



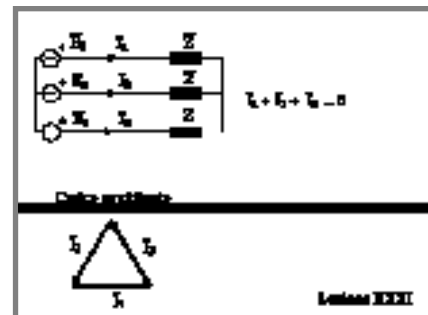
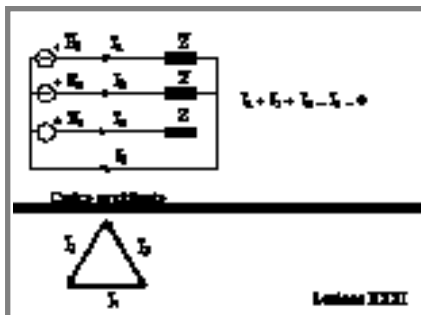
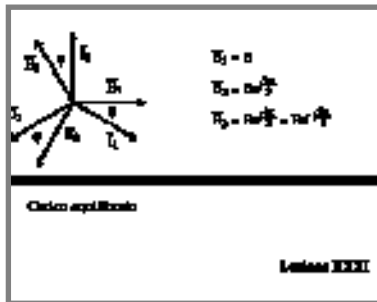


eguali in modulo e sfasati di $2\pi/3$ e costituiscono quindi i lati di un triangolo equilatero: la loro somma è dunque identicamente nulla. D'altra parte l'applicazione della LKC al nodo comune delle tre impedenze, O' , ci dice che, nel dominio della rappresentazione simbolica deve essere:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_0. \quad (\text{VII.4})$$

Dove \bar{I}_0 è la corrente nel conduttore comune di ritorno nel verso indicato. Si conclude che, nelle condizioni descritte di tensioni simmetriche e carico equilibrato, la corrente nel conduttore di ritorno è necessariamente nulla; ne consegue, per una nota proprietà delle reti, che tale conduttore può essere eliminato ed i due punti O ed O' sono allo stesso potenziale anche se non sono collegati da un conduttore!

Siamo giunti quindi ad uno schema di collegamento a soli tre conduttori di linea che, se il carico è equilibrato, è del tutto equivalente a quello precedente. Un tale sistema verrà detto *sistema trifase senza conduttore neutro* (o *filo neutro*) perché tale è appunto il nome che si riserva al quarto conduttore.



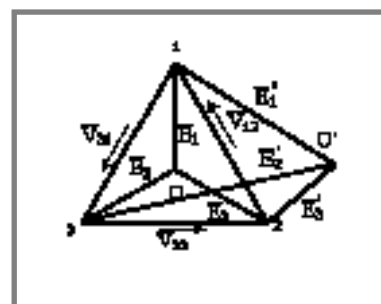
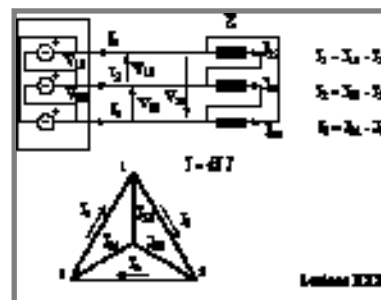
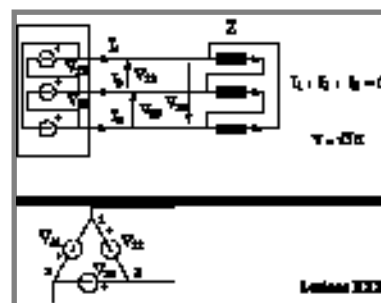
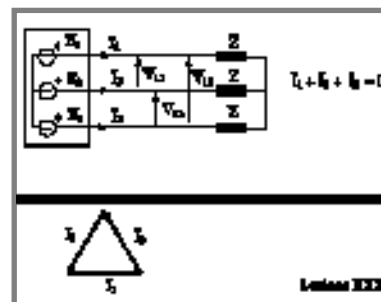
Immaginiamo ora il complesso dei generatori racchiusi in una scatola chiusa; fuoriescono soltanto i tre fili di linea tra i quali sussistono le tensioni concatenate. È la situazione che si può immaginare si verifichi quando l'alimentazione è fornita da un unico generatore trifase. Si osservi che lo stesso sistema di alimentazione si può immaginare prodotto da tre generatori, di tensione pari alla tensione concatenata e con gli opportuni sfasamenti, collegati come mostrato nelle immagini; si parlerà in questo caso di sistema di generatori collegati a triangolo perché i generatori stessi possono idealmente immaginarsi disposti lungo i lati di un triangolo. In un collegamento a triangolo non c'è spazio per un eventuale filo neutro in quanto manca il punto O a cui collegarlo.

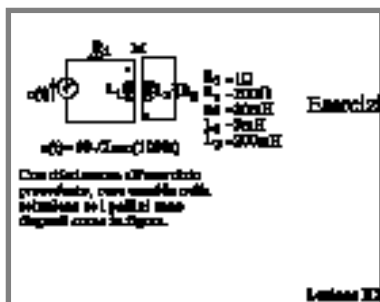
Anche il carico delle tre impedenze può essere collegato a triangolo, come mostrato in figura, e, naturalmente, sono possibili le altre combinazioni: generatori a stella e carico a triangolo o generatori a triangolo e carico a stella.

Nel caso di carico a triangolo le singole impedenze saranno attraversate da correnti diverse da quelle di linea; tali correnti verranno dette *correnti di fase*. Le relazioni tra correnti di linea e correnti di fase si ricavano facilmente applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi del triangolo delle impedenze e ricalcano quelle tra tensioni concatenate e tensioni stellate.

È facile però rendersi conto che, in una situazione in cui non si conosce la effettiva disposizione dei generatori, deve essere in effetti possibile prescindere da tale disposizione e poter comunque determinare le correnti nei conduttori sulla base della conoscenza delle sole tensioni concatenate.

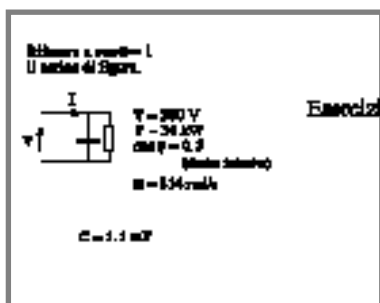
In effetti, assegnato un triangolo di tensioni concatenate, possiamo immaginare tali tensioni prodotte da una qualsiasi terna di generatori disposti a stella con tensio-





ni tali che i loro vettori rappresentativi costituiscano una stella con gli estremi coincidenti con i vertici del triangolo delle tensioni.

Naturalmente, se la terna di tensioni concatenate è simmetrica, sarà molto conveniente supporre la terna di tensioni stellate anche essa simmetrica; in tal caso si avrà $V = \frac{1}{\sqrt{3}} E$, dove si è indicato con E e V , rispettivamente, il modulo comune delle tensioni stellate e delle tensioni concatenate.

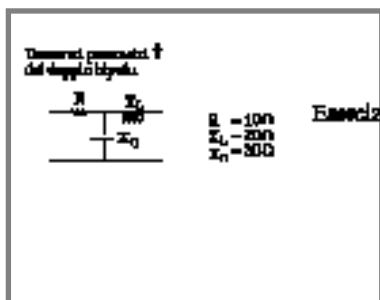


Esercizi

Per l'esercizio proposto al capitolo precedente si fornisce, a scopo di verifica, la corrente circolante nel secondario del mutuo accoppiamento:

$$i_2(t) = -0,25 \sqrt{2} \sin(1000t - \pi/4).$$

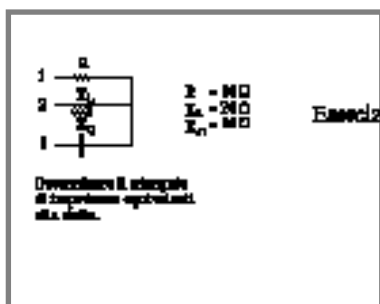
Sullo stesso schema si verifichi cosa cambia nel risultato se si inverte il segno di M .



Il valore della capacità necessaria per il rifasamento totale del carico di cui al problema già proposto è:

$$C = 1,1 \mu\text{F}.$$

Nel successivo esercizio si propone di calcolare i parametri Y per il doppio bipolo mostrato.



Infine nell'ultimo esercizio, viene proposto di trasformare una stella di impedenze in un equivalente triangolo. Le formule sono quelle già dedotte per il regime continuo; basta ricordarsi di operare con numeri complessi invece che con numeri reali.

La potenza nei sistemi trifasi

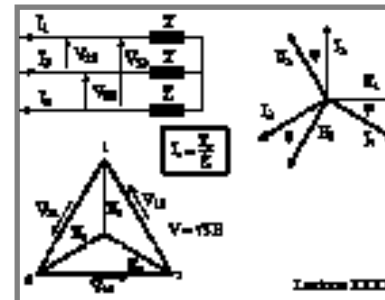
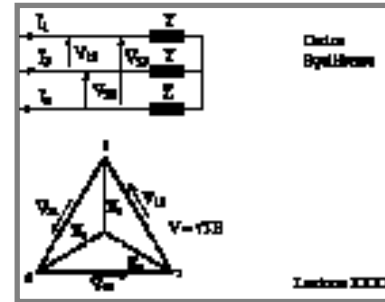
Come abbiamo visto, nel caso di carico equilibrato a stella e di terna di tensioni simmetrica, anche in assenza di conduttore neutro, il potenziale O' del centro stella del carico coincide con il potenziale del *baricentro* O del triangolo delle tensioni concatenate. Ciò vuol dire che, se si immagina il sistema di tensioni concatenate prodotto da una terna di generatori a stella che fornisce una terna simmetrica di tensioni stellate, il potenziale di O' coincide con quello del centro stella dei generatori. In tali condizioni le correnti nelle singole impedenze di carico si calcolano agevolmente come rapporto tra le tensioni stellate e le relative impedenze del carico, proprio come se il conduttore neutro fosse presente

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z}. \quad (\text{VII.5})$$

Calcoliamo, in queste condizioni, la potenza fornita da sistema dei generatori. In generale in un sistema trifase, per qualsiasi terna di tensioni concatenate, la potenza totale fornita al carico è la somma delle potenze erogate da tre generatori collegati a stella che siano in grado di fornire la assegnata terna di tensioni concatenate; tre generatori, cioè, le cui tensioni soddisfino le (VII.2). Sia ha dunque:

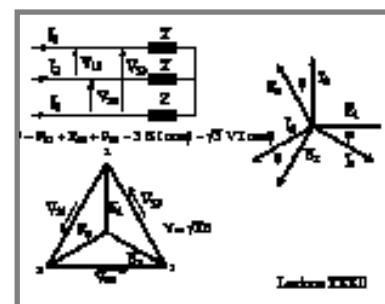
$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t). \quad (\text{VII.6})$$

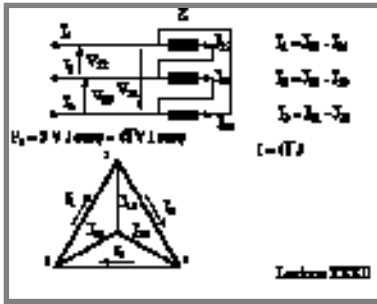
In particolare, se la terna delle V è simmetrica, scegliendo anche la terna delle E simmetrica, e se il carico è equilibrato si ottiene:



$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 3 E I \cos \varphi + \\ + E I \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \right. \\ \left. + \cos(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) \right]$$

potenza istantanea media

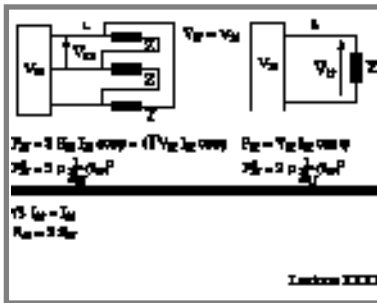




$$p(t) = EI \left[\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) + \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) + \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) \right] = 3EI \cos \varphi + EI \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \right].$$

Nella espressione della potenza istantanea si riconosce ancora una termine costante ed un termine fluttuante, come nel caso monofase. Questa volta però il termine fluttuante è identicamente nullo. Se rappresentiamo infatti i tre addendi di cui è composto in un piano dei vettori - che questa volta però ruota con velocità 2ω - vediamo subito che la spezzata che essi formano è chiusa e quindi essi sono a somma nulla. Si conclude, dunque, che, nel caso di terna delle tensioni simmetrica e terna delle correnti equilibrata, la sola potenza che si trasferisce al carico è quella media:

$$3 EI \cos \varphi = \sqrt{3} VI \cos \varphi.$$



Sulla base delle nozioni introdotte possiamo a questo punto mostrare un altro motivo di convenienza dell'uso di sistemi trifasi. Confrontiamo due sistemi di alimentazione, l'uno monofase e l'altro trifase senza neutro, che siano del tutto equivalenti per quello che concerne l'utilizzatore, cioè il carico. Supponiamo che detto carico, nel caso del sistema trifase, sia disposto a triangolo come mostrato nello schema - ad un risultato identico si giunge se lo si suppone a stella - e che sia inoltre equilibrato. La potenza fornita a tale carico è:

$$P = \sqrt{3} VI \cos \varphi.$$

Un sistema monofase che sia equivalente a quello trifase deve fornire la stessa potenza sotto la stessa tensione e con lo stesso fattore di potenza; dal confronto tra le

due potenze si deduce che la corrente in tale sistema monofase deve essere $\sqrt{3}$ volte più grande di quella nel singolo conduttore di linea del sistema trifase:

$$I_{1f} = \sqrt{3} I_{3f} \quad (\text{VII.7})$$

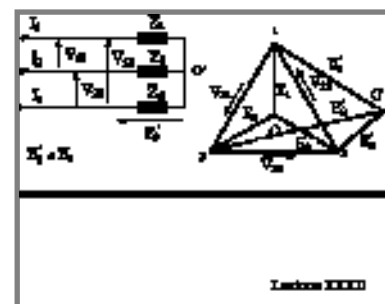
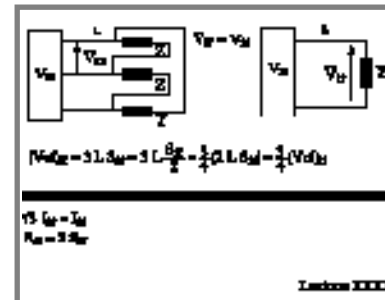
Fino ad ora abbiamo supposto che i conduttori di linea che collegano i generatori al carico siano di resistenza nulla. In effetti, come abbiamo già sottolineato, essi sono sempre realizzati con materiali a bassa resistività, e quindi tale approssimazione appare ragionevole. Ma se pensiamo ad una rete di collegamento di dimensioni ragguardevoli, in cui i generatori siano a chilometri e chilometri di distanza dagli utilizzatori, come in effetti accade in una complessa rete elettrica nazionale od internazionale, si capisce facilmente come anche una piccola resistività dei conduttori di linea può provocare notevoli potenze dissipate lungo la linea stessa. Paragoniamo le potenze dissipate dei due casi precedentemente descritti:

$$\begin{aligned} P_{3f}^d &= 3 \rho \frac{L}{S_{3f}} (I_{3f})^2, \\ P_{1f}^d &= 2 \rho \frac{L}{S_{1f}} (I_{1f})^2. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

Dove ρ è la resistività del materiale dei conduttori di linea, L la distanza del carico dai generatori ed S_{1f} ed S_{3f} le sezioni dei conduttori nei due casi esaminati. Perché le due potenze siano eguali occorre che sia $S_{3f} = S_{1f} / 2$. In termini di volume di materiale impiegato, e quindi di costo della linea, a parità di tutti gli altri fattori, ciò significa che:

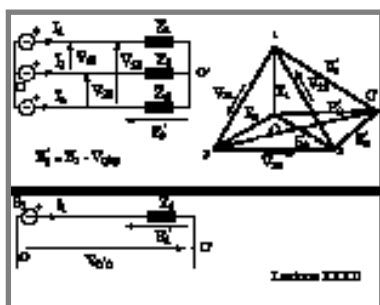
$$(Vol)_{3f} = 3LS_{3f} = \frac{3}{4}(2LS_{1f}) = \frac{3}{4}(Vol)_{1f}. \quad (\text{VII.9})$$

Con un risparmio globale di un quarto di materiale. Questo semplice confronto basterebbe a giustificare la scelta della trasmissione con sistemi trifasi; naturalmente ci sono altri aspetti del problema che non abbia-



mo esaminato in quanto non congruenti con il livello di approfondimento al quale riteniamo di doverci mantenere.

Ritornando al problema del calcolo delle correnti in un sistema trifase, come abbiamo visto, se le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica (diretta per esempio), le correnti si calcolano agevolmente come se si trattasse di tre circuiti monofasi distinti anziché di un unico sistema trifase.



Le cose si complicano leggermente se, pur restando la terna delle tensioni concatenate simmetrica, le tre impedenze di carico non sono più uguali. In tal caso anche supponendo le tre tensioni dei generatori disposti a stella simmetriche, il potenziale del centro stella dei generatori non coincide con quello del centro stella del carico; il punto O nella rappresentazione vettoriale, non coincide con il punto O'. Con $\bar{V}_{O'O}$ indicheremo il vettore rappresentativo della differenza di potenziale tra il centro stella del carico e quello dei generatori; tale vettore individua il cosiddetto *spostamento del centro stella*.

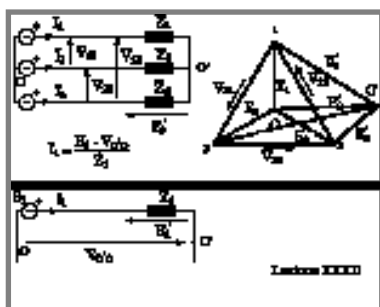
D'altra parte, dal diagramma vettoriale, si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1' &= \bar{E}_1 - \bar{V}_{O'O}, \\ \bar{E}_2' &= \bar{E}_2 - \bar{V}_{O'O}, \\ \bar{E}_3' &= \bar{E}_3 - \bar{V}_{O'O}.\end{aligned}\quad (\text{VII.10})$$

La conoscenza dello spostamento del centro stella consente, quindi, di calcolare le tensioni che insistono sui relativi carichi e, di conseguenza, le correnti:

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}_r'}{Z_r} = \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{Z_r}.\quad (\text{VII.11})$$

Il calcolo dello spostamento del centro stella, è, d'altra parte, molto agevole; basta applicare il metodo dei potenziali ai nodi, scrivendo l'equazione che esprime la



LKC ad uno dei due nodi presenti nella rete. Si ottiene:

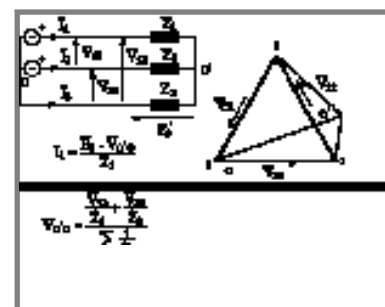
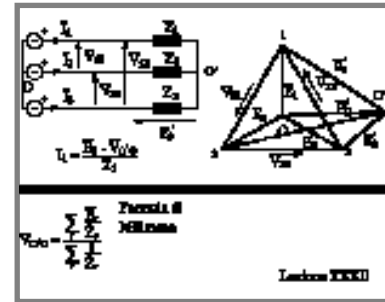
$$\sum_r \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{Z_r} = 0, \quad (\text{VII.12})$$

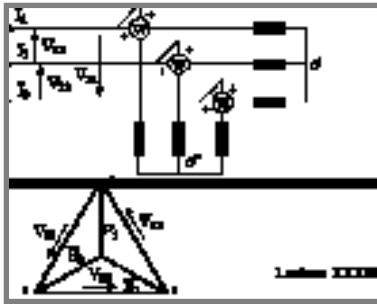
e quindi, mettendo in evidenza il vettore rappresentativo dello spostamento del centro stella:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\sum_r \frac{\bar{E}_r}{Z_r}}{\sum_r \frac{1}{Z_r}}. \quad (\text{VII.13})$$

La formula (VII.13), che può naturalmente essere generalizzata, come si è già detto, al caso di n rami in parallelo, prende il nome di formula di Millmann e consente di calcolare lo spostamento del centro stella, se sono noti i valori delle tensioni dei generatori e delle impedenze di carico.

Resta da vedere come si tratta il caso in cui anche le tensioni concatenate non sono più simmetriche. In effetti il procedimento ora esposto basato sulla determinazione dello spostamento del centro stella, non richiede necessariamente che le tensioni concatenate costituiscano una terna simmetrica; esso è applicabile anche nel caso di terna dissimmetrica. In tal caso, naturalmente, il punto O , rappresentativo del potenziale del centro stella dei generatori E (non simmetrici), non sarà più il baricentro del triangolo equilatero delle tensioni concatenate, come nel caso precedente, ma un punto qualsiasi del piano rappresentativo. Esso dipende dalla scelta fatta per la terna di tensioni stellate che si suppone producano le assegnate tensioni concatenate. Per esempio è possibile scegliere O coincidente con uno dei vertici del triangolo delle tensioni concatenate; ciò è equivalente a supporre che la terna di tensioni concatenate sia prodotta da due soli generatori, come mostrato nello schema a lato, dove si è supposto O





coincidente con il vertice 3 del triangolo delle tensioni concatenate.

In tal caso lo spostamento del centro stella è dato da:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\bar{V}_{13} + \bar{V}_{23}}{\sum_r \frac{1}{Z_r}} \quad (\text{VII.14})$$

Si osservi infine che non pone alcun problema il calcolo delle correnti nei singoli lati di un carico disposto a triangolo. In tal caso, infatti, sono note direttamente le tensioni sulle singole impedenze, sia nel caso di una terna simmetrica sia in quello di una terna dissimmetrica.

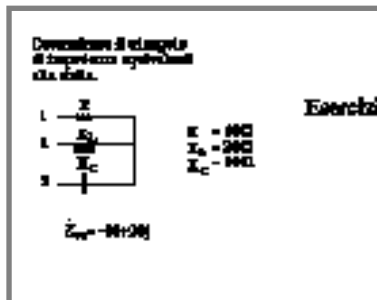
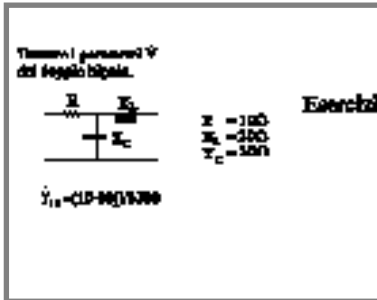
Esercizi

Per il doppio bipolo in figura si ha:

$$\dot{Y}_{11} = \frac{10 - j60}{3700}.$$

Per la verifica dell'esercizio successivo si fornisce il valore della impedenza sul lato (1,2) del triangolo equivalente:

$$\dot{Z}_{12} = -10 + j20.$$



La misura della potenza nei sistemi trifasi

Una qualche particolarità presenta l'inserzione dei wattmetri in un sistema trifase. Supponiamo inizialmente che esso sia a stella con il neutro accessibile come schematicamente mostrato in figura. Nella stessa figura è anche indicata l'inserzione di tre wattmetri: è evidente che la somma delle indicazioni dei tre wattmetri fornisce la potenza attiva assorbita dal carico trifase. Si ha infatti, indicando con W_1 , W_2 e W_3 rispettivamente le tre indicazioni dei wattmetri:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= \\ &= E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

Naturalmente, se il carico è equilibrato e la terna di tensioni simmetrica, si ha:

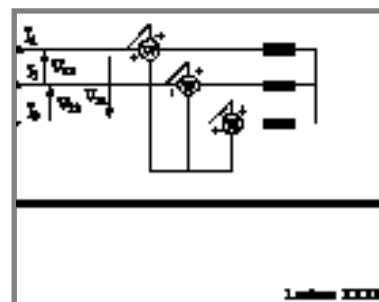
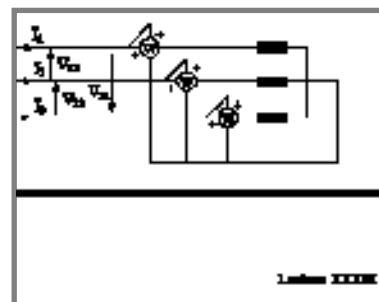
$$W_1 = W_2 = W_3 = E I \cos \varphi = \frac{P}{3}, \quad (\text{VII.16})$$

ed, in linea di principio, un solo wattmetro sarebbe sufficiente.

Supponiamo ora che il centro stella del carico non sia accessibile; sembrerebbe, a prima vista, che questo fatto introduca una difficoltà insormontabile. In effetti ciò non può essere, e non è infatti, come si comprenderà facilmente dalle seguenti considerazioni. Sia O' il centro stella (non accessibile) del carico ed O'' il punto comune delle tre voltmetriche dei wattmetri. Se indichiamo con un solo apice le tensioni stellate sul carico e con due le corrispondenti tensioni alle voltmetriche dei wattmetri, si ha:

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}. \quad (\text{VII.17})$$

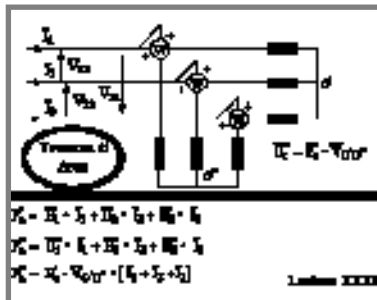
D'altra parte la somma delle indicazioni dei wattmetri è per definizione:



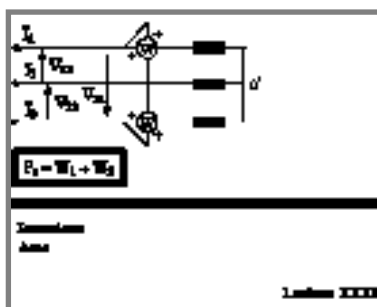
$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \cdot \bar{I}_r, \quad (\text{VII.18})$$

dove si è usato il simbolismo del prodotto scalare per rappresentare la potenza attiva. Utilizzando la (VII.17) nella VII.18 si ottiene:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r - \bar{V}_{O'O''} \sum_r \bar{I}_r = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r,$$



dato che la somma dei fasori rappresentativi delle tre correnti di linea è necessariamente nulla per l'assenza del conduttore neutro. Se ne conclude dunque - *teorema di Aron* - che la somma algebrica delle indicazioni dei tre wattmetri è indipendente dal potenziale del punto rispetto al quale si valutano le tensioni stellate ed è uguale alla potenza attiva assorbita dal carico. Si noti che non si è dovuto fare alcuna ipotesi sulle tensioni che alimentano il carico - può anche trattarsi, dunque, di un sistema dissimmetrico - né sulla natura del carico stesso - esso può anche essere non equilibrato; il risultato è del tutto generale. Come applicazione immediata di questo risultato possiamo far vedere come sia possibile utilizzare due soli wattmetri, invece di tre, per la misura della potenza attiva in un sistema trifase senza conduttore neutro. Se infatti poniamo il punto O'' , per esempio, in collegamento con il secondo conduttore di linea, l'indicazione del secondo wattmetro è identicamente nulla, perché nulla è la tensione ai suoi morsetti voltmetrici; ciò rende inutile la presenza del terzo wattmetro. Si arriva dunque ad una inserzione del tipo descritto in figura, che prende il nome, appunto, di inserzione Aron. La somma algebrica delle indicazioni - esse, infatti, possono anche essere negative - dei due wattmetri fornisce in ogni caso la potenza attiva assorbita dal carico.



Va notato infine che nel caso in cui il sistema trifase sia simmetrico ed equilibrato, e solo in questo caso, la differenza tra le due misure dei wattmetri nell'inserzione Aron è proporzionale alla potenza reattiva. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 &= VI \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 2 V I \sin \frac{\pi}{6} \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Dove Q è appunto la potenza reattiva totale assorbita dal carico:

$$Q = 3 E I \sin \varphi = \sqrt{3} V I \sin \varphi. \quad (\text{VII.20})$$

Nel caso più generale la potenza reattiva è data da:

$$Q = \sum_r E_r I_r \sin \varphi_r. \quad (\text{VII.21})$$

Si noti che in virtù del teorema di conservazione delle potenze complesse, anche nel caso di sistemi trifasi, la potenza attiva e reattiva totale assorbita dal parallelo di due carichi è pari alla somma delle rispettive potenze assorbite dai due carichi separatamente.

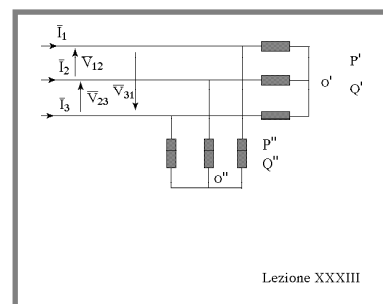
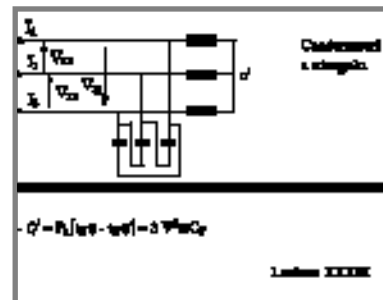
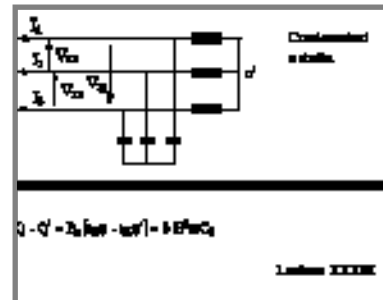
Questa considerazione consente di affrontare il problema del rifasamento di un carico trifase allo stesso modo adottato per i carichi monofasi. Nel caso dei sistemi trifasi è possibile però una duplice scelta: il banco di condensatori di rifasamento può essere collegato a stella o a triangolo. Per la stella si ha:

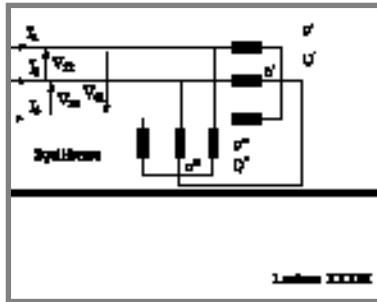
$$Q - Q' = P_a (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 3 E^2 \omega C_s, \quad (\text{VII.21})$$

e per il triangolo

$$Q - Q' = P_a (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 3 V^2 \omega C_T. \quad (\text{VII.22})$$

A parità di potenza reattiva, la capacità necessaria in un collegamento a triangolo è minore di quella necessaria per un collegamento a stella. Naturalmente, però, nel secondo caso i condensatori debbono essere progettati

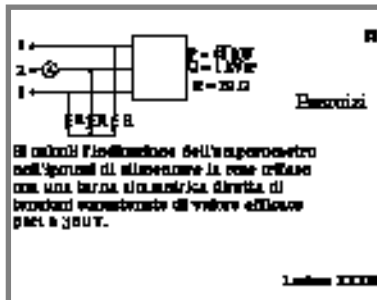




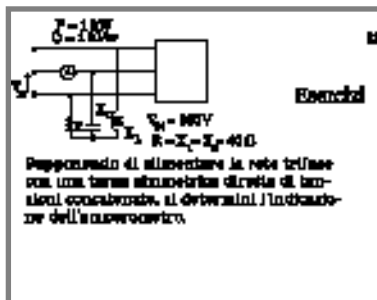
per sostenere una tensione minore.

Si noti infine che mentre un carico squilibrato posto in parallelo ad uno equilibrato non modifica il potenziale del centro stella del carico equilibrato, se tra i due centri stella dei carichi si dispone un collegamento, allora anche il carico equilibrato non potrà più essere trattato come tale.

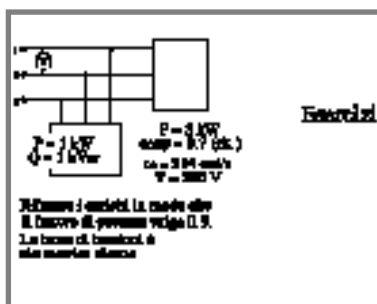
Esercizi



Nel primo problema si richiede di calcolare l'indicazione dell'amperometro a valor efficace posto sulla linea 2 del sistema trifase assegnato, costituito da due carichi equilibrati in parallelo.



Nel secondo esercizio viene proposto un problema analogo; in questo caso, però, uno dei carichi è squilibrato.



Nell'ultimo problema, infine, si richiede di rifasare a $\cos\varphi=0,9$ un sistema di due carichi in parallelo di cui sono assegnate le rispettive potenze.

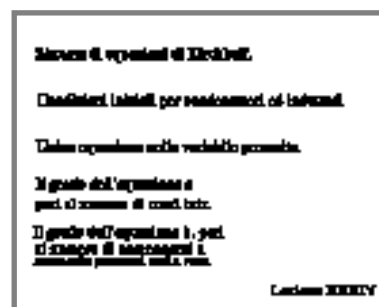
Dinamica dei circuiti di ordine superiore

Nei capitoli precedenti abbiamo già esaminato, partendo da alcuni classici esempi, gli aspetti salienti della soluzione di una rete elettrica in regime dinamico qualsiasi; proviamo qui a riepilogarli.

Sia data una rete con l lati ed n nodi, alimentata da generatori di tensione e corrente con evoluzione temporale qualsiasi - ma non controllati - composta da bipoli resistivi, induttivi e capacitivi le cui caratteristiche non variano nel tempo - si dirà che la rete è *tempo-invariante*. Desiderando conoscere l'evoluzione temporale delle grandezze elettriche - tensioni e correnti - dei singoli bipoli, a partire da un determinato istante iniziale t_0 - istante in cui è noto lo stato della rete, e cioè le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori - si procede alla maniera seguente:

Utilizzando le leggi di Kirchhoff si scrivono $n-1$ equazioni ai nodi ed $l-(n-1)$ equazioni alle maglie; dato che le caratteristiche dei bipoli, in generale, esprimono legami differenziali tra tensioni e correnti, il sistema che ne deriva sarà di l equazioni differenziali lineari, se i bipoli presenti sono appunto lineari.

Mediante successive operazioni di sostituzione, ed eventuale differenziazione, si ricava dal sistema di partenza una unica equazione differenziale in una delle



incognite in precedenza scelta; il grado dell'equazione sarà pari al numero di bipoli "a memoria" - induttori e condensatori - presenti nella rete. Quest'ultima affermazione andrebbe dimostrata; noi la consideriamo tale sulla base di una semplice considerazione di carattere fisico: se ciò non fosse vero il numero di condizioni iniziali assegnate non sarebbe adeguato alla soluzione del problema. Naturalmente due condensatori in parallelo, o due induttori in serie, vanno contati come un unico componente; del resto, nei due casi, la condizione iniziale è unica!

La soluzione dell'equazione così determinata si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea associata, una soluzione particolare della equazione completa. L'integrale generale dell'omogenea associata, se le radici sono tutte distinte, sarà del tipo:

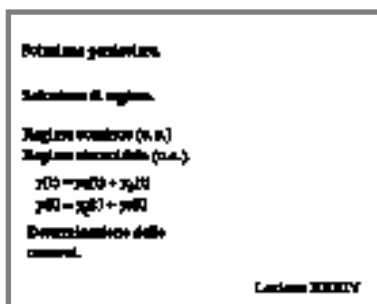
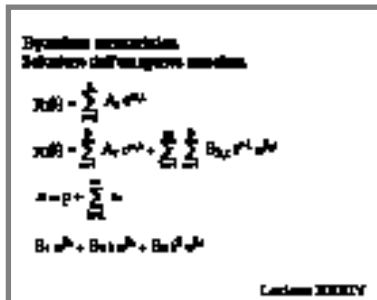
$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t} \quad (\text{VIII.1})$$

dove le α_r sono le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale; tali radici possono essere complesse, ed in tal caso si avranno fenomeni oscillatori. Nel caso in cui si hanno radici coincidenti, la soluzione dell'omogenea ha una espressione diversa. Ad esempio se la radice k-esima ha molteplicità g_k , l'integrale dell'omogenea è del tipo:

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^p A_r e^{\alpha_r t} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{g_k} B_{k,r} t^{r-1} e^{\beta_k t}. \quad (\text{VIII.2})$$

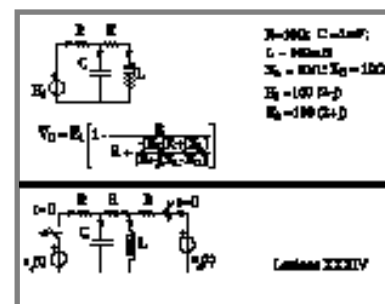
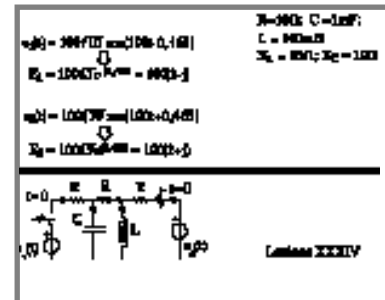
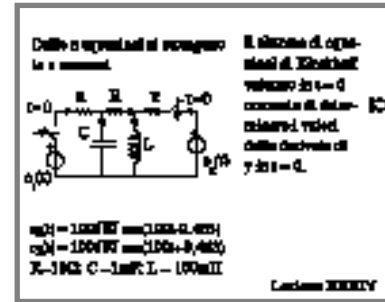
In ogni caso la parte reale delle radici non potrà mai essere positiva, in quanto le soluzioni non potranno mai crescere esponenzialmente nel tempo; al limite, in reti prive di resistenze, le radici potranno essere puramente immaginarie, dando luogo ad oscillazioni permanenti.

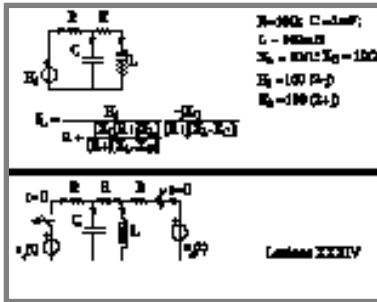
Per quanto riguarda la soluzione particolare della completa, abbiamo già visto come sia possibile determinar-



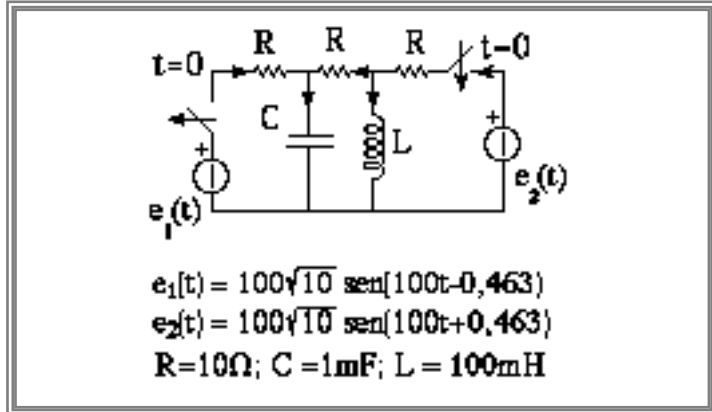
la quale soluzione a regime nei due casi in cui i generatori sono tutti costanti - regime continuo - o di tipo sinusoidale, tutti con la stessa frequenza - regime sinusoidale, correntemente detto anche *regime alternativo*. Naturalmente il procedimento può essere esteso a regimi periodici di altro tipo: basta assumere che la soluzione di regime abbia lo stesso andamento periodico dei generatori, inserire tale soluzione nella equazione differenziale e, imponendo che essa sia soddisfatta, ricavare i parametri da cui dipende la soluzione stessa. La soluzione generale così ottenuta, somma di quella dell'omogenea e della soluzione particolare, dipende dalle costanti A_r presenti nella soluzione della omogenea. A questo punto entrano in gioco le condizioni iniziali sulle grandezze di stato che, essendo proprio in numero pari al grado dell'equazione differenziale risultante, forniscono un adeguato numero di equazioni per determinare le costanti A_r . Naturalmente va ricordato che, non essendo in generale le condizioni iniziali fornite direttamente come valori della grandezza che si è scelta come incognita e delle sue derivate nell'istante iniziale, ma come valori delle correnti negli induttori e tensioni sui condensatori, occorrerà da questi ultimi ricavare quelli relativi alla grandezza prescelta. Un procedimento generale che consente di effettuare questo passaggio, consiste nel valutare le equazioni, scritte per imporre il rispetto delle leggi di Kirchhoff, all'istante iniziale: in tali equazioni compaiono, come termini noti, sia le tensioni e correnti dei generatori che le correnti negli induttori e le tensioni sui condensatori; da esse sarà possibile ricavare il valore di ogni altra grandezza all'istante iniziale, come abbiamo già fatto vedere nei casi sviluppati.

Questo in sintesi il procedimento generale per risolvere una rete lineare tempo-invariante in regime qualsiasi. Un esempio chiarirà meglio i vari passi della procedura. Ci limiteremo a descriverli riducendo al minimo i commenti.

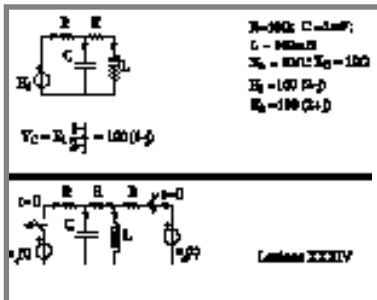




Consideriamo la rete mostrata in figura; essa, prima dell'apertura dell'interruttore in serie al generatore e_1 e della chiusura di quello in serie ad e_2 , funziona in regime stazionario. All'istante $t=0$ cambia la topologia e quindi il funzionamento della rete.



Per determinare le condizioni iniziali occorre risolvere la rete a regime per $t < 0$. Utilizzando il metodo fasoriale si ha immediatamente:



$$\bar{V}_C = \bar{E}_1 \left[1 - \frac{R}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \right], \quad (\text{VIII.3})$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)}.$$

Dove:

$$\bar{E}_1 = 100\sqrt{5} e^{-j0,463} = 100(2 - j), \quad (\text{VIII.4})$$

$$\bar{E}_2 = 100\sqrt{5} e^{j0,463} = 100(2 + j),$$

sono i fasori rappresentativi delle tensioni dei generatori.

Introducendo i valori numerici:

$$\bar{V}_c = \bar{E}_1 \frac{1-j}{2-j} = 100 (1-j), \quad (\text{VIII.5})$$

$$\bar{I}_L = \frac{j \bar{E}_1}{10} \frac{1}{2-j} = -j 10.$$

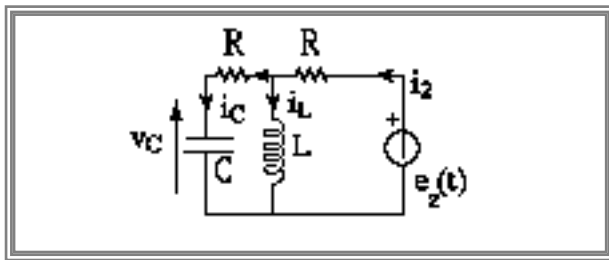
Ritornando al dominio temporale:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= 200 \sin(100t - \pi/4), \\ i_L(t) &= -10\sqrt{2} \sin(100t + \pi/2). \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

Le condizioni iniziali sono, dunque:

$$\begin{aligned} v_c(0) &= 200 \sin(-\pi/4) = -100\sqrt{2}, \\ i_L(0) &= -10\sqrt{2} \sin(\pi/2) = -10\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.7})$$

Per determinare l'evoluzione per $t > 0$ applichiamo la LCK e la LTK al circuito nella sua configurazione finale:



$$e_2 = R i_2 + L \frac{di_L}{dt},$$

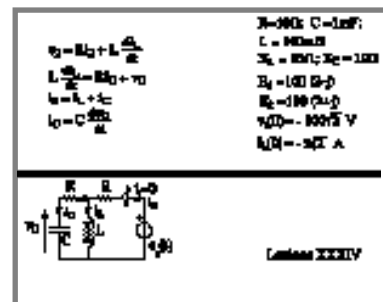
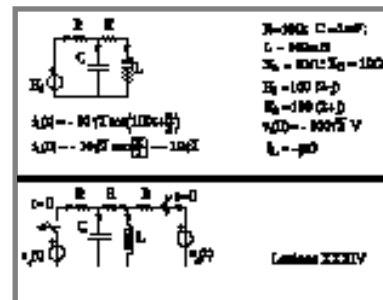
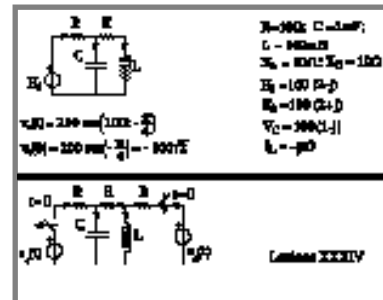
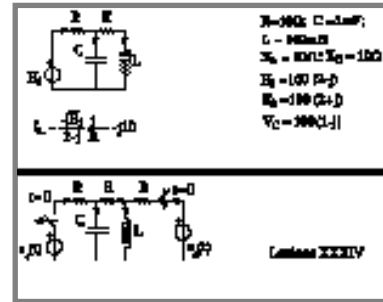
$$L \frac{di_L}{dt} = R i_c + v_c,$$

$$i_2 = i_L + i_c,$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}.$$

(VIII.8)

Con alcuni semplici passaggi si ricava l'equazione risol-

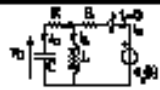


$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt}$$

$$\alpha^2 + 100\alpha + 5 \cdot 10^3 = 0$$

$$\Delta = -10^4$$

$R = 300 \Omega$; $C = 1 \mu F$;
 $L = 60 mH$
 $X_L = 3.77 \Omega$; $X_C = 159 \Omega$
 $B_1 = (1.01) \angle -5^\circ$
 $E_2 = (100) \angle 0^\circ$
 $v_{c0} = -100 \sqrt{2} V$
 $i_L(t) = -20 \sqrt{2} A$



Esempio XXXIV

vente nella tensione sul condensatore:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt} \quad (VIII.9)$$

La VIII.9 è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea (si noti che, come previsto, l'ordine dell'equazione è uguale al numero di bipoli a memoria presenti nella rete).

Il polinomio caratteristico associato alla (VIII.9) è:

$$\alpha^2 + 100\alpha + 5 \cdot 10^3 = 0, \quad (VIII.10)$$

con radici:

$$\alpha_r + j\beta = -50 \pm j50. \quad (VIII.11)$$

La soluzione dell'omogenea associata è del tipo:

$$v_{c0}(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma). \quad (VIII.12)$$

Resta da calcolare la soluzione di regime che si trova facilmente con il metodo fasoriale:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{R + j(X_L - X_C)} \frac{jX_L(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} \quad (VIII.13)$$

Inserendo i valori:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{2 + j} = 100, \quad (VIII.14)$$

e nel dominio del tempo:

$$v_{cp}(t) = 100 \sqrt{2} \sin(100t). \quad (VIII.15)$$

L'integrale generale della completa è dunque:

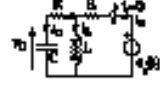
$$v_c(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma) + 100 \sqrt{2} \sin(100t). \quad (VIII.16)$$

Per determinare le costanti A e γ occorre sfruttare le

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt}$$

$$\alpha_r + j\beta = -50 \pm j50$$

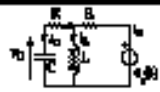
$$v_{c0}(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma)$$

$$i_L(t) = -20 \sqrt{2} A$$


Esempio XXXIV

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{R + j(X_L - X_C)} \frac{jX_L(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}$$

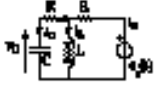
$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{2 + j} = 100$$

$$v_{c0}(t) = 100 \sqrt{2} \sin(100t)$$


Esempio XXXIV

$$v_c(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma) + 100 \sqrt{2} \sin(100t)$$

$$i_L(t) = -20 \sqrt{2} \sin(100t)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = 17.7 \sqrt{2} \cos(100t)$$


Esempio XXXIV

condizioni iniziali. La prima è data direttamente sulla tensione del condensatore e fornisce:

$$v_c(0) = A \sin \gamma = -100 \sqrt{2} . \quad (\text{VIII.17})$$

Per la seconda basta scrivere la LKC e la LKT all'istante iniziale; sottraendo infatti la seconda delle (VIII.8), valutata all'istante zero, dalla prima, si ottiene una relazione da cui è facile ricavare il valore della derivata della tensione sul condensatore all'istante iniziale:

$$i_c(0) = C \left[\frac{dv_c}{dt} \right]_{t=0} = \frac{e_2(0) - v_c(0) - R i_L(0)}{2 R} . \quad (\text{VII.41})$$

Dalla (VIII.17) e dalla (VIII.18) si ricava facilmente:

$$A \approx -161 \text{ V}; \quad \gamma = 1.1 \text{ rad} . \quad (\text{VII.42})$$

L'andamento della soluzione è mostrato nell'ultima figura; dopo alcune oscillazioni transitorie, la tensione sul condensatore si assesta al suo andamento sinusoidale di regime.

Esercizi

Le potenze totali assorbite dal carico trifase del primo esercizio sono:

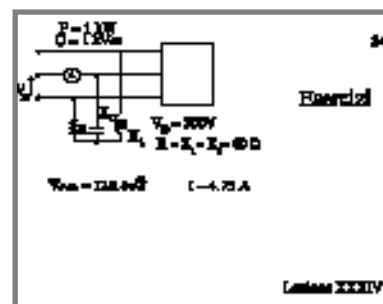
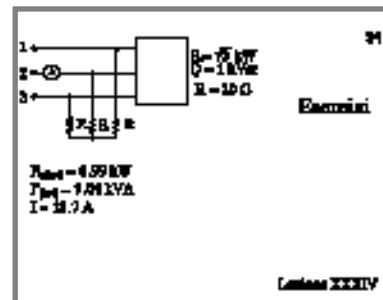
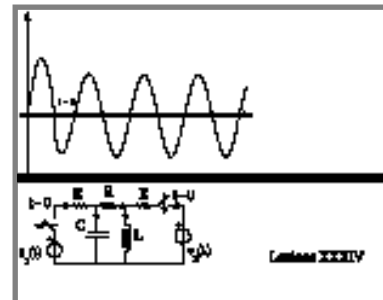
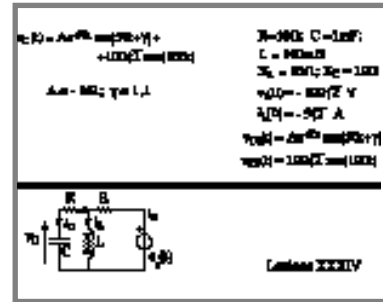
$$\begin{aligned} P_{a(\text{tot})} &= 8,99 \text{ kW}, \\ P_{(\text{tot})} &= 9,04 \text{ kW}, \end{aligned}$$

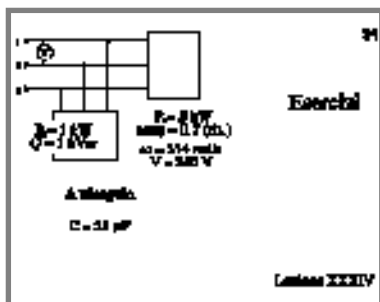
mentre l'indicazione dell'amperometro è:

$$I = 13,7 \text{ A}.$$

Per il trifase di cui allo schema successivo, l'indicazione dell'amperometro è:

$$I \approx 4,73 \text{ A} .$$



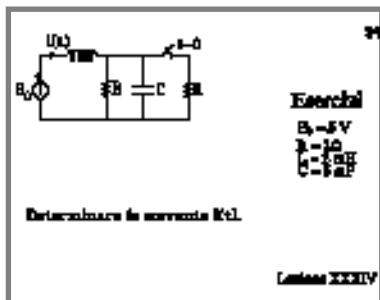


Lo spostamento del centro stella è risultato pari a:

$$\bar{V}_{O'O} = 126,8 e^{j \frac{\pi}{6}}.$$

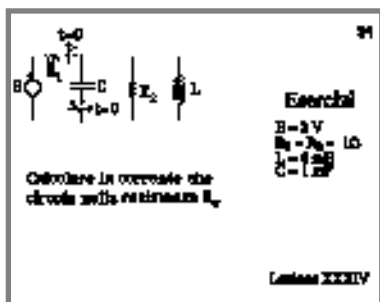
La capacità necessaria per rifasare il carico del terzo esercizio è pari a:

$$C = 23 \mu F.$$



Si è supposto di disporre i condensatori di rifasamento a triangolo.

Nei due ultimi problemi proposti si richiede di determinare l'evoluzione dei circuiti durante un transitorio. Nel primo caso il forzamento è in continua e la chiusura di un interruttore aggiunge, in parallelo al condensatore, un nuovo resistore.

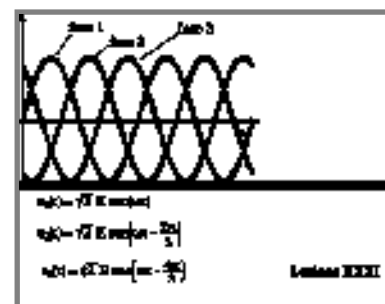
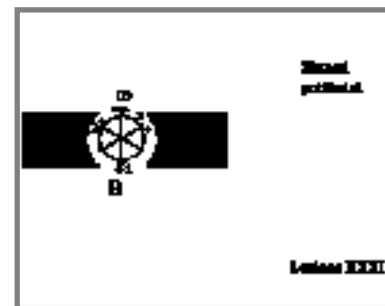


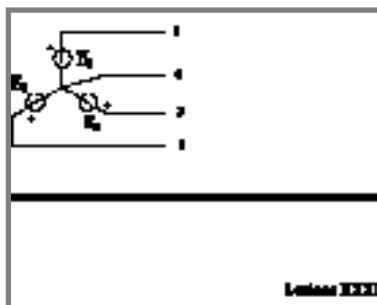
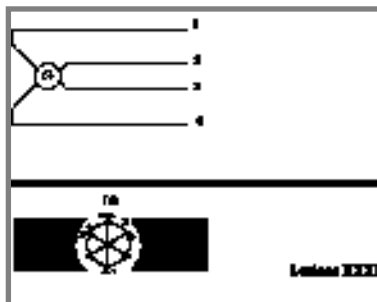
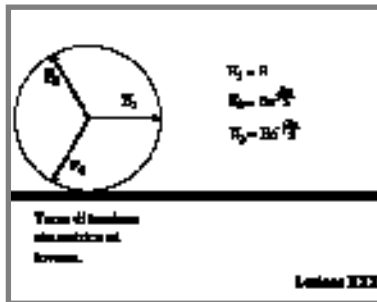
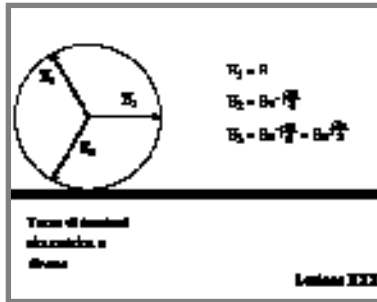
Nel secondo caso, due interruttori agiscono sincronamente, l'uno in apertura e l'altro in chiusura. Un condensatore viene così aggiunto al circuito.

I sistemi trifasi

Nell'introdurre il regime sinusoidale abbiamo accennato a come sia, in linea di principio, molto semplice immaginare un generatore di tensione sinusoidale costruito in base ai principi generali della interazione elettromagnetica: una semplice spira rotante in un campo magnetico ne è stata la concreta esemplificazione. È immediato osservare che, una volta prodotto il campo magnetico, appare logico sfruttarlo in maniera più completa disponendo più spire rotanti nella regione in cui esso agisce. Si osservi che a nulla servirebbe distribuire un unico avvolgimento lungo tutta la periferia del *rotore*; il motivo apparirà immediatamente chiaro in seguito. Il generatore, che stiamo qui descrivendo solo in linea di principio, produrrà, invece di una sola, più tensioni sinusoidali che risulteranno tra di loro sfasate nel tempo di angoli corrispondenti agli angoli che separano nella disposizione spaziale le singole spire. Infatti, nella sua rotazione, una spira sperimenterà le stesse condizioni di quella che la precede dopo un tempo pari a quello necessario a percorrere l'angolo che le separa.

Un sistema di tensioni di tale tipo prende il nome di





sistema *polifase*; in particolare se le tensioni sono eguali in modulo (o valore efficace) e sfasate tra di loro di uno stesso angolo (il che corrisponde ad una disposizione spaziale delle spire perfettamente simmetrica) il sistema si dirà *simmetrico*; nel caso contrario esso si dirà *dissimmetrico*. Ragioni pratiche consigliano in generale di limitarsi al caso di tre sole tensioni; avremo, dunque, sistemi di tensioni trifase simmetrici o non, a secondo del caso. Se diciamo $e_1(t)$, $e_2(t)$ ed $e_3(t)$ le tre tensioni dei generatori, sarà, in generale:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \sqrt{2} E_1 \sin \omega t, \\ e_2(t) &= \sqrt{2} E_2 \sin (\omega t - \alpha_2), \\ e_3(t) &= \sqrt{2} E_3 \sin (\omega t - \alpha_3). \end{aligned} \quad (\text{VII.1})$$

Se in particolare $E_1 = E_2 = E_3$ ed $\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = 4\pi/3$, allora il sistema è simmetrico.

È naturalmente ancora simmetrico il sistema con $\alpha_2 = 4\pi/3$ ed $\alpha_3 = 2\pi/3$. Per distinguerli diremo il primo sistema *simmetrico diretto* ed il secondo *simmetrico inverso*. Nella rappresentazione vettoriale i due sistemi sono descritti dai diagrammi mostrati a lato.

Un generatore trifase si può sempre immaginare realizzato con tre generatori monofase, del tipo già introdotto, e disposti come nell'ultima immagine a lato; tale disposizione si dice, per ovvie ragioni, a stella.

Si noti che dal punto di vista elettrico un tale sistema può anche essere disegnato come mostrato nell'immagine successiva.

Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di *tensioni concatenate* e vengono di regola indicate utilizzando la lettera V, mentre si riserva la lettera E per le tensioni tra i conduttori ed il punto comune dei tre generatori che prende il nome di *centro stella dei generatori*. Tali tensioni vengono dette *stellate* o di *fase*. Si avrà evidentemente:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2, \\ \bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3, \\ \bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1.\end{aligned}\quad (\text{VII.2})$$

Le stesse relazioni sono descritte graficamente nel relativo diagramma vettoriale riportato nella terza immagine a lato: il triangolo delle *tensioni concatenate* ha per vertici i tre punti 1, 2 e 3, estremi dei vettori rappresentativi delle rispettive tensioni di fase.

Supponiamo ora di collegare i tre generatori a tre impedenze di carico, come descritto nella successiva immagine. Il sistema così ottenuto si distingue da quello che si otterrebbe collegando i tre generatori sui rispettivi carichi separatamente, solo per il fatto che il conduttore di ritorno dei tre generatori è in comune. Supponiamo ora, però, che il sistema, oltre ad essere simmetrico diretto (o inverso, non ha importanza) sia anche caratterizzato dall'avere le tre impedenze di carico eguali tra di loro: un tale sistema si dirà *equilibrato nelle correnti* (o anche *nel carico*). In queste condizioni le tre correnti i_1 , i_2 ed i_3 sono:

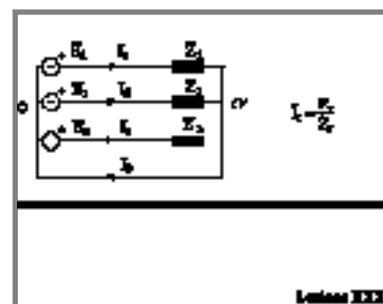
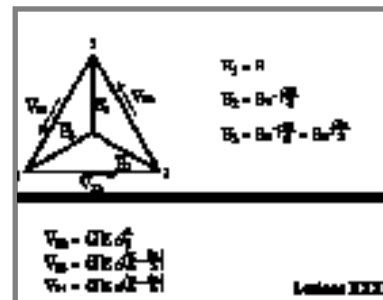
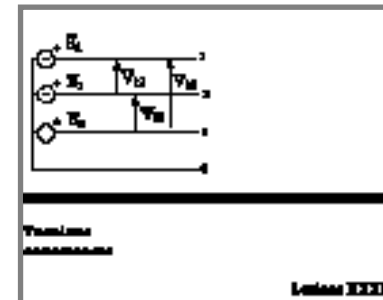
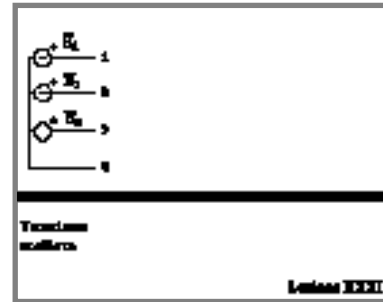
$$\begin{aligned}i_1(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi), \\ i_2(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - 2\pi/3 - \varphi), \\ i_3(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - 4\pi/3 - \varphi).\end{aligned}\quad (\text{VII.3})$$

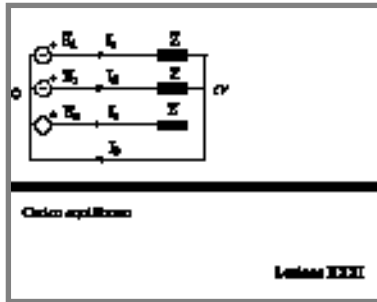
dove si è indicato con φ l'angolo di fase comune delle tre impedenze.

È facile verificare che nel caso descritto è:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0.$$

Il fatto è particolarmente evidente nella rappresentazione vettoriale mostrata nella seconda immagine della pagina successiva. I tre fasori rappresentativi sono



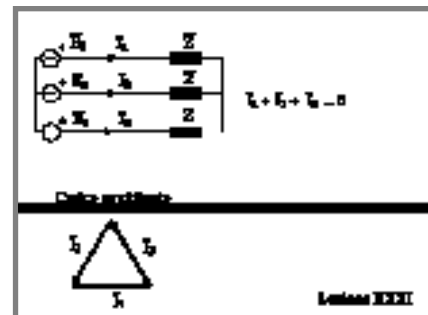
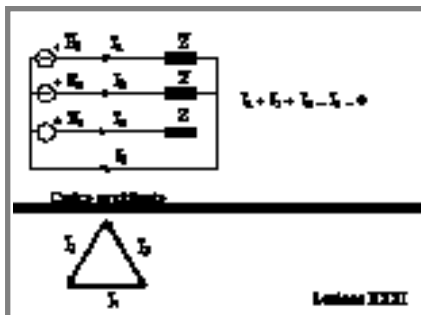
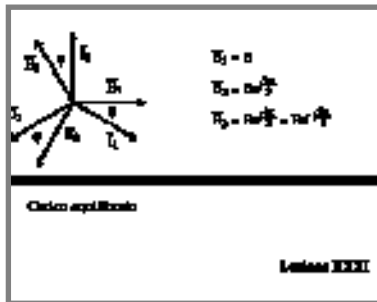


eguali in modulo e sfasati di $2\pi/3$ e costituiscono quindi i lati di un triangolo equilatero: la loro somma è dunque identicamente nulla. D'altra parte l'applicazione della LKC al nodo comune delle tre impedenze, O' , ci dice che, nel dominio della rappresentazione simbolica deve essere:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_0. \quad (\text{VII.4})$$

Dove \bar{I}_0 è la corrente nel conduttore comune di ritorno nel verso indicato. Si conclude che, nelle condizioni descritte di tensioni simmetriche e carico equilibrato, la corrente nel conduttore di ritorno è necessariamente nulla; ne consegue, per una nota proprietà delle reti, che tale conduttore può essere eliminato ed i due punti O ed O' sono allo stesso potenziale anche se non sono collegati da un conduttore!

Siamo giunti quindi ad uno schema di collegamento a soli tre conduttori di linea che, se il carico è equilibrato, è del tutto equivalente a quello precedente. Un tale sistema verrà detto *sistema trifase senza conduttore neutro* (o *filo neutro*) perché tale è appunto il nome che si riserva al quarto conduttore.



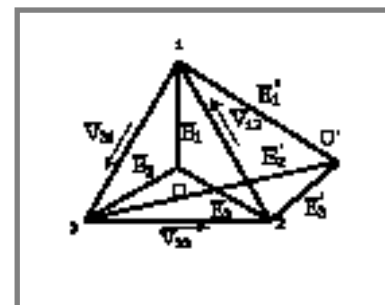
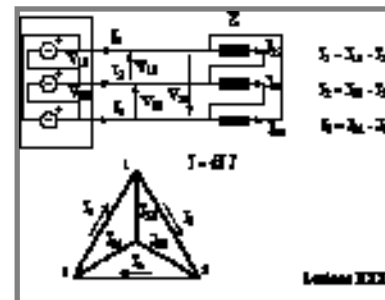
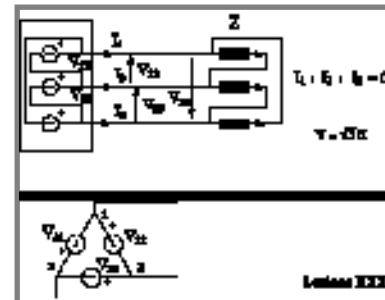
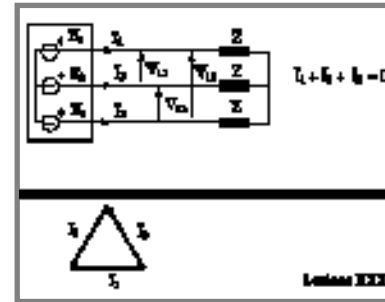
Immaginiamo ora il complesso dei generatori racchiusi in una scatola chiusa; fuoriescono soltanto i tre fili di linea tra i quali sussistono le tensioni concatenate. È la situazione che si può immaginare si verifichi quando l'alimentazione è fornita da un unico generatore trifase. Si osservi che lo stesso sistema di alimentazione si può immaginare prodotto da tre generatori, di tensione pari alla tensione concatenata e con gli opportuni sfasamenti, collegati come mostrato nelle immagini; si parlerà in questo caso di sistema di generatori collegati a triangolo perché i generatori stessi possono idealmente immaginarsi disposti lungo i lati di un triangolo. In un collegamento a triangolo non c'è spazio per un eventuale filo neutro in quanto manca il punto O a cui collegarlo.

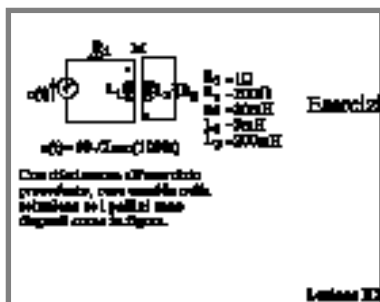
Anche il carico delle tre impedenze può essere collegato a triangolo, come mostrato in figura, e, naturalmente, sono possibili le altre combinazioni: generatori a stella e carico a triangolo o generatori a triangolo e carico a stella.

Nel caso di carico a triangolo le singole impedenze saranno attraversate da correnti diverse da quelle di linea; tali correnti verranno dette *correnti di fase*. Le relazioni tra correnti di linea e correnti di fase si ricavano facilmente applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi del triangolo delle impedenze e ricalcano quelle tra tensioni concatenate e tensioni stellate.

È facile però rendersi conto che, in una situazione in cui non si conosce la effettiva disposizione dei generatori, deve essere in effetti possibile prescindere da tale disposizione e poter comunque determinare le correnti nei conduttori sulla base della conoscenza delle sole tensioni concatenate.

In effetti, assegnato un triangolo di tensioni concatenate, possiamo immaginare tali tensioni prodotte da una qualsiasi terna di generatori disposti a stella con tensio-





ni tali che i loro vettori rappresentativi costituiscano una stella con gli estremi coincidenti con i vertici del triangolo delle tensioni.

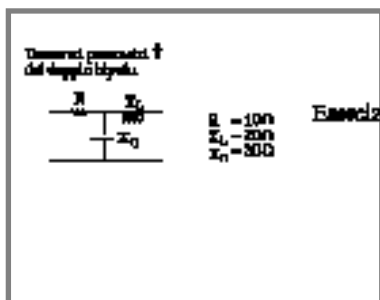
Naturalmente, se la terna di tensioni concatenate è simmetrica, sarà molto conveniente supporre la terna di tensioni stellate anche essa simmetrica; in tal caso si avrà $V = \frac{1}{\sqrt{3}} E$, dove si è indicato con E e V , rispettivamente, il modulo comune delle tensioni stellate e delle tensioni concatenate.

Esercizi

Per l'esercizio proposto al capitolo precedente si fornisce, a scopo di verifica, la corrente circolante nel secondario del mutuo accoppiamento:

$$i_2(t) = -0,25 \sqrt{2} \sin(1000t - \pi/4).$$

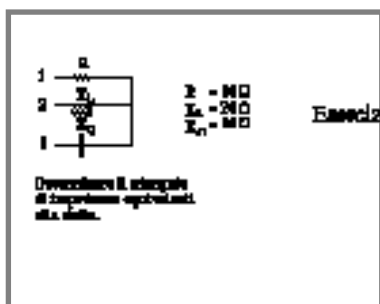
Sullo stesso schema si verifichi cosa cambia nel risultato se si inverte il segno di M .



Il valore della capacità necessaria per il rifasamento totale del carico di cui al problema già proposto è:

$$C = 1,1 \mu\text{F}.$$

Nel successivo esercizio si propone di calcolare i parametri Y per il doppio bipolo mostrato.



Infine nell'ultimo esercizio, viene proposto di trasformare una stella di impedenze in un equivalente triangolo. Le formule sono quelle già dedotte per il regime continuo; basta ricordarsi di operare con numeri complessi invece che con numeri reali.

La potenza nei sistemi trifasi

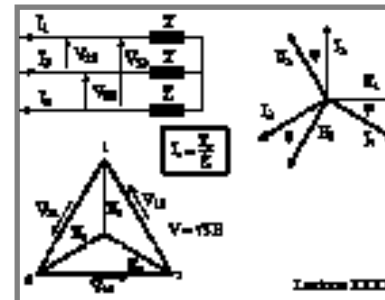
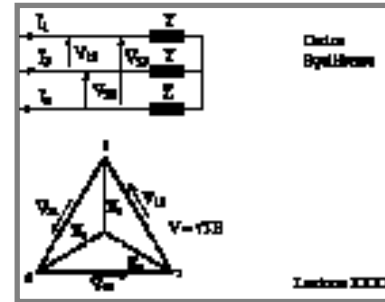
Come abbiamo visto, nel caso di carico equilibrato a stella e di terna di tensioni simmetrica, anche in assenza di conduttore neutro, il potenziale O' del centro stella del carico coincide con il potenziale del *baricentro* O del triangolo delle tensioni concatenate. Ciò vuol dire che, se si immagina il sistema di tensioni concatenate prodotto da una terna di generatori a stella che fornisce una terna simmetrica di tensioni stellate, il potenziale di O' coincide con quello del centro stella dei generatori. In tali condizioni le correnti nelle singole impedenze di carico si calcolano agevolmente come rapporto tra le tensioni stellate e le relative impedenze del carico, proprio come se il conduttore neutro fosse presente

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z}. \quad (\text{VII.5})$$

Calcoliamo, in queste condizioni, la potenza fornita da sistema dei generatori. In generale in un sistema trifase, per qualsiasi terna di tensioni concatenate, la potenza totale fornita al carico è la somma delle potenze erogate da tre generatori collegati a stella che siano in grado di fornire la assegnata terna di tensioni concatenate; tre generatori, cioè, le cui tensioni soddisfino le (VII.2). Sia ha dunque:

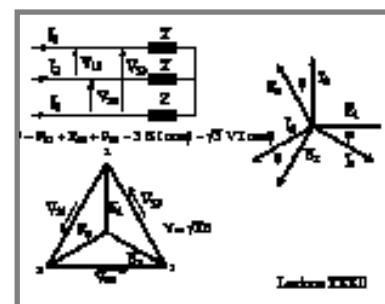
$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t). \quad (\text{VII.6})$$

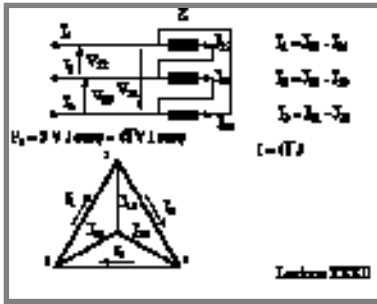
In particolare, se la terna delle V è simmetrica, scegliendo anche la terna delle E simmetrica, e se il carico è equilibrato si ottiene:



$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 3 E I \cos \varphi + \\ + E I \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right]$$

potenza istantanea media

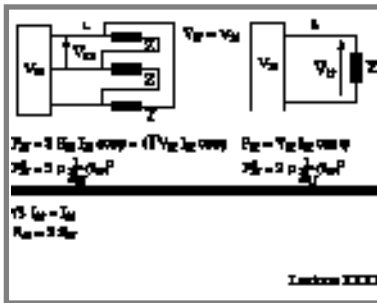




$$p(t) = EI \left[\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) + \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) + \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) \right] = 3EI \cos \varphi + EI \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \right].$$

Nella espressione della potenza istantanea si riconosce ancora una termine costante ed un termine fluttuante, come nel caso monofase. Questa volta però il termine fluttuante è identicamente nullo. Se rappresentiamo infatti i tre addendi di cui è composto in un piano dei vettori - che questa volta però ruota con velocità 2ω - vediamo subito che la spezzata che essi formano è chiusa e quindi essi sono a somma nulla. Si conclude, dunque, che, nel caso di terna delle tensioni simmetrica e terna delle correnti equilibrata, la sola potenza che si trasferisce al carico è quella media:

$$3 EI \cos \varphi = \sqrt{3} VI \cos \varphi.$$



Sulla base delle nozioni introdotte possiamo a questo punto mostrare un altro motivo di convenienza dell'uso di sistemi trifasi. Confrontiamo due sistemi di alimentazione, l'uno monofase e l'altro trifase senza neutro, che siano del tutto equivalenti per quello che concerne l'utilizzatore, cioè il carico. Supponiamo che detto carico, nel caso del sistema trifase, sia disposto a triangolo come mostrato nello schema - ad un risultato identico si giunge se lo si suppone a stella - e che sia inoltre equilibrato. La potenza fornita a tale carico è:

$$P = \sqrt{3} VI \cos \varphi.$$

Un sistema monofase che sia equivalente a quello trifase deve fornire la stessa potenza sotto la stessa tensione e con lo stesso fattore di potenza; dal confronto tra le

due potenze si deduce che la corrente in tale sistema monofase deve essere $\sqrt{3}$ volte più grande di quella nel singolo conduttore di linea del sistema trifase:

$$I_{1f} = \sqrt{3} I_{3f} \quad (\text{VII.7})$$

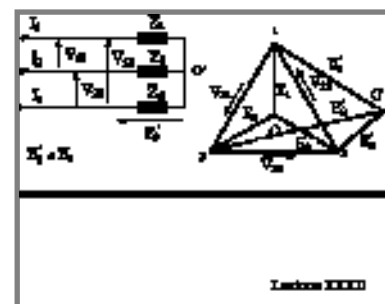
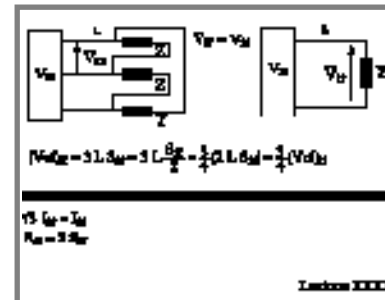
Fino ad ora abbiamo supposto che i conduttori di linea che collegano i generatori al carico siano di resistenza nulla. In effetti, come abbiamo già sottolineato, essi sono sempre realizzati con materiali a bassa resistività, e quindi tale approssimazione appare ragionevole. Ma se pensiamo ad una rete di collegamento di dimensioni ragguardevoli, in cui i generatori siano a chilometri e chilometri di distanza dagli utilizzatori, come in effetti accade in una complessa rete elettrica nazionale od internazionale, si capisce facilmente come anche una piccola resistività dei conduttori di linea può provocare notevoli potenze dissipate lungo la linea stessa. Paragoniamo le potenze dissipate dei due casi precedentemente descritti:

$$\begin{aligned} P_{3f}^d &= 3 \rho \frac{L}{S_{3f}} (I_{3f})^2, \\ P_{1f}^d &= 2 \rho \frac{L}{S_{1f}} (I_{1f})^2. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

Dove ρ è la resistività del materiale dei conduttori di linea, L la distanza del carico dai generatori ed S_{1f} ed S_{3f} le sezioni dei conduttori nei due casi esaminati. Perché le due potenze siano eguali occorre che sia $S_{3f} = S_{1f} / 2$. In termini di volume di materiale impiegato, e quindi di costo della linea, a parità di tutti gli altri fattori, ciò significa che:

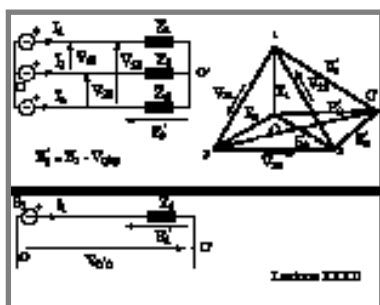
$$(Vol)_{3f} = 3LS_{3f} = \frac{3}{4}(2LS_{1f}) = \frac{3}{4}(Vol)_{1f}. \quad (\text{VII.9})$$

Con un risparmio globale di un quarto di materiale. Questo semplice confronto basterebbe a giustificare la scelta della trasmissione con sistemi trifasi; naturalmente ci sono altri aspetti del problema che non abbia-



mo esaminato in quanto non congruenti con il livello di approfondimento al quale riteniamo di doverci mantenere.

Ritornando al problema del calcolo delle correnti in un sistema trifase, come abbiamo visto, se le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica (diretta per esempio), le correnti si calcolano agevolmente come se si trattasse di tre circuiti monofasi distinti anziché di un unico sistema trifase.



Le cose si complicano leggermente se, pur restando la terna delle tensioni concatenate simmetrica, le tre impedenze di carico non sono più uguali. In tal caso anche supponendo le tre tensioni dei generatori disposti a stella simmetriche, il potenziale del centro stella dei generatori non coincide con quello del centro stella del carico; il punto O nella rappresentazione vettoriale, non coincide con il punto O' . Con $\bar{V}_{O'O}$ indicheremo il vettore rappresentativo della differenza di potenziale tra il centro stella del carico e quello dei generatori; tale vettore individua il cosiddetto *spostamento del centro stella*.

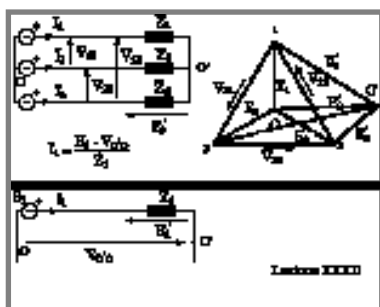
D'altra parte, dal diagramma vettoriale, si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1' &= \bar{E}_1 - \bar{V}_{O'O}, \\ \bar{E}_2' &= \bar{E}_2 - \bar{V}_{O'O}, \\ \bar{E}_3' &= \bar{E}_3 - \bar{V}_{O'O}.\end{aligned}\quad (\text{VII.10})$$

La conoscenza dello spostamento del centro stella consente, quindi, di calcolare le tensioni che insistono sui relativi carichi e, di conseguenza, le correnti:

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}_r'}{Z_r} = \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{Z_r}.\quad (\text{VII.11})$$

Il calcolo dello spostamento del centro stella, è, d'altra parte, molto agevole; basta applicare il metodo dei potenziali ai nodi, scrivendo l'equazione che esprime la



LKC ad uno dei due nodi presenti nella rete. Si ottiene:

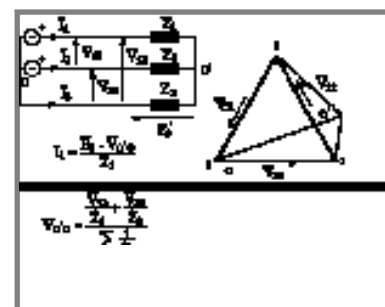
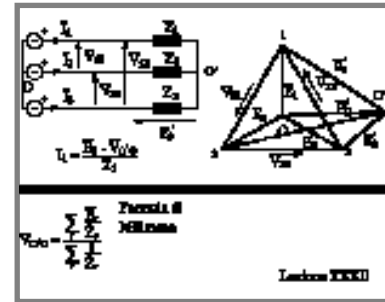
$$\sum_r \frac{\bar{E}_r - \bar{V}_{O'O}}{Z_r} = 0, \quad (\text{VII.12})$$

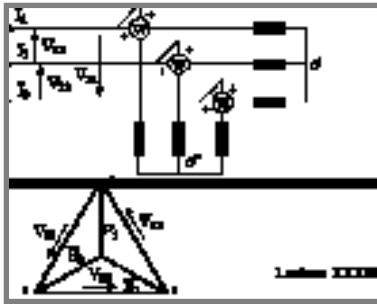
e quindi, mettendo in evidenza il vettore rappresentativo dello spostamento del centro stella:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\sum_r \frac{\bar{E}_r}{Z_r}}{\sum_r \frac{1}{Z_r}}. \quad (\text{VII.13})$$

La formula (VII.13), che può naturalmente essere generalizzata, come si è già detto, al caso di n rami in parallelo, prende il nome di formula di Millmann e consente di calcolare lo spostamento del centro stella, se sono noti i valori delle tensioni dei generatori e delle impedenze di carico.

Resta da vedere come si tratta il caso in cui anche le tensioni concatenate non sono più simmetriche. In effetti il procedimento ora esposto basato sulla determinazione dello spostamento del centro stella, non richiede necessariamente che le tensioni concatenate costituiscano una terna simmetrica; esso è applicabile anche nel caso di terna dissimmetrica. In tal caso, naturalmente, il punto O , rappresentativo del potenziale del centro stella dei generatori E (non simmetrici), non sarà più il baricentro del triangolo equilatero delle tensioni concatenate, come nel caso precedente, ma un punto qualsiasi del piano rappresentativo. Esso dipende dalla scelta fatta per la terna di tensioni stellate che si suppone producano le assegnate tensioni concatenate. Per esempio è possibile scegliere O coincidente con uno dei vertici del triangolo delle tensioni concatenate; ciò è equivalente a supporre che la terna di tensioni concatenate sia prodotta da due soli generatori, come mostrato nello schema a lato, dove si è supposto O





coincidente con il vertice 3 del triangolo delle tensioni concatenate.

In tal caso lo spostamento del centro stella è dato da:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\bar{V}_{13} + \bar{V}_{23}}{\sum_r \frac{1}{Z_r}} \quad (\text{VII.14})$$

Si osservi infine che non pone alcun problema il calcolo delle correnti nei singoli lati di un carico disposto a triangolo. In tal caso, infatti, sono note direttamente le tensioni sulle singole impedenze, sia nel caso di una terna simmetrica sia in quello di una terna dissimmetrica.

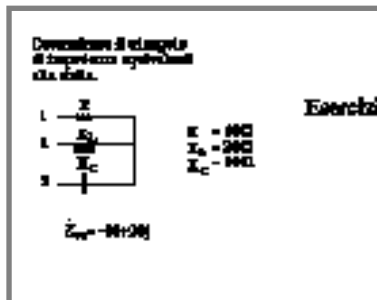
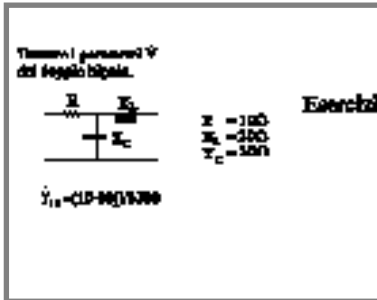
Esercizi

Per il doppio bipolo in figura si ha:

$$\dot{Y}_{11} = \frac{10 - j60}{3700}.$$

Per la verifica dell'esercizio successivo si fornisce il valore della impedenza sul lato (1,2) del triangolo equivalente:

$$\dot{Z}_{12} = -10 + j20.$$



La misura della potenza nei sistemi trifasi

Una qualche particolarità presenta l'inserzione dei wattmetri in un sistema trifase. Supponiamo inizialmente che esso sia a stella con il neutro accessibile come schematicamente mostrato in figura. Nella stessa figura è anche indicata l'inserzione di tre wattmetri: è evidente che la somma delle indicazioni dei tre wattmetri fornisce la potenza attiva assorbita dal carico trifase. Si ha infatti, indicando con W_1 , W_2 e W_3 rispettivamente le tre indicazioni dei wattmetri:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= \\ &= E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

Naturalmente, se il carico è equilibrato e la terna di tensioni simmetrica, si ha:

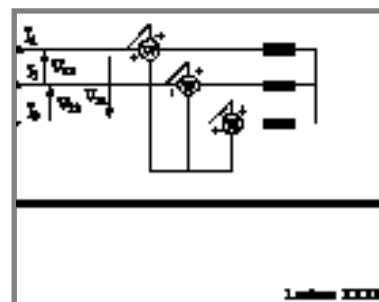
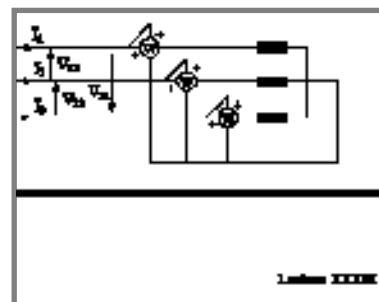
$$W_1 = W_2 = W_3 = E I \cos \varphi = \frac{P}{3}, \quad (\text{VII.16})$$

ed, in linea di principio, un solo wattmetro sarebbe sufficiente.

Supponiamo ora che il centro stella del carico non sia accessibile; sembrerebbe, a prima vista, che questo fatto introduca una difficoltà insormontabile. In effetti ciò non può essere, e non è infatti, come si comprenderà facilmente dalle seguenti considerazioni. Sia O' il centro stella (non accessibile) del carico ed O'' il punto comune delle tre voltmetriche dei wattmetri. Se indichiamo con un solo apice le tensioni stellate sul carico e con due le corrispondenti tensioni alle voltmetriche dei wattmetri, si ha:

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}. \quad (\text{VII.17})$$

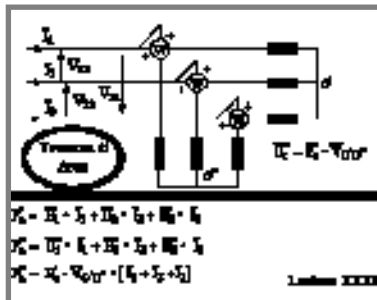
D'altra parte la somma delle indicazioni dei wattmetri è per definizione:



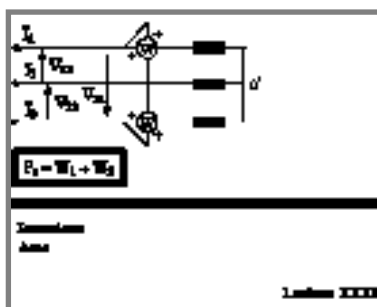
$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \cdot \bar{I}_r, \quad (\text{VII.18})$$

dove si è usato il simbolismo del prodotto scalare per rappresentare la potenza attiva. Utilizzando la (VII.17) nella VII.18 si ottiene:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r - \bar{V}_{O'O''} \sum_r \bar{I}_r = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r,$$



dato che la somma dei fasori rappresentativi delle tre correnti di linea è necessariamente nulla per l'assenza del conduttore neutro. Se ne conclude dunque - *teorema di Aron* - che la somma algebrica delle indicazioni dei tre wattmetri è indipendente dal potenziale del punto rispetto al quale si valutano le tensioni stellate ed è uguale alla potenza attiva assorbita dal carico. Si noti che non si è dovuto fare alcuna ipotesi sulle tensioni che alimentano il carico - può anche trattarsi, dunque, di un sistema dissimmetrico - né sulla natura del carico stesso - esso può anche essere non equilibrato; il risultato è del tutto generale. Come applicazione immediata di questo risultato possiamo far vedere come sia possibile utilizzare due soli wattmetri, invece di tre, per la misura della potenza attiva in un sistema trifase senza conduttore neutro. Se infatti poniamo il punto O'' , per esempio, in collegamento con il secondo conduttore di linea, l'indicazione del secondo wattmetro è identicamente nulla, perché nulla è la tensione ai suoi morsetti voltmetrici; ciò rende inutile la presenza del terzo wattmetro. Si arriva dunque ad una inserzione del tipo descritto in figura, che prende il nome, appunto, di inserzione Aron. La somma algebrica delle indicazioni - esse, infatti, possono anche essere negative - dei due wattmetri fornisce in ogni caso la potenza attiva assorbita dal carico.



Va notato infine che nel caso in cui il sistema trifase sia simmetrico ed equilibrato, e solo in questo caso, la differenza tra le due misure dei wattmetri nell'inserzione Aron è proporzionale alla potenza reattiva. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 &= VI \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 2 V I \sin \frac{\pi}{6} \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Dove Q è appunto la potenza reattiva totale assorbita dal carico:

$$Q = 3 E I \sin \varphi = \sqrt{3} V I \sin \varphi. \quad (\text{VII.20})$$

Nel caso più generale la potenza reattiva è data da:

$$Q = \sum_r E_r I_r \sin \varphi_r. \quad (\text{VII.21})$$

Si noti che in virtù del teorema di conservazione delle potenze complesse, anche nel caso di sistemi trifasi, la potenza attiva e reattiva totale assorbita dal parallelo di due carichi è pari alla somma delle rispettive potenze assorbite dai due carichi separatamente.

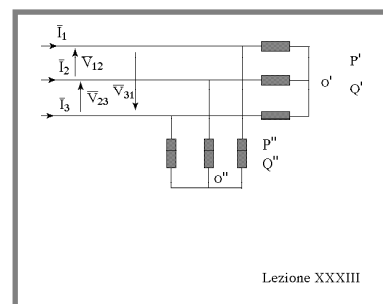
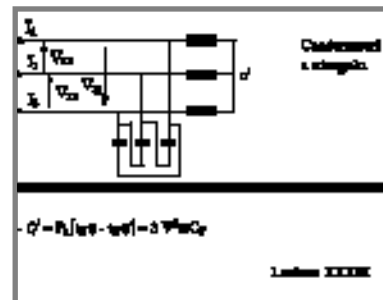
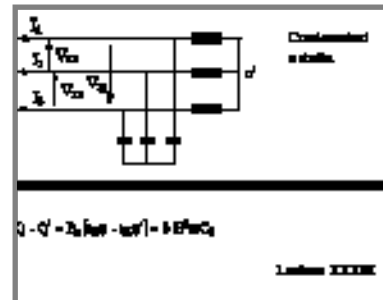
Questa considerazione consente di affrontare il problema del rifasamento di un carico trifase allo stesso modo adottato per i carichi monofasi. Nel caso dei sistemi trifasi è possibile però una duplice scelta: il banco di condensatori di rifasamento può essere collegato a stella o a triangolo. Per la stella si ha:

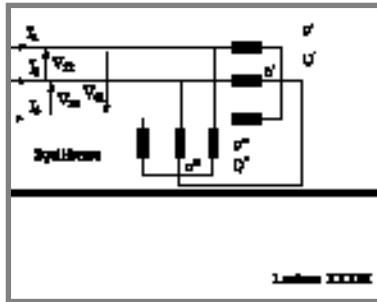
$$Q - Q' = P_a (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 3 E^2 \omega C_s, \quad (\text{VII.21})$$

e per il triangolo

$$Q - Q' = P_a (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 3 V^2 \omega C_T. \quad (\text{VII.22})$$

A parità di potenza reattiva, la capacità necessaria in un collegamento a triangolo è minore di quella necessaria per un collegamento a stella. Naturalmente, però, nel secondo caso i condensatori debbono essere progettati

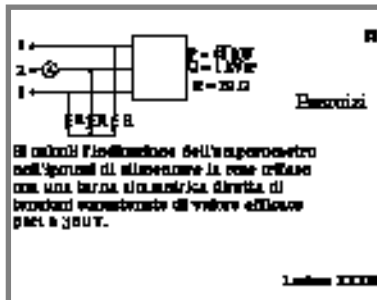




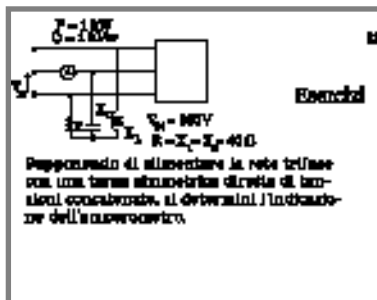
per sostenere una tensione minore.

Si noti infine che mentre un carico squilibrato posto in parallelo ad uno equilibrato non modifica il potenziale del centro stella del carico equilibrato, se tra i due centri stella dei carichi si dispone un collegamento, allora anche il carico equilibrato non potrà più essere trattato come tale.

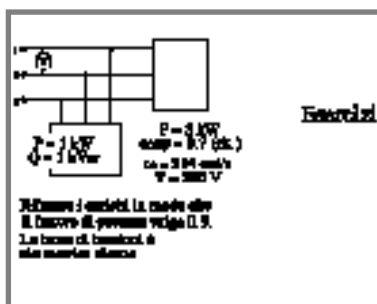
Esercizi



Nel primo problema si richiede di calcolare l'indicazione dell'amperometro a valor efficace posto sulla linea 2 del sistema trifase assegnato, costituito da due carichi equilibrati in parallelo.



Nel secondo esercizio viene proposto un problema analogo; in questo caso, però, uno dei carichi è squilibrato.



Nell'ultimo problema, infine, si richiede di rifasare a $\cos\varphi=0,9$ un sistema di due carichi in parallelo di cui sono assegnate le rispettive potenze.

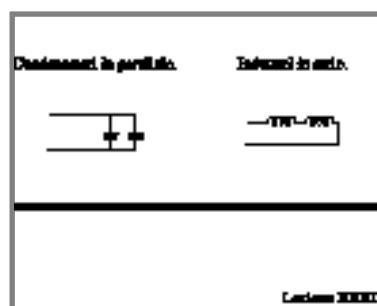
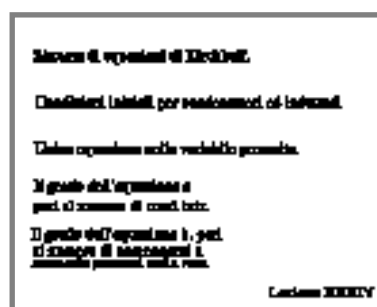
Dinamica dei circuiti di ordine superiore

Nei capitoli precedenti abbiamo già esaminato, partendo da alcuni classici esempi, gli aspetti salienti della soluzione di una rete elettrica in regime dinamico qualsiasi; proviamo qui a riepilogarli.

Sia data una rete con l lati ed n nodi, alimentata da generatori di tensione e corrente con evoluzione temporale qualsiasi - ma non controllati - composta da bipoli resistivi, induttivi e capacitivi le cui caratteristiche non variano nel tempo - si dirà che la rete è *tempo-invariante*. Desiderando conoscere l'evoluzione temporale delle grandezze elettriche - tensioni e correnti - dei singoli bipoli, a partire da un determinato istante iniziale t_0 - istante in cui è noto lo stato della rete, e cioè le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori - si procede alla maniera seguente:

Utilizzando le leggi di Kirchhoff si scrivono $n-1$ equazioni ai nodi ed $l-(n-1)$ equazioni alle maglie; dato che le caratteristiche dei bipoli, in generale, esprimono legami differenziali tra tensioni e correnti, il sistema che ne deriva sarà di l equazioni differenziali lineari, se i bipoli presenti sono appunto lineari.

Mediante successive operazioni di sostituzione, ed eventuale differenziazione, si ricava dal sistema di partenza una unica equazione differenziale in una delle



incognite in precedenza scelta; il grado dell'equazione sarà pari al numero di bipoli "a memoria" - induttori e condensatori - presenti nella rete. Quest'ultima affermazione andrebbe dimostrata; noi la consideriamo tale sulla base di una semplice considerazione di carattere fisico: se ciò non fosse vero il numero di condizioni iniziali assegnate non sarebbe adeguato alla soluzione del problema. Naturalmente due condensatori in parallelo, o due induttori in serie, vanno contati come un unico componente; del resto, nei due casi, la condizione iniziale è unica!

La soluzione dell'equazione così determinata si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea associata, una soluzione particolare della equazione completa. L'integrale generale dell'omogenea associata, se le radici sono tutte distinte, sarà del tipo:

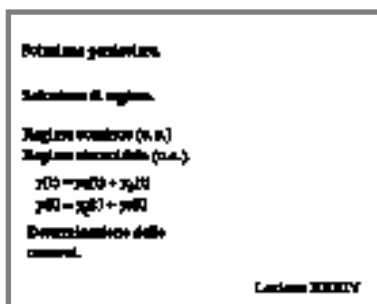
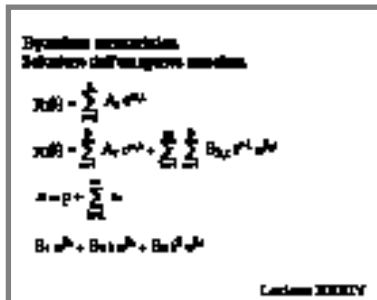
$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t} \quad (\text{VIII.1})$$

dove le α_r sono le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale; tali radici possono essere complesse, ed in tal caso si avranno fenomeni oscillatori. Nel caso in cui si hanno radici coincidenti, la soluzione dell'omogenea ha una espressione diversa. Ad esempio se la radice k -esima ha molteplicità g_k , l'integrale dell'omogenea è del tipo:

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^p A_r e^{\alpha_r t} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{g_k} B_{k,r} t^{r-1} e^{\beta_k t}. \quad (\text{VIII.2})$$

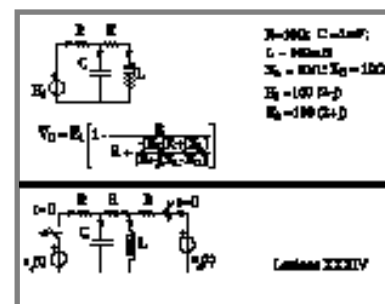
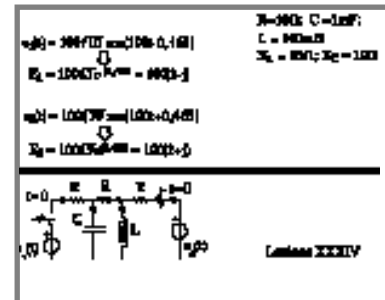
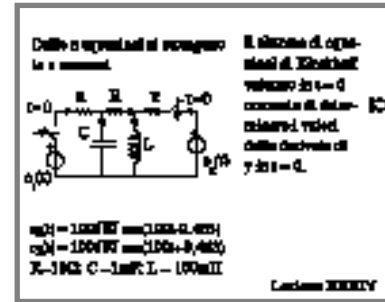
In ogni caso la parte reale delle radici non potrà mai essere positiva, in quanto le soluzioni non potranno mai crescere esponenzialmente nel tempo; al limite, in reti prive di resistenze, le radici potranno essere puramente immaginarie, dando luogo ad oscillazioni permanenti.

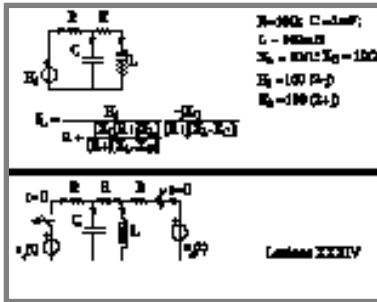
Per quanto riguarda la soluzione particolare della completa, abbiamo già visto come sia possibile determinar-



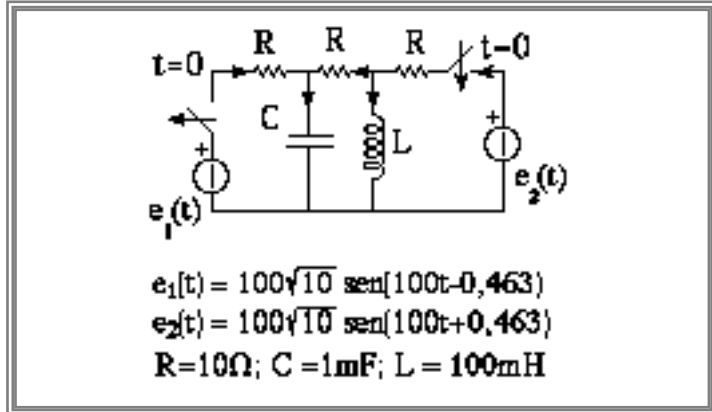
la quale soluzione a regime nei due casi in cui i generatori sono tutti costanti - regime continuo - o di tipo sinusoidale, tutti con la stessa frequenza - regime sinusoidale, correntemente detto anche *regime alternativo*. Naturalmente il procedimento può essere esteso a regimi periodici di altro tipo: basta assumere che la soluzione di regime abbia lo stesso andamento periodico dei generatori, inserire tale soluzione nella equazione differenziale e, imponendo che essa sia soddisfatta, ricavare i parametri da cui dipende la soluzione stessa. La soluzione generale così ottenuta, somma di quella dell'omogenea e della soluzione particolare, dipende dalle costanti A_r presenti nella soluzione della omogenea. A questo punto entrano in gioco le condizioni iniziali sulle grandezze di stato che, essendo proprio in numero pari al grado dell'equazione differenziale risultante, forniscono un adeguato numero di equazioni per determinare le costanti A_r . Naturalmente va ricordato che, non essendo in generale le condizioni iniziali fornite direttamente come valori della grandezza che si è scelta come incognita e delle sue derivate nell'istante iniziale, ma come valori delle correnti negli induttori e tensioni sui condensatori, occorrerà da questi ultimi ricavare quelli relativi alla grandezza prescelta. Un procedimento generale che consente di effettuare questo passaggio, consiste nel valutare le equazioni, scritte per imporre il rispetto delle leggi di Kirchhoff, all'istante iniziale: in tali equazioni compaiono, come termini noti, sia le tensioni e correnti dei generatori che le correnti negli induttori e le tensioni sui condensatori; da esse sarà possibile ricavare il valore di ogni altra grandezza all'istante iniziale, come abbiamo già fatto vedere nei casi sviluppati.

Questo in sintesi il procedimento generale per risolvere una rete lineare tempo-invariante in regime qualsiasi. Un esempio chiarirà meglio i vari passi della procedura. Ci limiteremo a descriverli riducendo al minimo i commenti.

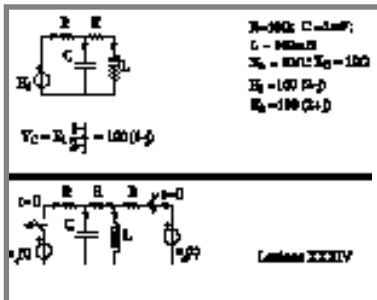




Consideriamo la rete mostrata in figura; essa, prima dell'apertura dell'interruttore in serie al generatore e_1 e della chiusura di quello in serie ad e_2 , funziona in regime stazionario. All'istante $t=0$ cambia la topologia e quindi il funzionamento della rete.



Per determinare le condizioni iniziali occorre risolvere la rete a regime per $t < 0$. Utilizzando il metodo fasoriale si ha immediatamente:



$$\bar{V}_C = \bar{E}_1 \left[1 - \frac{R}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \right], \quad (\text{VIII.3})$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{R + \frac{-jX_C(R + jX_L)}{R + j(X_L - X_C)}} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)}.$$

Dove:

$$\bar{E}_1 = 100\sqrt{5}e^{-j0,463} = 100(2 - j), \quad (\text{VIII.4})$$

$$\bar{E}_2 = 100\sqrt{5}e^{j0,463} = 100(2 + j),$$

sono i fasori rappresentativi delle tensioni dei generatori.

Introducendo i valori numerici:

$$\bar{V}_c = \bar{E}_1 \frac{1-j}{2-j} = 100 (1-j), \quad (\text{VIII.5})$$

$$\bar{I}_L = \frac{j \bar{E}_1}{10} \frac{1}{2-j} = -j 10.$$

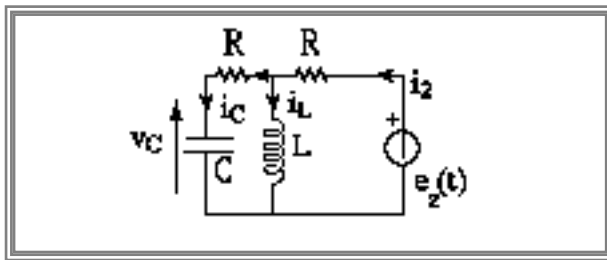
Ritornando al dominio temporale:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= 200 \sin(100t - \pi/4), \\ i_L(t) &= -10\sqrt{2} \sin(100t + \pi/2). \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

Le condizioni iniziali sono, dunque:

$$\begin{aligned} v_c(0) &= 200 \sin(-\pi/4) = -100\sqrt{2}, \\ i_L(0) &= -10\sqrt{2} \sin(\pi/2) = -10\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.7})$$

Per determinare l'evoluzione per $t > 0$ applichiamo la LCK e la LTK al circuito nella sua configurazione finale:



$$e_2 = R i_2 + L \frac{di_L}{dt},$$

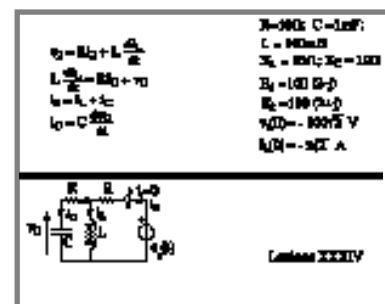
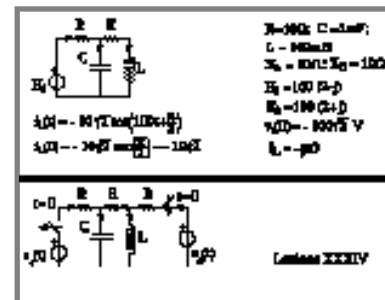
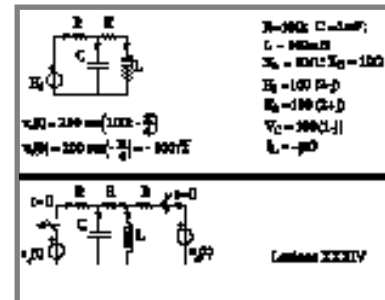
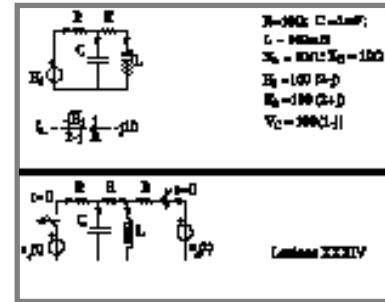
$$L \frac{di_L}{dt} = R i_c + v_c,$$

$$i_2 = i_L + i_c,$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}.$$

(VIII.8)

Con alcuni semplici passaggi si ricava l'equazione risol-



$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt}$$

$$\alpha^2 + 100\alpha + 5 \cdot 10^3 = 0$$

$$\Delta = -10^4$$

$R = 300 \Omega$; $C = 1 \mu F$;
 $L = 60 mH$
 $X_L = 3.6 \Omega$; $X_C = 159 \Omega$
 $B_1 = (10) \angle -\phi$
 $B_2 = (100) \angle -\phi$
 $v_0(0) = -100\sqrt{2} V$
 $i_0(0) = -2A$

Esempio XXXIV

vente nella tensione sul condensatore:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt} \quad (VIII.9)$$

La VIII.9 è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea (si noti che, come previsto, l'ordine dell'equazione è uguale al numero di bipoli a memoria presenti nella rete).

Il polinomio caratteristico associato alla (VIII.9) è:

$$\alpha^2 + 100\alpha + 5 \cdot 10^3 = 0, \quad (VIII.10)$$

con radici:

$$\alpha_r + j\beta = -50 \pm j50. \quad (VIII.11)$$

La soluzione dell'omogenea associata è del tipo:

$$v_{c0}(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma). \quad (VIII.12)$$

Resta da calcolare la soluzione di regime che si trova facilmente con il metodo fasoriale:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{R + j(X_L - X_C)} \frac{jX_L(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} \quad (VIII.13)$$

Inserendo i valori:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{2 + j} = 100, \quad (VIII.14)$$

e nel dominio del tempo:

$$v_{cp}(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t). \quad (VIII.15)$$

L'integrale generale della completa è dunque:

$$v_c(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma) + 100\sqrt{2} \sin(100t). \quad (VIII.16)$$

Per determinare le costanti A e γ occorre sfruttare le

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2LC} v_c = \frac{1}{2RC} \frac{de_2}{dt}$$

$$\alpha_r + j\beta = -50 \pm j50$$

$$v_{c0}(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma)$$

$R = 300 \Omega$; $C = 1 \mu F$;
 $L = 60 mH$
 $X_L = 3.6 \Omega$; $X_C = 159 \Omega$
 $B_1 = (10) \angle -\phi$
 $B_2 = (100) \angle -\phi$
 $v_0(0) = -100\sqrt{2} V$
 $i_0(0) = -2A$

Esempio XXXIV

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{R + j(X_L - X_C)} \frac{jX_L(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}$$

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}_2}{2 + j} = 100$$

$$v_{cp}(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t)$$

$R = 300 \Omega$; $C = 1 \mu F$;
 $L = 60 mH$
 $X_L = 3.6 \Omega$; $X_C = 159 \Omega$
 $B_1 = (10) \angle -\phi$
 $B_2 = (100) \angle -\phi$
 $v_0(0) = -100\sqrt{2} V$
 $i_0(0) = -2A$

Esempio XXXIV

$$v_c(t) = A e^{-50t} \sin(50t + \gamma) + 100\sqrt{2} \sin(100t)$$

$$i_0(0) = -2A$$

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = 17.96 \cdot 10^3$$

$R = 300 \Omega$; $C = 1 \mu F$;
 $L = 60 mH$
 $X_L = 3.6 \Omega$; $X_C = 159 \Omega$
 $B_1 = (10) \angle -\phi$
 $B_2 = (100) \angle -\phi$
 $v_0(0) = -100\sqrt{2} V$
 $i_0(0) = -2A$

Esempio XXXIV

condizioni iniziali. La prima è data direttamente sulla tensione del condensatore e fornisce:

$$v_c(0) = A \sin \gamma = -100 \sqrt{2} . \quad (\text{VIII.17})$$

Per la seconda basta scrivere la LKC e la LKT all'istante iniziale; sottraendo infatti la seconda delle (VIII.8), valutata all'istante zero, dalla prima, si ottiene una relazione da cui è facile ricavare il valore della derivata della tensione sul condensatore all'istante iniziale:

$$i_c(0) = C \left[\frac{dv_c}{dt} \right]_{t=0} = \frac{e_2(0) - v_c(0) - R i_L(0)}{2 R} . \quad (\text{VII.41})$$

Dalla (VIII.17) e dalla (VIII.18) si ricava facilmente:

$$A \approx -161 \text{ V}; \quad \gamma = 1.1 \text{ rad} . \quad (\text{VII.42})$$

L'andamento della soluzione è mostrato nell'ultima figura; dopo alcune oscillazioni transitorie, la tensione sul condensatore si assesta al suo andamento sinusoidale di regime.

Esercizi

Le potenze totali assorbite dal carico trifase del primo esercizio sono:

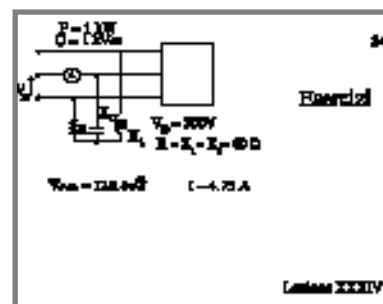
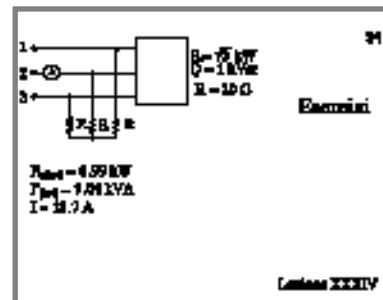
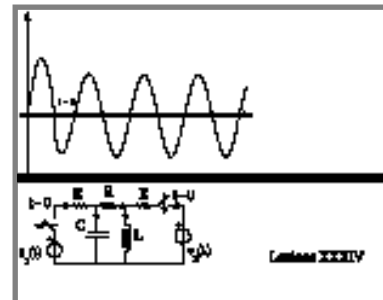
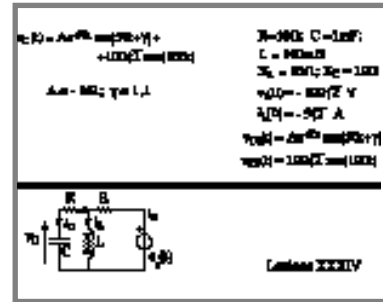
$$\begin{aligned} P_{a(\text{tot})} &= 8,99 \text{ kW}, \\ P_{(\text{tot})} &= 9,04 \text{ kW}, \end{aligned}$$

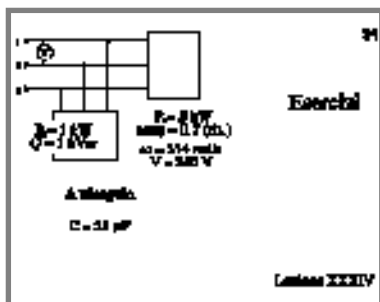
mentre l'indicazione dell'amperometro è:

$$I = 13,7 \text{ A}.$$

Per il trifase di cui allo schema successivo, l'indicazione dell'amperometro è:

$$I \approx 4,73 \text{ A} .$$



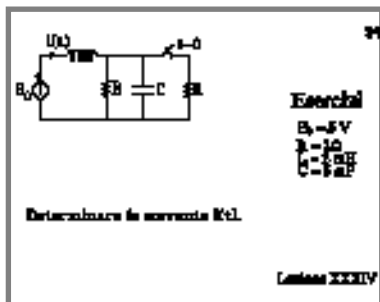


Lo spostamento del centro stella è risultato pari a:

$$\bar{V}_{O'O} = 126,8 e^{j \frac{\pi}{6}}.$$

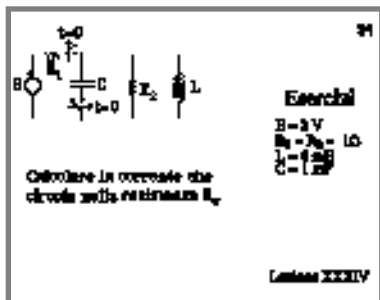
La capacità necessaria per rifasare il carico del terzo esercizio è pari a:

$$C = 23 \mu F.$$



Si è supposto di disporre i condensatori di rifasamento a triangolo.

Nei due ultimi problemi proposti si richiede di determinare l'evoluzione dei circuiti durante un transitorio. Nel primo caso il forzamento è in continua e la chiusura di un interruttore aggiunge, in parallelo al condensatore, un nuovo resistore.



Nel secondo caso, due interruttori agiscono sincronamente, l'uno in apertura e l'altro in chiusura. Un condensatore viene così aggiunto al circuito.