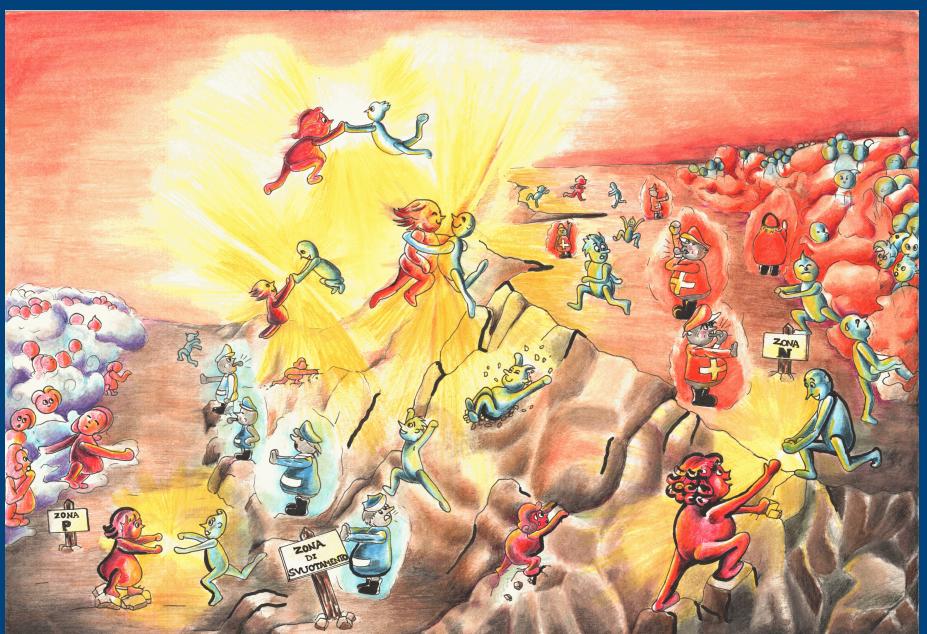

Università di Udine

Dipartimento Politecnico di Ingegneria e Architettura



Appunti di Elettrotecnica

Fabrizio Bellina

In copertina: A. Bellina: LED, incontri romantici in scala nanometrica

16 gennaio 2017

Avvertenze

Queste dispense sono state scritte ad integrazione del materiale didattico utilizzato nel corso di Elettrotecnica per allievi ingegneri Elettronici e Gestionali dell'Informazione, Corso di Laurea Triennale. Esse non sostituiscono in alcun caso i testi ufficiali indicati dal docente, né gli appunti presi dagli studenti durante le lezioni.

Il contenuto di queste dispense è allo stato di bozza ed alcune sue parti potrebbero essere mancanti o non adeguatamente corredate di disegni e testo. Per questo esso è soggetto a continua revisione. Ogni segnalazione e suggerimento sono pertanto benvenuti¹.

L'uso di questo materiale didattico è riservato gratuitamente agli studenti dell'Università di Udine. È vietato qualunque uso diverso del presente materiale. In particolare sono vietati l'uso commerciale e la riproduzione e la diffusione a terzi anche di parti del presente materiale senza autorizzazione.

Si ringraziano gli studenti Sara Morgante Piano e Stefano Alloi per la collaborazione nella stesura del testo sulla base degli appunti presi a lezione.

¹ Sono gradite segnalazioni all'indirizzo di posta elettronica fabrizio.bellina@uniud.it

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La misura delle grandezze fisiche	1
2	Natura e classificazione delle variabili fisiche	3
2.1	Associazione delle variabili ai domini geometrici e temporali	3
2.2	Variabili di configurazione	4
2.3	Variabili di sorgente	5
2.4	Variabili energetiche	5
2.5	Leggi costitutive	5
3	Le cariche e le correnti elettriche	7
3.1	Richiamo sulla legge di Coulomb	7
3.2	La densità di carica elettrica	8
3.3	Cariche fisse e cariche mobili	10
3.4	La densità di corrente elettrica	11
3.5	La corrente elettrica	12
3.5.1	Associazione della densità di corrente a elementi geometrici	14
3.6	La legge di continuità della carica elettrica	15
3.6.1	Applicazioni della legge di continuità della carica elettrica	16
3.7	L'amperometro ideale	17
4	Le forze agenti sui portatori delle cariche elettriche	19
4.1	Le forze e le forze elettriche specifiche	19
4.2	Il lavoro delle forze elettriche e la tensione elettrica	20
4.2.1	Convenzioni per la tensione	21
4.2.2	Associazione della forza elettrica a elementi geometrici	21
4.3	Forze elettriche e potenziale scalare	22
4.3.1	Il potenziale coulombiano di una carica puntiforme	23
4.4	La tensione elettrica in presenza di forze elettriche conservative e non conservative	24
4.5	Forze elettriche e potenza svolta	24
4.5.1	Potenza specifica	24
4.5.2	Potenza in un tubo di flusso della densità di corrente	25
4.6	Il voltmetro ideale	28

5 Fenomeni resistivi	31
5.1 Esperimento introduttivo	31
5.2 Equazione costitutiva del campo di corrente	34
5.3 I resistori	35
5.3.1 Resistore di forma generica	35
5.3.2 Resistore filiforme	37
5.3.3 Resistore cilindrico	38
5.3.4 Resistore sferico	39
5.4 Aspetti energetici	43
5.5 Rifrazione delle linee di corrente	44
5.6 Equazione di Laplace per il campo di corrente stazionario	46
5.6.1 Condizioni al contorno per l'equazione di Laplace per il campo di corrente	47
6 Generatori elettrici	49
6.1 Necessità dell'azione di forze non conservative	49
6.1.1 Forze specifiche generatrici elettriche	50
6.1.2 Forze specifiche generatrici non elettriche	50
6.2 Legge costitutiva del campo di corrente in presenza di forze specifiche generatrici	51
6.3 La forza elettromotrice	51
6.4 Il generatore di forza elettromotrice	52
6.4.1 Funzionamento a vuoto	52
6.4.2 Funzionamento a carico	53
6.4.3 Aspetti energetici	54
6.4.4 Misure di tensione nel generatore	54
6.5 Generatori di forza elettromotrice di tipo non elettrico	56
7 Fenomeni dielettrici	59
7.1 Campo e potenziale prodotti da una distribuzione nota di carica in un mezzo uniforme illimitato	59
7.1.1 Calcolo del campo e potenziale nei punti della regione delle cariche . .	60
7.2 Corpi conduttori in regime elettrostatico	62
7.2.1 Induzione elettrica nei corpi conduttori	62
7.2.2 Esperienza di Faraday	63
7.2.3 Vettore induzione elettrica	64
7.3 Equazione costitutiva nei dielettrici	68
7.4 Campo elettrico e induzione elettrica sulla superficie dei corpi conduttori	68
7.4.1 Il principio di metallizzazione delle superfici equipotenziali	70
7.5 Comportamento di D , E_c e V sulle superfici di discontinuità materiali	71
7.6 Equazioni di Poisson e di Laplace per il campo elettrostatico	73
7.6.1 Soluzione dell'equazione di Poisson e Laplace per il campo elettrostatico	74
7.7 Dielettrici resistivi: densità transitoria di carica nei corpi conduttori	79
7.8 Momento elettrico e dipoli elettrici	79
7.8.1 Momento elettrico	80

7.8.2	Dipolo elettrico generato da due cariche puntiformi	80
7.8.3	Proprietà asintotica dei dipoli elettrici	82
7.8.4	Fenomeni di polarizzazione espressi mediante la teoria dei dipoli elettrici	83
7.8.5	Il legame tra campo elettrostatico e induzione elettrica in presenza di materiali polarizzati	85
8	Le capacità tra i conduttori	89
8.1	Il condensatore	89
8.1.1	Capacità tra corpi conduttori di geometria notevole	90
8.1.2	Condensatore cilindrico	92
8.1.3	Condensatore sferico	93
8.1.4	Linea bifilare	94
8.1.5	Condensatore particolare	95
8.1.6	Condensatore con dielettrico non omogeneo	96
8.2	Equazione caratteristica del condensatore	97
8.3	Capacità parziali di un insieme di corpi conduttori	98
8.3.1	Definizione di capacità parziali	98
8.3.2	Metodo di misura delle capacità parziali	99
8.3.3	Rappresentazione circuitale equivalente	100
8.4	Lavoro ed energia del campo elettro(quasi)statico	102
8.5	Forze sui condensatori	104
9	Fenomeni magnetici	107
9.1	Induzione magnetica	107
9.1.1	Descrizione dell'esperimento	107
9.1.2	Evidenze sperimentali	108
9.1.3	La legge di Lenz	110
9.1.4	Orientazione delle spire, definizione e misura e dell'induzione magnetica	112
9.1.5	Misura dell'induzione	114
9.2	Il potenziale vettore magnetico	117
9.3	La legge di Faraday-Neumann	118
9.3.1	La seconda equazione di Maxwell	121
9.4	Il vettore campo magnetico	121
9.4.1	Descrizione dell'esperimento ed evidenze sperimentali	121
9.4.2	La prima equazione di Maxwell	126
9.5	Lavoro di magnetizzazione ed energia magnetica	129
9.5.1	Lavoro di magnetizzazione	129
9.5.2	Lavoro di magnetizzazione come contributo delle varie regioni dello spazio	132
9.5.3	Energia magnetica	133
9.5.4	Lavoro ed energia nel caso lineare	134
9.6	Le forze dovute al campo magnetico	137
9.6.1	Forze sulle linee di corrente in un campo magnetico	137
9.7	Equazione costitutiva del campo magnetico	141
9.8	Momento magnetico e dipoli magnetici	142

9.8.1	Momento magnetico	142
9.8.2	Dipolo magnetico generato da una spira	142
9.8.3	Proprietà asintotica dei dipoli magnetici	145
9.8.4	Fenomeni di magnetizzazione espressi mediante la teoria dei dipoli magnetici	145
9.8.5	Il legame tra induzione magnetica e campo magnetico in presenza di materiali magnetizzati	148
9.9	Corpi conduttori in un campo magnetico variabile	150
9.9.1	Un modello semplificato	150
9.9.2	L'equazione di diffusione	153
9.9.3	La diffusione del campo magnetico	154
9.9.4	L'effetto pelle	160
A	Elementi di topologia e geometria	163
A.1	Definizioni	163
A.2	Costruzione dei domini ed orientazione interna	163
A.3	Costruzione dei domini duali	164
A.3.1	Domini duali in uno spazio tridimensionale	164
A.3.2	Domini duali in uno spazio bidimensionale	167
A.3.3	Domini duali in uno spazio monodimensionale	168
A.4	Orientazione esterna dei domini	168
A.5	Suddivisione dei domini	172
B	Operatori differenziali vettoriali	175
B.1	Gradiente di una funzione	175
B.2	Rotore di un vettore	177
B.3	Divergenza di un vettore	179
B.4	Campi vettoriali conservativi e il potenziale scalare	181
B.5	Campi vettoriali conservativi del flusso e il potenziale vettore	184
B.5.1	Tubo di flusso di un vettore	187
B.6	Ortogonalità degli operatori differenziali vettoriali	188
C	Algebra ed analisi vettoriale	191
C.1	Algebra vettoriale	191
C.2	Operatori rotore, gradiente e divergenza	191
C.3	Operatore di Laplace	192
C.4	Derivate rispetto ad una variabile	192
C.5	Integrali di volume, superficie e linea	193
C.6	Derivate di integrali aventi il dominio dipendente dal tempo	193

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La misura delle grandezze fisiche

In fisica e nelle discipline ingegneristiche, tutte le grandezze di cui si parla sono *misurabili*, ovvero sono esprimibili mediante uno o più numeri, ottenuti mediante una *misura*.

Il procedimento di misura consiste nel confrontare la grandezza in esame con un campione di riferimento mediante uno strumento, ottenendo un numero. Ad esempio:

- La lunghezza di un dato oggetto si ottiene confrontando l'oggetto da misurare con una riga graduata che fa da riferimento. Il risultato della misura è dato dal numero di volte in cui la lunghezza di riferimento, ovvero l'*unità di misura*, è contenuta nella grandezza da misurare.
- La massa di un dato corpo si ottiene confrontando il corpo in esame con una massa nota, ottenuta combinando campioni di masse mediante una bilancia.
- L'estensione di un intervallo di tempo si ottiene contando quante volte un determinato fenomeno periodico (ad es. il numero di oscillazioni di un pendolo) si ripete nell'intervallo di tempo da misurare.
- La portata media di un condotto d'acqua si può ottenere misurando la massa che ha riempito un contenitore alimentato dal condotto durante un assegnato intervallo di tempo, e dividendo tale massa per la durata dell'intervallo di tempo.

Fondamentale per l'esecuzione della misura è quindi lo strumento di misura che non solo fornisce il numero voluto, ovvero la misura, ma può anche definire un esperimento riproducibile che in ultima analisi definisce anche la grandezza fisica. Ad esempio, in fisica dinamica la forza può essere definita come la grandezza che provoca un allungamento o compressione di una molla. Mediante una scala graduata che misura l'allungamento è possibile poi confrontare tra loro varie forze e, dopo averne assunta una come forza unitaria, esprimere le varie forze mediante un numero e la sua unità di misura.

Capitolo 2

Natura e classificazione delle variabili fisiche

2.1 Associazione delle variabili ai domini geometrici e temporali

Le variabili fisiche usate per descrivere i fenomeni fisici possono essere classificate in vari modi utili a comprendere le relazioni matematiche che le legano. Iniziamo con l'esaminare l'associazione grandezza - dominio spaziale di definizione. Vi sono innanzitutto delle grandezze definite in regioni dello spazio aventi dimensioni finite, ad esempio:

- la massa m di un certo volume di materiale τ ,
- la forza risultante \mathbf{F} agente su una certa superficie S ,
- la carica elettrica q di cui un oggetto τ è dotato.

Vi sono poi grandezze definite in un punto dello spazio, quali ad esempio il potenziale elettrostatico e la temperatura. Tali grandezze vengono denominate *grandezze globali* e, per la loro definizione è sempre necessario specificare la regione in cui sono definite. Tali regioni possono essere anche di misura nulla, come nel caso del punto.

Altre grandezze invece sono ottenute come limite di un rapporto tra una grandezza globale e la misura del dominio su cui tale grandezza è definita. Queste hanno il significato di *densità media* nel dominio considerato. Dalla densità media si può passare alla densità in un punto P_0 considerando una successione di domini τ decrescenti e tendenti al punto in esame. Ad esempio, la densità di massa ϱ_m viene definita come $\varrho(P_0) = \lim_{\tau \rightarrow P_0} m(\tau)/\tau$.

Un discorso simile può essere fatto per quanto riguarda il tempo. Alcune grandezze sono associate agli istanti temporali, come ad esempio la temperatura ad un dato istante o la posizione di una particella, espressa mediante il *raggio vettore* $\mathbf{r}(t)$, vettore che unisce l'origine delle coordinate con il punto dove si trova la particella nell'istante dato t . Altre grandezze sono associate ad intervalli di tempo, come ad esempio lo spostamento, espresso come un vettore $\mathbf{u}[t_1, t_2] = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$, pari alla differenza dei due raggi vettore corrispondenti alla posizione di una particella negli istanti t_1 e t_2 (fig. 2.1).

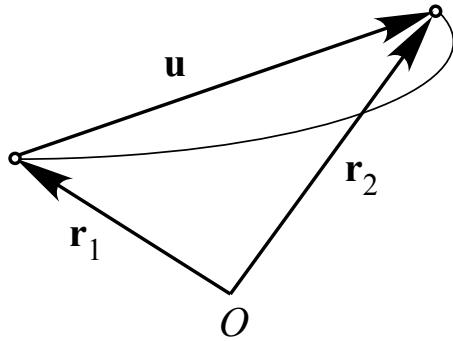


Figura 2.1: Particella in moto: nei due istanti t_1 e t_2 la sua posizione è descritta dai raggi vettore \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 applicati nell'origine O . Il vettore spostamento \mathbf{u} associato all'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ unisce i due raggi vettore.

Le grandezze sopra descritte sono *globali nel tempo*. Altre grandezze sono infine definite come limite del rapporto tra una grandezza associata ad un intervallo di tempo, e l'ampiezza dell'intervallo stesso. Tali grandezze sono definite *tassi*. Un esempio è il vettore *velocità*, definita come $\mathbf{v}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}[t_0, t] / (t - t_0)$.

Le grandezze fisiche possono essere suddivise in tre grandi categorie:

- le *variabili di configurazione*;
- le *variabili di sorgente*;
- le *variabili energetiche*.

2.2 Variabili di configurazione

Le variabili di configurazione sono quelle variabili che descrivono un fenomeno e tutte le variabili che da esse si possono ricavare mediante sole operazioni matematiche (combinazione lineare, derivazione, integrazione nello spazio e nel tempo), senza l'intervento di parametri che descrivano proprietà materiali.

Ad esempio, sono variabili di configurazione:

- nella dinamica dei corpi puntiformi: il raggio vettore, che descrive la posizione di una particella, la velocità, che è la derivata del raggio vettore, l'accelerazione;
- in elettromagnetismo: la tensione elettrica, il potenziale scalare elettrico, il vettore campo elettrostatico, che ne è il gradiente, il vettore induzione magnetica e il potenziale vettore magnetico;
- in termodinamica: la temperatura

Le variabili di configurazione sono sempre associate ad entità geometriche e temporali dotate di *orientazione interna* (sez. A.2, p. 163).

2.3 Variabili di sorgente

Le variabili di sorgente sono quelle variabili che descrivono le sorgenti, o cause di un fenomeno e tutte le variabili che da esse si possono ricavare mediante sole operazioni matematiche (combinazione lineare, derivazione, integrazione nello spazio e nel tempo), senza l'intervento di parametri che descrivano proprietà materiali.

Ad esempio, sono variabili di sorgente:

- nella dinamica dei corpi puntiformi: la forza, che provoca l'accelerazione di un corpo mobile, il momento di una forza;
- in elettromagnetismo: la carica elettrica e la sua densità, la corrente elettrica, lo spostamento elettrico, il vettore campo magnetico e il potenziale scalare magnetico;
- in termodinamica: il flusso termico.

Le variabili di sorgente sono sempre associate ad entità geometriche e temporali dotate di *orientazione esterna* (sez. A.4, p. 168).

2.4 Variabili energetiche

Le variabili energetiche sono ottenute dal prodotto di una variabile di sorgente e una di configurazione e tutte le variabili che da esse si possono ricavare mediante sole operazioni matematiche (combinazione lineare, derivazione, integrazione nello spazio e nel tempo), senza l'intervento di parametri che descrivano proprietà materiali.

Ad esempio, sono variabili energetiche:

- nella dinamica dei corpi puntiformi: l'energia potenziale, il lavoro, la potenza che ne è la derivata temporale.
- in elettromagnetismo: l'energia elettrostatica e magnetostatica, il vettore di Poynting
- in termodinamica: l'energia interna e il calore.

2.5 Leggi costitutive

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato variabili sempre escludendo la presenza di parametri che esprimono le proprietà materiali del mezzo in cui un determinato fenomeno si svolge.

Esistono comunque delle leggi che esprimono tali proprietà: sono le *leggi costitutive*. Una legge costitutiva lega sempre una variabile di configurazione ad una variabile di sorgente mediante uno o più parametri che descrivono il materiale. A seconda del modello fisico e del livello di dettaglio, questi parametri poi possono essere funzione di altre variabili.

Ad esempio, sono leggi costitutive:

- nella dinamica dei corpi puntiformi: la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, che lega la variabile di sorgente forza alla variabile di configurazione accelerazione mediante la massa inerziale, proprietà materiale del corpo considerato;
- in elettromagnetismo: la legge di Ohm $U = RI$ che esprime il legame tra la variabile di configurazione tensione e la variabile di sorgente corrente; la legge $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ che esprime il legame tra induzione e campo magnetico;
- in termodinamica: la legge di Fourier $\Phi = -\lambda \operatorname{grad} T$ che esprime il legame tra il vettore flusso termico (variabile di sorgente) e il gradiente di temperatura (variabile di configurazione).

Una legge costitutiva può legare tra loro variabili associate a un dominio spaziale di dimensioni finite (ad esempio tensione e corrente) oppure zero dimensionale (ad esempio flusso termico e gradiente di temperatura).

Capitolo 3

Le cariche e le correnti elettriche

3.1 Richiamo sulla legge di Coulomb

Assumeremo la legge di Coulomb come punto di partenza per lo studio dei fenomeni elettrici. Considerando due particelle di dimensioni trascurabili, poste nei punti P_0 e P di un mezzo omogeneo e dotate di cariche elettriche rispettivamente q_0 e q , la legge di Coulomb viene espressa così:

$$\mathbf{F}(P) = K \frac{q_0 q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.1)$$

dove K è una costante dipendente dal mezzo in cui si svolge l'esperimento, r è il modulo del raggio vettore $\mathbf{r} = \overline{P_0 P}$ e \mathbf{u}_r è il versore del vettore \mathbf{r} orientato da P_0 a P (Fig. 3.1). Si ricorda che sulla particella in P_0 agisce una forza $\mathbf{F}(P_0) = -\mathbf{F}(P)$.

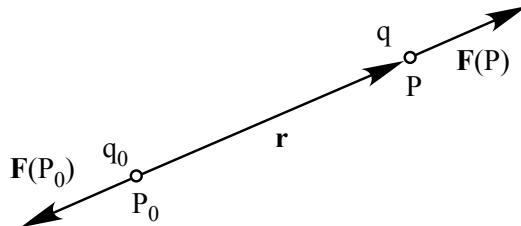


Figura 3.1: Due particelle caricate tra le quali si manifesta l'interazione coulombiana

La *carica elettrica* è quella proprietà delle particelle grazie alla quale si manifesta la forza di Coulomb. L'esperienza di Coulomb potrebbe quindi essere usata per misurare la carica elettrica una volta assegnato il valore della costante K . In realtà, nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della carica, denominata *Coulomb* (C), non è un'unità fondamentale come il metro o il secondo ma, come vedremo più avanti (3.4), viene derivata dalla grandezza fondamentale che misura la corrente elettrica, l'*Ampère*: 1 Coulomb = 1 Ampère · 1 secondo. Adottando il

Coulomb come unità di misura della carica, la costante K viene automaticamente definita: il suo valore nel vuoto è pari a $8,991 \cdot 10^9 \text{ N/C}^2$.

La carica elettrica è una proprietà distinta dalle altre proprietà delle particelle, quali massa, colore, temperatura ecc. e può essere fornita alle particelle ad esempio mediante strofinio su un panno di lana o altri metodi visti nel corso di fisica.

Le osservazioni sperimentali portano alle seguenti conclusioni:

- La carica elettrica è una grandezza scalare, pertanto descrivibile mediante un numero che non dipende dal sistema di riferimento.
- La carica elettrica è di due tipi, che producono effetti opposti. Poiché stiamo considerando la legge di Coulomb, effetti opposti implicano forze sulle particelle che, da repulsive, diventano attrattive o viceversa. Considerando la 3.1 vediamo che questa caratteristica può essere direttamente descritta attribuendo alla carica un *segno*. Avremo quindi *cariche positive* e *cariche negative*.
- La carica elettrica possiede la *proprietà additiva*: se, invece di considerare una sola particella in P_0 nel vuoto ne consideriamo due uguali e caricate allo stesso modo, vediamo che la forza $\mathbf{F}(P)$ raddoppia. È lecito allora considerare il complesso delle due particelle vicine in P_0 come dotato di una carica doppia rispetto al valore originale.
- Negli esperimenti effettuati con particelle di dimensioni anche molto piccole, ma contenenti un gran numero di atomi, la carica elettrica è una grandezza variabile praticamente con continuità. Se invece si considerano esperimenti in cui le particelle hanno dimensioni confrontabili con quelle atomiche, si manifesta la *quantizzazione della carica*: tutte le cariche elettriche delle particelle libere in natura sono, a meno del segno, multiple della carica dell'elettrone, pari a $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

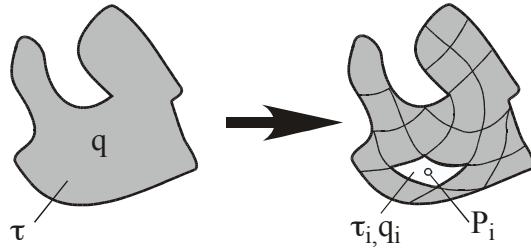
3.2 La densità di carica elettrica

Quando le dimensioni dei corpi dotati di carica elettrica non sono più trascurabili, non si può più considerare un'interazione tra cariche puntiformi, come sopra descritto. Si pone quindi l'esigenza di conoscere come una determinata carica sia distribuita in un oggetto o un dominio dello spazio di dimensioni macroscopiche. Iniziamo da un corpo tridimensionale. In base alla proprietà di additività della carica, si può assumere che la carica q di cui un corpo macroscopico τ è dotato sia pari alla somma delle cariche q_i di cui sono dotate le sue parti τ_i di cui è formato (Fig. 3.2):

$$\tau = \bigcup_{i=1}^N \tau_i \Rightarrow q = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.2)$$

Possiamo ora supporre che $N \rightarrow \infty$ e $\max\{\tau_i\} \rightarrow 0$. Moltiplicando e dividendo nella 3.2 la carica q_i per il volume τ_i e passando al limite otteniamo:

$$q = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\tau_i} \tau_i = \int_{\tau} \varrho_c(P_0) \, d\tau \quad (3.3)$$

Figura 3.2: Suddivisione di un corpo macroscopico τ in più parti τ_i

La funzione $\varrho_c(P_0)$ è la *densità volumica di carica*, avente dimensioni di C/m^3 e definita in un punto P_0 considerando la carica via via decrescente (in modulo) contenuta in una successione di volumi τ' decrescenti tutti contenenti il punto P_0 :

$$\varrho_c(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau' \rightarrow P_0} \frac{q(\tau')}{\tau'}. \quad (3.4)$$

Similmente, in caso di una distribuzione di cariche in un dominio S bidimensionale, si può definire la *densità superficiale di carica* avente dimensioni di C/m^2 :

$$\sigma_c(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{S' \rightarrow P_0} \frac{q(S')}{S'}. \quad (3.5)$$

Se, invece, la carica è distribuita lungo un filo, o una regione monodimensionale l , si può definire la *densità lineare di carica* avente dimensioni di C/m :

$$\lambda_c(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{l' \rightarrow P_0} \frac{q(l')}{l'}. \quad (3.6)$$

In caso di distribuzione di carica bi- e monodimensionale si può quindi ricavare la carica complessiva rispettivamente come:

$$q = \int_S \sigma_c(P_0) dS \quad q = \int_l \lambda_c(P_0) dl \quad (3.7)$$

Come abbiamo detto in 3.1, la carica è di due tipi diversi. Nel calcolo della densità di carica possiamo allora considerare separatamente le due specie, ottenendo le densità di cariche positive ϱ_c^+ , σ_c^+ e λ_c^+ e negative ϱ_c^- , σ_c^- e λ_c^- . Avremo ovviamente $\varrho_c = \varrho_c^+ + \varrho_c^-$ e similmente per le altre densità.

Un corpo è elettricamente neutro quando la sua densità di carica è dovunque zero. Notiamo però che tale condizione implica solamente che la distribuzione di cariche positive bilanci esattamente quella di cariche negative, non l'assenza di cariche. Considerando ad esempio una massa di 63,5 g di rame, pari ad una mole: sappiamo che essa è formata da $6,02 \cdot 10^{23}$ atomi di rame, ciascuno formato, oltre che da neutroni, da 29 protoni ed altrettanti elettroni. Tale massa corrisponde pertanto ad una carica positiva totale di $279,3 \cdot 10^4$ C, associata ai protoni, ed una uguale ed opposta carica negativa associata agli elettroni. Nei fenomeni elettrici usuali le densità di carica in gioco sono enormemente minori e potremo considerare la *densità di carica come un lievissimo squilibrio delle due densità di cariche opposte presenti*.

3.3 Cariche fisse e cariche mobili

Per meglio studiare i fenomeni elettrici è opportuno richiamare brevemente le proprietà dei vari materiali dal punto di vista della distribuzione di carica.

- Nei *metalli* il materiale è composto da un reticolo elastico cristallino di ioni positivi che non compiono movimenti macroscopici, ma si limitano ad oscillare attorno ad una posizione di riposo. Tale oscillazione corrisponde all'agitazione termica. Questo reticolo cristallino è permeato da un *gas di elettroni liberi*, in grado di muoversi liberamente nel reticolo ed urtando continuamente gli ioni del reticolo.
- Nei *semiconduttori* (ad es. il silicio o il germanio) si ha invece un reticolo cristallino di atomi in larghissima maggioranza della stessa specie, tetravalenti ed elettricamente neutri. Alcuni atomi di elementi diversi, pentavalenti (drogaggio N) o trivalenti (drogaggio P), sono distribuiti in tale reticolo, sostituendo gli atomi di semiconduttore. La differente valenza di queste impurità del reticolo fa sì che molto facilmente essi perdano (nel caso del drogaggio N) o acquistino un elettrone (nel caso del drogaggio P), diventando degli ioni fissi, rispettivamente positivi e negativi. L'elettrone lasciato libero da un'impurità pentavalente diventa a tutti gli effetti un elettrone libero di muoversi nel reticolo, come nel caso dei metalli. In modo duale, quando un elemento trivaleto acquista un elettrone, nella stragrande maggioranza dei casi lo fa a spese di un vicino atomo di semiconduttore, che si trasforma a sua volta in uno ione positivo il quale, a sua volta, può catturare un altro elettrone da un altro atomo vicino. Il risultato di ciò è un movimento equivalente di una carica positiva, detta *lacuna*, nel reticolo cristallino. Quando un elettrone libero incontra una lacuna, si ricombina con essa rendendo neutro l'atomo che lo aveva perso. Elettroni liberi e lacune vengono continuamente generati per effetto dell'agitazione termica ma, in un semiconduttore drogato, si ha una netta maggioranza di elettroni o di lacune, a seconda del drogaggio.
- Nelle *soluzioni elettrolitiche* i materiali in soluzione si dissociano in ioni di specie chimica diversa e ionizzazione opposta (ad esempio, il sale da cucina NaCl in acqua dà luogo alla scissione in ioni Na^+ e Cl^-). Tali ioni si muovono liberamente nella massa del liquido ed interagiscono con le sue molecole urtandole continuamente.
- Nei *dielettrici* o *isolanti*, infine, non si hanno *idealmente* cariche libere, rimanendo gli elettroni stabilmente legati agli atomi. Per effetto di una forza di natura elettrica applicata al materiale, tuttavia, si può assistere ad una deformazione di tipo reversibile delle molecole, che tendono a ruotare attorno alla loro posizione di equilibrio. Si può anche aver una modifica della distribuzione degli elettroni degli orbitali più esterni delle molecole, con conseguente loro concentrazione in alcune zone, che porta alla generazione dei cosiddetti *dipoli elettrici*. Tali fenomeni di norma scompaiono alla cessazione della forza esterna. Questo fenomeno, che viene comunemente chiamato *polarizzazione*, sarà studiato in dettaglio in sez. 7.8.4.

Se l'entità della forza elettrica presente nel materiale supera una data soglia, detta *rigidità dielettrica*, essa può essere sufficiente per strappare gli elettroni degli orbitali più esterni

degli atomi. Tali elettroni diventano a tutti gli effetti elettroni liberi, in grado di compiere spostamenti macroscopici nel materiale. Nel fare ciò, gli elettroni possono acquistare energia cinetica e collidere con altri elettroni, strappandoli a loro volta dagli atomi. In tal modo il fenomeno può autosostenersi provocando la *scarica* o *perforazione* del materiale. Nel caso dei solidi tale scarica ha normalmente effetti irreversibili, mentre nei dielettrici liquidi e gassosi l'isolamento viene ripristinato non appena viene meno la forza elettrica esterna e gli elettroni si legano di nuovo agli atomi ionizzati. A parte il vuoto, i dielettrici reali hanno sempre una certa densità, estremamente piccola, ma non nulla, di cariche libere.

Tutti i fenomeni conduttori in cui si ha l'urto delle cariche mobili con gli atomi del reticolo o della soluzione causano dissipazione di energia, pertanto avvengono solo in presenza di forze agenti sui portatori di carica, come ripreso in dettaglio nel cap. 5.

3.4 La densità di corrente elettrica

L'esperienza mostra che una descrizione della posizione delle varie cariche non è sufficiente in generale per descrivere i fenomeni elettrici e magnetici. Oltre alla posizione infatti che si deve tenere conto anche del moto delle cariche.

Sia data allora una regione tridimensionale τ in cui è presente una distribuzione continua di carica, descritta mediante le due densità di cariche positive, $\varrho_c^+(P_0)$ e negative $\varrho_c^-(P_0)$ in ogni punto P_0 di τ . Si definisce vettore *densità di corrente* il seguente vettore:

$$\mathbf{J}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_c^+(P_0)\mathbf{v}^+ + \varrho_c^-(P_0)\mathbf{v}^-, \quad (3.8)$$

dove \mathbf{v}^+ e \mathbf{v}^- sono le velocità medie delle cariche positive e negative nel punto P_0 . Questo vettore ha le dimensioni di A/m^2 . Le velocità \mathbf{v}^+ e \mathbf{v}^- possono essere ottenute considerando il limite di una successione di volumetti τ' decrescenti, tutti aventi il punto P_0 in comune. Si noti che, comunque, si suppone che tali volumetti contengano comunque un numero elevatissimo di cariche, per cui abbia senso il concetto di velocità media. In ognuno di questi volumetti possiamo valutare la velocità media delle cariche come rapporto tra la somma delle velocità delle cariche contenute ed il loro numero.

Se la regione dello spazio in cui le cariche possono muoversi è una superficie S , le velocità delle cariche potranno essere solo tangenti alla superficie. In tal caso si definisce così la *densità di corrente superficiale*:

$$\mathbf{J}_s(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_c^+(P_0)\mathbf{v}^+ + \sigma_c^-(P_0)\mathbf{v}^-, \quad (3.9)$$

vettore avente le dimensioni di A/m .

Infine, se la regione dello spazio è una linea l , le cariche potranno muoversi solo in direzione tangente alla linea e la *densità di corrente lineare* è così definita:

$$\mathbf{J}_l(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_c^+(P_0)\mathbf{v}^+ + \lambda_c^-(P_0)\mathbf{v}^-, \quad (3.10)$$

vettore avente le dimensioni di A .

È importante osservare che, se in un punto (o una regione) è nulla la densità di carica, non è detto lo debba essere la densità di corrente. Infatti, se $\varrho_c^+ = -\varrho_c^-$ ma $\mathbf{v}^+ \neq \mathbf{v}^-$ avremo $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$. Ciò si ha ad esempio in un corpo conduttore in quiete in cui la velocità degli ioni positivi fissi del reticolo cristallino è zero, mentre gli elettroni si muovono dando origine a $\mathbf{J} = \varrho_c^- \mathbf{v}^-$. Tale vettore è opposto al vettore velocità degli elettroni.

3.5 La corrente elettrica

Consideriamo una regione τ dello spazio, sede di una distribuzione continua di cariche in movimento, per cui sia definito in ogni suo punto P_0 il vettore \mathbf{J} . Sia data una superficie regolare S in τ orientata esternamente (sez. A.4) che, per semplicità, consideriamo fissa nello spazio (Fig. 3.3). Si definisce *intensità di corrente elettrica* o, più semplicemente corrente elettrica, il flusso $i(t)$ del vettore \mathbf{J} su S :

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \mathbf{J}(P_0, t) \cdot \mathbf{u}_n dS \quad (3.11)$$

La corrente elettrica, misurata in Ampère (A), è pertanto una grandezza scalare che, nel caso

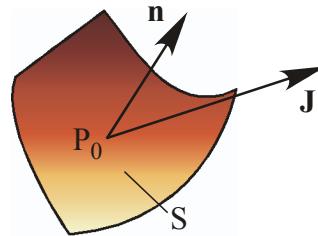


Figura 3.3: Flusso della densità di corrente attraverso una superficie S orientata.

di una regione tridimensionale, è associata a una superficie orientata. *Invertendo l'orientazione della superficie essa inverte il suo segno.*

Vediamo ora il suo significato considerando una porzione infinitesima S^* di S , centrata su un punto P_0 , su cui si possano supporre praticamente uniformi sia \mathbf{J} che il versore normale alla superficie \mathbf{u}_n . Il contributo di S^* alla corrente sarà quindi pari a $i^* = \mathbf{J}(P_0) \cdot \mathbf{u}_n S^* = (\varrho_c^+(P_0) \mathbf{v}^+ + \varrho_c^-(P_0) \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{u}_n S^*$. Consideriamo innanzitutto il contributo delle cariche positive in un intervallo di tempo infinitesimo dt (Fig. 3.4). Durante questo intervallo di tempo, le cariche che all'istante t si trovavano in corrispondenza della superficie S^* si sono spostate di un valore $\mathbf{v}^+ dt$ e si trovano in corrispondenza della superficie S'^* . Un volume infinitesimo τ^* di cariche positive ha pertanto attraversato la superficie nell'intervallo di tempo. La quantità di carica positiva associata a tale volume è pari a $q^{*+} = \varrho_c^+(P_0, t) \tau^* = \varrho_c^+(P_0) (\mathbf{v}^+ dt \cdot \mathbf{u}_n S^*)$ e, poiché $\varrho_c^+ > 0$ essa è positiva se \mathbf{v}^+ ed \mathbf{u}_n sono concordi, negativa o nulla altrimenti. Similmente, considerando il moto delle cariche negative, durante l'intervallo di tempo dt sarà passata una carica infinitesima $q^{*-} = \varrho_c^-(P_0, t) \tau^* = \varrho_c^-(P_0) (\mathbf{v}^- dt \cdot \mathbf{u}_n S^*)$, positiva se \mathbf{v}^- ed \mathbf{u}_n sono discordi.

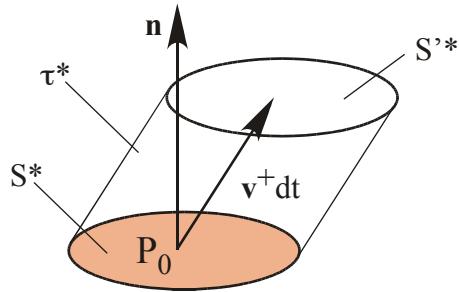


Figura 3.4: Flusso della densità di corrente attraverso una superficie infinitesima S^* , contributo delle sole cariche positive.

Sommando i contributi delle cariche positive e negative, possiamo concludere che la grandezza $i^*(t) dt$ rappresenta la somma algebrica della quantità di carica positiva e della carica negativa che, nell'intervallo di tempo infinitesimo dt , hanno attraversato la superficie orientata S in direzione concorde al suo orientamento. In particolare:

- una data distribuzione di cariche può dare un contributo alla corrente sia positivo che negativo, a seconda della direzione della sua velocità rispetto alla normale alla superficie;
- l'effetto di una distribuzione di cariche positive che si muove in una certa direzione è uguale all'effetto di una distribuzione opposta di cariche che si muove in direzione opposta;
- se uguali densità di cariche positive e negative si muovono nella stessa direzione con uguali velocità, il loro contributo complessivo alla corrente è nullo.

L'intensità di corrente corrisponde pertanto a quella che, in idraulica, è la *portata* di un condotto o di un corso d'acqua. Esiste però un'importante differenza: in elettrologia tale portata è il risultato di due tipi di oggetti in moto, le cariche positive e quelle negative, caratterizzate da densità distinte, mentre in meccanica dei fluidi si considera una sola specie di fluido, caratterizzata da un'unica densità.

Considerando ora una distribuzione bidimensionale di cariche su una superficie S , si può definire l'*intensità della corrente superficiale* attraverso una linea l di S orientata esternamente (Fig. 3.5):

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_l \mathbf{J}_s(P_0, t) \cdot \mathbf{u}_n dl, \quad (3.12)$$

dove \mathbf{J}_s è la densità di corrente superficiale e \mathbf{u}_n è il versore normale alla linea l , ma tangente alla superficie S . Infine, si può definire anche l'intensità di corrente filiforme in un punto P_0 di una linea l , orientato esternamente (Fig. 3.6):

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_l(P_0, t) \cdot \mathbf{u}_n = \pm |\mathbf{J}_l| \quad (3.13)$$

dove \mathbf{J}_l è la densità di corrente filiforme, tangente alla linea e \mathbf{u}_n è il versore tangente alla linea. Nella 3.13 si deve perciò considerare il segno + quando \mathbf{J}_l ed \mathbf{u}_n sono concordi, il segno - altrimenti.

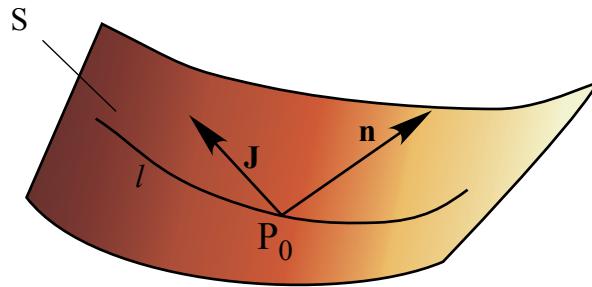


Figura 3.5: Flusso della densità di corrente superficiale attraverso una linea l orientata.

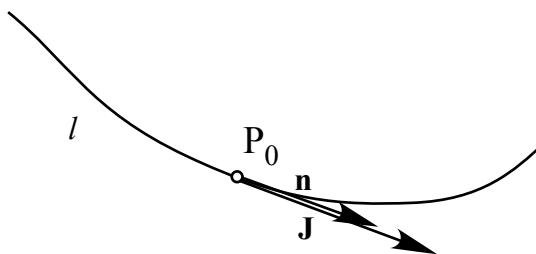


Figura 3.6: Flusso della densità di corrente filiforme attraverso un punto orientato di una linea.

L'intensità della corrente superficiale può essere considerata quando il moto delle cariche avviene ad esempio in conduttori di spessore molto piccolo rispetto alla loro larghezza, quali ad esempio delle sottili lamiere in rame (Fig. 3.7): in tal caso può essere ininfluente la distribuzione della densità di corrente lungo lo spessore del conduttore, mentre conta la distribuzione lungo la direzione della larghezza della sezione. allo stesso modo, la densità di corrente filiforme può essere usata quando le dimensioni della sezione di un conduttore sono trascurabili rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema, ad esempio quando si studia il campo creato da una linea elettrica a una distanza molto maggiore del diametro del suo conduttore.

Anche le intensità di corrente superficiale e filiforme si misurano in Ampère e cambiano di segno invertendo l'orientazione rispettivamente della linea in \$S\$ e del punto in \$l\$ e conservano il significato di carica transitata nell'unità di tempo attraverso il dominio di integrazione in direzione concorde con la sua orientazione.

3.5.1 Associazione della densità di corrente a elementi geometrici

L'intensità di corrente elettrica è una grandezza scalare che nasce naturalmente associata ad una superficie nello spazio, una linea su una superficie o un punto su una linea orientati esternamente. L'intensità di corrente è un flusso del vettore densità di corrente, che può quindi essere considerato anche come una *densità di flusso di cariche elettriche*. Considerando ad esempio il caso del volume, dalla (3.11), se la superficie \$S\$ tende a un punto \$P_0\$ e quindi la corrente tende a un valore infinitesimo \$i^*\$, l'integrale può essere approssimato come \$i^* \approx \mathbf{J}(P_0) \cdot \mathbf{u}_n S\$, da cui si

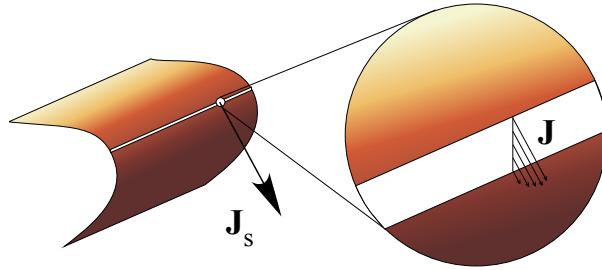


Figura 3.7: Distribuzione di corrente in conduttore di spessore trascurabile esprimibile mediante una densità superficiale di corrente \mathbf{J}_s .

ricava la seguente definizione alternativa della densità di corrente:

$$\mathbf{J}(P_0) = \lim_{S \rightarrow P_0} \frac{i^*(S)}{S} \mathbf{u}_n(P_0), \quad (3.14)$$

dove $\mathbf{u}_n(P_0)$ corrisponde alla direzione lungo la quale il limite è massimo, a parità di punto P_0 . In modo analogo si può definire la densità di corrente superficiale, mentre nel caso lineare la definizione è immediata. Con questa definizione vediamo quindi che, anche se sono grandezze locali, *le densità di corrente sono associate a superfici, linee o punti orientati esternamente*.

3.6 La legge di continuità della carica elettrica

La legge di continuità della carica elettrica afferma la seguente evidenza sperimentale: *non si crea, né si distrugge, carica elettrica in quantità macroscopica. Al più, è possibile separare cariche elettriche di specie diverse.*

Tale legge di conservazione può essere innanzitutto espressa in forma globale, considerando una regione τ dello spazio che, per semplicità, considereremo fissa ed indeformabile. Indichiamo con $q_{int}(t)$ la carica racchiusa in tale regione nel generico istante, e con $q_{usc}(t_1, t_2)$ la carica uscita dal contorno $\partial\tau$ di τ nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$. La legge di continuità si esprime così:

$$\Delta q_{int} = q_{int}(t_2) - q_{int}(t_1) = -q_{usc}(t_1, t_2). \quad (3.15)$$

Esprimiamo ora tale bilancio considerando un intervallo di tempo infinitesimo dt ed esprimendo la carica racchiusa e la carica uscente rispettivamente mediante la densità di carica e la corrente:

$$dq_{int} = d \left(\int_{\tau} \varrho d\tau \right) = -i_{usc} dt = - \int_{\partial\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS dt$$

Considerando la regione τ fissa, il primo integrale può essere riscritto come $\int_{\tau} (\partial\varrho/\partial t) dt d\tau$, ottenendo quindi:

$$\int_{\tau} \frac{\partial\varrho}{\partial t} d\tau = - \int_{\partial\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS \quad (3.16)$$

È possibile ora applicare il teorema della divergenza (sez. B.10, pag. 180) per esprimere il secondo integrale come integrale di volume, ottenendo:

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \right) d\tau \equiv 0$$

Questo integrale è identicamente nullo, qualunque sia la regione τ considerata, purché valgano le ipotesi di regolarità della forma della regione e di derivabilità delle funzioni. Ciò implica che sia nulla la funzione integranda, da cui segue l'*equazione di continuità della carica elettrica*:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \varrho_c}{\partial t} \quad (3.17)$$

3.6.1 Applicazioni della legge di continuità della carica elettrica

Considerando la (3.17), si possono fare alcune considerazioni relative al campo di corrente:

- In regime stazionario tutte le grandezze non dipendono dal tempo¹, quindi $\partial \varrho / \partial t = 0$ e il flusso della densità di corrente attraverso ogni superficie chiusa è nullo. Se la regione τ è superficialmente connessa, in tali condizioni si possono definire i *tubi di flusso* del vettore \mathbf{J} secondo la costruzione riportata in sez. B.5.1, pag. 187. Un tubo di flusso di \mathbf{J} (fig. 3.8), sarà caratterizzato da una sua *portata*, pari all'intensità di corrente sulle superfici d'estremità S_A ed S_B e su ogni superficie trasversale S :

$$i_{AB} = \int_{S_A} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS = \int_{S_B} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Si noti che queste tre sezioni hanno tutte il medesimo riferimento concorde con la direzione AB .

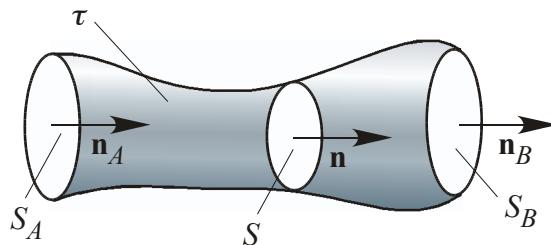


Figura 3.8: Tubo di flusso del vettore densità di corrente.

- Se in un determinato punto P dello spazio si ha $\partial \varrho(P) / \partial t < 0$ e le grandezze sono spazialmente continue, esisterà un intorno τ_P di P in cui $\operatorname{div} \mathbf{J} \geq 0$. Il flusso di \mathbf{J} uscente da $\partial \tau_P$ sarà pertanto positivo. Considerando ora le linee del vettore \mathbf{J} , ciò equivale a dire che da P divergono più linee che ivi nascono (fig. 3.9 b). Il punto P è detto *sorgente*.

¹Questo non implica che le cariche restino ferme. Semplicemente implica che la loro velocità in un dato punto dello spazio rimanga costante nel tempo.

- Se, all'opposto, in un determinato punto P dello spazio si ha $\partial\varrho(P)/\partial t > 0$ e le grandezze sono ancora spazialmente continue, esisterà un intorno τ_P di P in cui $\operatorname{div} \mathbf{J} \leq 0$. Considerando ora le linee del vettore \mathbf{J} , ciò equivale a dire che in P convergono più linee che ivi muoiono (fig. 3.9 c). Il punto P è detto *pozzo*.

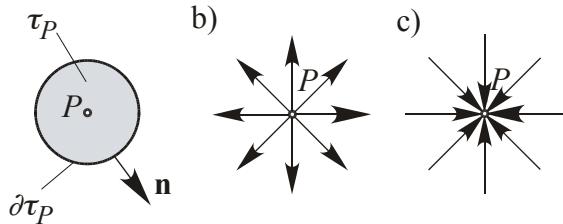


Figura 3.9: a) Punto generico e suo intorno τ_P . b) Sorgente: le linee del vettore nascono nel punto. c) Pozzo: le linee del vettore muoiono nel punto.

3.7 L'amperometro ideale

Lo strumento per la misura della corrente elettrica è l'*amperometro*. In questa sede si considererà uno strumento ideale, senza esaminarne i principi di funzionamento, rinviando ai corsi di misure elettriche lo studio degli strumenti reali. Lo strumento corrisponde a un tubo di flusso del vettore densità di corrente, dotato di due superfici tappo corrispondenti ai *morsetti*. Poiché, per definire la corrente elettrica, si devono specificare la superficie attraversata dalle cariche e la sua orientazione, avremo:

- Lo strumento identifica superficie di controllo, cioè la superficie attraversata dalle cariche. L'inserimento dello strumento tra due punti di una rete elettrica corrisponde alla misura della corrente associata a un tubo di flusso che collega questi punti.
- Per fissare l'orientamento della superficie si orienta lo strumento *marchiando con il segno positivo (+) il morsetto da cui si contano positivamente le cariche positive entranti nello strumento*, ed eventualmente con il segno negativo (-) l'altro morsetto. In tal modo, *l'orientazione della superficie corrisponde al versore che va dal morsetto positivo al negativo* (fig. 3.10). Strumenti montati con i morsetti invertiti corrispondono a correnti misurate con riferimenti opposti, quindi di segno opposto.
- A differenza del voltmetro, i collegamenti dello strumento non fanno parte dello strumento stesso.

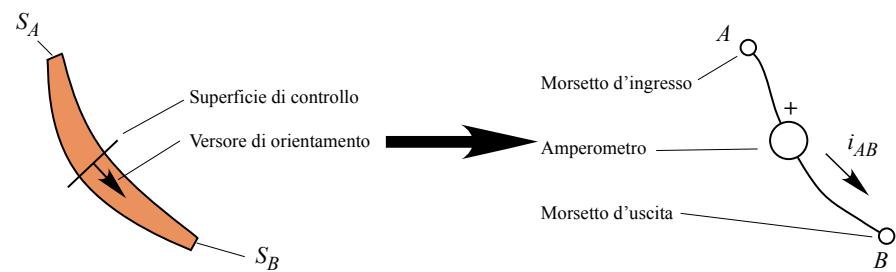


Figura 3.10: Amperometro: vista dello strumento, delle sue connessioni e morsetti, e corrispondenti versore di riferimento e superficie di controllo.

Capitolo 4

Le forze agenti sui portatori delle cariche elettriche

4.1 Le forze e le forze elettriche specifiche

Il movimento delle cariche elettriche, descritto dal vettore densità di corrente, è possibile perché sui portatori di carica, cioè le particelle in moto dotate della carica elettrica, agiscono delle forze che possono favorire o opporsi al moto¹.

La forza che agisce su un portatore di carica può essere dovuta alla presenza della carica stessa, ed in tal caso si parla di *forza elettrica*, oppure alla particolare natura del portatore stesso, ad esempio alla specie chimica che lo forma, ed in tal caso non dipende dalla carica presente. Ad esempio, la forza agente su una pallina di polistirolo caricata per strofinio è una forza elettrica, dovuta alla carica accumulatasi sulla pallina. In assenza di tale carica la pallina non risente della forza e , in caso di uno strofinio più deciso, la maggiore quantità di carica rende più intensa la forza cui la pallina è soggetta. In elettrotecnica, la forza che spinge gli atomi di zinco a passare in soluzione in una pila, liberando due elettroni nell'anodo della pila (il suo polo negativo) non è di tipo elettrico, perché è dovuta al fatto che il materiale è di un tipo determinato. Cambiando il materiale l'effetto cambia.

Quando si sta considerando una forza elettrica \mathbf{F}_e risulta opportuno considerare la *forza elettrica specifica* \mathbf{F}_{es} , così definita:

$$\mathbf{F}_{es} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e(q)}{q} \quad (4.1)$$

Com'è noto, la forza si misura in N, pertanto la forza elettrica specifica si misura in N/C, unità di misura che tuttavia si esprime convenzionalmente in Volt.metro (V/m). La forza elettrica specifica è pertanto collegata solamente alle cariche sorgenti e non dipende più dalla carica di prova. Pertanto, se viene assegnata una certa configurazione di cariche sorgenti e si vuole studiare il loro effetto su una *piccola carica* q^* , si potrà approssimare la forza agente su questa

¹Un'eccezione è costituita dai *materiali superconduttori*, in cui una corrente può persistere nel materiale per un tempo indefinito senza che siano applicate forze e che venga dissipata potenza

20 CAPITOLO 4. LE FORZE AGENTI SUI PORTATORI DELLE CARICHE ELETTRICHE

come $\mathbf{F}_e(q^*) \approx q^* \mathbf{F}_{es}$ contando sul fatto che q^* non abbia influenzato le sorgenti. Una situazione simile si incontra quando si deve esprimere la forza elettrica \mathbf{F}_e^* agente su un volumetto piccolissimo τ^* di una distribuzione di carica con densità ϱ_c : si potrà scrivere $\mathbf{F}_e^* \approx \mathbf{F}_{es} \cdot \varrho_c \tau^*$

Quando la forza \mathbf{F} agente su una particella portatrice di una certa carica q non è di tipo elettrico, spesso risulta conveniente esprimere ancora la *forza specifica* che sarà pari a:

$$\mathbf{F}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (4.2)$$

Si noti che qui non c'è passaggio al limite perché manca la dipendenza della forza dalla carica. Anche la forza specifica si misura in (V/m).

Mentre nella dinamica dei corpi la forza è variabile di sorgente, in elettromagnetismo la forza elettrica specifica (che, comunque, non ha le dimensioni di una forza) è variabile di configurazione, assieme a tutte le grandezze che da essa si possono ottenere mediante operazioni matematiche.

4.2 Il lavoro delle forze elettriche e la tensione elettrica

È ben noto che il *lavoro infinitesimo* \mathcal{L}_i svolto da una forza \mathbf{F} in presenza di uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{P}$ del suo punto di applicazione è pari a $\mathcal{L}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ (fig. 4.1).

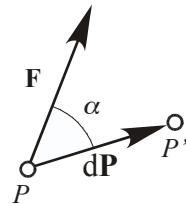


Figura 4.1: Forza e spostamento nel caso del lavoro infinitesimo.

Nel caso di una forza elettrica specifica si potrà analogamente definire il *lavoro elettrico specifico* infinitesimo, grandezza che ha le dimensioni di lavoro per unità di carica, espresso in Volt, in questo modo:

$$\mathcal{L}_i^e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{es} \cdot d\mathbf{P} \quad (\text{V}). \quad (4.3)$$

Proseguendo con le analogie, partendo dal lavoro svolto da una forza lungo una linea, si può definire il lavoro elettrico specifico svolto lungo una linea. Tale grandezza è detta *tensione elettrica*:

$$u_{AB,l} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A,l}^B \mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_t dl \quad (\text{V}). \quad (4.4)$$

La tensione pertanto:

- come la forza elettrica specifica, è una variabile di configurazione;
- è associata ad una linea orientata internamente, i cui estremi iniziale e finale corrispondono rispettivamente al primo (A) ed al secondo (B) pedice;
- modificando il percorso a parità di estremi, in generale la tensione cambia; se invece la tensione dipende solo dagli estremi, ma non dal percorso, è detta *conservativa*;
- scambiando gli estremi, a parità di percorso, cambiano l'orientamento della linea ed il segno della tensione;
- se il percorso di integrazione viene scomposto in più tratti (fig. 4.2), la tensione totale è pari alla somma delle tensioni sui singoli tratti, grazie alla linearità dell'operazione di integrazione rispetto al dominio di integrazione:

$$l_{AB} = l_{AC} \cup l_{CB} \Rightarrow u_{AB,l} = u_{AC,l} + u_{CB,l}$$

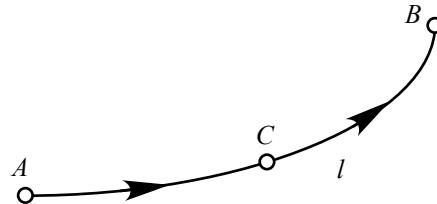


Figura 4.2: Scomposizione del percorso di integrazione in più tratti.

4.2.1 Convenzioni per la tensione

Come indicato nella (4.4), nell'espressione $u_{AB,l}$ A e B rappresentano rispettivamente il punto d'inizio e di fine del percorso per il calcolo della tensione, che si svolge lungo la linea l . Dal punto di vista grafico, la convenzione della tensione può essere indicata mediante il verso di percorrenza della linea oppure mediante il segno positivo posto in corrispondenza del punto di inizio del percorso, come rappresentato in Fig. 4.3.

4.2.2 Associazione della forza elettrica a elementi geometrici

La tensione elettrica è una grandezza scalare, che nasce naturalmente associata ad una linea nello spazio orientata internamente. La forza elettrica può quindi essere considerata anche come una *densità di tensione*. Considerando infatti la (4.4), se la linea l tende a un punto P_0 e quindi la tensione tende a un valore infinitesimo u^* , l'integrale può essere approssimato come $u^* \approx \mathbf{F}_{es}(P_0) \cdot \mathbf{u}_t l$, da cui si ricava la seguente definizione alternativa della forza elettrica specifica:

$$\mathbf{F}_{es}(P_0) = \lim_{l \rightarrow P_0} \frac{u^*(l)}{l} \mathbf{u}_t(P_0), \quad (4.5)$$

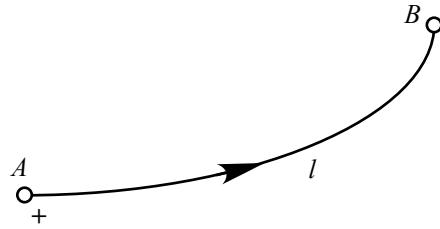


Figura 4.3: Convenzioni grafiche per identificare la tensione $u_{AB,l}$: mediante il verso di percorrenza della linea o, in alternativa, mediante il segno “+”.

dove $\mathbf{u}_t(P_0)$ corrisponde alla direzione lungo la quale il limite è massimo, a parità di punto P_0 . Con questa definizione vediamo quindi che, anche se sono grandezze locali, *le forze elettriche specifiche sono associate a linee orientate internamente*.

4.3 Forze elettriche conservative e non conservative, il potenziale scalare elettrico

Come descritto in modo generale in B.4, pag. 181, una forza elettrica viene detta *conservativa* in una regione τ dello spazio se il lavoro elettrico compiuto lungo un percorso tutto interno al dominio dipende solo dai suoi estremi e non dal percorso stesso, qualunque sia la coppia di estremi prescelta. Se una forza elettrica è conservativa, in ogni punto della regione è possibile definire una funzione scalare $\phi(P)$, il *potenziale scalare elettrico*, tale che:

$$u_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \int_{A,l}^B \mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad \forall A, B \in \tau \quad \text{e} \quad \forall l_{AB} \subset \tau \quad (4.6)$$

Se la distribuzione di potenziale è nota in una data regione, per quanto riportato in B.1 pag. 175 è possibile ricavare l'espressione della forza elettrica nel suo generico punto P come:

$$\mathbf{F}_{es}(P) = -\text{grad } \phi(P) \quad (4.7)$$

Il potenziale scalare si misura in Volt, come la tensione, ed è una variabile di configurazione associata al punto. Da questa relazione si può esprimere direttamente il potenziale in ogni punto di τ a partire da un suo punto *A di cui si assuma arbitrariamente il valore del potenziale $\phi(A)$* :

$$\phi(B) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(A) - \int_{A,l}^B \mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (\text{V}). \quad (4.8)$$

Il potenziale è quindi determinato a meno di una costante additiva, che non influenza il valore della tensione perché in essa figurano sempre differenze di potenziale. Se il potenziale è definito in ogni punto dello spazio e tende ad un valore costante all'infinito, talvolta si sceglie la costante di indeterminazione in modo che il potenziale all'infinito sia nullo. In tal caso si parla di *potenziale assoluto*.

4.3.1 Il potenziale coulombiano di una carica puntiforme

Mostriamo ora che il campo coulombiano generato da una carica puntiforme è conservativo in tutto lo spazio privato del punto dove si trova la carica. Consideriamo per questo una carica puntiforme fissa q_0 , posta in P_0 , immersa in un mezzo uniforme illimitato. Sia data una carica infinitesima q spostata da un punto A ad un punto B lungo una linea l (Fig. 4.4). In sezione 3.1, pag. 7, abbiamo scritto una prima espressione della forza elettrica tra queste due cariche. Riscriviamola ora nella forma:

$$\mathbf{F}(P) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r,$$

dove ϵ è un'opportuna costante, dipendente dal materiale e $\mathbf{r} = \overrightarrow{P_0 P}$. Il campo elettrico coulombiano è evidentemente, per la 4.1:

$$\mathbf{E}_c(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r. \quad (4.9)$$

Il lavoro elettrico specifico infinitesimo svolto dal campo coulombiano per spostare q (eq. 4.3) vale:

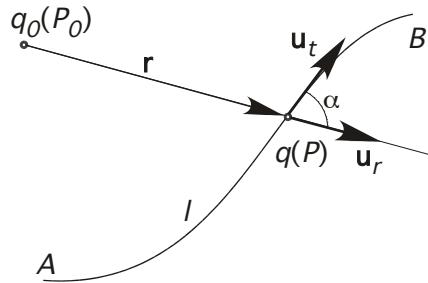


Figura 4.4: Carica di prova spostata lungo un percorso l in prossimità di una carica fissa.

$$\mathcal{L}_i^e = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_r \, dl,$$

dove $\mathbf{u}_t \, dl = d\mathbf{P}$.

Osserviamo che il prodotto scalare $\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_r$ è pari al coseno dell'angolo α tra i due versori e che quindi $dl \cos \alpha = dr$, per cui:

$$\mathcal{L}_i^e = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \, dr.$$

Il lavoro specifico risultante per spostare la carica da A a B vale pertanto:

$$\mathcal{L}_{AB,l}^e = \int_{A,l}^B \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \, dr = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} \quad (4.10)$$

24 CAPITOLO 4. LE FORZE AGENTI SUI PORTATORI DELLE CARICHE ELETTRICHE

Tale integrale non dipende quindi più dal percorso, ma solo dai valori iniziale e finale della distanza radiale r del punto P dalla carica. Il potenziale scalare elettrico del campo coulombiano generato da una carica puntiforme q_0 è pertanto:

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r} + C, \quad (4.11)$$

dove C è una costante additiva arbitraria. Nel seguito indicheremo con V il potenziale del campo coulombiano, lasciando a ϕ un significato più generale di potenziale.

Ponendo $C = 0$ nella (4.11) si ottiene il potenziale assoluto di una carica puntiforme in un mezzo omogeneo.

Il potenziale è singolare in corrispondenza del punto in cui si trova la carica puntiforme che lo genera. Si noti che, comunque, utilizzare tale espressione proprio dov'è situata la carica fa venir meno le ipotesi di particella di dimensioni trascurabili, usata per definire una carica puntiforme. In tal caso si deve quindi ricorrere ad un altro modello della distribuzione di carica. In sezione 7, pag. 59, si tornerà sul potenziale del campo coulombiano generato da una distribuzione qualsiasi di carica nota.

4.4 La tensione elettrica in presenza di forze elettriche conservative e non conservative

Può accadere che in una regione dello spazio siano presenti contemporaneamente forze conservative e non conservative. In tal caso il potenziale scalare (eq. 4.8) può essere usato per esprimere il contributo delle forze conservative alla tensione, mentre il contributo delle forze non conservative dovrà essere calcolato mediante integrazione lungo il percorso scelto. Se, pertanto, la forza specifica è esprimibile come $\mathbf{F}_{es} = \mathbf{E}_c + \mathbf{F}'_{es}$, dove \mathbf{F}'_{es} è la componente non conservativa della forza elettrica specifica, si potrà scrivere:

$$u_{AB,l} = \int_{A,l}^B \mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = V(A) - V(B) + \int_{A,l}^B \mathbf{F}'_{es} \cdot \mathbf{u}_t \, dl, \quad (4.12)$$

Se la parte conservativa della forza elettrica specifica comprende anche altri termini oltre al campo coulombiano, il potenziale scalare ad essa complessivamente associato sarà dato dal potenziale scalare del campo coulombiano e un altro addendo corrispondente agli altri termini della forza conservativa.

4.5 Forze elettriche e potenza svolta

Quando una regione τ dello spazio è sede di un campo di corrente \mathbf{J} e di una forza elettrica specifica \mathbf{F}_{es} , si assiste allo sviluppo di una potenza da parte di questa.

4.5.1 Potenza specifica

Considerando un volumetto infinitesimo τ^* che circonda un punto P della regione, le cariche positive e negative in esso contenute valgono rispettivamente q^{*+} e q^{*-} . In generale, tali cariche

si muoveranno con velocità rispettivamente pari a $\mathbf{v}^+(P)$ e $\mathbf{v}^-(P)$. In un intervallo di tempo infinitesimo dt gli spostamenti delle due specie di cariche valgono $d\mathbf{P}^+ = \mathbf{v}^+(P) dt$ e $d\mathbf{P}^- = \mathbf{v}^-(P) dt$. Il lavoro infinitesimo svolto dalla forza elettrica nel volumetto durante l'intervallo di tempo vale:

$$\mathcal{L}^* = (q^{*+} d\mathbf{P}^+ + q^{*-} d\mathbf{P}^-) \cdot \mathbf{F}_{es} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_{es} \tau^* dt$$

Ne ricaviamo quindi che la potenza P_s per unità di volume svolta dalla forza elettrica in P vale:

$$P_s(P) = \mathbf{J}(P) \cdot \mathbf{F}_{es}(P) \quad (\text{W/m}^3) \quad (4.13)$$

Si osserva che tale espressione vale anche se il campo di corrente non è solenoidale o la forza elettrica non è conservativa.

4.5.2 Potenza in un tubo di flusso della densità di corrente

Restringendo le ipotesi della sezione precedente si può ricavare un'espressione della potenza generata in un volume finito, di vasta applicabilità. Sia ora τ un tubo di flusso aperto del vettore \mathbf{J} (sez. 3.6.1, pag. 16) e sia in esso presente una forza elettrica conservativa. Siano le due superfici iniziale S_A e finale S_B del tubo di flusso equipotenziali.² Calcoliamo la potenza elettrica P_τ^{ass}

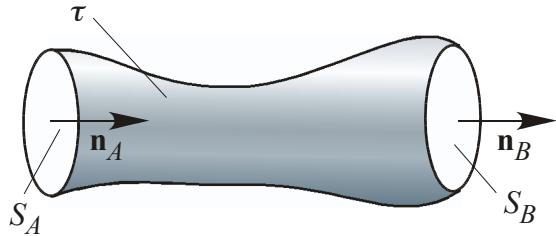


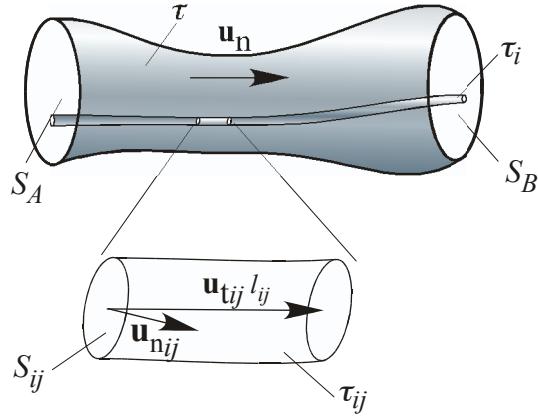
Figura 4.5: Tubo di flusso del vettore densità di corrente, sede di una forza elettrica ivi conservativa.

complessivamente svolta dalla forza elettrica nel tubo di flusso. Per la 4.13 evidentemente sarà

$$P_\tau^{ass} = \int_\tau P_s(P) d\tau = \int_\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_{es} d\tau \quad (\text{W}) \quad (4.14)$$

Possiamo effettuare l'integrazione adottando un sistema di coordinate curvilinee. Suddividiamo l'intero tubo di flusso in un insieme di tubetti disgiunti τ_i di sezione infinitesima, che vanno tutti da S_A a S_B : $\tau = \bigcup_i \tau_i$, $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset \quad \forall i, j$ (fig. 4.6). A sua volta, dividiamo ciascun tubetto di flusso τ_i in una serie di tubetti $\tau_{i,j}$ di lunghezza infinitesima $l_{i,j}$, tali che $\tau_i = \bigcup_j \tau_{i,j}$, $\tau_{i,j} \cap \tau_{i,k} = \emptyset \quad \forall j, k$.

² Si osserva che viene richiesta la conservatività della forza elettrica solo nel tubo di flusso. Nessuna ipotesi viene fatta sul comportamento della forza all'infuori di esso, dove la forza può anche essere non conservativa.

Figura 4.6: Tubo di flusso τ come unione di tubetti infinitesimi τ_i .

Esaminando $\tau_{i,j}$ osserviamo che, mentre il vettore infinitesimo tangente all'asse del tubetto di flusso, $\mathbf{u}_{t_{i,j}} l_{i,j}$, che congiunge le due sezioni di estremità di $\tau_{i,j}$, è parallelo al vettore densità di corrente, la giacitura delle due sezioni terminali $S_{i,j}$ di $\tau_{i,j}$ può essere scelta liberamente, tranne che per i due volumetti iniziale e finale, dove la scelta sarà imposta da S_A e S_B . Scegliamo di avere ogni superficie $S_{i,j}$ equipotenziale, di modo che il vettore $\mathbf{u}_{n_{i,j}}$ sarà per costruzione parallelo alla forza elettrica specifica \mathbf{F}_{es} su $S_{i,j}$.

Il valore del volume di τ_{ij} può essere calcolato come $\tau_{i,j} \approx \mathbf{u}_{t_{i,j}} l_{i,j} \cdot \mathbf{u}_{n_{i,j}} S_{i,j}$ pertanto la potenza elettrica ivi svolta sarà:

$$P_{\tau_{i,j}} \approx \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_{es} \tau_{i,j} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_{es}) (\mathbf{u}_{t_{i,j}} l_{i,j} \cdot \mathbf{u}_{n_{i,j}} S_{i,j}).$$

In questo doppio prodotto scalare ciascun vettore della prima parentesi è parallelo ad un vettore della seconda parentesi. È pertanto possibile scambiare un vettore della prima parentesi col corrispondente della seconda: scambiamo pertanto \mathbf{F}_{es} con $\mathbf{u}_{n_{i,j}} S_{i,j}$ ottenendo:

$$P_{\tau_{i,j}} \approx (\mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_{n_{i,j}} S_{i,j}) (\mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_{t_{i,j}} l_{i,j}) = I_{i,j} U_{i,j},$$

dove $I_{i,j}$ è la corrente infinitesima del tubetto di flusso $\tau_{i,j}$ e $U_{i,j}$ la corrispondente tensione infinitesima lungo il tubetto, entrambe calcolate col medesimo riferimento definito dal versore tangente $\mathbf{u}_{t_{i,j}}$.

Il contributo del tubetto di flusso τ_i si ottiene come

$$P_{\tau_i} = \sum_j P_{\tau_{i,j}} = I_i \sum_j U_{i,j} = I_i U_{AB},$$

essendo $I_{i,j} = I_i \quad \forall j$ la portata in corrente del tubetto di flusso τ_i ed U_{AB} il lavoro elettrico specifico svolto dalla forza tra il punto iniziale A e finale B lungo l'asse di τ_i . Si ricorda inoltre che, per ipotesi, S_A ed S_B sono equipotenziali, pertanto la tensione tra esse non dipende dai particolari punti scelti.

Sommando ora il contributo di tutti i tubetti τ_i si ottiene la potenza totale voluta. Notando che $\sum_i I_i = I_{AB}$, si ricava:

$$P_{\tau_i}^{ass} = \sum_i P_{\tau_i} = \sum_i I_i U_{AB} = I_{AB} U_{AB} \quad (4.15)$$

Tale espressione è la potenza svolta dalla forza elettrica nel volume τ . Si noti in particolare la corrispondenza dei pedici della corrente e per la tensione. Tale corrispondenza rappresenta la *convenzione dell'utilizzatore* secondo cui, moltiplicando tensione e corrente espresse con un uguale riferimento, si ottiene la potenza svolta dalla forza elettrica (e quindi utilizzata nel volume τ). Se invece si vuol la *potenza assorbita dalla forza* nel volume, basterà scambiare il riferimento per la tensione o quello per la corrente, ottenendo la *convenzione del generatore*:

$$P_{\tau_i}^{gen} = I_{AB} U_{BA} = I_{BA} U_{AB} \quad (4.16)$$

La tensione U_{AB} è per ipotesi dovuta ad una singola forza elettrica specifica. Se nel volume fossero presenti più forze elettriche specifiche, occorre suddividere la totale tensione nei contributi delle singole forze per individuare le corrispondenti potenze. Nel caso particolare in cui la forza elettrica specifica coincida con il campo coulombiano, si potrà infine esprimere la tensione come differenza di potenziale, ottenendo $P_{\tau_i}^{ass} = I_{AB} \Delta V_{AB}$ e $P_{\tau_i}^{gen} = I_{AB} \Delta V_{BA}$.

Caso del tubo di flusso chiuso

Quando il tubo di flusso τ è chiuso (fig. 4.7) e la forza specifica è conservativa, i punti iniziale e finale A e B coincidono e la tensione U_{AB} sarà nulla.

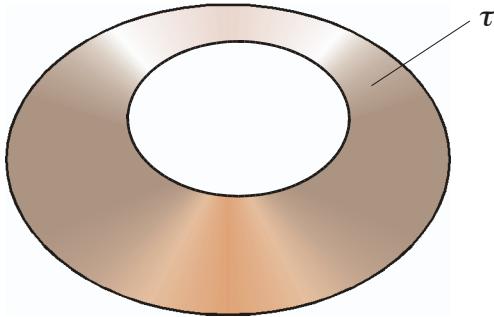


Figura 4.7: Tubo di flusso chiuso.

Se la forza non è conservativa, talvolta è possibile *praticare un taglio* del tubo di flusso in corrispondenza di una sezione S , considerando un tubo aperto $\tau' = \tau - S$ in cui la forza elettrica è conservativa³. Si possono allora individuare due superfici S_A ed S_B , una da una parte e una dall'altra rispetto ad S ed arbitrariamente vicine ad essa (fig. 4.8) ed applicare ancora la 4.15 o la 4.16. La tensione U_{AB} è ora non nulla perché i due estremi non sono più coincidenti ed il

³Un caso tipico si ha nel caso della forza elettrica dovuta a fenomeni magnetici, come trattato in sez. 9.3, pag. 118.

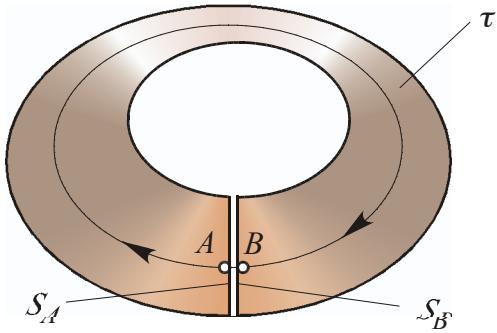


Figura 4.8: Tubo di flusso aperto ottenuto per taglio di un tubo chiuso.

potenziale elettrico corrispondente alla forza elettrica è definito in τ' , non in τ . Esso è pertanto *discontinuo in corrispondenza della superficie di taglio* e non può essere utilizzato per calcolare la tensione lungo linee che attraversino S .

4.6 Il voltmetro ideale

Lo strumento per la misura della tensione elettrica è il *voltmetro*. In questa sede si considererà uno strumento ideale, senza esaminarne i principi di funzionamento, rinviano ai corsi di misure elettriche lo studio degli strumenti reali.

Il voltmetro deve misurare la tensione lungo un assegnato percorso, pertanto, oltre ad un corpo vero e proprio dotato di visore analogico o numerico, esso è dotato di collegamenti flessibili, i *cordoni del voltmetro* che vanno disposti sul il percorso lungo cui si vuole conoscere la tensione (fig. 4.9). Tali cordoni fanno quindi parte dello strumento. Se la forza elettrica è conservativa nella regione dov'è effettuata la misura, la geometria dei cordoni del voltmetro non è influente, conta solo la posizione dei loro morsetti. Poiché inoltre il percorso è orientato, lo strumento deve essere dotato di un riferimento che consenta il suo montaggio in modo concorde all'orientamento scelto. Per questo di norma i due cordoni sono contrassegnati con il morsetto positivo e negativo, che vanno collegati rispettivamente ai punti iniziale e finale del percorso. In alternativa, i due cordoni sono colorati in modo diverso, con il cordone corrispondente al morsetto d'ingresso di colore rosso e l'altro nero. Infine, lo strumento ideale dovrà misurare senza perturbare il sistema: ciò implica che, lungo i cordoni del voltmetro, non vi possa essere alcun passaggio di cariche. I cordonni del voltmetro non sono pertanto percorsi da corrente e lo strumento è assimilabile ad un *collegamento aperto*.

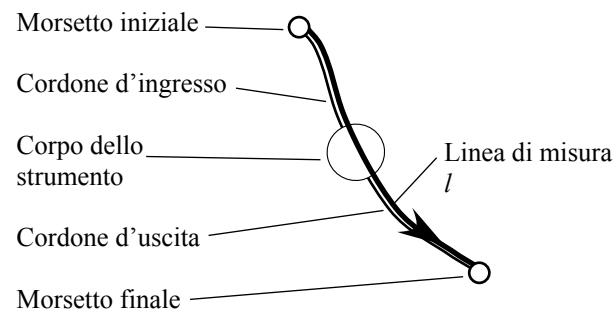


Figura 4.9: Schema di un voltmetro ideale collocato lungo una linea di misura *l*.

Capitolo 5

Fenomeni resistivi

5.1 Esperimento introduttivo

Si consideri un provino formato da un corpo conduttore prismatico omogeneo con le estremità collegate a un generatore stazionario¹ ed un amperometro orientato come in figura 5.1, tale quindi da misurare la corrente i_{AB} (sez. 3.7, p. 17)

Si prendano due punti A e B sulla superficie laterale del provino: essi identificano due sezioni trasversali S_A e S_B , dividendo così in tre parti il provino. Nelle due parti esterne le linee di corrente, inizialmente concentrate nei conduttori in ingresso e in uscita, si allargano e si distribuiscono sfruttando tutta la sezione trasversale del provino. Nella parte di provino intermedia ci si aspetta invece che le linee di corrente siano uniformemente distribuite e quindi parallele. Nei materiali più comuni ciò si verifica quando le lunghezze delle estremità del provino sono confrontabili con le dimensioni della sua sezione trasversale.

Si colleghi un voltmetro a questi due punti (sez. 4.6, p. 28) e sia l_v la linea orientata dello spazio lungo cui sono disposti i suoi cordoni.

Per come sono orientati, l'amperometro misura la corrente I_{AB} mentre il voltmetro misura la tensione U_{AB,l_v} . Si possono fare le seguenti osservazioni sperimentali:

- Mantenendo fissi i collegamenti del voltmetro ma variando la geometria dei suoi cordoni, si osserva che il valore indicato dallo strumento è costante, ovvero indipendente da l_v .
- La misura non cambia anche ponendo il puntale A dei cordoni del voltmetro su altri punti della sezione trasversale S_A ed il puntale B su altri punti della sezione trasversale S_B . La stessa cosa si verifica se i punti A e B sono interni alle due sezioni.
- Collegando mediante fili conduttori due piccole sfere conduttrici alle superfici S_A ed S_B , esse si caricano con una certa carica elettrica e la forza elettrica agente corrisponde esattamente alla forza elettrica coulombiana calcolabile a partire dalla distribuzione di cariche.

¹ Per il momento si consideri il generatore come un volume dello spazio sede di forze non conservative stazionarie che tendono ad accumulare le cariche positive dalla parte del morsetto positivo e le negative dalla parte opposta. Per una spiegazione più approfondita del generatore si veda il cap. 6.

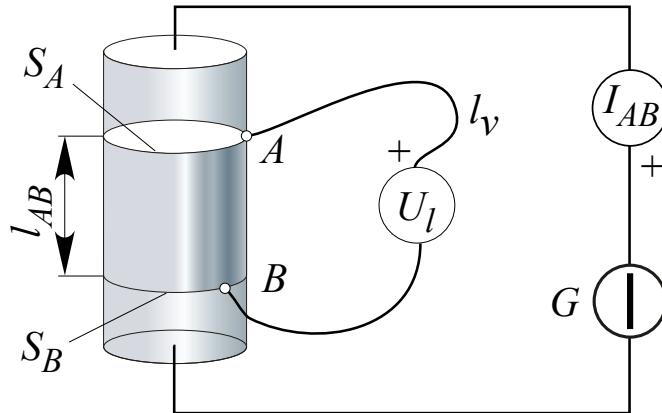


Figura 5.1: Esperimento per lo studio dei fenomeni resistivi.

Da quanto sopra si deduce che la forza elettrica specifica agente lungo i cordoni del voltmetro, \mathbf{F}_{es} , è conservativa e coincide con il campo elettrico coulombiano \mathbf{E}_c e infine che le superfici S_A ed S_B sono equipotenziali.²

Se vengono variati i parametri del generatore, variano la tensione e la corrente rilevati dal voltmetro e dall'amperometro. Rappresentando graficamente $U_{AB} = f(I_{AB})$ si osserva che, per molti materiali, le due grandezze sono legate da una proporzionalità diretta. In tal caso si parla di *materiale lineare*. Il fattore di proporzionalità, ovvero la pendenza della retta, viene definita *resistenza elettrica* R , avente la dimensione di V/A, unità a cui si dà il nome di *Ohm* (Ω).

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_{AB}}{I_{AB}} \quad (5.1)$$

Essendo presenti in questa formula due grandezze associate rispettivamente a una linea e una superficie orientata, risulta essenziale assumere una convenzione per fissare la loro orientazione mutua. La (5.1) è stata scritta con la convenzione dell'utilizzatore,, già usata in sez. 4.5.2, secondo la quale il riferimento per la tensione e per la normale alla superficie sono concordi. Si noti in particolare la corrispondenza dei pedici della corrente e per la tensione.

In modo duale si può pensare di rappresentare la corrente in funzione della tensione e ciò porta alla definizione della *conduttanza elettrica* G , misurata in *Siemens* (S):

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_{AB}}{U_{AB}} \quad (5.2)$$

Queste due relazioni sono due espressioni della medesima legge costitutiva perché legano la variabile di sorgente I alla variabile di configurazione U .

² L'assenza di forze di altro tipo agenti sulle cariche è verificata nelle ipotesi di materiale omogeneo, temperatura uniforme, assenza di fenomeni magnetici. Il venir meno di una o più di queste condizioni può comportare la presenza di forze non conservative dei tipi descritti in cap. 6. In tal caso il provino può essere modellato come un generatore.

Tabella 5.1: Valori di resistività di alcuni materiali lineari alla temperatura di 20° ($\Omega \cdot \text{m}$)

Materiale	resistività	Materiale	resistività
Argento	$1,62 \cdot 10^{-8}$	Rame	$1,68 \cdot 10^{-8}$
Allumino	$2,75 \cdot 10^{-8}$	Ferro	$9,68 \cdot 10^{-8}$
Acqua dolce	tra $2,00 \cdot 10^{-1}$ e $2,00 \cdot 10^3$	Acqua marina	$2,00 \cdot 10^{-1}$
Germanio	$4,00 \cdot 10^{-1}$	Silicio	$2,30 \cdot 10^3$
Vetro	$\approx 1 \cdot 10^{10} : 1 \cdot 10^{14}$	Quarzo	$1 \approx 10^{16}$
Superconduttori	0.0		

Cambiando le dimensioni del provino (mantenendo però la forma prismatica), si osserva che la resistenza misurata:

- è direttamente proporzionale alla distanza l_{AB} tra le sezioni S_A e S_B ;
- è inversamente proporzionale all'area della superficie della sezione trasversale $S_A = S_B$.

È pertanto possibile esprimere la resistenza come:

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \quad (5.3)$$

Dove il fattore di proporzionalità ϱ è la *resistività elettrica*, misurata in $\Omega \cdot \text{m}$. ϱ è una proprietà del materiale di cui è composto il resistore e può variare moltissimo tra un materiale e l'altro, come mostrato in Tab. 5.1. Come si vede dalla tabella, tra la resistività di un materiale e un altro possono esserci anche più di 20 ordini di grandezza.

I materiali a basso valore di resistività sono detti *conduttori*, quelli con i valori più elevati di resistività sono detti *dielettrici* o *isolanti*. Un materiale con resistività idealmente nulla è chiamato *conduttore ideale*: esso potrebbe essere sede di una corrente elettrica senza l'azione di alcuna forza sulle cariche. Un circuito chiuso di conduttore ideale potrebbe avere una corrente che si mantiene inalterata nel tempo senza alcuna dissipazione di energia. Gli unici materiali che presentano resistività nulla sono i superconduttori³, gli altri presentano sempre una resistività o una conducibilità non nulla.

Il reciproco della resistività elettrica $\sigma = 1/\varrho$ è chiamato *conducibilità elettrica*, avente le dimensioni di S/m . Un materiale avente idealmente conducibilità elettrica nulla è chiamato *dielettrico* o *isolante ideale*. L'unico mezzo che potrebbe essere considerato un dielettrico ideale è il *vuoto perfetto*. I materiali dielettrici reali hanno invece sempre una conducibilità non nulla, essendo sempre presenti nel materiale delle cariche, anche se in quantità stremamente esigue, libere di muoversi sotto l'azione di forze elettriche. Anche il vuoto reale può presentare una conducibilità non nulla a causa dell'emissione termoionica dei conduttori e di eventuali ioni.

³ La superconduttività si manifesta solo se il materiale si trova in determinate condizioni di temperatura, densità di corrente e campo magnetico. Se tali condizioni non sono rispettate il materiale subisce una transizione brusca e diventa in genere un mediocre conduttore.

La resistività di un dato materiale può dipendere da diverse cose. Innanzitutto si considera la *temperatura* che, per la maggior parte dei materiali, causa un aumento di resistività a causa delle aumentate oscillazioni degli atomi, che provoca un aumento della probabilità di interazione tra questi e le cariche mobili. In taluni materiali, quali ad esempio i semiconduttori non drogati o debolmente drogati, la resistività cala con la temperatura, dato che questa causa un aumento delle cariche libere e quindi una maggiore densità di corrente a parità di campo elettrico. La resistività può quindi essere espressa come funzione della temperatura: $\varrho = \varrho(T)$. Per temperature intermedie si ricorre spesso ad un'apprrossimazione lineare della resistività con la temperatura:

$$\varrho(T) \approx \varrho(T_0) + \left. \frac{d\varrho}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0) = \varrho(T_0) (1 + \alpha \Delta T)$$

Per i vari materiali sono disponibili delle tabelle che riportano la resistività a una o più temperature di riferimento T_0 e dei coefficienti α . Ad esempio, per il rame a 20° $\alpha = 1/235 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Un aumento della resistività viene causato, nei metalli, anche da una *lavorazione meccanica a freddo*, che ne perturba il reticolo cristallino e causa maggiori interazioni elettroni-ioni. Sempre nei metalli, il massimo della conducibilità si ha quando il metallo è molto puro, e può quindi avere un reticolo cristallino relativamente regolare. La presenza di piccole *impurezze* a metalli puri provoca una rapida crescita della resistività a causa della distorsione del reticolo cristallino.

5.2 Equazione costitutiva del campo di corrente

Generalizzando quanto visto precedentemente con il provino prismatico, consideriamo una zona dello spazio sede di un campo di corrente \mathbf{J} e di un corrispondente campo coulombiano \mathbf{E}_c . In tale regione le linee di corrente potranno essere non rettilinee e non uniformemente distribuite, in dipendenza della geometria della regione e della disposizione dei generatori responsabili del moto delle cariche. Supponiamo che nella zona di spazio di interesse non esistano sorgenti né pozzi della densità di corrente e sia quindi possibile considerare un tratto *infinitesimo* di tubo di flusso del vettore \mathbf{J} , τ , avente area della sezione trasversale S e lunghezza l *entrambe infinitesime*. Il materiale che la occupa la zona sia caratterizzato da una resistività ϱ costante ed uniforme. Ammettiamo infine che le due superfici d'estremità S_A ed S_B del tratto del tubo di flusso siano due superfici equipotenziali e sia I la sua corrente infinitesima (fig. 5.2). L'uniformità del materiale fa sì che le linee di corrente siano parallele alle linee del campo elettrico.

Indichiamo con \mathbf{u}_n il versore tangente alle linee di \mathbf{J} e contemporaneamente normale alle superfici equipotenziali S . La resistenza del tratto di tubo infinitesimo in esame è allora pari a $R = \varrho l / S$ e la tensione infinitesima U tra le due superfici S_A ed S_B vale $U = RI$. Tenendo presente che $I \approx \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n S$ e che $U \approx \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_n l$ si ricava:

$$\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_n l = \frac{\varrho l}{S} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n S$$

Semplificando, si ricava:

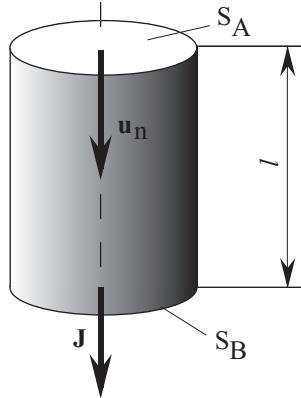


Figura 5.2: Schema di un tratto di tubo di flusso infinitesimo del vettore \mathbf{J} .

$$\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_n = \varrho \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n$$

Tenendo conto che, nelle ipotesi di uniformità fatte, \mathbf{u}_n è parallelo al vettore \mathbf{J} , si ottiene infine:

$$\mathbf{E}_c = \varrho \mathbf{J} \quad (5.4)$$

Questa legge viene chiamata *equazione costitutiva del campo di corrente*.

Quando il materiale, non è isotropo, ma è ancora lineare, la (5.4) non vale più, i vettori \mathbf{E}_c e \mathbf{J} possono non essere più paralleli ed il legame tra essi può essere espresso mediante una matrice di resistività o di conducibilità.

La (5.4) non vale inoltre se il tratto di tubo di flusso di \mathbf{J} si trova a cavallo di regioni dello spazio caratterizzate da differenti proprietà materiali. In tal caso si dimostra che la (5.4) vale solo per quanto riguarda la componente del campo lungo la direzione della corrente:

$$\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_J = \varrho J \quad (5.5)$$

La (5.4) esprime il campo coulombiano in funzione della densità di corrente. Se il materiale è uniforme è possibile invertire la relazione, ottenendo:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_c \quad (5.6)$$

Si veda anche sez. 7.6.1, p. 77 in cui viene esaminato il campo elettrico nello spazio dielettrico circostante i corpi percorsi da corrente.

5.3 I resistori

5.3.1 Resistore di forma generica

Il concetto di resistenza elettrica è stato ricavato partendo da un provino di forma prismatica. Generalizziamo il concetto considerando una regione di geometria qualsiasi di materiale resi-

stivo, caratterizzato da una resistività ρ , sede di campo di corrente e del corrispondente campo coulombiano. Ammettiamo che tale regione sia comunque sempre un tubo di flusso τ di \mathbf{J} delimitato da due superfici equipotenziali S_A ed S_B tali che $U_{AB} = \Delta V_{AB}$, con una portata I_{AB} . Tale oggetto è denominato *resistore*.

Si osserva che le condizioni per realizzare un resistore possono essere facilmente verificate anche in presenza di geometrie complesse mediante il rivestimento di un corpo conduttore con materiale isolante, in modo tale che le cariche siano costrette a muoversi all'interno del conduttore, non potendo attraversare l'isolante (Fig. 5.3). Rimangono non isolate solo le due superfici tappo del tubo di flusso S_A ed S_B , e queste devono essere equipotenziali. In tali condizioni la

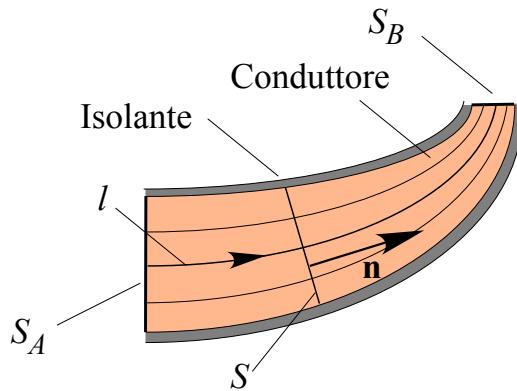


Figura 5.3: Resistore di forma generica come tubo di flusso del vettore \mathbf{J} ottenuto rivestendo un corpo conduttore con materiale isolante.

5.1 è ancora utilizzabile e si potrà quindi esprimere la resistenza:

$$R = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{\int_{A,l}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl}{\int_{S_A} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS} \quad (5.7)$$

o equivalentemente si può calcolare la conduttanza:

$$G = \frac{\int_{S_A} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS}{\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl}. \quad (5.8)$$

In queste espressioni l'integrale del campo coulombiano viene svolto *lungo una qualunque linea l interna al tubo di flusso*, che va da un qualsiasi punto A su S_A a un qualsiasi punto B su S_B (da ciò l'imposizione dell'equipotenzialità di queste due sezioni). Dualmente, l'integrale di superficie viene invece calcolato *su una qualsiasi superficie S che taglia il tubo di flusso* (da ciò l'imposizione che la regione sia un tubo di flusso). Il resistore di forma generica ha pertanto la stessa legge costitutiva che lega tensione e corrente. Quello che varierà, in funzione della sua geometria, sarà l'espressione della resistenza, anche a parità di materiale.

Casi particolari

Consideriamo due casi particolari che si possono verificare quando si studia un resistore di forma generica.

Nel primo caso supponiamo che in ogni punto del resistore sia possibile considerare una superficie trasversale S sulla quale il prodotto scalare $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ sia costante e \mathbf{J} sia ortogonale alla superficie⁴. In queste condizioni, scegliendo come linea l una linea del vettore \mathbf{E}_c la (5.7) diventa:

$$R = \int_{A,l}^B \frac{E_c}{JS} dl = \int_l \frac{\rho}{S} dl \quad (5.9)$$

Questa espressione può essere vista come la resistenza equivalente di una serie di infinite resistenze infinitesime, ciascuna calcolata con un'area S , variabile lungo l , e una lunghezza dl (Fig. 5.4 (a)).

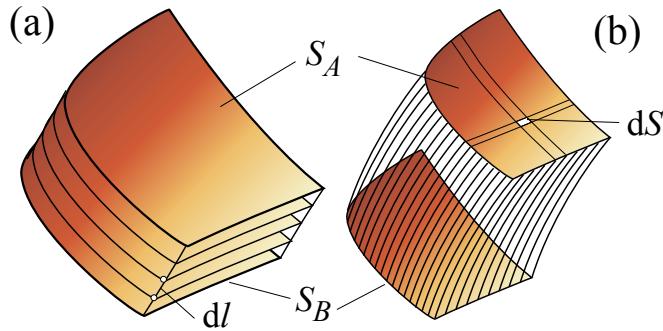


Figura 5.4: Resistore di forma generica come: (a) serie di resistori di lunghezza infinitesima dl ; (b) come parallelo di conduttanze di area infinitesima dS

Nel secondo caso si considera l'ipotesi duale, ossia che in ogni punto del resistore sia possibile considerare una linea l_{AB} del vettore \mathbf{E}_c lungo quale il prodotto scalare $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t$ sia costante. In queste condizioni, scegliendo come superficie trasversale S una superficie cui il vettore \mathbf{J} è ovunque ortogonale, la (5.8) diventa:

$$G = \int_S \frac{dS}{\rho l} \quad (5.10)$$

Questa espressione può essere vista come la conduttanza equivalente di un parallelo di infinite conduttanze infinitesime, ciascuna calcolata con una lunghezza l , variabile su S , e un'area dS (Fig. 5.4 (b)).

5.3.2 Resistore filiforme

Il resistore filiforme ha le dimensioni della sezione trasversale del conduttore trascurabili rispetto alla sua lunghezza e al raggio di curvatura del suo asse. Il resistore sia costituito da un materiale

⁴ Si osserva che la costanza del prodotto scalare $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ su S non implica la costanza del vettore \mathbf{J} su S : la densità di corrente può benissimo cambiare direzione da punto a punto.

uniforme con resistività ϱ . Con tali ipotesi diventa irrilevante la distribuzione della densità di corrente sulla sezione trasversale e si può considerare la densità di corrente media $\mathbf{J} \approx I\mathbf{u}_t/S$. Il campo elettrico medio sulla sezione sarà anch'esso tangente all'asse del conduttore e il suo modulo varrà $E_C = \varrho J = \varrho I/S$, assumendo $\mathbf{E}_c \parallel \mathbf{J}$. La resistenza del resistore filiforme di lunghezza l varrà pertanto:

$$R = \frac{1}{I} \int_l E_c dl = \frac{1}{I} \int_l \frac{\varrho I}{S} dl = \frac{\varrho l}{S} \quad (5.11)$$

Tale espressione coincide quindi con la resistenza del resistore prismatico (5.3). La novità importante rispetto ad esso è la possibilità che il resistore sia curvilineo. Un tale modello si adatta quindi molto bene per esprimere ad esempio la resistenza di un avvolgimento in filo o di un tratto di cavo o di linea aerea, anche con geometria complessa.

5.3.3 Resistore cilindrico

Il resistore cilindrico ha in realtà la forma di una *corona cilindrica* ed è formato dallo spazio racchiuso tra una superficie cilindrica interna S_A , di raggio r_A , ed una superficie cilindrica coassiale S_B , di raggio r_B (Fig. 5.5). Siano S_A e S_B equipotenziali. Sia h la lunghezza assiale,

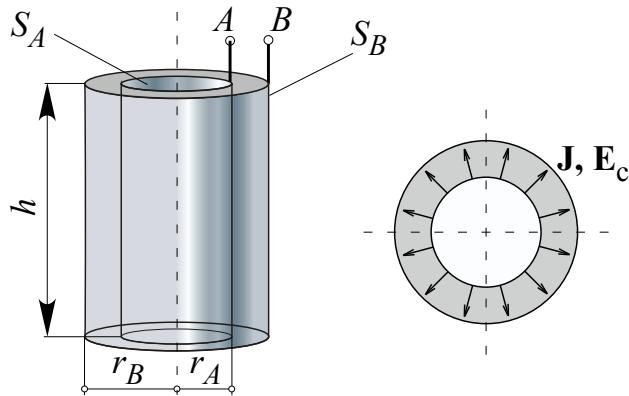


Figura 5.5: Resistore cilindrico. Sinistra: vista del resistore. Destra: vista in sezione.

uguale per le due superfici, e sia lo spazio del resistore riempito con un materiale uniforme avente resistività ϱ .

In queste condizioni il resistore ha simmetria assiale e pertanto i vettori \mathbf{J} e quindi \mathbf{E}_c sono radiali, quindi i loro moduli sono funzioni solo del raggio e pertanto costanti su ciascuna superficie cilindrica coassiale $S(r)$ di raggio generico $r_A \leq r \leq r_B$.⁵

Su tale superficie possiamo calcolare la portata in corrente del tubo di flusso cilindrico:

$$I(S_A) = I(S_r) = I(S_B) = I_{AB} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = (2\pi r h) J.$$

⁵ Si noti che la costanza del modulo non implica la costanza del vettore: i vettori in questione cambiano direzione da punto a punto, mantenendosi ovunque radiali, quindi non sono costanti al variare del punto sulla superficie.

Da questa espressione si osserva che, essendo I costante $\forall r$, all'aumentare di r deve calare J . Dall'ultima espressione di ricava che $J = J_r = I_{AB}/(2\pi rh)$ e, sfruttando la legge costitutiva $\mathbf{E}_c = \varrho\mathbf{J}$, si ottiene:

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} E_c dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\varrho I_{AB}}{2\pi hr} dr = \frac{\varrho I_{AB}}{2\pi h} \ln \left(\frac{r_B}{r_A} \right)$$

Dato che l'ultima espressione dipende solo dal raggio iniziale e finale e non dal percorso scelto per collegarli, la tensione U_{AB} è una differenza di potenziale $V_{AB} = V_A - V_B$. Il generico potenziale $V(r)$ si trova dunque tramite la relazione

$$V(r) = V_A - \frac{\varrho I_{AB}}{2\pi h} \ln \left(\frac{r}{r_A} \right) = -\frac{\varrho I_{AB}}{2\pi h} \ln(r) + C, \quad (5.12)$$

dove $C = V_A + \frac{\varrho I_{AB}}{2\pi h} \ln(r_A)$ è una costante additiva, e rappresenta il potenziale del campo cilindrico di corrente.

Infine, la resistenza di un resistore cilindrico è:

$$R = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{\varrho}{2\pi h} \ln \left(\frac{r_B}{r_A} \right) \quad (5.13)$$

si noti che se $r_B \rightarrow \infty$ allora la differenza di potenziale e quindi la resistenza tendono all'infinito. Si osservi inoltre che tale relazione poteva essere direttamente ottenuta applicando la (5.9).

La condizione di equipotenzialità di S_A e S_B è un aspetto delicato del modello: tale equipotenzialità può essere ragionevolmente assunta se ad esempio queste due superfici corrispondono a due strati di ottimo conduttore e il materiale tra esse racchiuso ha una resistività nettamente maggiore. In caso contrario può diventare importante la geometria delle linee di corrente nel tratto che va dal morsetto della superficie e il punto di essa in cui le linee di corrente entrano nel materiale intermedio.

5.3.4 Resistore sferico

Il resistore sferico ha la forma di una *calotta sferica* ed è formato dallo spazio racchiuso tra una superficie sferica interna S_A , di raggio r_A e una superficie sferica concentrica S_B , di raggio r_B (Fig. 5.6). Siano S_A e S_B equipotenziali e sia lo spazio del resistore riempito con un materiale uniforme avente resistività ϱ . In queste condizioni il resistore ha simmetria centrale e pertanto i vettori \mathbf{J} e \mathbf{E}_c sono radiali, quindi sono funzioni solo del raggio e il loro modulo è costante su ciascuna superficie sferica concentrica $S(r)$ di raggio generico $r_A \leq r \leq r_B$. Su di essa la portata in corrente del tubo di flusso sferico è:

$$I(S_A) = I(S_B) = I(S_r) = I_{AB} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 J.$$

Come nel caso del resistore cilindrico, si osserva che, essendo I costante $\forall r$, all'aumentare di r deve calare J . Tuttavia, mentre nel caso del resistore cilindrico essa cala come $1/r$, qui cala

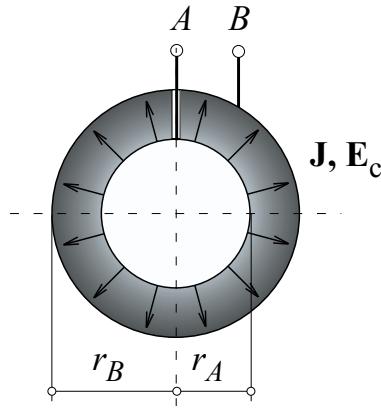


Figura 5.6: Resistore sferico.

più velocemente, come $1/r^2$. Dall'ultima espressione di ricava che $J = J_r = I_{AB}/(4\pi r^2)$ e, sfruttando la legge costitutiva $\mathbf{E}_c = \varrho \mathbf{J}$, si ottiene:

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \int_{r_A}^{r_B} E_c \, dr = \frac{\varrho I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Come nel caso del resistore cilindrico, la tensione dipende solamente dagli estremi r_A ed r_B . Analogamente, quindi, il generico potenziale $V(r)$ (potenziale del campo sferico di corrente) si trova come:

$$V(r) = V_A + \frac{\varrho I}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{\varrho I}{4\pi r} + C, \quad (5.14)$$

dove $C = V_A - \varrho I / (4\pi r_A)$ è la costante di indeterminazione.

Infine, la resistenza di un resistore sferico è:

$$R = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{\varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (5.15)$$

Si osservi inoltre che tale relazione poteva essere direttamente ottenuta applicando la (5.9).

Si noti che se $r_B \rightarrow \infty$ la differenza di potenziale e quindi la resistenza tendono ad un valore finito. In particolare la resistenza vale:

$$R_\infty = \frac{\varrho}{4\pi r_A} \quad (5.16)$$

Ciò è possibile perchè, contrariamente al caso del resistore cilindrico, al crescere del raggio la densità di corrente diminuisce più rapidamente di quanto non cresca il raggio stesso.

La condizione di simmetria centrale è un aspetto delicato del modello: con questa geometria infatti, *per collegare elettricamente la superficie interna, è necessario isolare il filo* dal materiale resistivo intermedio (lo spazio bianco attorno alla connessione di S_A in Fig. 5.6). Questo perturba localmente il campo, che non è più radiale. Si assume tuttavia che tale effetto sia trascurabile.

Il dispersore di terra

Il terreno è un conduttore elettrico, con una resistività in generale non uniforme e molto variabile, in dipendenza della sua composizione geologica. Essendo comunque un conduttore, se collegiamo al terreno un generatore per mezzo di due puntali, altrimenti detti *dispersori di terra*, in esso si verifica un passaggio di corrente che tende a distribuirsi su tutto il terreno, con una densità di corrente che diminuisce con la distanza dai due puntali. La Fig. 5.7 illustra qualitativamente il fenomeno. Osserviamo che

- le linee di corrente tendono ad invadere tutto lo spazio di terreno: al limite, esse vanno all'infinito;
- la distanza tra le linee di corrente aumenta col crescere della distanza dai due dispersori: ciò corrisponde ad una diminuzione della densità di corrente (si ricorda che il tracciamento di queste linee di corrente avviene per uguali portate in corrente tra l'una e l'altra): al limite, all'infinito la densità di corrente è nulla;
- le superfici equipotenziali, ortogonali alle linee di corrente, sono più concentrate nella zona vicina ai dispersori (si ricorda che il tracciamento di queste superfici avviene per uguali incrementi di potenziale tra l'una e l'altra).

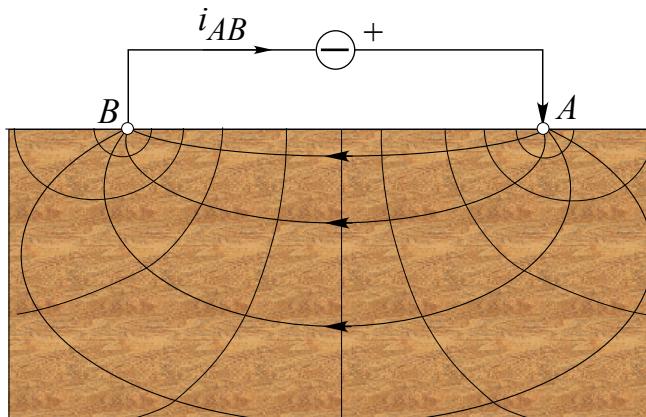


Figura 5.7: Generatore collegato al terreno mediante due dispersori: andamento qualitativo delle linee di corrente e delle superfici equipotenziali.

L'espressione (5.16) può essere un punto di partenza per uno studio quantitativo, anche se molto approssimato, dei *dispersori di terra* e del campo di corrente nel terreno. Supponiamo che il terreno sia un materiale omogeneo illimitato con resistività ρ e che i due dispersori siano *semisferici*. Possiamo anche pensare che, *se la distanza tra i due dispersori è molto maggiore della loro dimensione caratteristica*, le linee di corrente in uscita da un dispersore vadano all'infinito e da esso giungano all'altro dispersore. Essendo semisferico anziché sferico, ciascun dispersore presenta una resistenza doppia rispetto alla (5.16) e pertanto la tensione tra i due dispersori,

applicata dal generatore, vale:

$$U_{AB} = 2(R_{A\infty} + R_{B\infty})I_{AB} \approx \frac{\varrho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right) I_{AB} \quad (5.17)$$

Come si può osservare dalla figura, le superfici equipotenziali intersecano la superficie del terreno che, pertanto, non è equipotenziale. Quando le correnti disperse sono rilevanti, come ad esempio in caso di contatto accidentale a terra di un conduttore dell'alta tensione o della dispersione di correnti di guasto in un grosso impianto di terra, *lungo il terreno si possono avere notevoli differenze di potenziale anche su distanze confrontabili con la distanza di un passo*. Ciò può mettere in pericolo l'incolinità delle persone in prossimità dei dispersori.

La resistenza R_∞ di un dispersore viene denominata *resistenza di terra*. Il suo valore può essere ricavato mediante una misura della differenza di potenziale sulla superficie lungo la direzione congiungente i due dispersori (Fig. 5.8): collegando uno dei puntali del voltmetro ad uno dei dispersori e spostando progressivamente l'altro puntale verso l'altro dispersore, si può tracciare il potenziale (a meno di una costante additiva). Come si vede in figura, se i due dispersori sono sufficientemente lontani, il potenziale varia molto in prossimità di ciascun dispersore (zona in cui le linee di corrente e le superfici equipotenziali sono molto vicine), per tendere ad un valore quasi costante a grande distanza da entrambi i dispersori. Tale zona può essere vista come "zona all'infinito". La differenza di potenziale misurata in questa zone corrisponde quindi alla *tensione totale di terra*, pari a $U_t = |R_\infty I|$.

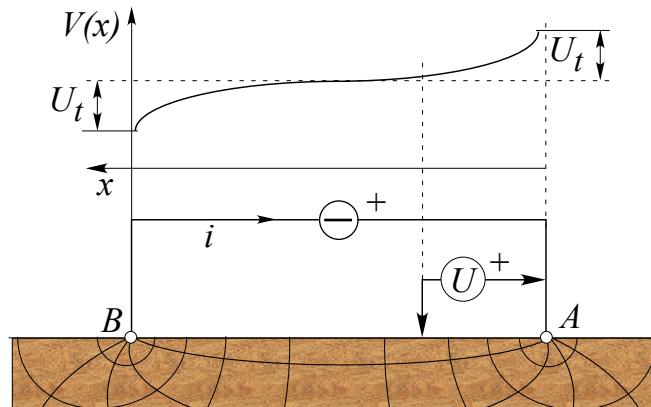


Figura 5.8: Misura del potenziale del terreno e determinazione della tensione di terra U_t dei dispersori.

Nella realtà i dispersori non sono semisferici ma, molto più semplicemente, sono realizzati con picchetti o pali infissi, o conduttori stesi in scavi e ricoperti da terreno. La loro resistenza non è pertanto corrispondente alla (5.16) che, comunque, può fornire almeno l'ordine di grandezza della resistenza, variabile tra qualche Ω ad alcune decine di Ω .

5.4 Aspetti energetici

Nel resistore la contemporanea presenza di cariche in moto e di forze agenti su di esse comporta lo svolgimento di un lavoro. In particolare, tale lavoro viene svolto in un tubo di flusso del vettore \mathbf{J} in presenza di una forza conservativa. L'esperienza ci dimostra che tale lavoro viene completamente trasformato in calore in modo irreversibile. Tale effetto è detto *effetto Joule*. Per il calcolo della potenza si possono considerare le espressioni riportate in sezione 4.5.2, p. 25. Dalla (4.13) ricaviamo la potenza elettrica specifica svolta dal campo nel punto P per sostenere il fenomeno resistivo, potenza che viene convertita in potenza termica specifica:

$$P_J(P) = \mathbf{J}(P) \cdot \mathbf{E}_c(P) = \varrho J^2 \quad (\text{W/m}^3), \quad (5.18)$$

mentre dalla (4.15) otteniamo la potenza complessivamente svolta nel resistore:

$$P_{AB} = U_{AB} I_{AB} \quad (\text{W}). \quad (5.19)$$

Introducendo in questa espressione le relazioni di proporzionalità tra U ed I appena discusse, si può infine scrivere:

$$P_{AB} = U_{AB} I_{AB} = R I_{AB}^2 = G U_{AB}^2.$$

Tale valore è sempre positivo e ciò indica che il componente è un componente passivo che non è in grado di erogare potenza elettrica ma solo di assorbirne.

I resistori dunque tendono a riscaldarsi. Esiste perciò una potenza limite che in essi può essere dissipata senza danneggiare il componente.

5.5 Rifrazione delle linee di corrente

Sia assegnata una regione τ dello spazio, sede di un campo di corrente, in cui, per semplicità, sia presente il solo campo elettrico coulombiano. Supponiamo che il mezzo che riempie τ non sia omogeneo. Esaminiamo allora il comportamento del campo di corrente e del campo elettrico in presenza di una superficie di discontinuità tra regioni occupate da due materiali diversi. Con riferimento alla figura 5.9, consideriamo la superficie di interfaccia tra i mezzi 1 e 2, aventi conducibilità elettriche rispettivamente σ_1 e σ_2 . Evidenziamo un volumetto infinitesimo τ^* molto schiacciato, tale quindi che l'area delle due superfici S_1 ed S_2 sia molto maggiore dell'area della superficie laterale S_l . Consideriamo ora la legge di continuità della carica elettrica (3.17) che,

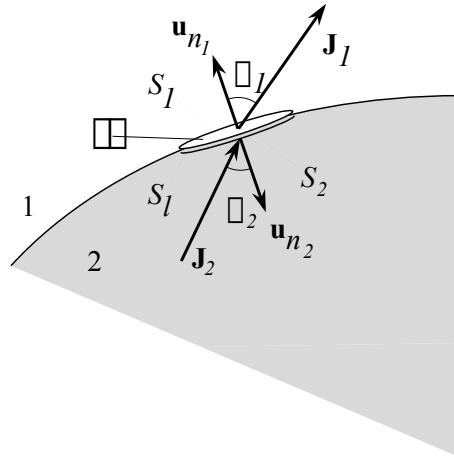


Figura 5.9: Superficie di discontinuità tra due mezzi diversi 1 e 2: volumetto infinitesimo τ^* usato per esprimere la legge di continuità della carica elettrica.

scritta in forma integrale per il volume τ^* , è:

$$\oint_{\partial\tau^*} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS = -\frac{dQ_{int}}{dt} \quad (5.20)$$

Dove \mathbf{u}_n è il versore normale alla frontiera $\partial\tau^*$ della regione considerata. Ammettendo ora la densità di carica costante nel tempo ed escludendo per ipotesi la presenza di correnti superficiali, il secondo membro della (5.20) è zero. Per le ipotesi fatte sulla geometria di τ^* , possiamo riscrivere la (5.20) in questo modo:

$$[\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{u}_{n_1} + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{u}_{n_2}] \cdot S \approx 0$$

essendo trascurabile il contributo di S_l al flusso di \mathbf{J} attraverso $\partial\tau^*$. Considerando ora i due angoli α_1 and α_2 esistenti tra i vettori \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 e le rispettive normali, si può concludere:

$$J_1 \cos \alpha_1 = J_{1n} = J_2 \cos \alpha_2 = J_{2n}. \quad (5.21)$$

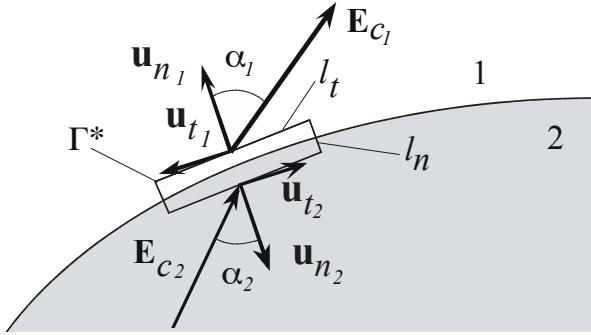


Figura 5.10: Superficie di discontinuità tra due mezzi diversi 1 e 2: linea chiusa infinitesima Γ^* usata per esprimere la conservatività del campo coulombiano.

Pertanto, nelle ipotesi fatte, in corrispondenza di una superficie di discontinuità tra materiali a resistività diverse, le componenti di \mathbf{J} normali alla superficie si conservano. Per studiare cosa succede alle componenti tangenziali di \mathbf{J} si deve considerare anche il comportamento del campo coulombiano. A tal fine si consideri la linea chiusa *infinitesima* Γ^* di figura 5.10. Tale linea è formata da due tratti tangenziali l_t e due tratti normali l_n alla superficie di discontinuità tra i materiali. Costruiamo Γ^* in modo che la lunghezza dei tratti normali sia molto minore di quella dei tratti tangenziali. Poichè il campo coulombiano è conservativo, è nulla la sua circolazione lungo Γ^* .

Per la particolare forma di Γ^* , circolazione può essere così scritta:

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl \approx [\mathbf{E}_{c1} \cdot \mathbf{u}_{t1} + \mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{u}_{t2}] \cdot l_t = 0$$

All'interno dei due mezzi 1 e 2 il vettore \mathbf{E}_c è parallelo a \mathbf{J} , per la (5.4), allora i due angoli α_1 and α_2 sono anche gli angoli tra i vettori \mathbf{E}_{c1} e \mathbf{E}_{c2} e le rispettive normali, pertanto si può scrivere:

$$E_{c1} \sin \alpha_1 = E_{c1t} = E_{c2} \sin \alpha_2 = E_{c2t} \quad (5.22)$$

Pertanto *in corrispondenza di una superficie di discontinuità tra materiali a resistività diverse, le componenti di \mathbf{E}_c tangenti alla superficie si conservano*. Esprimendo ora le componenti normali della densità di corrente in funzione delle componenti tangenziali otteniamo:

$$J_{1n} = \frac{J_{1t}}{\tan \alpha_1} \quad J_{2n} = \frac{J_{2t}}{\tan \alpha_2}$$

Sostituendo queste due espressioni nella (5.21) otteniamo infine:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad (5.23)$$

Questa relazione è la *legge di rifrazione delle linee di corrente e del campo elettrico* sulle superfici di discontinuità tra materiali conduttori diversi.

A seconda dei valori delle conducibilità elettriche e dell'angolo di incidenza α_2 , l'angolo α_1 varia. Ad esempio, ammettendo $0 < \alpha_2 < \pi/2$, se $\sigma_1 \gg \sigma_2$, si ha $\tan \alpha_1 \gg 1$, quindi $\alpha_1 \approx \pi/2$. Le linee di corrente tendono quindi ad entrare in direzione più vicina alla direzione tangenziale nei materiali a conducibilità maggiore, e in direzione più vicina alla normale in quelli a conducibilità più bassa.

5.6 Equazione di Laplace per il campo di corrente stazionario

L'equazione di continuità della carica elettrica in forma differenziale può così essere scritta:

$$\operatorname{div} (\mathbf{J}) = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad (5.24)$$

Consideriamo ora una regione dello spazio τ con conducibilità σ , sede di un campo di corrente, dove la forza elettrica specifica è data dal solo campo coulombiano. Tenendo conto dell'equazione costitutiva del campo di corrente (5.4) e del legame esistente tra \mathbf{E}_c ed il potenziale scalare V , si può scrivere:

$$\operatorname{div} (-\sigma \operatorname{grad} V) = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad (5.25)$$

Supponendo che σ sia uniforme e costante in tutta la regione, la (5.25) può così essere riscritta:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (V) = \nabla^2 V = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad (5.26)$$

Quest'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine lega direttamente la variabile sorgente ρ_c alla variabile di configurazione V , tenendo conto delle proprietà materiali del mezzo che riempie τ . Se si ammette che ρ_c sia una funzione nota del tempo e del posto, il secondo membro della (5.26) è noto e l'equazione è l'*equazione di Poisson*. Ammettendo ora che la densità di carica si mantenga ovunque costante nel tempo (come, ad es. in regime stazionario), il secondo membro della (5.26) è nullo, e l'equazione è l'*equazione di Laplace*:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (5.27)$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono dette *funzioni armoniche* e godono di interessanti proprietà, tra le quali:

- una funzione armonica in una regione τ dello spazio ammette i suoi valori minimo e massimo sempre in punti della frontiera $\partial\tau$ della regione;
- una funzione armonica nell'intero spazio, se è ovunque limitata è costante, altrimenti assume valori illimitati all'infinito;

5.6.1 Condizioni al contorno per l'equazione di Laplace per il campo di corrente

L'analisi matematica insegna che la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea può essere espressa come somma di una soluzione particolare e di una soluzione dell'equazione omogenea associata. In quest'ultima compaiono delle costanti che vengono determinate imponendo le condizioni al contorno sulla soluzione generale.

Limitiamo lo studio al caso dell'equazione di Laplace (5.27). In tal caso è noto che la sua soluzione è unica quando sia assegnato il valore della funzione incognita sulla frontiera $\partial\tau$ della regione dello spazio τ dove si vuol calcolare la soluzione. Tale impostazione viene definita *problema di Dirichlet*. Nel caso in esame, ciò corrisponde ad assegnare il valore del potenziale in ogni punto di $\partial\tau$. Non sempre però, tale formulazione del problema è possibile o la più utile. Esistono altre due formulazioni del problema della soluzione dell'equazione di Laplace comunemente incontrate nello studio delle configurazioni di campo elettromagnetico:

- il *problema di Neumann*, quando si assegna sulla frontiera la derivata della funzione nella direzione normale alla superficie (nel nostro caso si assegna $\partial V/\partial n$);
- il *problema misto*, quando si assegna su una parte della frontiera la derivata della funzione nella direzione normale alla superficie, mentre nella restante parte si assegna il valore della funzione.

Si può dimostrare che il problema di Neumann porta ad una soluzione determinata a meno di una costante additiva, mentre il problema misto dà generalmente soluzione unica.

Tenendo conto della legge costitutiva (5.4), le condizioni al contorno possono allora essere così espresse in alternativa, per ciascuna parte della superficie di frontiera $\partial\tau_k$ della regione considerata:

- Assegnando il potenziale: $V(P), \quad \forall P \in \partial\tau_k$
- Assegnando la componente normale di densità di corrente:

$$J_n(P) = \sigma E_{cn} = -\sigma \frac{\partial V(P)}{\partial n}, \quad \forall P \in \partial\tau_k \quad (5.28)$$

In particolare, il valore di J_n sarà nullo su tutte le superfici di interfaccia tra conduttore ed isolante.

In presenza di più regioni conduttrici tra loro collegate, aventi differenti proprietà materiali, la soluzione dell'equazione (5.27) viene di norma affrontata scomponendo, se necessario, la regione in esame in un numero finito di sottoregioni, ciascuna con proprietà materiali omogenee. Le equazioni (5.21) e (5.22) permettono allora di stabilire un legame tra le incognite nelle interfacce tra le varie regioni. Tenendo ora conto di quanto ricavato in sezione 5.5, possiamo affermare che, ognqualvolta si assegna il valore della derivata normale di V , si assegna anche la componente normale di densità di corrente sulla superficie d'interfaccia. Si deve però precisare che *le (5.21) e (5.22) valgono nell'ipotesi che entrambe le conducibilità elettriche siano non nulle, quindi non sono applicabili all'interfaccia tra un conduttore ed un isolante*. In questo

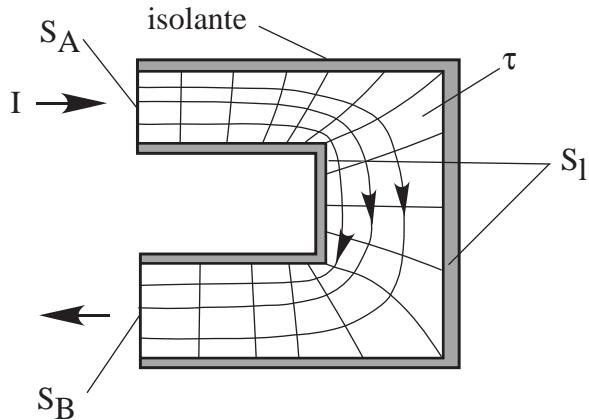


Figura 5.11: Regione conduttrice τ sede di un campo di corrente, con linee di corrente e superfici equipotenziali.

caso, infatti, si hanno in generale accumuli di cariche sulla superficie del conduttore, con conseguente discontinuità delle componenti normali di \mathbf{E}_c , come verrà mostrato a proposito dei corpi conduttori in regime elettrostatico.

Consideriamo ad esempio la regione conduttrice τ di figura 5.11. In essa la corrente entra dalla faccia S_A ed esce dalla faccia S_B . Il materiale dentro la regione sia conduttore, mentre sia isolante il materiale esterno.

Nel disegno non è rappresentata la regione conduttrice τ' in contatto con τ in corrispondenza di S_A ed S_B , che permette alle linee di corrente di richiudersi. In tale regione saranno presenti dei generatori, ovvero dei dispositivi atti a dar origine alla corrente elettrica nei mezzi conduttori, come meglio illustrato nel cap. 6.

Su tutta la superficie S_l , pari al contorno di τ escluse S_A ed S_B , si impone la condizione $\partial V / \partial n = 0$. Per quanto riguarda le superfici S_A e/o S_B , si possono fissare il valore del potenziale a valori noti $V = V_A \quad \forall P \in S_A$ e/o $V = V_B \quad \forall P \in S_B$, oppure si può imporre una distribuzione nota di densità di corrente $J = J_A(P) = -\sigma \partial V / \partial n \quad \forall P \in S_A$ e/o $J = J_B(P) \quad \forall P \in S_B$. La scelta del tipo di condizioni da porre dipende dal problema da analizzare e dalla natura della regione conduttrice esterna τ' . Imporre un certo valore di potenziale su una superficie comporta, in genere, una non uniforme distribuzione di densità di corrente su di essa. Reciprocamente, imporre un'assegnata distribuzione di densità di corrente comporta che la superficie non sia più equipotenziale.

Nella figura 5.11 sono riportati gli andamenti qualitativi delle linee di corrente (si noti come tendano ad addensarsi sul lato concavo di τ) e delle superfici equipotenziali, limitatamente alla loro parte interna a τ . Le superfici equipotenziali non sono ortogonali alla superficie S_l , segno che esiste una componente di campo normale sulla superficie del conduttore.

Capitolo 6

Generatori elettrici

Nelle parti precedenti si è introdotto il *generatore elettrico* come un dispositivo atto a provocare la circolazione di una corrente elettrica in un percorso chiuso conduttore, senza tuttavia ulteriori precisazioni. In questo capitolo si esamineranno in dettaglio i generatori elettrici, mostrando come la loro esistenza è strettamente collegata all'esistenza di forze non conservative agenti sulle cariche.

6.1 Necessità dell'azione di forze non conservative

Si consideri una regione τ sede di un campo di corrente, in cui sia presente solo il campo coulombiano e si supponga che tutte le linee di \mathbf{J} siano chiuse in tale regione. Sia il materiale un ordinario conduttore con resistività non nulla. Data la presenza del campo di corrente, nella regione viene dissipata una potenza che, per la (5.18), può essere espressa come:

$$P_\tau = \int_\tau J^2 \rho d\tau > 0.$$

Ciò è in contrasto con la prima ipotesi, in conseguenza della quale il lavoro del campo coulombiano svolto lungo un percorso chiuso (corrispondente alle linee di corrente) è nullo e quindi anche corrispondente la potenza.

Questa conclusione può anche essere tratta considerando la potenza svolta in un tubo di flusso chiuso da una forza conservativa (sez. 4.5.2, pag. 25), che comporta necessariamente una potenza complessivamente svolta nulla.

Devono quindi esistere in τ anche delle forze non conservative, dette *forze generatrici* \mathbf{F}_g , che possono essere di due tipi:

- *elettrico*: in tal caso si può definire la forza elettrica specifica generatrice, come fatto in sez. 4.1:

$$\mathbf{E}_g = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_g(q)}{q} \quad (\text{V/m}) \quad (6.1)$$

- *non elettrico*: in tal caso la forza non dipende dalla carica, ma si usa spesso la forza specifica equivalente così definita:

$$\mathbf{E}'_g = \frac{\mathbf{F}_g}{q} \quad (\text{V/m}), \quad (6.2)$$

dove q è la carica presente sui portatori di carica soggetti alla forza generatrice.

In generale la forza specifica totale agente su una carica è esprimibile come somma dei corrispondenti contributi dei vari tipi di forze: $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_g + \mathbf{E}'_g$.

6.1.1 Forze specifiche generatrici elettriche

Nella sezione 9.3.1, pag. 121, si vedrà in dettaglio che la forza elettrica specifica generatrice è di due tipi:

- il *campo elettrico indotto*: $\mathbf{E}_i = -\partial \mathbf{A} / \partial t$;
- la *forza elettrica specifica mozionale*: $\mathbf{E}_m = \mathbf{v}_l \times \mathbf{B}$.

La forza elettrica specifica totale è pertanto:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_m + \mathbf{E}'_g. \quad (6.3)$$

Osservazioni:

- dato che la definizione di *campo vettoriale* implica la dipendenza esclusiva dal tempo e dalle tre dimensioni spaziali, ne consegue che \mathbf{E}_m non è un campo, in quanto dipende anche dalla velocità del punto in movimento, \mathbf{v}_l ;
- la somma del campo coulombiano \mathbf{E}_c e del campo indotto \mathbf{E}_i forma invece un campo vettoriale, detto *campo elettrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_i$, di cui \mathbf{E}_c è la componente irrotazionale e \mathbf{E}_i quella solenoidale. In generale, quindi, il campo elettrico non è conservativo.

I generatori elettrici basati sulle forze generatrici di tipo elettromagnetico sono attualmente i più importanti generatori nelle reti elettriche, coprendo buona parte del fabbisogno d'energia. Questi generatori sono macchine rotanti con rotore e statore in ferro in cui viene sfruttato il principio della *conversione elettromeccanica dell'energia*, secondo il quale il campo magnetico è solamente un mezzo per convertire la potenza meccanica all'albero in potenza elettrica negli avvolgimenti di indotto. Il principale tipo di generatore elettrico è la macchina sincrona, in cui il rotore, alimentato da una corrente continua, crea un campo magnetico rotante che induce negli avvolgimenti di statore (avvolgimenti di indotto) la forza generatrice.

6.1.2 Forze specifiche generatrici non elettriche

Le forze generatrici di tipo non elettrico derivano da fenomeni fisici che, a livello macroscopico, sono descritti con modelli non elettrici e che sono presenti solo in presenza di determinati

6.2. LEGGE COSTITUTIVA DEL CAMPO DI CORRENTE IN PRESENZA DI FORZE SPECIFICHE GENERATRICI

materiali e in specificate condizioni di temperatura, deformazione, pressione ecc.. Tuttavia, considerando modelli più dettagliati a livello microscopico, in termini di interazioni molecolari e atomiche, in generale anche queste forze sono riconducibili a fenomeni elettrici che, comunque, non considereremo, limitandoci a un modello macroscopico.

Per questa stessa ragione, spesso la distribuzione spaziale delle reali forze generatrici a livello microscopico può essere radicalmente diversa da quella delle corrispondenti forze a livello macroscopico, al punto che, nella maggior parte dei casi, si rinuncia a una descrizione locale, limitandoci agli effetti globali di queste forze, descritti in sezione 6.5 mediante la *forza elettromotrice*, definita qui nel seguito in sezione 6.3.

6.2 Legge costitutiva del campo di corrente in presenza di forze specifiche generatrici

Nel resistore, in presenza del solo campo coulombiano, si è trovata la legge costitutiva $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_c$ (sez. 5.2, pag. 34) o, in modo duale, $\mathbf{E}_c = \rho \mathbf{J}$. Osserviamo che, nel resistore, \mathbf{E}_c rappresenta la totale forza specifica presente, che è di tipo elettrico. Se oltre ad \mathbf{E}_c sono presenti altre forze specifiche, com'è nel generatore, risulta naturale ritenere che la presenza di una densità di corrente sia dovuta ancora alla forza specifica totale:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{tot} = \sigma (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_g + \mathbf{E}'_g) \quad (6.4)$$

o in modo equivalente:

$$\mathbf{E}_{tot} = \rho \mathbf{J} \quad (6.5)$$

6.3 La forza elettromotrice

Come fatto in sezione 4.2, pag. 20, dalla definizione di forza specifica generatrice passiamo a considerare il suo lavoro lungo una linea. Indicando con \mathbf{E}_{tot_g} la totale forza generatrice (comprendente quindi sia quella di tipo elettrico \mathbf{E}_g che quella di tipo non elettrico \mathbf{E}'_g), è possibile definire la *forza elettromotrice (f.e.m.)* lungo una linea:

$$e_{BA} \stackrel{def}{=} \int_{A,l}^B \mathbf{E}_{tot_g} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (V)$$

come si può notare, la forza elettromotrice, nonostante il nome, non è un forza ma ha le dimensioni di una tensione. L'attributo "forza" ha ragioni storiche.

Riguardo alla forza elettromotrice, valgono le seguenti osservazioni:

- come nel caso della tensione (4.4, pag. 20), anche la f.e.m. è associata ad una linea orientata internamente ed è variabile di configurazione;
- come nel caso della tensione, la f.e.m. dipende in generale dal percorso l , oltre che dai punti iniziale A e finale B ;

- nel caso della tensione si prendono in considerazione tutte e sole le forze specifiche di tipo elettrico, comprendendo pertanto anche il campo coulombiano; per la f.e.m. rientrano nel calcolo sia forze specifiche generatrici elettriche che non elettriche, mentre non compare il campo coulombiano;
- l'espressione della f.e.m. è simile a quella della tensione ma, nella simbologia, i pedici sono invertiti: nella f.e.m. e_{BA} il primo pedice corrisponde al punto di arrivo del percorso di integrazione (B) ed è marchiato con il morsetto positivo (fig. 6.1).

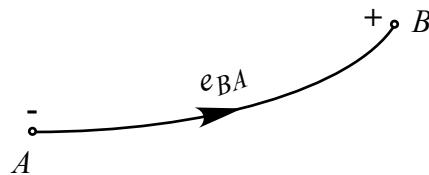


Figura 6.1: Convenzioni per la forza elettromotrice.

6.4 Il generatore di forza elettromotrice

In elettrotecnica un generatore è considerato come un tratto di tubo di flusso di \mathbf{J} , sede di una forza specifica generatrice \mathbf{E}_{tot_g} conservativa nel generatore e con le superfici di ingresso S_A e di uscita S_B entrambe equipotenziali. Si evidenzia il fatto che, anche se si ammette che la forza sia conservativa nel generatore, questa non potrà esserlo in una regione di spazio più grande che include il generatore. Ammetteremo inoltre che il generatore sia caratterizzato da una sua resistività non nulla.

6.4.1 Funzionamento a vuoto

Diremo che un generatore è *a vuoto* se la sua corrente I_{AB} è nulla. Essendo \mathbf{J} solenoidale e la forza generatrice conservativa nel generatore, ne ricaviamo che la densità di corrente deve essere nulla in ogni punto del generatore, pertanto:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{tot_g}) = 0.$$

Dato che $\sigma \neq 0$ la forza specifica totale sarà nulla:

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{tot_g} = 0.$$

È possibile integrare la forza specifica totale lungo una linea l interna al generatore, che unisce

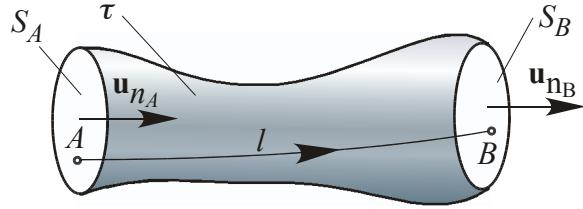


Figura 6.2: Generatore a vuoto e percorso di integrazione della forza specifica totale.

un punto \$A \in S_A\$ ad un punto \$B \in S_B\$ (fig. 6.2), ottenendo:

$$\int_{A,l}^B \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \int_{A,l}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl + \int_{A,l}^B \mathbf{E}_{tot_g} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = 0. \quad (6.6)$$

Il primo integrale del secondo membro corrisponde alla differenza di potenziale \$\Delta V_{AB}\$, mentre il secondo è la f.e.m. \$e_{BA}\$. Si noti che, avendo supposto \$S_A\$ ed \$S_B\$ equipotenziali, la scelta dei punti \$A\$ e \$B\$ è ininfluente. Sostituendo si ha quindi:

$$\Delta V_{AB} + e_{BA} = 0,$$

ovvero:

$$\Delta V_{BA} = e_{BA} \quad (6.7)$$

il che significa che *a vuoto la differenza di potenziale ai morsetti è pari alla f.e.m.* se si adottano per esse riferimenti in cui i pedici sono gli stessi.

6.4.2 Funzionamento a carico

A carico la corrente è non nulla, pertanto \$\mathbf{J} \neq 0\$ e, integrando la forza elettrica specifica totale ed utilizzando la legge costitutiva 6.4, avremo:

$$\int_{A,l}^B \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \int_{A,l}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl + \int_{A,l}^B \mathbf{E}_{tot_g} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \int_{A,l}^B \varrho \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (6.8)$$

Il significato dell'ultimo integrale può essere compreso ricordando la 5.7 ed attribuendo ad \$R\$ il significato di *resistenza interna del generatore* \$R_i\$, che descrive l'effetto delle collisioni dei portatori di carica all'interno del generatore. È importante notare che la resistenza interna al generatore non è calcolabile semplicemente come rapporto tra la tensione ai capi del generatore e la corrente che lo attraversa in quanto è necessario conoscere anche il termine \$e_{AB}\$. A carico potremo pertanto scrivere:

$$\Delta V_{BA} = e_{BA} - R_i I_{AB}. \quad (6.9)$$

Si noti che, in tale relazione si è considerato il versore \mathbf{u}_n che orienta la sezione trasversale concordemente con il riferimento per la f.e.m. (figura 6.2). Tale convenzione è la convenzione del generatore, già descritta in sezione 4.5.2, pag. 25.

Considerando ora l'ultimo integrale nella (6.8), si vede che, apparentemente, si sta integrando la densità di corrente lungo una linea. Ciò è in contrasto con la naturale associazione della densità di corrente con una superficie vista in sez. 3.5.1, p. 14. In questo integrale però la densità di corrente viene moltiplicata per la resistività, e ciò altera completamente la natura della variabile che, da variabile di sorgente \mathbf{J} diventa una variabile di configurazione $\varrho\mathbf{J}$ che, come la forza elettrica specifica, è invece associata a una linea.

6.4.3 Aspetti energetici

Moltiplicando la 6.9 per la corrente I_{AB} e tenendo conto delle convenzioni studiate a proposito della potenza svolta in un tubo di flusso di \mathbf{J} (sezione 4.5.2, pag. 25) si ottiene il seguente bilancio delle potenze:

$$\Delta V_{BA} I_{AB} = e_{BA} I_{AB} - R_i I_{AB}^2, \quad (6.10)$$

dove: $\Delta V_{BA} \cdot I_{AB}$ rappresenta la potenza *assorbita* dal campo coulombiano nel generatore; $e_{BA} I_{AB}$ rappresenta la potenza *svolta* dalla forza generatrice nel generatore e $R_i I_{AB}^2$ rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule. La potenza svolta dal campo coulombiano sarà poi svolta in un'altra regione dello spazio, così d'avere una totale potenza da esso svolta/assorbita nulla.

6.4.4 Misure di tensione nel generatore

Esaminiamo ora l'aspetto della misura della tensione in presenza di un generatore. Colleghiamo i cordoni del voltmetro (posto sempre all'esterno del generatore) a due punti A e B su S_A e S_B . Consideriamo due possibili disposizioni dei cordoni del voltmetro:

- cordoni completamente all'esterno del generatore (fig. 6.3 a)),
- cordoni all'interno del generatore, con due brevi tratti all'esterno per il collegamento del voltmetro (fig. 6.3 b)).

In entrambe le disposizioni il voltmetro misura la tensione $U_V = \int_{B,l_v}^A \mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{u}_t \, dl$ lungo i cordoni del voltmetro. La seconda disposizione ha evidentemente valore solo didattico. In entrambi i casi supponiamo che la forza generatrice sia nulla fuori del generatore, mentre non sarà in generale nullo il campo coulombiano.

Iniziamo ora l'analisi considerando il *generatore a vuoto*.

- Se i cordoni del voltmetro sono esterni al generatore, lungo i cordoni la forza elettrica specifica è $\mathbf{F}_{es} = \mathbf{E}_c$. Dunque l'indicazione del voltmetro è $U_{V,lv} = u_{BA,lv} = \Delta V_{BA} = e_{BA}$ e questa misura è valida indipendentemente dalla natura elettrica o non elettrica della forza specifica generatrice.

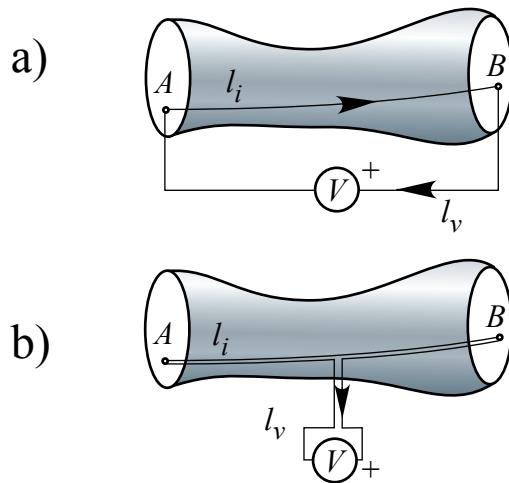


Figura 6.3: Generatore a vuoto: misura della tensione. a) con i cordoni esterni al generatore, b) con i cordoni parzialmente interni al generatore.

- Se i cordoni del voltmetro sono interni al generatore, si trascuri il contributo della loro parte esterna al generatore (i due tratti esterni siano così vicini da ricevere contributi opposti anche da parte del campo coulombiano). È necessario in questo caso distinguere tra forze generatrici di tipo elettrico e non elettrico.
 - Se le forze generatrici sono di tipo elettrico, l'indicazione del voltmetro corrisponderà all'integrale della totale forza elettrica agente lungo la parte interna dei cordoni, $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{tot,g} = \varrho \mathbf{J} = 0$, pertanto l'indicazione del voltmetro sarà nulla.
 - Se le forze generatrici sono di tipo non elettrico, l'indicazione del voltmetro corrisponderà alla sola parte elettrica della forza specifica, ovvero il campo coulombiano, ottenendo quindi ancora $U_{V,lv} = u_{BA,lv} = \Delta V_{BA} = e_{BA}$.

Consideriamo ora il *generatore a carico*.

- Se i cordoni del voltmetro sono esterni al generatore, lungo i cordoni la $\mathbf{F}_{es} = \mathbf{E}_c$. Dunque l'indicazione del voltmetro è $U_{V,lv} = u_{BA,lv} = \Delta V_{BA} = e_{BA} - R_i I_{AB}$. Anche questa misura è valida indipendentemente dalla natura elettrica o non elettrica della forza specifica generatrice.
- Se i cordoni del voltmetro sono interni al generatore è ancora necessario in questo caso distinguere tra forze generatrici di tipo elettrico e non elettrico.
 - Se le forze generatrici sono di tipo elettrico, l'indicazione del voltmetro corrisponderà all'integrale della totale forza elettrica agente lungo i cordoni, $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{tot,g} = \varrho \mathbf{J} \neq 0$, pertanto l'indicazione del voltmetro sarà $U_{V,lv} = -R_i I_{AB}$.

- Se le forze generatrici sono di tipo non elettrico, l'indicazione del voltmetro corrisponderà alla sola parte elettrica della forza specifica, ovvero il campo coulombiano, ottenendo quindi ancora $U_{V,lv} = u_{BA,lv} = \Delta V_{BA} = e_{BA} - R_i I_{AB}$.

6.5 Generatori di forza elettromotrice di tipo non elettrico

Tra i generatori di forza specifica generatrice di tipo non elettrico si ricordano:

Le pile e gli accumulatori Nelle pile e accumulatori sono presenti catene di conduttori metallici e soluzioni elettrolitiche. Tali generatori si basano sulla diversa tendenza dei vari metalli a passare in soluzione o a precipitare da essa, in corrispondenza di *elettrodi* immersi nelle soluzioni stesse.

Consideriamo ad esempio il caso della *pila Daniell*. La pila consiste fondamentalmente in due contenitori contenenti l'uno una soluzione di acqua e solfato di rame (CuSO_4) e l'altra una soluzione di solfato di zinco (ZnSO_4). In questi due contenitori sono posti rispettivamente un elettrodo in rame e uno in zinco, corrispondenti ai poli positivo e negativo della pila. I due contenitori sono posti in contatto elettrolitico mediante un *ponte salino*, costituito da un gel di solfato o nitrato di potassio, che permette lo scambio selettivo degli ioni con le due soluzioni elettrolitiche.

All'*anodo*, il polo positivo, il rame in soluzione tende ad aderire all'elettrodo acquisendo due elettroni dall'elettrodo, che così si carica positivamente: $\text{Cu}^{++} + 2e \rightarrow \text{Cu}$. Al *cattodo*, il polo negativo, invece lo zinco dell'elettrodo tende a passare in soluzione, cedendo due elettroni all'elettrodo che si carica negativamente $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{++} + 2e$. In tal modo le due soluzioni elettrolitiche tendono a sbilanciarsi, tendendo a crescere la percentuale di ioni SO_4^{--} dalla parte del rame e Zn^{++} dalla parte dello zinco. Questo viene compensato perché gli ioni potassio K^+ e solfato vengono ceduti selettivamente dal ponte salino rispettivamente alla soluzione di solfato di rame e di solfato di zinco, riequilibrando le cariche ma cambiandone la composizione chimica. Tale ponte salino consente quindi anche il passaggio di cariche elettriche tra i due comparti della pila, senza però mettere in contatto diretto le due soluzioni.

Collegando i due elettrodi si assiste a un passaggio di cariche: gli elettroni in eccesso sull'elettrodo di zinco tendono a raggiungere l'elettrodo di rame permettendo così la prosecuzione della soluzione/precipitazione dei due metalli nelle rispettive soluzioni.

Forze elettromotrici termoelettriche Ponendo in contatto conduttori metallici di diversa natura, si crea una forza elettromotrice in corrispondenza ad ogni giunzione (*coppia termoelettrica*) che dipende dalla temperatura cui si trova la giunzione. Realizzando un circuito chiuso isotermo si vede che la totale f.e.m. sul circuito è nulla ma, se le temperature delle giunzioni sono diverse, le f.e.m. non si compensano più e ne nasce una f.e.m. risultante (*effetto Seebeck*). L'entità di tali f.e.m. è della frazione di volt e la potenza ricavabile da tali generatori è trascurabile, ma il fenomeno può essere sfruttato per la realizzazione di sensori di temperatura o, in condizioni critiche, per la generazione di piccole potenze (ad es. nelle sonde spaziali destinate allo spazio esterno, dove non è sufficiente l'energia

fotovoltaica). Il fenomeno è reversibile: alimentando con una corrente un circuito come quello appena descritto, si osserva il raffreddamento di alcune giunzioni e il riscaldamento di altre (*effetto Peltier*). Questo fenomeno viene utilizzato per la realizzazioni di piccoli apparati refrigeranti.

Forze elettromotrici piezoelettriche Certi cristalli sono caratterizzati da una spiccata dissimmetria nella distribuzione delle cariche a livello del reticolo atomico. Per effetto di una forza meccanica esterna, le deformazioni del reticolo possono portare all'affioramento di distribuzioni superficiali di carica con la corrispondente comparsa di differenze di potenziale anche rilevanti tra le due superfici del cristallo. Collegando queste superfici con dei conduttori, ne nasce una corrente transitoria. Alla cessazione dell'applicazione della forza e con il conseguente ripristino della geometria originale del reticolo, si assiste al passaggio di una corrente inversa che annulla la compensazione transitoria della distribuzione delle cariche e ripristina la configurazione originale delle cariche nel cristallo indeformato. Sorgenti di f.e.m. di questo tipo trovano impiego ad esempio nella realizzazione di accenditori di bruciatori di gas o in sensori di deformazione.

Forze elettromotrici fotoelettriche Illuminando cristalli semiconduttori, drogati in modo non omogeneo, con radiazioni di opportuna lunghezza d'onda, l'energia dei fotoni incidenti è sufficiente a separare un certo numero di elettroni dagli atomi fissi, creando *coppie elettrone-lacuna*, a tutti gli effetti cariche libere positive e negative disponibili per la conduzione ed accumulandoli in corrispondenza delle due estremità del materiale.

Capitolo 7

Fenomeni dielettrici

7.1 Campo e potenziale prodotti da una distribuzione nota di carica in un mezzo uniforme illimitato

Per iniziare lo studio dei fenomeni dielettrici si generalizza l'espressione del campo coulombiano e del potenziale scalare generati da una carica puntiforme (eq. 4.9 e 4.11, pag. 23). Si vogliono infatti determinare campo coulombiano e potenziale generati in un mezzo uniforme, ovvero con comportamento lineare, omogeneo e isotropo, da una distribuzione nota di cariche.

Sappiamo che il campo coulombiano e il potenziale generati da una carica puntiforme q_0 posta in un punto P_0 dello spazio, valgono rispettivamente:

$$\mathbf{E}_c(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r, \quad V(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r} + C, \quad (7.1)$$

dove r è il modulo del vettore $\overline{P_0 P}$, \mathbf{u}_r è il suo versore, ϵ è una costante dipendente dal materiale (quindi uniforme) e C una costante di indeterminazione.

Considerando ora una distribuzione nota di carica in una regione τ dello spazio, espressa mediante la densità volumica di carica $\varrho_c(P_0)$, possiamo suddividere la regione τ in un certo numero N di sottoregioni molto piccole τ_i , ciascuna caratterizzata una sua carica q_i ed una sua densità di carica praticamente uniforme, cosicché $q_i = q(\tau_i) \approx \varrho_c(P_i)\tau_i$, con $P_i \in \tau_i$ (Fig. 7.1). Il campo e il potenziale in un punto P dello spazio, generati da queste N cariche praticamente puntiformi, sarà determinato applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, possibile grazie all'uniformità del mezzo:

$$\mathbf{E}_c(P) \approx \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \mathbf{u}_{r_i}, \quad V(P) \approx \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_i} + C,$$

dove r_i è il modulo del generico vettore $\overline{P_i P}$, \mathbf{u}_{r_i} è il suo versore. Per $N \rightarrow \infty$ e $\max\{\tau_i\} \rightarrow 0$ le due sommatorie tendono a due integrali di volume:

$$\mathbf{E}_c(P) = \int_{\tau} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r \, d\tau, \quad V(P) = \int_{\tau} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\epsilon r} \, d\tau + C, \quad (7.2)$$

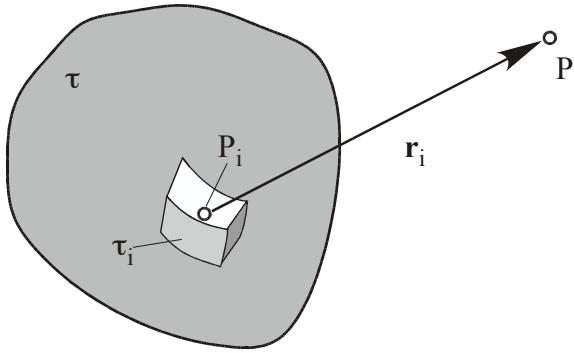


Figura 7.1: Suddivisione di una regione dello spazio τ sede della carica elettrica in più sottoregioni τ_i che contribuiscono individualmente al campo risultante.

Se, al posto di considerare una distribuzione volumica di carica, si considerano una distribuzione di carica su una superficie S , o lungo una linea l , si ottengono similmente:

$$\mathbf{E}_c(P) = \int_S \frac{\sigma_c(P_0)}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r dS, \quad V(P) = \int_S \frac{\sigma_c(P_0)}{4\pi\epsilon r} dS + C, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{E}_c(P) = \int_l \frac{\lambda_c(P_0)}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r dl, \quad V(P) = \int_l \frac{\lambda_c(P_0)}{4\pi\epsilon r} dl + C, \quad (7.4)$$

Le espressioni 7.2–7.4 possono coesistere se sono compresenti distribuzioni volumiche, superficiali e lineari di carica. È infine importante precisare che:

- in questo modello tutto il materiale è uniforme, quindi anche la regione dove si trovano le cariche è caratterizzata dalle stesse proprietà dielettriche, differendo dal resto dello spazio solo per la presenza delle cariche;
- se il materiale non è uniforme, ma ad esempio caratterizzato da più zone, ciascuna caratterizzata da una sua costante dielettrica ϵ , questa soluzione non è più valida, ma si deve ricorrere alle tecniche descritte in sezione 7.6.

7.1.1 Calcolo del campo e potenziale nei punti della regione delle cariche

Quando il punto di calcolo del campo è all'interno della regione dove si trovano le cariche, le funzioni integrande nelle (7.2-7.4) diventano singolari quando $r \rightarrow 0$. Si può mostrare che:

- nel caso di una distribuzione tridimensionale gli integrali (7.2) convergono e sono utilizzabili per il calcolo di campo e potenziale.¹

¹ Per mostrare la convergenza degli integrali nel caso tridimensionale consideriamo l'espressione del campo \mathbf{E}_c nella (7.2), in cui la funzione integranda diverge più velocemente quando $r \rightarrow 0$. Se converge l'integrale del campo converge anche quello del potenziale. Scomponiamo il dominio di integrazione τ in una piccola sfera τ_p di raggio r

7.1. CAMPO E POTENZIALE PRODOTTI DA UNA DISTRIBUZIONE NOTA DI CARICA IN UN MEZZO UNIFORME

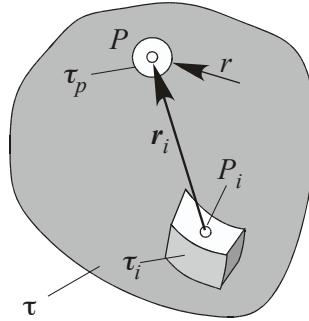


Figura 7.2: Calcolo del campo in un punto P interno alla distribuzione delle cariche.

- nel caso di una distribuzione bidimensionale gli integrali (7.3) non sono utilizzabili su tutti i punti della distribuzione di carica; il potenziale si mantiene continuo e limitato, mentre il campo è discontinuo all'avvicinarsi della distribuzione di cariche e non definito nei punti della frontiera della distribuzione.
- nel caso di una distribuzione monodimensionale gli integrali (7.4) non sono utilizzabili; sia il potenziale che il campo divergono all'avvicinarsi della distribuzione di cariche.

La ragione per cui gli integrali non sono utilizzabili nel caso di distribuzione bi e monodimensionale ha motivazioni fisiche. Infatti, quando il punto di calcolo è nella regione delle cariche, viene per forza a mancare l'ipotesi che consente l'approssimazione bi e monodimensionale, essendo in realtà sempre tridimensionale la distribuzione della carica.

attorno al punto di calcolo e nel resto del dominio $\tau - \tau_p$ (Fig. 7.2). Dalla (7.2) possiamo scrivere:

$$\mathbf{E}_c(P) = \int_{\tau-\tau_p} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{u}_r d\tau + \int_{\tau_p} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{u}_r d\tau$$

La funzione integranda nel primo integrale non è ora più singolare, quindi questo integrale è limitato. Nell'ipotesi di densità di carica ϱ_c limitata ovunque in τ , ponendo $M = \max |\varrho_c(P_0)|$, $P_0 \in \tau_p$, e tenendo conto che il versore ha modulo unitario, per il secondo integrale si ha:

$$\left| \int_{\tau_p} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{u}_r d\tau \right| \leq \frac{M}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau_p} \frac{1}{r^2} d\tau$$

Il secondo integrale in quest'espressione può essere calcolato usando un sistema locale di coordinate sferiche ρ, ϑ, ϕ , per cui l'elemento di volume vale $d\tau = \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\phi$. Pertanto

$$\left| \int_{\tau_p} \frac{\varrho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{u}_r d\tau \right| \leq \frac{M}{4\pi\varepsilon} \int_{\rho=0; \vartheta=0; \phi=0}^{\rho=r; \vartheta=\pi; \phi=2\pi} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\phi = \frac{Mr}{\varepsilon}.$$

Facendo tendere a zero il raggio r , si vede come l'integrale in questione vada a zero.

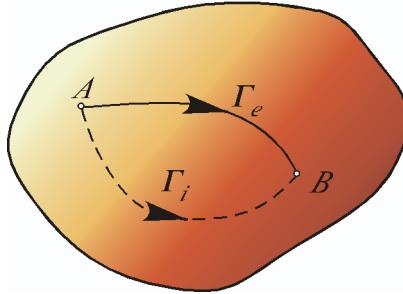


Figura 7.3: Corpo conduttore in regime elettrostatico: percorso superficiale l_e e interno l_i tra due punti A e B della superficie del corpo.

7.2 Corpi conduttori in regime elettrostatico

7.2.1 Induzione elettrica nei corpi conduttori

Come descritto nel capitolo 5, in regime elettrostatico e in assenza di forze elettriche specifiche generatrici, un corpo conduttore è caratterizzato dalla legge costitutiva $\mathbf{E}_c = \varrho \mathbf{J}$ valida per ogni punto *interno* al corpo conduttore. Poiché in regime elettrostatico le cariche non si muovono, sarà $\mathbf{J} = 0$ in ogni punto del corpo conduttore, quindi anche $\mathbf{E}_c = 0$ in ogni punto interno. Consideriamo allora una coppia di punti qualsiasi A e B del corpo, anche situati sulla sua superficie esterna (Fig. 7.3). Essendo nullo \mathbf{E}_c all'interno, avremo:

$$\Delta V_{AB} = \int_{A,l_i}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \int_{A,l_i}^B \varrho \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = 0$$

per ogni linea interna al corpo. Essendo \mathbf{E}_c conservativo, sarà nullo anche il corrispondente integrale lungo la linea l_e sulla superficie del corpo:

$$\Delta V_{AB} = \int_{A,l_e}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t \, dl = 0. \quad (7.5)$$

Tuttavia la legge costitutiva del campo di corrente non è applicabile lungo questa linea, essendo i punti della linea proprio su una superficie di discontinuità materiale. Poiché comunque la 7.5 vale per ogni coppia di punti sulla superficie, deve essere nulla la sua funzione integranda $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t$, ovvero *il campo coulombiano, se non nullo, è ortogonale alla superficie del conduttore in regime elettrostatico in ogni suo punto* e la superficie del conduttore è quindi una superficie equipotenziale.

Inserire un conduttore in un campo elettrostatico preesistente altera in generale la geometria delle superfici equipotenziali e delle linee del campo coulombiano. Ad esempio, in Fig. 7.4 a sinistra è riportata una distribuzione qualitativa delle superfici equipotenziali e delle linee del vettore generata da una distribuzione data di cariche, mentre a destra è riportata la configurazione risultante dall'inserimento del corpo conduttore in presenza della medesima distribuzione.

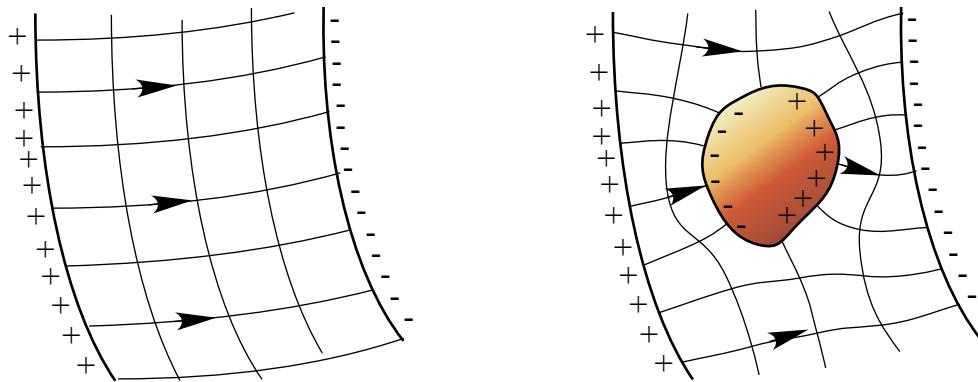


Figura 7.4: Un corpo conduttore inserito in un campo elettrostatico ne altera la geometria delle superfici equipotenziali e delle linee del vettore.

Si osservano i seguenti fatti.

- Nel conduttore si crea un movimento transitorio di cariche che si fermano sulla sua superficie, non potendo abbandonare il conduttore. Questo squilibrio di cariche genera un campo coulombiano locale nel conduttore che, all'interno del conduttore, contrasta il campo generato dalle cariche esterne. Il movimento delle cariche nel conduttore prosegue fino a completa compensazione del campo esterno in ogni punto interno del conduttore. Per un buon conduttore i tempi richiesti da tale fenomeno sono estremamente brevi (per approfondimento vedi sez. 7.7).
- Sulla superficie del conduttore si manifesta così una densità superficiale di carica σ_c di segno negativo dove le linee del vettore entrano nel conduttore e positivo dove escono.
- Se il potenziale a cui il conduttore si porta è intermedio tra quello delle due superfici esterne, il conduttore corrisponderà ad una superficie equipotenziale intermedia, che tocca il conduttore nei punti dove la densità superficiale di carica è nulla. Tali punti sono anche punti dove è nullo (quindi non è solo ortogonale al corpo) anche il campo coulombiano.

Il fenomeno sopra descritto viene chiamato *induzione elettrostatica dei conduttori*.

7.2.2 Esperienza di Faraday

Si considerino due calotte conduttrici cave, apribili, una interna all'altra, separate da uno strato di materiale isolante. Alle due calotte siano collegati due morsetti A e B , accessibili dall'esterno.

Dopo avere collegato i morsetti A e B , si collochi una carica nota q in una posizione fissata dello spazio interno alle due calotte (fig. 7.5). Sia per esempio $q > 0$.

La carica positiva richiama delle cariche libere negative sulla superficie interna della calotta interna ed una distribuzione di cariche di segno opposto si viene a creare sulla superficie esterna della calotta esterna. Siano rispettivamente q_i e q_e i valori risultanti delle due cariche. Aprendo il collegamento tra A e B potremo separare le due cariche in modo permanente e misurale.

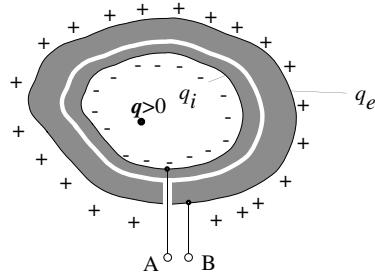


Figura 7.5: Induzione elettrica nei corpi conduttori cavi: schema della calotta e della disposizione di cariche indotte da una carica positiva posta nella cavità interna

Si vede sperimentalmente che, *qualunque sia la forma delle due calotte, qualunque sia il materiale isolante che riempie lo spazio interno ed esterno alle calotte (può essere anche il vuoto), e qualunque sia il valore e la localizzazione della carica (purché all'interno delle calotte), il valore di q_e è pari a q .*

Si può ripetere l'esperimento collocando la carica, anziché all'interno, all'esterno delle due calotte (fig. 7.6). In tal caso si osserva che *lo spostamento di cariche viene indotto sulla sola superficie esterna della calotta esterna, mentre la superficie interna della calotta interna non è sede di alcuna distribuzione superficiale di carica.* Ne segue quindi che sono nulle *entrambe* le totali cariche q_i e q_e . Generalizzando, si può affermare che in uno corpo conduttore in regime elettrostatico è nulla ovunque la carica interna al corpo.

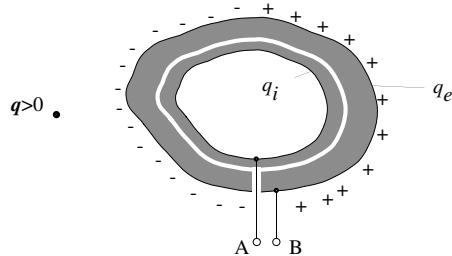


Figura 7.6: Induzione elettrica nei corpi conduttori cavi: schema della calotta e della disposizione di cariche indotte da una carica positiva posta all'esterno della calotta esterna

7.2.3 Vettore induzione elettrica

Quanto rilevato sperimentalmente in sezione 7.2.2 è una *proprietà globale*, associata ad una regione conduttrice cava o piena. Vediamo ora come sviluppare una descrizione *locale* del fenomeno dell'induzione elettrica. A tal fine consideriamo una sonda realizzata affiancando due piccoli piatti conduttori, separati da un sottile strato isolante (fig. 7.7). I piatti siano muniti di morsetti, in modo da poterli collegare assieme o lasciare isolati a seconda della necessità. Si posiziona ora la sonda in vari punti P dello spazio sede di un campo elettrico e si definisca la sua

orientazione esterna mediante il versore normale al piano dei due piatti conduttori, \mathbf{n} . Assumeremo per convenzione come *superficie positiva*, la superficie S^+ che si trova dal lato terminale del versore \mathbf{n} . Supporremo inoltre che *le dimensioni dei due piattini siano molto più piccole delle dimensioni geometriche caratteristiche del campo in esame*, così da poter supporre pressoché uniforme il campo nella zona della sonda.

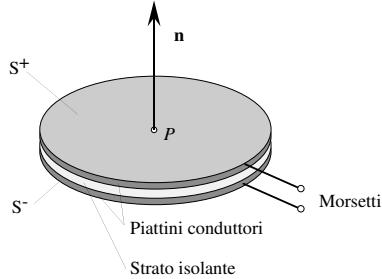


Figura 7.7: Schema della sonda formata da due piattini conduttori collegabili elettricamente

Eperimentalmente si vede che:

1. Posizionando la sonda in vari punti dello spazio, mantenendo fissa l'orientazione della sonda, si misura sul piattino positivo una carica ψ funzione del punto P .
2. Per un assegnato punto P dello spazio, facendo ruotare la sonda, il valore della carica ψ dipende in modo sinusoidale dalla direzione tra il versore normale alla sonda, \mathbf{n} , ed una direzione prefissata dello spazio.
3. Per assegnati punti dello spazio ed orientazione della sonda, sostituendo i piatti con altri di area diversa, purchè sempre molto piccoli, si vede che la carica ψ è proporzionale all'area dei due piattini, S .

Queste evidenze sperimentalistiche possono essere tutte simultaneamente spiegate ammettendo che la carica ψ che si separa su ciascun piattino della sonda sia esprimibile come il *flusso* di un opportuno vettore, denominato *vettore induzione elettrica* o *vettore spostamento elettrico* \mathbf{D} .

Ammettendo che, data la piccolezza delle dimensioni dei piattini, anche il vettore induzione elettrica sia pressoché uniforme nella zona della sonda, il flusso in esame può così essere espresso:

$$\psi \approx \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot S \quad (7.6)$$

Da questa espressione si ricava la definizione del vettore induzione elettrica:

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\psi}{S} \quad (7.7)$$

Dato un certo punto dello spazio, ripetendo la misura di ψ lungo tre direzioni mutuamente ortogonali, è quindi possibile ricavare le tre componenti di \mathbf{D} .

Si può ora riconsiderare l'esperienza di Faraday descritta in 7.2.2 considerando l'insieme delle due calotte, interna ed esterna, come formato da uno strato di N sonde affiancate, uguali

a quella sopra descritta, avendo cura che i piattini ricoprano completamente la superficie chiusa (fig. 7.8).

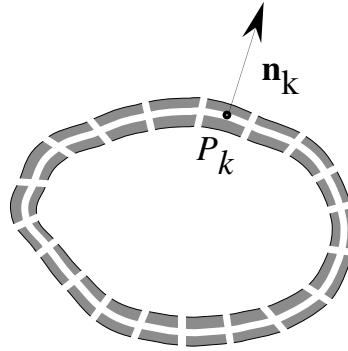


Figura 7.8: Schema delle due calotte considerate come l'unione di più sonde affiancate, che ricoprono l'intera superficie.

La totale carica q_e separata sulla superficie esterna delle calotte è pari alla somma delle cariche ψ_k separate sui piatti positivi delle sonde:

$$q_e = \sum_{k=1}^N \psi_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{D}(P_k) \cdot \mathbf{n}_k S_k \quad (7.8)$$

Considerando ora un numero N di sonde che tende all'infinito, avendo cura che la massima delle loro aree tenda a zero, la (7.8) si trasforma in questo integrale:

$$q = \int_{\partial\tau} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (7.9)$$

dove τ rappresenta una regione dello spazio (nel nostro caso corrispondente al volume racchiuso dalle due calotte) e $\partial\tau$ la sua superficie esterna.

Tale espressione costituisce la *legge di Gauss in forma integrale*, la quale afferma che *il flusso del vettore \mathbf{D} attraverso una superficie chiusa è pari alla totale carica racchiusa dalla superficie*.

Applicando alla (7.9) il teorema della divergenza (B.10, pag. 180), si ricava che

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_c \quad (7.10)$$

Questa relazione, detta *legge di Gauss in forma differenziale*, mette in evidenza come le sorgenti del vettore \mathbf{D} siano i punti dove è presente una *densità di carica libera* positiva, mentre i pozzi sono zone a densità di carica libera negativa. Più avanti (sezione 7.8.4) si vedrà come gli effetti del campo elettrico sui materiali dielettrici sono in alcuni casi interpretabili come dovuti ad una distribuzione volumica di cariche equivalenti di polarizzazione avente densità ϱ_p (eq. 7.45). Tale densità non compare nella (7.10), pertanto possiamo concludere che *le sorgenti del vettore \mathbf{D} sono solo le cariche libere*.

Se la distribuzione di cariche libere racchiuse nel volume τ è bidimensionale o monodimensionale, nella (7.9) un integrale di superficie, rispettivamente di linea (3.7) prenderà il posto dell'integrale di volume. Sempre in queste ipotesi, non vale più la legge di Gauss in forma differenziale (7.10) non essendo calcolabile la divergenza.

7.3 Equazione costitutiva nei dielettrici

Si consideri un'assegnata, nota, distribuzione di cariche nello spazio. Si vuole ora approfondire l'effetto del materiale che riempie lo spazio sul campo elettrico \mathbf{E} (non necessariamente formato dal solo campo coulombiano) ed il campo d'induzione elettrica \mathbf{D} . Si osserva sperimentalmente che i valori di \mathbf{E} e di \mathbf{D} in ogni punto dello spazio cambiano al cambiare del materiale, *anche se rimane sempre vero che* $\text{div } \mathbf{D} = \rho_c$ (7.10).

Per studiare il comportamento del materiale si prepara perciò un provino di materiale *omogeneo* posto in un campo elettrico. Le dimensioni del provino siano sufficientemente piccole da avere il campo *pressoché uniforme* nel provino, in modo che le misure siano rappresentative di ciò che avviene a livello locale nel provino. Tralasciando i cosiddetti materiali *ferroelettrici*, di impiego molto particolare, si trova che negli altri casi il legame tra \mathbf{E} ed \mathbf{D} è lineare. Nella maggioranza di questi casi i due vettori sono inoltre paralleli, cosicché si può scrivere la seguente relazione, detta *equazione costitutiva del campo elettrico*:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7.11)$$

ε è una costante, detta *costante dielettrica*, dipendente solo dal materiale e non dalla forma, né dall'intensità delle sorgenti del campo, le cariche. La costante dielettrica ha le dimensioni di $(\text{A}\cdot\text{s})/(\text{V}\cdot\text{m})$, espresse nel Sistema Internazionale come *Farad su metro* (F/m). La costante dielettrica del vuoto viene indicata con ε_0 ed il suo valore è pari a $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$. Tale valore risulta legato alla permeabilità magnetica del vuoto μ_0 dall'espressione della *velocità della luce nel vuoto*, c , che si dimostra essere pari a $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Nel caso di corpi conduttori la misura non può ovviamente essere eseguita in regime elettrostatico, in cui sono nulli sia \mathbf{D} che \mathbf{E}_c . La misura è comunque teoricamente possibile in regime variabile studiando l'effetto di assorbimento delle radiazioni elettromagnetiche o il *tempo di rilassamento* come descritto in sezione 7.7.

7.4 Campo elettrico e induzione elettrica sulla superficie dei corpi conduttori

Le relazioni sopra viste consentono, almeno in teoria, di conoscere il campo elettrico sulla superficie dei corpi conduttori in regime elettrostatico.

Sia pertanto τ un corpo conduttore in regime elettrostatico immerso in un dielettrico omogeneo e isotropo con costante dielettrica ε . Sappiamo che il corpo è equipotenziale, quindi il campo elettrico \mathbf{E}_c eventualmente presente sulla sua superficie e nelle immediate vicinanze, nel dielettrico, può essere solo ad essa perpendicolare. Dall'esperienza di Faraday si è visto come all'interno del corpo conduttore non c'è distribuzione di carica, quindi il vettore spostamento elettrico \mathbf{D} nel conduttore è nullo. Nel dielettrico invece \mathbf{D} è parallelo ad \mathbf{E}_c e ad esso proporzionale, secondo la legge costitutiva.

Applichiamo ora il teorema di Gauss ad un volumetto infinitesimo τ^* situato *a cavallo* della superficie del conduttore (Fig. 7.9). Siano S^* e S_l le due superfici esterna e laterale. L'area

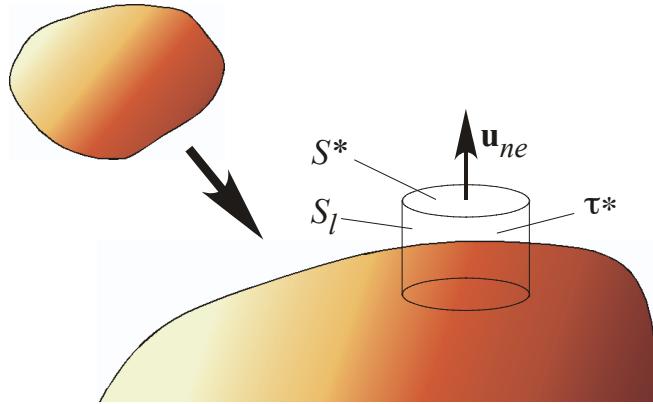


Figura 7.9: Corpo conduttore in regime elettrostatico: applicazione del teorema di Gauss ad un volumetto infinitesimo τ^* cavallo della sua superficie.

di quest'ultima superficie può essere scelta arbitrariamente piccola rispetto a S^* , pertanto il suo contributo al totale flusso di induzione elettrica può essere trascurato.

Il flusso di induzione elettrica uscente dal volumetto (7.9), pari alla carica infinitesima q^* racchiusa nel volumetto, vale allora:

$$q^* = \sigma_c S^* = \int_{\partial\tau^*} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds \approx \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_{ne},$$

dove σ_c è la locale densità superficiale di carica. Essendo poi campo e spostamento elettrico paralleli al versore normale \mathbf{u}_{ne} si ottiene infine in campo sulla superficie dei corpi conduttori in regime elettrostatico:

$$\mathbf{D}(P) = \sigma_c(P) \mathbf{u}_{ne} \quad \mathbf{E}_c(P) = \frac{\sigma_c(P)}{\epsilon} \mathbf{u}_{ne} \quad (7.12)$$

Le due espressioni sopra scritte sono ingannevolmente semplici, in quanto la locale densità superficiale di corrente non è in generale nota, essendo le cariche libere di muoversi sulla superficie del conduttore per imporre la sua equipotenzialità. Si osserva in generale come le cariche tendano ad addensarsi nelle parti di conduttore convesse con minore raggio di curvatura. Il fenomeno raggiunge il massimo in corrispondenza delle punte o sporgenze acuminate dei conduttori, dove si registrano anche i valori più alti di campo elettrico (Fig. 7.10 (a)). Per elevati valori di campo elettrico, è possibile che si verifichi una scarica, la quale spesso si origina in corrispondenza delle punte del conduttore.

In ogni caso, ricaviamo che *dove il campo e lo spostamento elettrico sono uscenti dalla superficie di un conduttore, la densità superficiale di carica è positiva*, dove sono entranti è negativa, come visibile in Fig. 7.4.

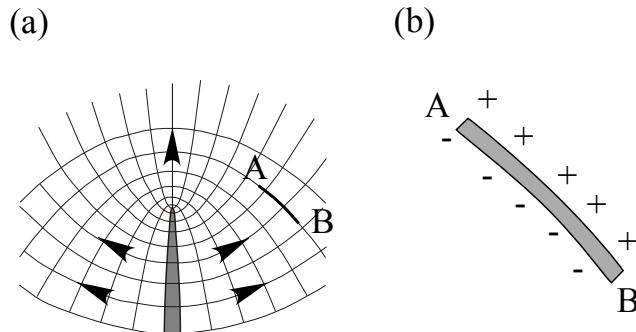


Figura 7.10: Metallizzazione di una superficie equipotenziale del campo elettrostatico. (a) Corpo conduttore appuntito, superfici equipotenziali e linee del vettore. (b): dettaglio della parte AB di superficie metallizzata, con le due distribuzioni superficiali di carica.

7.4.1 Il principio di metallizzazione delle superfici equipotenziali

Una conseguenza di quanto sopra descritto è che, considerando una regione sede di un campo elettrostatico, *è possibile disporre un sottile foglio di materiale conduttore su una superficie equipotenziale senza che cambi la configurazione di campo nello spazio circostante*. Sulle due pagine di questo conduttore si separano due distribuzioni opposte di carica (Fig. 7.10) corrispondenti al locale valore spaziale del vettore spostamento elettrico.

Si noti che, se il sottile foglio di conduttore viene disposto in altro modo e interseca le superfici equipotenziali preesistenti, altera completamente il campo imponendo la sua superficie come nuova superficie equipotenziale, come già visto in Fig. 7.4.

7.5 Comportamento di \mathbf{D} , E_c e V sulle superfici di discontinuità materiali

Sia assegnata una regione dello spazio, sede di un campo elettrostatico. Supponiamo che il mezzo dielettrico che riempie tale regione non sia omogeneo. Esaminiamo allora il comportamento del campo coulombiano e del vettore induzione elettrica in presenza di una superficie di discontinuità tra regioni occupate da due materiali diversi, caratterizzati da due costanti dielettriche ε_1 e ε_2 . Il ragionamento seguito sarà molto simile a quello già fatto in sezione (5.5) a proposito della rifrazione delle linee di corrente.

Con riferimento alla figura 7.11, consideriamo la superficie di interfaccia tra i mezzi 1 e 2, aventi costanti dielettriche rispettivamente ε_1 ed ε_2 . Evidenziamo un volumetto *infinitesimo* τ^* molto schiacciato, tale quindi che l'area delle due superfici S_1 ed S_2 sia molto maggiore dell'area della superficie laterale S_l .

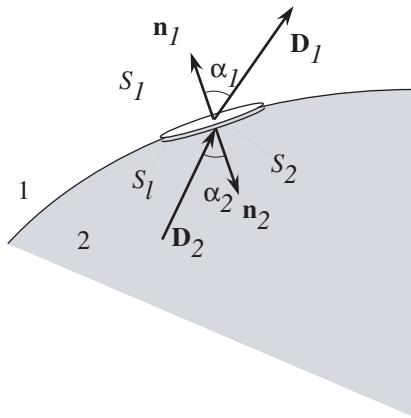


Figura 7.11: Superficie di discontinuità tra due mezzi diversi 1 e 2: volumetto infitesimo τ^* usato per esprimere la legge di Gauss.

Consideriamo ora la legge di Gauss in forma integrale (7.9), applicata al volumetto τ^* , essa dà la quantità di carica q^* presente nel volumetto:

$$q^* = \oint_{\partial\tau^*} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (7.13)$$

Vista la forma del volumetto, se *supponiamo assenti distribuzioni superficiali di carica* sarà $q^* = 0$ per cui, procedendo come in (5.5), ricaviamo che:

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_{1_n} = D_2 \cos \alpha_2 = D_{2_n} \quad (7.14)$$

Pertanto *in corrispondenza di una superficie di discontinuità tra materiali con costanti dielettriche diverse, le componenti di \mathbf{D} normali alla superficie si conservano*. Per studiare cosa succede alle componenti tangenziali di \mathbf{D} , si deve considerare anche il comportamento del campo coulombiano. A tal fine si consideri la linea chiusa *infinitesima* Γ^* di figura 7.12. Ragionando

come in (5.5), ricaviamo anche in questo caso che:

$$E_{c1} \sin \alpha_1 = E_{c1_t} = E_{c2} \sin \alpha_2 = E_{c2_t} \quad (7.15)$$

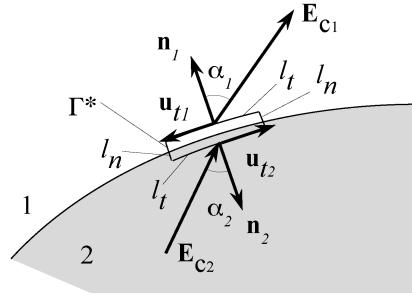


Figura 7.12: Superficie di discontinuità tra due mezzi diversi 1 e 2: linea chiusa infinitesima Γ^* usata per sfruttare la conservatività del campo coulombiano.

Pertanto *in corrispondenza di una superficie di discontinuità tra materiali a costanti dielettriche diverse, le componenti di \mathbf{E}_c tangenti alla superficie si conservano*. Esprimendo ora le componenti normali del vettore induzione elettrica in funzione delle componenti tangenziali otteniamo:

$$D_{1_n} = \frac{D_{1_t}}{\tan \alpha_1} \quad D_{2_n} = \frac{D_{2_t}}{\tan \alpha_2}$$

Sostituendo queste due espressioni nella (7.14) otteniamo infine:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad (7.16)$$

Questa relazione è la *legge di rifrazione delle linee di induzione elettrica e di campo* sulle superfici di discontinuità tra materiali dielettrici diversi.

Per quanto riguarda infine il potenziale scalare V , osserviamo che la relazione $\mathbf{E}_c = -\text{grad } V$ è una relazione puramente matematica, che non dipende dal materiale e vale quindi anche a ridosso della superficie di discontinuità. Ammettendo pertanto per assurdo che due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini, a ridosso della superficie di discontinuità e posti uno nel materiale 1 e l'altro nel materiale 2 (Fig. 7.13), abbiano potenziale scalare diverso, si avrà:

$$\mathbf{E}_c(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{V(P_1) - V(P_2)}{|P_1 P_2|} = \infty$$

Poiché si assume un campo ovunque limitato, si ricava pertanto:

$$V(P_1) = V(P_2) \quad (7.17)$$

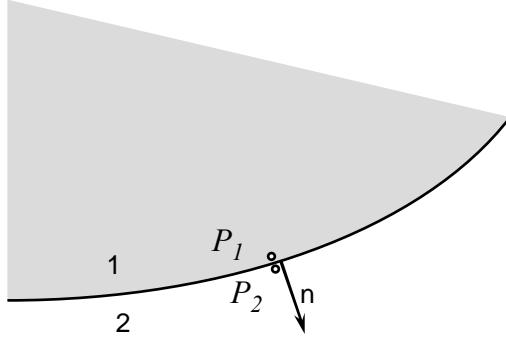


Figura 7.13: Superficie di discontinuità tra due mezzi diversi 1 e 2: potenziale in due punti a ridosso della superficie di discontinuità.

7.6 Equazioni di Poisson e di Laplace per il campo elettrostatico

Consideriamo ora una regione dello spazio τ , con costante dielettrica ε , sede di un campo elettrostatico. Tenendo conto dell'equazione costitutiva del campo elettrostatico (7.11) e del legame esistente tra \mathbf{E}_c ed il potenziale scalare V , si può scrivere:

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} V) = -\rho_c \quad (7.18)$$

Supponendo che ε sia uniforme e costante in tutta la regione, la (7.18) può così essere riscritta:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (V) = \nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon} \quad (7.19)$$

Come la (5.26), anche quest'equazione lega direttamente la variabile di sorgente ρ_c alla variabile di configurazione V , tenendo conto delle proprietà materiali del mezzo che riempie τ . Se si ammette che ρ_c sia una funzione nota del posto, il secondo membro della (7.19) è noto e l'equazione è ancora *l'equazione di Poisson*. Tale equazione è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, alle derivate parziali. La sua soluzione è pertanto esprimibile come somma di una soluzione particolare e di una soluzione dell'equazione omogenea associata. La soluzione particolare non è in generale unica, essendo determinata a meno di una soluzione dell'omogenea. Pertanto, per la soluzione $V(P)$ del problema elettrostatico in una certa regione dello spazio, si inizia col cercare *una soluzione particolare* $V_p(P)$, imponendo poi il rispetto delle condizioni iniziali mediante la soluzione dell'omogenea associata $V_{om}(P)$.

$$V(P) = V_p(P) + V_{om}(P) \quad (7.20)$$

A titolo di esempio, si consideri l'espressione del potenziale elettrostatico generato da una distribuzione volumica nota di carica in un mezzo uniforme illimitato (7.2): tale espressione è una soluzione particolare dell'equazione di Poisson, avente valore limite costante all'infinito. Tale valore limite rappresenta la condizione al contorno del dominio (illimitato) considerato.

Se invece si suppone che la densità di carica sia ovunque nulla in τ , il secondo membro della (7.19) è nullo e si ottiene l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (7.21)$$

Si rinvia alla sezione 5.6, p. 46 per la descrizione delle proprietà delle soluzioni dell'equazione di Laplace.

7.6.1 Soluzione dell'equazione di Poisson e Laplace per il campo elettrostatico

Anche nel caso del campo elettrostatico, come visto in sezione (5.6.1) per il campo di corrente, il problema può essere espresso come problema di Dirichlet, di Neumann o misto. Se τ è la regione dello spazio dove si vuole cercare la soluzione, si potranno dunque avere una o più parti della sua frontiera $\partial\tau$ in cui si impone un potenziale noto v^* ed altre in cui si impone la derivata normale nota del potenziale $\partial v^*/\partial n$.

Nel seguito si riportano alcune considerazioni relative alla soluzione del problema elettrostatico.

Caso del dominio limitato

Come secondo caso si considera la ricerca della soluzione in un dominio limitato τ immerso in un mezzo illimitato uniforme con costante dielettrica ε ugual dentro e fuori (Fig. 7.14). Una distribuzione di carica potrà essere presente tanto all'interno, quanto all'esterno di τ . Se si hanno a disposizione informazioni sulla distribuzione di carica *in tutto lo spazio*, è immediato scrivere campo e potenziale mediante le 7.2 in cui si evidenziano il contributo della densità di carica all'interno, ϱ_{ci} , ed all'esterno, ϱ_{ce} , di τ . Nel caso del potenziale si avrà quindi:

$$V(P) = \int_{\tau} \frac{\varrho_{ci}(P_0)}{4\pi\varepsilon r} d\tau + \int_{\mathbb{R}^3 - \tau} \frac{\varrho_{ce}(P_0)}{4\pi\varepsilon r} d\tau + C \quad (7.22)$$

Un osservatore posto in τ , in grado di conoscere tutte le sorgenti in esso (ma non le eventuali sorgenti esterne) ed in grado di svolgere misure di differenza di potenziale tra i vari punti della frontiera $\partial\tau$ potrà esprimere la soluzione dell'equazione di Poisson nella forma 7.20, in cui la soluzione particolare sarà senz'altro data dal primo integrale della 7.22. Il secondo termine, corrispondente alla soluzione dell'omogenea, verrà visto dall'osservatore come una *componente laplaciana* del potenziale (cui corrisponde una componente laplaciana del campo), dovuta alle condizioni al contorno, senza alcun legame a lui noto con le sorgenti esterne.

Supponendo che tutte le sorgenti del campo siano al finito, chiameremo anche *componente irrotazionale* del potenziale (o del campo) la soluzione particolare 7.2 *regolare all'infinito*, ovvero tale che il potenziale tende ad un valore costante, mentre il campo tende a zero.

Per la componente laplaciana del potenziale l'osservatore interno al dominio assumerà pertanto valori al contorno pari a $V(P) = V_{mis}(P) - V_p(P) \quad \forall P \in \partial\tau$, dove $V_{mis}(P)$ rappresenta il valore di potenziale misurato. Ovviamente, alla fine, tale termine dovrà essere pari al secondo membro della 7.22, a meno di una costante additiva, tuttavia tale termine perderà ogni corrispondenza con la distribuzione reale della carica esterna per un osservatore in τ .

Si noti che, in presenza di un mezzo uniforme con le sorgenti del campo al finito, la presenza di soluzioni laplaciane non costanti è possibile solo se il dominio studiato è limitato. Infatti una funzione armonica può assumere valori massimi e minimi solo sulla frontiera del dominio in cui è definita, pertanto, se il dominio è *tutto lo spazio*, essa può essere solo costante o nulla, a meno di assumere valori infiniti all'infinito.

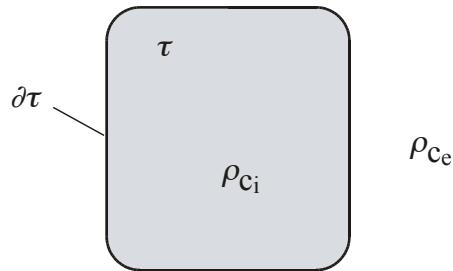


Figura 7.14: Soluzione dell'equazione di Poisson in un dominio limitato.

Corpi conduttori in regime elettrostatico

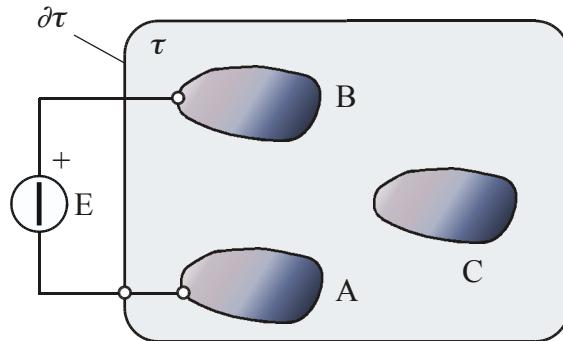


Figura 7.15: Problema elettrostatico in presenza di corpi conduttori.

Un caso delicato è costituito dai corpi conduttori, la cui superficie esterna $\partial\tau_c$ è senz'altro equipotenziale, ma il valore di tale potenziale potrebbe non essere noto². Si consideri ad esempio la configurazione di Fig. 7.15: tre corpi conduttori A , B e C sono posti all'interno di un contenitore conduttore τ riempito con un dielettrico uniforme. Il contenitore ed il conduttore A sono equipotenziali e per essi assumeremo potenziale 0, il conduttore B è a potenziale E

²In tal caso si dice che il conduttore è a potenziale *fluttuante* o *flottante*

mediante il generatore di f.e.m. impressa. Il conduttore C invece non è ad un potenziale determinato. Per esso assumeremo allora di conoscere la carica totale q_C . Il problema elettrostatico verrà allora risolto come problema misto, imponendo:

$$\begin{aligned} V(P) &= 0 \quad \forall P \in \partial\tau \cup \partial A \\ V(P) &= E \quad \forall P \in \partial B \\ V(P) &= V_C \quad \forall P \in \partial C \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$-\int_{\partial C} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} d\tau = q_C \tag{7.24}$$

Si noti che V_C non è noto a priori.

Caso del materiale non omogeneo

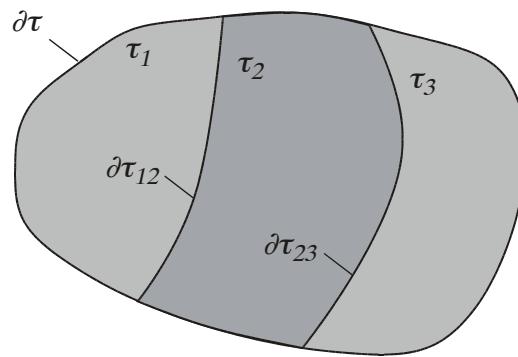


Figura 7.16: Soluzione dell'equazione di Poisson in un dominio non omogeneo.

Si considera ora il caso di un dominio formato da un insieme finito di sottodomini τ_i aventi proprietà materiali diverse, ma uniformi ε_i in ciascuno di essi (Fig. 7.16). Siano $\partial\tau_{ij}$ le superfici di separazione tra questi domini. La soluzione dell'equazione (7.19) viene di norma affrontata per ciascuna delle regioni τ_i , individuando la soluzione particolare nella forma 7.2 considerando la permittività dielettrica locale:

$$\mathbf{E}_{cp}(P) = \int_{\tau_i} \frac{\rho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon_i r^2} \mathbf{u}_r d\tau, \quad V_p(P) = \int_{\tau_i} \frac{\rho_c(P_0)}{4\pi\varepsilon_i r} d\tau + C, \tag{7.25}$$

La soluzione dell'omogenea, ovvero la componente laplaciana, viene determinata imponendo, oltre alle condizioni al contorno sulla frontiera esterna del dominio e sulle superfici dei conduttori, le condizioni sui vettori \mathbf{D} e \mathbf{E}_c e sul potenziale V sulle superfici di discontinuità interne tra materiali diversi, espresse dalle 7.14, 7.15 e 7.17:

$$\begin{cases} E_{ct}^i = E_{ct}^j & \text{o, in alternativa: } V^i = V^j \\ D_n^i = D_n^j \end{cases} \quad \forall P \in \partial\tau_{ij} \tag{7.26}$$

Corpi conduttori percorsi da corrente

Consideriamo il caso di uno o più conduttori percorsi da una corrente stazionaria o quasi stazionaria immersi in un dielettrico. In queste condizioni non è più possibile considerare equipotenziali le superfici di tali corpi conduttori, essendo presente una componente non nulla di campo coulombiano tangente alla superficie, pari a $E_{ct} = \rho J$. Si ricorda infatti che (sez. 5.5, pag. 44):

- il vettore densità di corrente è tangente alla superficie di discontinuità tra conduttore e dielettrico, essendo il conduttore un tubo di flusso di \mathbf{J} ;
- le componenti tangenti del campo elettrostatico sulle superfici di discontinuità, qui tra conduttore e dielettrico, sono uguali.

Si consideri ora ad esempio un conduttore filiforme, di asse Γ e di area trasversale S , avvolto ad elica, alimentato con una corrente stazionaria I (fig. 7.17)

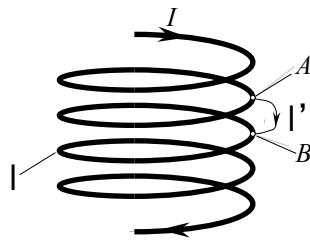


Figura 7.17: Conduttore filiforme avvolto ad elica percorso da corrente.

Se indichiamo con l_{AB} la lunghezza del tratto l del conduttore compreso tra due punti A e B , la differenza di potenziale tra A e B può venire calcolata lungo il percorso che da A va a B lungo il conduttore, usando la (5.4) e tenendo conto che, per un conduttore filiforme, $J \approx I/S$:

$$U_{AB} = \int_{A,l}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_t dl = \int_{A,l}^B \rho \frac{I}{S} dl = \rho I \frac{l_{AB}}{S} \quad (7.27)$$

Poichè \mathbf{E}_c è conservativo, lo stesso valore deve venire ricavato se calcoliamo la differenza di potenziale lungo la linea l' che da A va direttamente a B nel dielettrico, senza seguire il conduttore. Da questo segue la necessità dell'esistenza di una componente non nulla di \mathbf{E}_c normale al conduttore, il cui valore, però, dipende dalla geometria della superficie del conduttore e dalla natura del mezzo isolante che circonda il conduttore. La componente del campo coulombiano normale alla superficie del conduttore è perciò discontinua, e ciò si accompagna alla presenza di una distribuzione superficiale di cariche sul conduttore stesso.

Per risolvere il problema è allora necessario analizzare preliminarmente il campo di corrente secondo quanto detto in sezione 5.6, determinando in tal modo il potenziale sulla superficie dei corpi conduttori percorsi da corrente. Si risolve successivamente il problema elettrostatico per lo spazio esterno ai conduttori, determinando in particolare il campo sulla loro superficie. Tale campo avrà in generale una componente tangenziale E_{ct} pari alla componente tangenziale

interna al conduttore, e quindi ancora pari a ϱJ , ed una componente normale ad esso E_{c_n} , pari a σ_c/ϵ se il dielettrico è uniforme.

Si deduce pertanto che, *in generale, un corpo conduttore percorso da corrente sarà circondato da una distribuzione superficiale di carica* determinabile risolvendo il problema elettrostatico per il dielettrico che circonda il corpo.

7.7 Dielettrici resistivi: densità transitoria di carica nei corpi conduttori

Analizzando il comportamento dei corpi conduttori in regime elettrostatico abbiamo concluso che tutte le cariche eventualmente presenti sui corpi conduttori in regime elettrostatico devono essere disposte sulla loro superficie. D'altra parte, la dislocazione delle cariche sulla superficie avviene in una fase transitoria, in cui sono presenti cariche libere non nulle anche all'interno dei conduttori. In questa fase è presente quindi un campo coulombiano non nullo anche dentro il conduttore, che non è perciò equipotenziale. Per valutare l'evoluzione del fenomeno nel tempo, consideriamo ora assieme la (5.26) e la (7.19). Si suppongono quindi assenti forze specifiche generatrici non solo nel volume in esame, ma anche nel resto del circuito in cui il volume in esame è inserito.

Il materiale considerato è perciò *un conduttore in cui sono apprezzabili fenomeni di tipo dielettrico*. Siano allora σ la conducibilità e ε la costante dielettrica del materiale. Si ricava:

$$-\frac{\rho_c}{\varepsilon} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho_c}{\partial t}. \quad (7.28)$$

Considerato un determinato punto dello spazio, questa è un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine, nel dominio del tempo. La sua soluzione è:

$$\rho_c = \rho_{c_0} e^{-t/\tau_r}, \quad (7.29)$$

dove $\tau_r = \varepsilon/\sigma$ è la costante di tempo, detta *tempo di rilassamento*. Il suo valore va da alcune decine di secondi, per i migliori materiali dielettrici, fino a tempi dell'ordine di 10^{-20} s per i migliori materiali conduttori resistivi. τ_r dà l'idea del tempo impiegato da una carica depositata in un certo punto di un conduttore, per raggiungere una posizione di equilibrio, ad es. sulla sua superficie.

Assumendo noti i concetti di capacità di un condensatore (sez. 8.1, pag. 89) e del transitorio di carica e scarica di un condensatore, si può infine dimostrare che τ_r è anche la costante di tempo con cui un condensatore reale, precaricato ed isolato, si scarica per la migrazione delle cariche dalle sue armature, attraverso il dielettrico.³

7.8 Momento elettrico e dipoli elettrici

In questa sezione si riprende il fenomeno della polarizzazione, già accennato in sez. 7.3. Il fenomeno è ora studiato in termini di una distribuzione di dipoli elettrici infinitesimi, che rappresentano atomi e molecole polarizzati. Preliminare allo studio è la definizione di *momento elettrico* e lo studio delle sue proprietà.

³ Consideriamo ad esempio un condensatore a facce piane e parallele, avente area delle armature pari a S , distanza tra le armature d e costante dielettrica ε , la sua capacità vale $C = \varepsilon S/d$. Pensando ora al dielettrico tra le due armature come un resistore con conducibilità elettrica σ , la sua resistenza sarà $R = d/(\sigma S)$. Com'è noto, un circuito resistenza-condensatore si scarica nel tempo con una costante di tempo $\tau = RC$. Pensando perciò al condensatore con dielettrico resistivo come al parallelo di un resistore di resistenza R e di un condensatore di capacità C , si ricava la sua costante di tempo di scarica pari a $\tau = RC = \varepsilon/\sigma = \tau_r$.

7.8.1 Momento elettrico

Si consideri una regione dello spazio sede di una distribuzione di N cariche *concentrate* e sia stato scelto un punto fisso di riferimento Ω , detto *polo*.

Si definisce *momento elettrico* dell'insieme di cariche, rispetto al polo Ω , la seguente grandezza vettoriale:

$$\mathcal{P}_\Omega = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_{i_\Omega} \quad (7.30)$$

dove $\mathbf{r}_i = \overline{\Omega P_i}$ è il raggio vettore che unisce il polo Ω al punto d'applicazione P_i della generica carica q_i . Nel caso di distribuzione continua di carica in una regione τ , il momento elettrico rispetto al polo Ω è così definito:

$$\mathcal{P}_\Omega = \int_{\tau} \rho_c \mathbf{r}_\Omega \, d\tau \quad (7.31)$$

dove ρ_c è la densità volumica di carica. Il momento elettrico è quindi un vettore avente dimensioni di C.m. Valutiamo ora come cambia il momento elettrico di un'assegnata distribuzione di carica, a seguito del cambiamento del polo Ω . Rispetto ad un polo $\Omega' \neq \Omega$ si ha: $\overline{\Omega' P} = \overline{\Omega' \Omega} + \overline{\Omega P}$, pertanto la (7.31) può così essere modificata:

$$\mathcal{P}_{\Omega'} = \int_{\tau} \rho_c (\overline{\Omega' \Omega} + \overline{\Omega P}) \, d\tau = \overline{\Omega' \Omega} Q_{tot} + \mathcal{P}_\Omega \quad (7.32)$$

dove Q_{tot} è la totale carica racchiusa nella regione τ .

Da questa relazione si vede anche che, quando la regione τ ha carica complessivamente nulla, il momento elettrico risulta indipendente dal polo di calcolo Ω . Il vettore \mathcal{P} viene in tal caso chiamato anche *momento di dipolo elettrico*.

7.8.2 Dipolo elettrico generato da due cariche puntiformi

Il caso più semplice di dipolo elettrico è dato da due cariche opposte, $+q$ e $-q$, poste in due punti dello spazio. Sia \mathbf{a} il vettore che unisce la carica negativa alla positiva (fig. 7.18). Tale configurazione di carica ha evidentemente un momento di dipolo $\mathcal{P} = q \mathbf{a}$.

Vogliamo calcolare il potenziale ed il campo in un punto P situato a grande distanza dalle cariche, così d'avere $r_1 \gg a$ e $r_2 \gg a$.

Il potenziale elettrico generato da queste due cariche vale:

$$v(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \quad (7.33)$$

Quando $r_1 \approx r_2 \gg a$ si può scrivere: $r_1 \approx r_2 \approx r$, dove \mathbf{r} è il raggio vettore che unisce il baricentro delle due cariche al punto di calcolo P . Inoltre:

$$r_1 - r_2 \approx \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

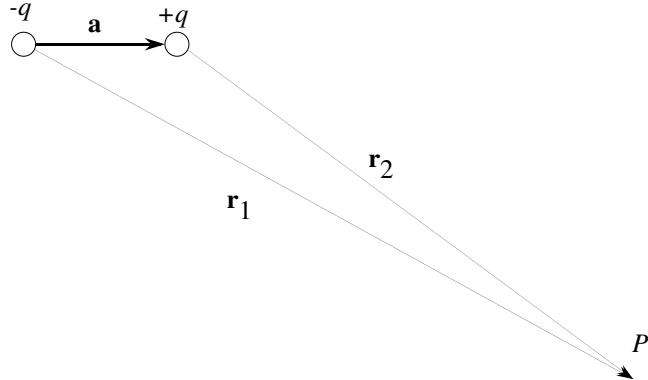


Figura 7.18: Dipolo elettrico generato da due cariche opposte, e punto P dove viene calcolato il campo.

e $r_1 r_2 \approx r^2$, quindi:

$$V(P) = \frac{q\mathbf{a}}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (7.34)$$

Consideriamo ora la geometria delle superfici equipotenziali, osservando che esse sono simmetriche rispetto all'asse del dipolo elettrico. Assumiamo ora l'asse x passante per le due cariche e, come asse y , un qualunque asse ad esso ortogonale passante per la mezzeria del dipolo. In tale riferimento, chiamando ϑ l'angolo tra il vettore r ed il dipolo \mathcal{P} che giace sull'asse x , la (7.34) diventa:

$$V(P) = \frac{P}{4\pi\varepsilon} \frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad (7.35)$$

L'equazione in coordinate polari della superficie corrispondente al potenziale assegnato V_0 è quindi:

$$\frac{\cos(\vartheta)}{r^2} = \frac{4\pi\varepsilon V_0}{P} = \frac{1}{r_0^2} \quad (7.36)$$

da cui si deduce anche che r_0 è l'intercetta della superficie con l'asse del dipolo (basta considerare $\vartheta = 0 \rightarrow \cos(\vartheta) = 1$).

Nella figura (7.19) sono riportate le tracce di alcune superfici equipotenziali. Si noti che esse sono simmetriche rispetto al piano $v = 0$ che taglia a metà il dipolo. Il vettore campo elettrico coulombiano può venire calcolato a partire dalla (7.34) in componenti polari E_{cr} ed $E_{c\vartheta}$:

$$E_{cr} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{P}{4\pi\varepsilon} \frac{2\cos(\vartheta)}{r^3} \quad (7.37)$$

$$E_{c\vartheta} = -\frac{\partial V}{r\partial\vartheta} = \frac{P}{4\pi\varepsilon} \frac{\sin(\vartheta)}{r^3}$$

Si noti come, all'aumentare della distanza tra punto di applicazione del dipolo, ed il punto in esame, il campo tenda a zero come $1/r^3$, anziché come $1/r^2$, come prevede la legge di Coulomb per una carica puntiforme.

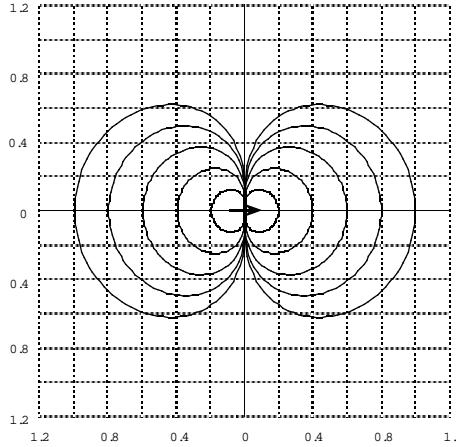


Figura 7.19: Superfici equipotenziali del campo generato da un dipolo elettrico, situato nell'origine e diretto lungo l'asse x (orizzontale).

7.8.3 Proprietà asintotica dei dipoli elettrici

Consideriamo ora una regione limitata τ dello spazio, sede di una carica elettrica distribuita, e supponiamo di voler calcolare il potenziale (ed il campo) in un punto P molto lontano dalla regione τ .

Scegliamo un punto dello spazio Ω , vicino a τ , e sia \mathcal{P}_Ω il momento elettrico della distribuzione di carica rispetto ad esso.

Dalla legge di Coulomb sappiamo che il potenziale in P vale:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_\tau \frac{\varrho_c(P_0)}{|P_0 P|} d\tau \quad (7.38)$$

dove P_0 è il generico punto di τ . Poiché $\overline{P_0 P} = \overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}$, tenendo conto che $|\overline{P_0 \Omega}| \ll |\overline{\Omega P}|$, esprimiamo *asintoticamente* il modulo $1/|\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}|$ tenendo conto che $|\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}|^2 = (\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}) \cdot (\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}|} &= \frac{1}{\sqrt{(\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}) \cdot (\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P})}} = \frac{1}{|\overline{\Omega P}| \sqrt{1 + \frac{|\overline{P_0 \Omega}|^2}{|\overline{\Omega P}|^2} + 2 \frac{\overline{P_0 \Omega} \cdot \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^2}}} \approx \\ &\approx \frac{1}{|\overline{\Omega P}| \sqrt{1 + 2 \frac{\overline{P_0 \Omega} \cdot \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^2}}} \approx \frac{1}{|\overline{\Omega P}|} \left(1 - \frac{\overline{P_0 \Omega} \cdot \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^2}\right) \end{aligned} \quad (7.39)$$

Sostituendo ora la (7.39) nella (7.38), si ricava:

$$V(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_\tau \frac{\varrho_c(P_0)}{|\overline{\Omega P}|} \left(1 - \frac{\overline{P_0 \Omega} \cdot \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^2}\right) d\tau.$$

infine:

$$V(P) \approx \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon|\Omega P|} + \frac{\mathcal{P}_\Omega}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\overline{\Omega P}}{|\Omega P|^3}, \quad (7.40)$$

essendo Q_{tot} la totale carica in τ e \mathcal{P}_Ω il momento elettrico della distribuzione di carica rispetto ad Ω . Pertanto, *a grande distanza da una distribuzione di cariche, il potenziale (e, quindi, anche il campo), è calcolabile come il contributo dato da una carica pari alla totale carica considerata, situata in un polo Ω vicino alle cariche, ed il contributo dato da un dipolo elettrico pari al momento elettrico della distribuzione di carica calcolato rispetto allo stesso polo.*

Tale espressione è quindi utile per avere delle espressioni approssimate del campo ad una certa distanza da una distribuzione di cariche, anche complessa.

7.8.4 Fenomeni di polarizzazione espressi mediante la teoria dei dipoli elettrici

La presente analisi vale in assenza di forze generatrici. Si suppone perciò che il campo elettrico si riduca alla sua componente coulombiana. È noto dai corsi di fisica che i fenomeni di polarizzazione sono riconducibili alla comparsa di una distribuzione di dipoli elettrici nella materiale dielettrico che, pur rimanendo elettricamente neutro, vede la distribuzione di cariche al suo interno ed alla sua superficie, modificarsi. Il fenomeno di polarizzazione avviene in diversi modi, a seconda della composizione del dielettrico. Ad esempio, ricordiamo che un atomo di dielettrico non sottoposto ad un campo elettrico esterno corrisponde ad un nucleo positivo circondato da una nube elettronica, il cui baricentro corrisponde a quello del nucleo. Applicando un campo esterno, la nube elettronica tende a spostare il suo baricentro nella direzione opposta al campo, mentre il nucleo dell'atomo tende a spostarsi nella direzione del campo, originando quindi un *dipolo elettrico*.

Senza entrare nel dettaglio di questi meccanismi di polarizzazione, *assumeremo che il materiale polarizzato sia sede di una distribuzione continua di dipoli elettrici*, la quale genera un campo elettrico che si aggiunge al campo esterno generato da cariche libere o da altri materiali polarizzati nelle vicinanze. Definiamo pertanto il *vettore polarizzazione \mathbf{P}* come *momento di dipolo elettrico per unità di volume*. Per calcolare \mathbf{P} in un assegnato punto P_0 dello spazio, possiamo immaginare di considerare un volumetto infinitesimo τ^* di cui P_0 è il centro e di sommare il momento di dipolo elettrico di tutti i dipoli compresi in τ^* . La piccolezza di τ^* fa sì che la distanza tra i vari dipoli elettrici sia infinitesima rispetto alla distanza tra il punto P_0 ed il punto P dove vogliamo calcolare il campo, perciò l'effetto di tutti i dipoli contenuti in τ^* sarà pari all'effetto di un unico dipolo concentrato in P_0 , di valore pari alla somma dei dipoli di τ^* . Pertanto:

$$\mathbf{P}(P_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\tau^* \rightarrow P_0} \frac{\sum_{k \in \tau^*} \mathcal{P}_k}{\tau^*} \quad (7.41)$$

Il vettore polarizzazione ha le dimensioni fisiche di C/m^2 , come il vettore \mathbf{D} , ed è nullo all'esterno del dielettrico.

Riprendiamo ora il potenziale generato da un dipolo elementare (7.34) e con questa espressione calcoliamo il potenziale generato da una distribuzione continua di dipoli elettrici, descritta mediante il vettore polarizzazione. Il volumetto infinitesimo τ^* che circonda il generico punto

P_0 del dielettrico, genera un potenziale:

$$V^*(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(P_0) \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tau^*$$

dove $\mathbf{r} = \overline{P_0 P}$. Il potenziale complessivamente generato dalla distribuzione di dipoli in τ vale, allora:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\mathbf{P}(P_0) \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau. \quad (7.42)$$

Nella (7.42) si è considerata una costante dielettrica ϵ_0 anziché ϵ perché *con questo modello, si rappresenta il dielettrico come una distribuzione di dipoli elettrici nel vuoto* e quindi le proprietà materiali del dielettrico vengono già prese in considerazione in termini di distribuzione di cariche. Inoltre, in questa relazione compare la frazione \mathbf{r}/r^3 che può venire riscritta come $\text{grad}_p(1/r)$, dove il pedice P indica che è stata calcolato rispetto al punto di partenza⁴. La funzione integranda nella (7.42) diventa allora:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \mathbf{P} \cdot \text{grad}_p \left(\frac{1}{r} \right) d\tau$$

e, applicando la (C.13), tenendo conto che si fa variare il punto di partenza, si ricava:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \left[\text{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \mathbf{P} \right] d\tau \quad (7.43)$$

Dove la divergenza è calcolata facendo variare il punto di partenza. Applicando ora il teorema della divergenza al primo dei due addendi che formano la funzione integranda nella (7.43) ricaviamo infine:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\partial\tau} \frac{\mathbf{P}}{r} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\tau} \frac{-\text{div} \mathbf{P}}{r} d\tau \right] \quad (7.44)$$

Possiamo interpretare ora tale relazione come *l'espressione del potenziale generato nel vuoto da una distribuzione di carica nel dielettrico, con densità volumica $-\text{div}(\mathbf{P})$, e da una distribuzione superficiale di carica sulla superficie del dielettrico, con densità superficiale $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.* Poniamo pertanto:

$$\varrho_p \stackrel{\text{def}}{=} -\text{div} \mathbf{P} \quad (7.45)$$

la *densità volumica di carica di polarizzazione*, e

$$\sigma_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (7.46)$$

⁴ La funzione scalare $r = |\mathbf{r}|$ dipende in modo opposto dalle coordinate del punto d'applicazione del vettore e dalle coordinate del punto d'arrivo, essendo, ad es., in coordinate cartesiane:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Se consideriamo il gradiente rispetto al punto d'arrivo avremo allora: $\text{grad}_a(r) = \left(\frac{\partial r}{\partial x}; \frac{\partial r}{\partial y}; \frac{\partial r}{\partial z} \right)$ mentre il gradiente rispetto al punto di partenza vale: $\text{grad}_p(r) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_0}; \frac{\partial r}{\partial y_0}; \frac{\partial r}{\partial z_0} \right) = -\text{grad}_a(r)$

la *densità superficiale di carica di polarizzazione*. La densità volumica è definita per ogni punto interno al dielettrico, la densità superficiale per ogni punto della sua superficie. La (7.44) diventa:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{\partial\tau} \frac{\sigma_p(P_0)}{r} dS + \int_{\tau} \frac{\varrho_p(P_0)}{r} d\tau \right]. \quad (7.47)$$

Si noti che, per il teorema della divergenza:

$$\int_{\tau} \varrho_p d\tau = \int_{\tau} -\operatorname{div} \mathbf{P} = - \int_{\partial\tau} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\partial\tau} \sigma_p dS$$

dunque la totale carica di polarizzazione situata all'interno del dielettrico è opposta alla carica di polarizzazione situata sulla sua superficie. L'interpretazione della (7.44) in termini di densità di carica di polarizzazione rispetta dunque l'ipotesi iniziale di neutralità globale del dielettrico.

Il vettore polarizzazione \mathbf{P} è una variabile sorgente, dato che descrive una distribuzione di carica. Ci si può allora aspettare che esso sia legato ad una variabile di configurazione mediante un'equazione costitutiva. Infatti, i fenomeni di polarizzazione dipendono dall'intensità del campo elettrico che provoca lo spostamento delle cariche nel dielettrico. Per la maggior parte dei materiali dielettrici il legame tra vettore polarizzazione e vettore campo elettrico è lineare e viene espresso mediante la seguente legge costitutiva:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (7.48)$$

La costante adimensionale χ_e viene detta *suscettività dielettrica*.

7.8.5 Il legame tra campo elettrostatico e induzione elettrica in presenza di materiali polarizzati

Supponiamo ora d'essere in un mezzo in cui non siano presenti discontinuità delle proprietà materiali né distribuzioni superficiali di carica. Si consideri inoltre un regime elettrostatico, in assenza di forze elettriche specifiche generatrici, cosicché il campo elettrico si riduce alla sola componente coulombiana. L'esperimento descritto in sezione 7.2.3 ha permesso di definire il vettore induzione elettrica \mathbf{D} evidenziando, tra l'altro, che $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_c$, dove ϱ_c è la densità di carica libera. Nel vuoto tale relazione equivale a:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_c = \frac{\varrho_c}{\varepsilon_0}.$$

In presenza di cariche libere e di dielettrici, ci si aspetta che $\operatorname{div} \mathbf{E}_c$ dipenda sia dalla densità di carica libera ϱ_c , che dalla densità di carica presente localmente nel dielettrico, ϱ_p , dovuta alla polarizzazione:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_c = \frac{\varrho_c + \varrho_p}{\varepsilon_0} \quad (7.49)$$

Poichè il campo coulombiano è irrotazionale, in assenza di distribuzioni superficiali di densità di carica (eventualmente dovute anche a cariche di polarizzazione, presenti se ci sono discontinuità

nelle proprietà materiali), questa relazione lega il campo coulombiano a tutte le sue sorgenti. Tenendo allora conto della (7.45) tale relazione diventa:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{E}_c - \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = 0 \quad (7.50)$$

In questa relazione il termine entro la parentesi è determinato a meno di una componente solenoidale, la quale potrà avere rotore non nullo in qualche regione dello spazio. Tuttavia, scegliendo la componente solenoidale di \mathbf{D} in modo che $\operatorname{rot} \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{P}$, poiché $\operatorname{rot} \mathbf{E}_c = 0$, si ricava:

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E}_c - \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = 0 \quad (7.51)$$

Il vettore entro le parentesi quadre delle (7.50) e (7.51) ha ora divergenza e rotore nulli in tutto lo spazio ed è quindi ovunque nullo e si ricava infine che:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (7.52)$$

Tale relazione lega il vettore campo elettrico ai vettori che rappresentano le sue sorgenti, le cariche. Non deve stupire il segno meno davanti a \mathbf{P} in questa relazione. Osservando infatti la figura (7.20) si vede che le distribuzioni di cariche elettriche interne al dielettrico si compensano per la maggior parte, mentre restano non compensate le cariche sulla superficie del dielettrico ed il loro effetto è di opporsi al campo esterno. Con questa distribuzione di dipoli elettrici il vettore polarizzazione è orientato come il campo elettrico esterno.

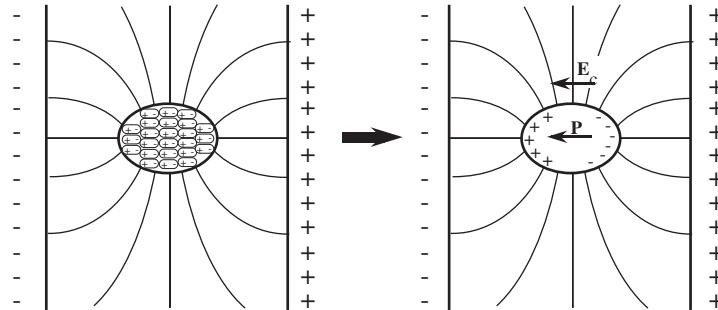


Figura 7.20: Pezzo di materiale polarizzato inserito in un campo esterno con, schematizzati, i dipoli elettrici che si generano nel dielettrico. Il vettore polarizzazione è concorde col campo elettrico esterno e le cariche presenti sulla superficie del dielettrico tendono a diminuire il campo al suo interno.

Possiamo ora riprendere quanto visto in sezione 7.3 e collegare tra loro le costanti dielettriche ε , ε_0 e la suscettività dielettrica χ_e . Tenendo conto della (7.11) e della (7.48) ricaviamo che:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (7.53)$$

Si mette in evidenza nuovamente che, nella relazione sopra scritta, vengono collegati tra loro due modelli fisici del dielettrico completamente diversi. Nel primo il materiale viene completamente

descritto mediante il parametro ϵ , senza entrare nel dettaglio dei fenomeni di polarizzazione. Nel secondo, il dielettrico viene rappresentato da un'opportuna distribuzione di cariche o dipoli elettrici nel vuoto.

Capitolo 8

Le capacità tra i conduttori

In questo capitolo si studiano in dettaglio i fenomeni di accoppiamento capacitivo tra corpi conduttori in regime elettro quasi statico. La sezione iniziale tratta il caso più semplice di due corpi conduttori, la sezione seguente generalizza lo studio al caso di più corpi conduttori.

8.1 Il condensatore

Si considerino due corpi conduttori A e B, fissi nello spazio e indeformabili (Fig. 8.1). Nello spazio che li circonda sia presente un dielettrico uniforme illimitato, privo di cariche. I due conduttori siano sempre carichi con cariche opposte $q_A = -q_B$, cosicché sia nulla la totale carica immagazzinata sui due corpi. La struttura appena descritta costituisce un *condensatore* e i due corpi A e B sono detti *armature* del condensatore. In queste condizioni, il vettore di induzione elettrica \mathbf{D} ha divergenza nulla in tutto il dielettrico per la (7.10):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_c = 0$$

Ciò significa che le linee del campo \mathbf{D} non nascono né muoiono nel dielettrico ma solo sulla superficie dei conduttori, e il conduttore da cui nasce una generica linea di \mathbf{D} non può essere lo stesso sul quale la linea muore, in accordo col fatto che le superfici dei conduttori, in regime elettro quasi statico sono equipotenziali.¹ D'altra parte, non ci possono neppure essere linee del vettore che vanno all'infinito, altrimenti dovrebbe essere non nulla la carica complessivamente presente sui due conduttori.²

Variando la carica $q_A = -q_B$ in generale varia la differenza di potenziale tra i due conduttori, ma non cambia la geometria delle linee del vettore, rimando costante la geometria delle due

¹Ricordando che in un dielettrico uniforme $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_c$, le linee del vettore \mathbf{D} coincidono con le linee del vettore \mathbf{E}_c . Riguardo a queste, si osserva che non ci può essere una linea del vettore tra due punti equipotenziali. altrimenti dovrebbe essere non nullo il velore medio del vettore lungo la linea, e ciò implicherebbe una differenza di potenziale tra i due punti, in contraddizione con l'ipotesi di equipotenzialità.

²Per lo sviluppo della teoria del condensatore è essenziale che sia rispettata la complessiva neutralità dei due conduttori. Ciò può essere ottenuto automaticamente collegando i due conduttori con un collegamento filiforme lungo il quale viene posto un generatore di f.e.m., come in Fig. 8.1. Qualora non fosse rispettata la neutralità globale, ciò vorrebbe dire che che in realtà i due conduttori sono accoppiati anche con un terzo conduttore o una sorgente di cariche. In tal caso il problema va affrontato con il modello delle *capacità parziali*, descritto in sezione 8.3.

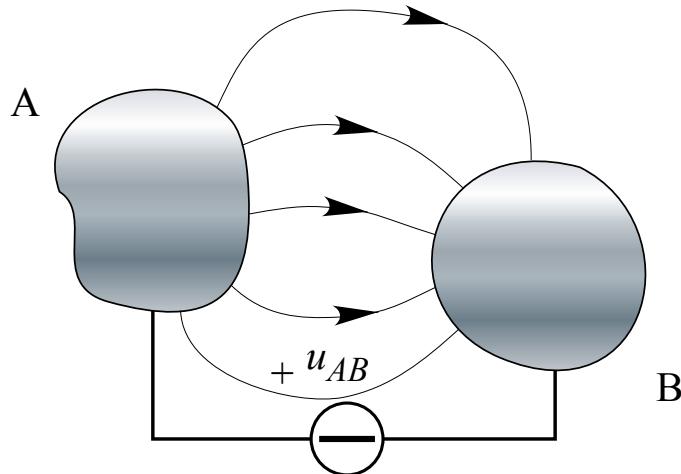


Figura 8.1: Due corpi conduttori accoppiati capacitivamente e con carica totale nulla formano un condensatore.

superfici equipotenziali dei conduttori che definiscono le condizioni al contorno per l'equazione di Laplace che governa il dielettrico (sez. 7.6).

In tali condizioni il campo elettrico coulombiano \mathbf{E}_c è proporzionale in ogni punto alla differenza di potenziale $\Delta V_{AB} = U_{AB}$ presente tra i due conduttori A e B. Ne deriva anche che il campo di induzione elettrica \mathbf{D} in ogni punto è proporzionale alla stessa differenza di potenziale e pure proporzionale risulta essere il flusso di \mathbf{D} su qualunque superficie fissa nello spazio. Considerando in particolare, come superficie, il contorno di uno dei due conduttori, e tenendo presente la legge di Gauss (7.9), si conclude che le due cariche q_A e q_B sono proporzionali alla differenza di potenziale ΔV_{AB} :

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_A}{\Delta V_{AB}} = \frac{q_B}{\Delta V_{BA}} \quad (\text{F}) \quad (8.1)$$

La costante di proporzionalità c tra tali grandezze viene detta *capacità* ed ha la dimensione di Coulomb su Volt, ovvero *Farad*. Essendo le due cariche q_A e q_B opposte, risulta essenziale fissare una convenzione tra il riferimento usato per esprimere la differenza di potenziale e il corpo conduttore di cui si valuta la carica. La (8.1) è stata scritta con la convenzione dell'utilizzatore, già usata per l'espressione della potenza svolta in tubo di flusso (sez. 4.5.2, pag. 25) e la legge di Ohm (sez. 5.1, pag. 32). Si noti in questo caso la corrispondenza dei pedici usati per designare il corpo conduttore dove viene considerata la carica e per la differenza di potenziale. Nella stragrande maggioranza dei casi, il Farad è un'unità di misura troppo grande per esprimere la capacità dei condensatori di normale utilizzo. Si hanno infatti valori che vanno da alcuni pF fino a qualche mF.

8.1.1 Capacità tra corpi conduttori di geometria notevole

Si esaminano ora alcune semplici geometrie di condensatori, per le quali è possibile un calcolo approssimato della capacità. Vengono sommariamente esaminati anche gli *effetti di estremità*

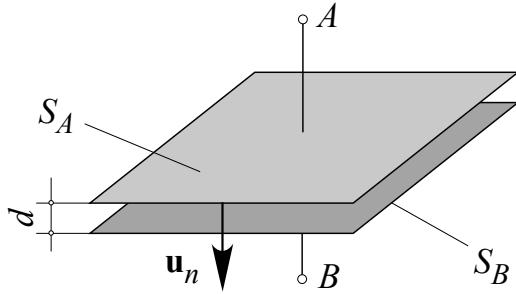


Figura 8.2: Condensatore piano.

dovuti alle differenze tra la geometria reale e la geometria ideale, semplificata.

Condensatore a facce piane e parallele

Si consideri un condensatore formato da due armature identiche A e B , di area S , piane e di spessore trascurabile, poste a una distanza d molto minore della dimensione caratteristica delle armature (ad es. il lato per armature quadrate, o il raggio per armature circolari), come schematizzato in Fig. 8.2. Siano accessibili due morsetti, A e B , collegati alle due rispettive armature. In queste condizioni, è possibile verificare una proprietà di invarianza, ovvero *la configurazione locale di campo e densità di carica presente sulle armature non dipende dal punto considerato, purchè sufficientemente lontano dai bordi delle armature*. Ne consegue che il campo \mathbf{E}_c presente tra le armature del condensatore corrisponde al campo generato da due distribuzioni uniformi di carica, una posta su A e generante il campo \mathbf{E}_{c_A} , l'altra posta su B , uguale ed opposta alla prima e generante il campo \mathbf{E}_{c_B} . Ipotizzando che la distribuzione di cariche sia superficiale, di valore σ_c sull'armatura A e $-\sigma_c$ sull'armatura B e supponendo che tra le armature sia presente un dielettrico con costante ε , si ha:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{c_A} + \mathbf{E}_{c_B} = \left[\frac{\sigma_c}{2\varepsilon} - \left(-\frac{\sigma_c}{2\varepsilon} \right) \right] \mathbf{u}_n = \frac{\sigma_c}{\varepsilon} \mathbf{u}_n, \quad (8.2)$$

dove \mathbf{u}_n è il versore normale alle armature, diretto dall'armatura A alla B . Il campo è dunque uniforme nel dielettrico e la differenza di potenziale nella regione compresa tra le due armature vale:

$$\Delta V_{AB} = E_c d = \frac{\sigma_c d}{\varepsilon} = \frac{q_A d}{S \varepsilon}$$

Dunque la capacità di tale condensatore vale::

$$c = \frac{q_A}{\Delta V_{AB}} = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (8.3)$$

e risulta quindi essere direttamente proporzionale alla superficie dei conduttori e inversamente proporzionale alla distanza tra essi.

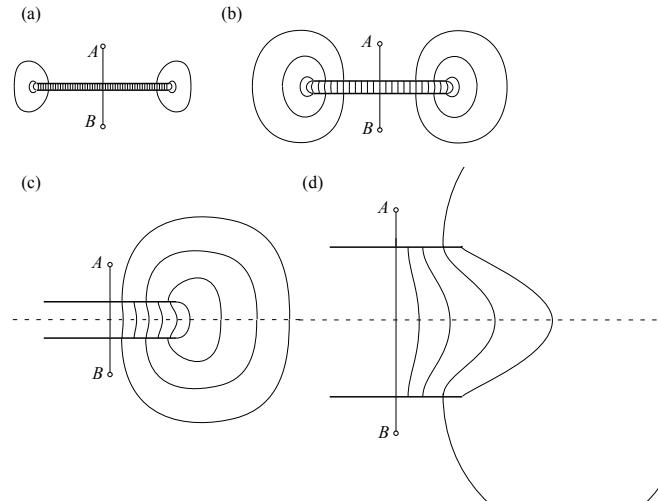


Figura 8.3: Condensatore piano con crescenti spessori relativi del dielettrico.

Effetti di estremità Quando lo spessore relativo del dielettrico (ovvero il rapporto tra spessore del dielettrico e dimensione caratteristica dell’armatura) non è più infinitesimo, le condizioni di invarianza rispetto alla posizione nel dielettrico non sono più rigorosamente verificate. In Fig. 8.3 è riportato l’andamento qualitativo delle linee del vettore \mathbf{E}_c dentro e fuori del condensatore: si vede come, al crescere dello spessore relativo del dielettrico diventa sempre più importante l’effetto dello spazio esterno al dielettrico. Esistono infatti delle linee del vettore che, partendo dalla parte esterna di un’armatura, raggiungono la parte esterna dell’altra senza interessare il dielettrico. Tali linee hanno tipicamente una lunghezza molto maggiore delle corrispondenti linee nel dielettrico tra le due armature pertanto, essendo tutte queste linee associate alla stessa differenza di potenziale ΔV_{AB} , sono caratterizzate da un campo medio tangente alla linea molto più piccolo. Il flusso del vettore \mathbf{D} associato a queste linee esterne è pertanto nullo in condensatori ideali, trascurabile in condensatori con dielettrico sottile e sempre più importante col crescere dello spessore relativo del dielettrico. Nella figura si vede anche come le linee nel dielettrico in prossimità degli spigoli delle armature risentano dell’effetto di richiamo dello spazio esterno al condensatore, e tendono ad invaderlo. Tutte le curve sono caratterizzate dalla stessa ΔV_{AB} , ma quelle di estremità seguono un percorso più lungo. Se è verificata l’ipotesi che il perimetro delle armature è molto maggiore dalla distanza che le separa, il campo \mathbf{E}_c di tali linee è molto minore del campo delle linee non di estremità rendendo gli effetti di estremità trascurabili.

8.1.2 Condensatore cilindrico

Si considerino due superfici cilindriche conduttrici coassiali S_A e S_B , la più interna di raggio r_A mentre la più esterna di raggio r_B (fig. 8.4). Sia h l’altezza di tali superfici, molto maggiore di r_B al fine di rendere trascurabili gli effetti di estremità. Nel volume tra le due armature sia presente un dielettrico uniforme con costante ϵ . Attraverso i morsetti A e B vengono immesse nelle due armature due cariche opposte q_A e q_B , che si distribuiscono lungo le due armature

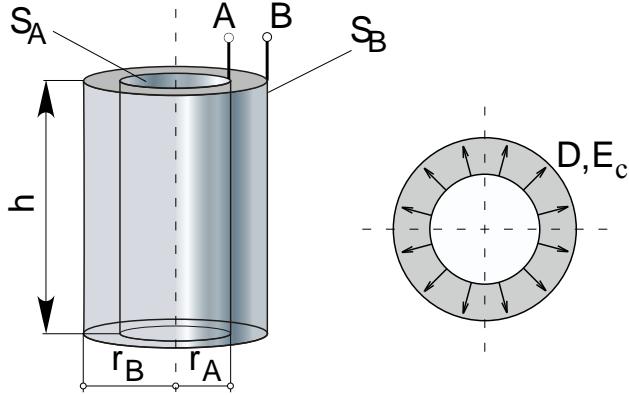


Figura 8.4: Condensatore cilindrico. Sinistra: vista del condensatore. Destra: vista in sezione con i vettori induzione elettrica e campo elettrico.

con densità lineari di carica ripetutamente pari a λ_c e $-\lambda_c$ che sarà considerata uniforme, data l'invarianza della configurazione rispetto alla posizione lungo l'asse del condensatore, a sua volta dovuta all'assenza degli effetti di estremità.

Per quanto sopra detto, e vista la simmetria assiale, il campo elettrico E_c è puramente radiale e dipendente dalla sola coordinata radiale:

$$E_c(r) = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon r}$$

da cui, integrando, si ottiene il potenziale in funzione del raggio:

$$V = -\frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon} \ln(r) + C,$$

dove C è la costante di indeterminazione. Considerando che $\lambda_c = q_A/l$, si ottiene la differenza di potenziale ΔV_{AB} :

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = \frac{q_A}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right).$$

Infine, si ricava la capacità c :

$$c = \frac{q_A}{\Delta V_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)} \quad (8.4)$$

8.1.3 Condensatore sferico

Un condensatore con tale geometria è formato da due superfici sferiche concentriche, separate da un dielettrico con costante ϵ (Fig. 8.5). Sia r_A il raggio della superficie più interna ed r_B il raggio di quella esterna. Il campo elettrico che risulta dopo l'applicazione di una distribuzione

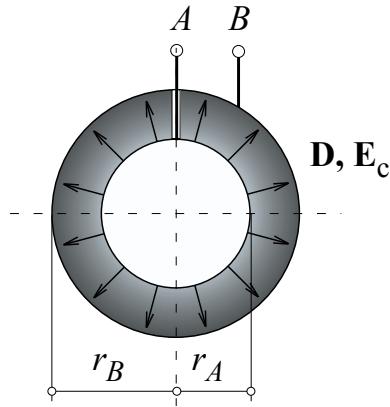


Figura 8.5: Condensatore sferico. Sinistra: vista del condensatore. Destra: vista in sezione con i vettori induzione elettrica e campo elettrico.

di carica uguale ed opposta sulle due armature avrà certamente simmetria sferica e, integrato, fornirà la seguente espressione per il potenziale presente tra le armature:

$$V = \frac{q_A}{4\pi\epsilon r} + C,$$

dove C è la costante di indeterminazione. Calcolando la differenza tra il potenziale in A e quello in B si ottiene:

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = \frac{q_A}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Infine, la capacità di tale condensatore vale:

$$c = \frac{q_A}{\Delta V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} = \frac{4\pi\epsilon r_A r_B}{r_B - r_A}$$

Si noti che se $r_B \rightarrow \infty$, la capacità c tende a un valore finito pari a $c = 4\pi\epsilon r_A$. Questo valore corrisponde alla capacità di un conduttore verso l'infinito.

8.1.4 Linea bifilare

Si considerino due corpi conduttori filiformi disposti parallelamente in modo che la distanza D che li separa sia molto minore della loro lunghezza l . Tale distanza D sia, inoltre, molto maggiore del raggio r_0 dei conduttori: se quest'ultima ipotesi non fosse soddisfatta, la distribuzione di carica σ_c sulla superficie dei conduttori non sarebbe uniforme (pur continuando a rendere equipotenziali le due superfici).

Cantiere fin qui 2015-10-27 doc. Condensatore.tex Se invece l'ipotesi è soddisfatta, σ_c è pressoché uniforme su ciascun conduttore e viene generato un campo cilindrico attorno ad essi. Preso un punto P generico

nello spazio, che disti r_A dal conduttore A ed r_B dal conduttore B , il potenziale di tale punto è la somma dei contributi dei due conduttori:

$$\begin{aligned} V_A(P) &= -\frac{q_A}{2\pi\epsilon l} \ln r_A + c' \\ V_B(P) &= -\frac{-q_B}{2\pi\epsilon l} \ln r_B + c'' \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$V(P) = V_A(P) + V_B(P) = \frac{q_A}{2\pi\epsilon l} \ln \left(\frac{r_B}{r_A} \right) + c \quad (8.6)$$

Nell'ipotesi in cui tale punto P tenda all'infinito, allora $\left(\frac{r_B}{r_A} \right) \rightarrow 1$ e, di conseguenza, il potenziale $V(P)$ tende al valore finito c . Il potenziale assume tale valore anche se P appartiene a uno qualsiasi dei punti del piano perpendicolare al piano sul quale giacciono i conduttori e contenente la retta mediana. Per quanto riguarda la differenza di potenziale tra i due conduttori, si ha:

$$\Delta V_{AB} = V(A) - V(B) = \frac{q_A}{2\pi\epsilon l} \left[\ln \left(\frac{D}{r_0} \right) - \ln \left(\frac{r_0}{D} \right) \right] = \frac{q_A}{2\pi\epsilon l} \left[2 \ln \left(\frac{D}{r_0} \right) \right] = \frac{q_A}{\pi\epsilon l} \ln \left(\frac{D}{r_0} \right)$$

per cui la capacità c della linea bifilare vale:

$$c = \frac{q_A}{\Delta V_{AB}} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{D}{r_0} \right)}$$

Osservazione

Analizzando l'espressione del potenziale in un punto generico dello spazio ci si può rendere conto che le superfici equipotenziali sono cilindri non concentrici. Anche le linee di campo \mathbf{E}_c lo sono, e i due sistemi si intersecano formando sempre angoli retti (si ricordi infatti che il campo \mathbf{E}_c è, per definizione, il gradiente del campo V). Si ottiene dunque un sistema di coordinate curvilinee ortogonale.

8.1.5 Condensatore particolare

Un caso particolare di condensatore, non regolare in senso stretto ma analizzabile in prima approssimazione tramite formule già ricavate per condensatori regolari, è quello formato da due superfici chiuse, irregolari, posta una interna all'altra in modo tale che la distanza tra le superfici sia costante e piccola rispetto alle dimensioni delle superfici stesse; una sezione di tale condensatore potrebbe essere la seguente:

Come accennato, in prima approssimazione tale configurazione è analizzabile tramite le formule del condensatore sferico, per il quale si aveva $c = \frac{4\pi\epsilon r_A r_B}{r_B - r_A}$. Con la configurazione in esame, il prodotto $r_A \cdot r_B$ può essere riscritto come r^2 , essendo r un raggio medio per le due superfici, mentre la differenza $r_B - r_A$ è pari alla distanza d che separa i conduttori. Si ottiene quindi:

$$c = \frac{4\pi\epsilon r^2}{d} = \frac{\epsilon S}{d}$$

dove $S = 4\pi r^2$ è pari all'area della superficie sferica media che approssima le armature. Un condensatore di questo tipo viene detto “strato elettrico doppio”.

8.1.6 Condensatore con dielettrico non omogeneo

Separazione trasversale

Si consideri un condensatore a facce piane e parallele, con distanza d tra le due armature. Il dielettrico interposto è diviso trasversalmente in due; ciascuna delle due parti è omogenea, la prima con costante ϵ_1 , la seconda con costante ϵ_2 . S_1 ed S_2 , la cui unione forma l'armatura superiore del condensatore, continuano ad essere equipotenziali tra loro. Su S_1 sarà quindi presente una densità superficiale di carica σ_{c1} ed, analogamente, ci sarà una densità di carica σ_{c2} sulla parte S_2 , entrambe uniformi. Inoltre il campo E_{c1} dev'essere uguale ad E_{c2} , essendo entrambi il risultato del rapporto tra la differenza delle tensioni delle due armature e la distanza che le separa, parametri che restano invariati passando da una sezione all'altra del condensatore:

$$E_{c1} = E_{c2} = E_c = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{U}{d}.$$

Invece, per quanto riguarda il vettore di induzione elettrica \mathbf{D} , è possibile affermare che per ragioni di simmetria della configurazione di carica sul condensatore in esame, non esiste alcuna componente tangente alla superficie delle armature: il vettore è rivolto perpendicolarmente all'armatura superiore puntando verso quella inferiore. Inoltre, essendo uniforme la distribuzione di carica nelle due sezioni, risulta che tale componente normale del vettore \mathbf{D} corrisponde alla densità superficiale di carica:

$$|\mathbf{D}| = D_n \triangleq \lim_{S \rightarrow 0} \frac{q(P)}{S(P)} = \sigma_c$$

D'altra parte, essendo D calcolabile come $D = \epsilon E_c$, si ricava che $\sigma_c = \epsilon E_c$ nel caso particolare in esame. La carica totale presente su un'armatura è allora esprimibile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} q_{TOT} &= q_{S_1} + q_{S_2} = \sigma_{c1} S_1 + \sigma_{c2} S_2 = \epsilon_1 E_{C_1} S_1 + \epsilon_2 E_{C_2} S_2 = \\ &= E_c (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) = (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) \frac{U}{d} = \left(\frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \right) U \end{aligned} \quad (8.7)$$

Nell'ultima espressione si può riconoscere che la carica totale è scritta come somma delle cariche accumulate su due condensatori piani, il primo di capacità $c_1 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d}$, il secondo di capacità $c_2 = \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$.

Un condensatore avente il dielettrico suddiviso trasversalmente in più parti, ciascuna omogenea, ha una capacità complessiva che è pari alla somma delle capacità di ogni singola sezione:

$$c = \frac{q_{TOT}}{U} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d} = c_1 + c_2$$

Separazione longitudinale

Si prenda ora in esame un condensatore a facce piane e parallele con il dielettrico suddiviso longitudinalmente in due sezioni con costante dielettrica diversa ma omogenea al suo interno. Il

dielettrico con costante ε_1 abbia spessore d_1 , il dielettrico ε_2 abbia spessore d_2 e $d_1 + d_2 = d$ con d distanza tra le due armature. La distribuzione di carica superficiale σ_c sia uniforme ed opposta sui due conduttori. Inoltre, per ragioni di simmetria, il vettore \mathbf{D} corrisponde alla sua componente normale alla superficie delle armature, che, per l'uniformità della distribuzione di carica, corrisponde alla densità superficiale: $|\mathbf{D}| = D_n = \sigma_c$. Tale vettore è calcolabile anche come prodotto tra la costante dielettrica e il vettore campo elettrico perciò si ha che $\frac{q_{TOT}}{S} = \gamma_c = \varepsilon E_c$. Infine, la tensione ai capi del condensatore è pari alla somma delle tensioni all'interno di ogni dielettrico, per cui si ricava la seguente relazione:

$$U = U_1 + U_2 = E_{c1}d_1 + E_{c2}d_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_1}d_1 + \frac{D_2}{\varepsilon_2}d_2 = D \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right) = q_{TOT} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S} \right)$$

Risulta quindi che un condensatore con tali caratteristiche abbia una capacità il cui reciproco è la somma dei reciproci delle capacità di ogni singola sezione:

$$c = \frac{q_{TOT}}{U} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

8.2 Equazione caratteristica del condensatore

Con procedimento analogo a quello applicato nel precedente paragrafo, è possibile ricavare l'equazione che descrive il comportamento di un condensatore quando inserito in una rete elettrica. Si prenda il seguente circuito: La carica accumulata sull'armatura superiore del condensatore è esprimibile mediante l'integrale di corrente

$$q = \int_0^{+\infty} dt i(t)$$

Inoltre, la capacità c è pari al rapporto tra tale carica la tensione, in generale variabile nel tempo, presente ai capi del condensatore:

$$c = \frac{q}{\Delta V_c}$$

Da queste due relazioni si giunge all'equazione caratteristica del generatore:

$$c \Delta V_c(t) = q = \int_0^{+\infty} i(t) dt$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo si ottiene:

$$c \frac{d \Delta V_c(t)}{dt} = i(t)$$

ovvero la corrente che scorre ai morsetti del condensatore è proporzionale, tramite il fattore di capacità c , alla variazione nel tempo della tensione ai suoi capi.

8.3 Capacità parziali di un insieme di corpi conduttori

8.3.1 Definizione di capacità parziali

Supponiamo di considerare N corpi conduttori fissi, immersi in un dielettrico lineare ed isotropo. Siano i conduttori inizialmente neutri, non collegati tra loro e non vi siano cariche libere nel dielettrico. Possiamo ora collegare tra loro tutti i conduttori ad un nodo comune P , mediante fili in materiale di resistività trascurabile.

Inseriamo tra il nodo P ed il conduttore 1 un generatore di f.e.m. di valore E_1 , orientato come in figura 8.6. Il generatore applica una d.d.p. tra il conduttore 1 e gli altri conduttori,

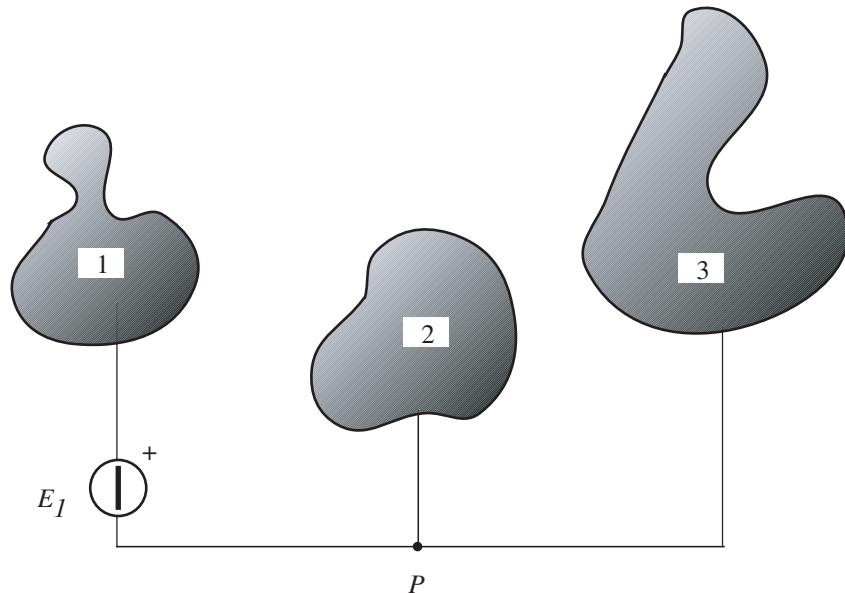


Figura 8.6: Corpi conduttori immersi in un dielettrico lineare omogeneo.

che restano tra loro equipotenziali. Tra la superficie del conduttore 1 e le superfici degli altri conduttori sarà presente la differenza di potenziale $\Delta V_{1j} = E_1$.

Consideriamo ora il vettore spostamento elettrico \mathbf{D} . Poiché nel dielettrico non vi sono cariche, le linee di \mathbf{D} non hanno alcuna sorgente, nel dielettrico, nè pozzo. Le linee di \mathbf{D} possono iniziare e terminare allora solo sulla superficie dei conduttori, mentre il dielettrico può essere rappresentato come un insieme di tubi di flusso di \mathbf{D} . Inoltre, se due conduttori sono equipotenziali, non esiste alcuna linea di campo, quindi nessun tubo di flusso di \mathbf{D} che da uno di essi va all'altro.

Consideriamo ora tutti i tubi di flusso che partono dal conduttore 1 della fig. 8.6: tali tubi di flusso, di portata Θ_{1i} vanno dal conduttore 1 ai restanti $N - 1$ conduttori. Una generica superficie S_1 che circonda il solo conduttore τ_1 sarà attraversata da tutti e soli questi tubi di flusso quindi,

applicando ad essa il teorema di Gauss (7.9, pag. 66), otteniamo:

$$\Theta_1 = \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{j=1}^N \Theta_{1j} = q_1 \quad (8.8)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie S_1 e q_1 è la carica nel conduttore 1. Si tenga inoltre conto che $\Theta_{jj} = 0$.

Per la linearità del mezzo, la portata del generico tubo di flusso tra il conduttore 1 ed il conduttore j è proporzionale alla differenza di potenziale ΔV_{1j} , essendo \mathbf{D} proporzionale a \mathbf{E}_c , e quindi:

$$q_1 = \sum_{j=1}^N \Theta_{1j} = \sum_{j=1}^N C_{1j} \Delta V_{1j} \quad (8.9)$$

dove C_{1j} sono dei coefficienti positivi detti *capacità parziali* tra il conduttore 1 ed i restanti $N - 1$ conduttori, come sotto verrà illustrato in dettaglio. Le capacità parziali si misurano in Farad (F), avente le dimensioni di Coulomb/Volt.

Se i restanti $N - 1$ conduttori non sono equipotenziali, tenendo conto di quanto appena ricavato possiamo così esprimere le cariche q_i nei conduttori:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = C_{12} \Delta V_{12} + C_{13} \Delta V_{13} + \dots + C_{1N} \Delta V_{1N} \\ q_2 = C_{21} \Delta V_{21} + C_{23} \Delta V_{23} + \dots + C_{2N} \Delta V_{2N} \\ \dots \\ q_N = C_{N1} \Delta V_{N1} + C_{N2} \Delta V_{N2} + \dots + C_{N(N-1)} \Delta V_{N(N-1)} \end{array} \right. \quad (8.10)$$

La generica capacità parziale C_{ij} è pertanto pari a:

$$C_{ij} = \frac{\Theta_{ij}}{\Delta V_{ij}} = \frac{q_i}{V_i - V_j} \Big|_{V_k = V_i \forall k \neq j} \quad (\text{F}) \quad (8.11)$$

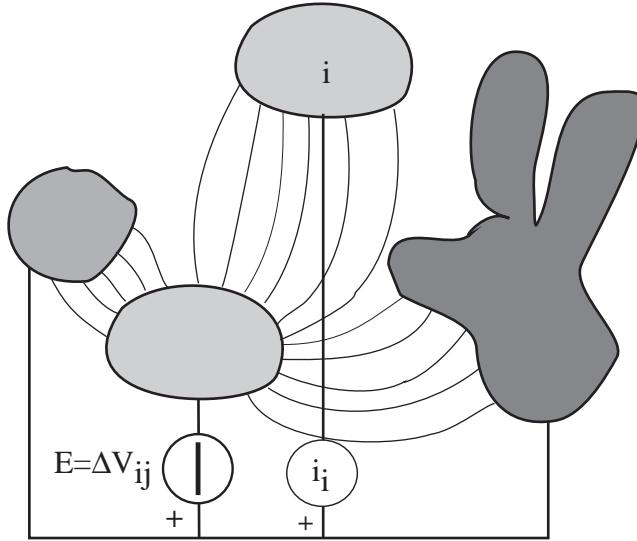
Si vede immediatamente che $C_{ij} = C_{ji}$, essendo $\Theta_{ij} = -\Theta_{ji}$ e $\Delta V_{ij} = -\Delta V_{ji}$.

8.3.2 Metodo di misura delle capacità parziali

Per misurare le capacità parziali di un insieme di conduttori, tenendo conto della (8.12), si può adottare lo schema riportato in figura 8.7. Il generatore di f.e.m. imprime una differenza di potenziale tra il conduttore i -esimo e gli altri. L'amperometro misura la corrente assorbita dal conduttore i -esimo. Se si ammette che, all'inizio, tutti i conduttori siano neutri, integrando quest'ultimo segnale rispetto al tempo, si ottiene la carica immagazzinata nel conduttore:

$$q_i = \int_0^\infty i_i(t) dt,$$

da cui $C_{ij} = q_i / \Delta V_{ij} = q_i / E$

Figura 8.7: Disposizione degli strumenti per la misura di C_{ij} .

8.3.3 Rappresentazione circuitale equivalente

Le relazioni (8.10) possono venire derivate rispetto al tempo. Tenendo conto che, per la legge di continuità della carica elettrica, la generica derivata dq_i/dt rappresenta la corrente entrante nel conduttore i -esimo, si ricavano le seguenti correnti assorbite dagli N conduttori:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = C_{12} \frac{du_{12}}{dt} + C_{13} \frac{du_{13}}{dt} + \dots + C_{1N} \frac{du_{1N}}{dt} \\ i_2 = C_{12} \frac{du_{21}}{dt} + C_{23} \frac{du_{23}}{dt} + \dots + C_{2N} \frac{du_{2N}}{dt} \\ \dots \\ i_N = C_{N1} \frac{du_{N1}}{dt} + C_{N2} \frac{du_{N2}}{dt} + \dots + C_{N(N-1)} \frac{du_{N(N-1)}}{dt} \end{array} \right. \quad (8.12)$$

La corrente assorbita da ogni conduttore è la somma di $N - 1$ addendi del tipo $i_{ij} = C_{ij} du_{ij}/dt$, ciascuno dipendente solo da u_{ij} . Si può pensare che tale addendo di corrente sia assorbito da un condensatore equivalente, avente capacità C_{ij} e sottoposto alla tensione u_{ij} . Lo schema elettrico che ne risulta è allora ad esempio quello riportato in figura 8.8, nel caso di 4 conduttori. Se consideriamo allora l'insieme degli N conduttori come ad un N -polo, lo schema equivalente prevede un condensatore equivalente di capacità C_{ij} inserito tra ogni coppia di morsetti i e j .

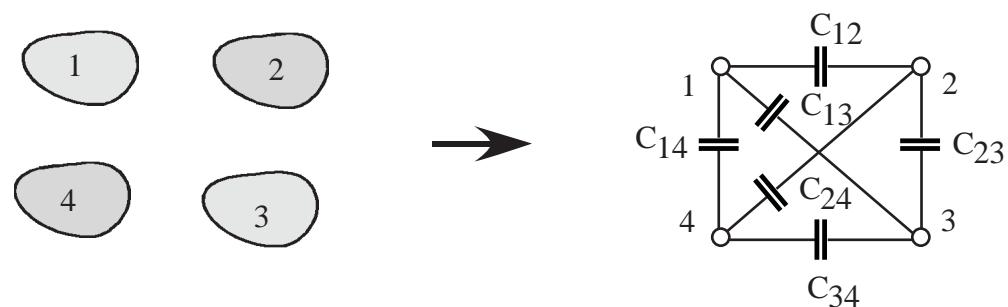


Figura 8.8: Quattro conduttori accoppiati capacitivamente e la loro rete elettrica equivalente.

8.4 Lavoro ed energia del campo elettrico(quasi)statico

Si consideri il semplice circuito costituito dalla serie tra un generatore ideale di tensione e ed un condensatore di capacità c costante: All'equilibrio, la tensione U_c ai capi del condensatore deve uguagliare la tensione e erogata dal generatore: $U_c = e = \text{costante}$.

Dall'equazione caratteristica del condensatore, $i_c = c \frac{dU_c}{dt}$, ne deriva che la corrente che scorre nel circuito è nulla, essendo nulla la variazione di tensione sul condensatore. Considerando infine la carica q_c immagazzinata su ogni armatura, anch'essa assume un valore costante, essendo $q_c = cU_c$.

Si ipotizzi ora di incrementare la tensione e di un valore infinitesimo de : verrà trasportata una carica dq_c da un'armatura all'altra, di valore $dq_c = c dU_c = c de$, dopodiché tutto ritorna statico se non avvengono ulteriori variazioni di e .

Il lavoro elettrico infinitesimo erogato dal generatore in un intervallo di tempo infinitesimo dt si può esprimere come

$$L_{gen}^{inf} = e dq = ei dt = U_c \left(c \frac{dU_c}{dt} \right) dt = cU_c dU_c$$

Integrando questo differenziale tra la tensione nulla che si ha ai capi del condensatore al momento del collegamento del circuito e la generica tensione U_{c1} raggiunta all'istante t_1 si ottiene l'espressione del lavoro finito erogato dal generatore:

$$L_{gen} = \int_0^{t_1} L_{gen}^{inf} = \int_0^{t_1} ei dt = \int_0^{U_{c1}} cU_c dU_c = \frac{1}{2} cU_{c1}^2$$

Come si può notare, il lavoro compiuto dal generatore *non* dipende dall'andamento temporale della tensione ma solo dai suoi valori iniziale e finale. Tale lavoro è dunque conservativo. In particolare, se il valore di partenza coincide con quello finale (viene quindi compiuto un ciclo nelle tensioni), il lavoro complessivo è nullo: il condensatore è un bipolo accumulatore di energia. Quando ai suoi capi la tensione aumenta, esso accumula energia immagazzinandola nel campo elettrico che si crea tra le due armature, per poi rilasciarla quando la tensione ai suoi capi cala. L'energia che viene immagazzinata nel condensatore è dunque un'energia elettrostatica e viene indicata come

$$W_c = \frac{1}{2} cU_c^2$$

dove U_c è la variabile di stato, ovvero quella grandezza la cui conoscenza permette di conoscere lo stato (energetico) del componente. Esistono due forme alternative per esprimere l'energia W_c , che sfruttano la relazione $q_c = cU_c^2$:

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{1}{2} q_c U_c \\ W_c &= \frac{1}{2} \frac{q_c^2}{c} \end{aligned} \tag{8.13}$$

Il fattore $\frac{1}{2}$, sempre presente in tutte le espressioni, indica che il mezzo (ovvero il dielettrico interposto tra le due armature) è lineare. Un ragionamento analogo può essere fatto se, ad posto

del condensatore, si ha a che fare con capacità parziali. Si ipotizzi, per semplicità, una situazione con tre corpi conduttori in un mezzo lineare; si colleghino le armature inserendo due generatori di tensione, come in figura: Se da una situazione stazionaria, nella quale tutte le tensioni sono costanti e le correnti nulle, di varia di $d(e_{12})$ e de_{32} il valore di tensione erogata dai generatori, si ottiene uno spostamento di carica dq_1 e dq_3 :

$$\begin{aligned} dq_1 &= c_{12} dU_{12} + c_{13} dU_{13} \\ dq_3 &= c_{31} dU_{31} + c_{32} dU_{32} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Allora, il lavoro infinitesimo svolto dai generatori vale:

$$\begin{aligned} L_{gen}^{inf} &= e_{12} dq_1 + e_{32} dq_3 = U_{12}(c_{12} dU_{12} + c_{13} dU_{13}) + U_{32}(c_{31} dU_{31} + c_{32} dU_{32}) = \\ &= c_{12}U_{12} dU_{12} + c_{32}U_{32} dU_{32} + c_{13}(U_{12} - U_{32}) dU_{13} = \\ &= c_{12}U_{12} dU_{12} + c_{32}U_{32} dU_{32} + c_{13}U_{13} dU_{13} \end{aligned}$$

dove è stato sfruttato il fatto che

- $U_{12} = e_{12}$
- $U_{32} = e_{32}$
- $U_{12} - U_{32} = U_{13}$

Il risultato ottenuto è un differenziale esatto, essendo il differenziale della quantità

$$W_c = \frac{1}{2}c_{12}U_{12}^2 + \frac{1}{2}c_{32}U_{32}^2 + \frac{1}{2}c_{13}U_{13}^2$$

che rappresenta l'energia elettrostatica di una configurazione con tre capacità parziali. Anche in questo caso si noti che tale energia di carica delle capacità non dipende dal percorso seguito dalle variabili di stato U_{12} e U_{32} . In generale, l'energia elettrostatica può essere così espressa:

$$W_c = \sum_{i=1, j=i+1}^N \frac{1}{2}c_{ij}U_{ij}^2$$

OSSERVAZIONE: nella situazione con tre capacità parziali sono presenti tre tensioni ma due soli gradi di libertà: una delle tensioni, infatti, dipende dalle altre due. Questo è il motivo per il quale nel collegare i corpi conduttori sono stati utilizzati due generatori.

Verrà ora dimostrato il seguente risultato, che permette il calcolo dell'energia elettrostatica accumulata tra due conduttori dalla conoscenza del campo elettrico \mathbf{E}_c e del campo di induzione elettrica \mathbf{D} :

$$W_c = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} d\tau$$

Per dimostrare questa relazione, occorre innanzitutto suddividere lo spazio \mathbb{R}^3 in tanti tubetti di flusso τ_i del vettore \mathbf{D} , ciascuno di portata Θ_i . Si avrà allora che:

- $\Re^3 = \cup_i \tau_i$, $\tau_i \cap \tau_j = 0 \forall i \neq j$
- $q = \sum_i \Theta_i$

dove q rappresenta la carica accumulata sul conduttore da cui le linee di \mathbf{D} nascono. Si suddivide ora ciascun tubo di flusso τ_i in tratti infinitesimi τ_{ij} in modo tale che le superfici S_{ij} di separazione tra un trattino e il successivo siano equipotenziali. Sia \mathbf{n}_{ij} la normale alla superficie S_{ij} , $\mathbf{u}_{t_{ij}}$ il versore parallelo alle linee del campo \mathbf{D} e sia inoltre l_{ij} la lunghezza di ogni trattino τ_{ij} . Allora, si può scrivere la funzione integranda come segue:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} d\tau = \frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} \tau_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} (S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot l_{ij} \mathbf{u}_{t_{ij}})$$

Avendo scelto S_{ij} equipotenziale, significa che la sua normale \mathbf{n}_{ij} risulta parallela al campo \mathbf{E}_c . Inoltre, per definizione di $\mathbf{u}_{t_{ij}}$, tale versore è parallelo al campo \mathbf{D} . È dunque possibile permutare i termini dell'ultima relazione trovata nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} (S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot l_{ij} \mathbf{u}_{t_{ij}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_{t_{ij}} l_{ij}) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_{ij} S_{ij}) = \frac{1}{2} U_{ij} \Theta_{ij}$$

essendo U_{ij} la tensione ai capi del trattino τ_{ij} e Θ_{ij} la sua portata.

Ricostruendo il tubo di flusso τ_i si ottiene:

$$\sum_j \frac{1}{2} U_{ij} \Theta_{ij} = \frac{1}{2} \Theta_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2} \Theta_i U_{AB}$$

dove il termine Θ_{ij} è stato raccolto fuori dal segno di sommatoria perché è uguale per tutti i trattini di flusso τ_{ij} . Dall'unione di tutti i τ_i è possibile ricavare il risultato per tutto lo spazio \Re^3 :

$$\sum_i \frac{1}{2} \Theta_i U_{AB} = \frac{1}{2} U_{AB} \sum_i \Theta_i = \frac{1}{2} U_{AB} q$$

che è esattamente una delle tre espressioni dell'energia eletrostatica W_c . Solo se il mezzo è isotropo è possibile esprimere la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E_c^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

8.5 Forze sui condensatori

Si consideri un condensatore piano caricato con una carica $+q_c$ sull'armatura positiva e $-q_c$ su quella negativa. Si ipotizzi che, per mezzo delle forze di attrazione coulombiane che si generano sulle due armature a causa del campo eletrostatico, queste si deformino o si spostino portando a una variazione della capacità c che dal valore iniziale passa al valore $c + dc$. Il valore infinitesimo svolto dal generatore che pilota la capacità può essere così espresso:

$$L_{gen}^{inf} = dW_c + L_{mecc}^{inf}$$

dove dW_c è la variazione di energia elettrostatica immagazzinata e L_{mec}^{inf} è il lavoro meccanico dovuto allo spostamento delle armature.

Il membro di sinistra può essere espresso come

$$L_{gen}^{inf} = U_c dq_c$$

mentre, ricordando l'espressione di W_c ,

$$W_c = \frac{1}{2}q_c U_c$$

Si può ricordare il suo differenziale:

$$dW_c = \frac{1}{2}U_c dq_c + \frac{1}{2}q_c dU_c$$

Allora, invertendo la relazione, si può esprimere il lavoro meccanico nel seguente modo:

$$L_{mec}^{inf} = L_{gen}^{inf} - dW_c = U_c dq_c - \frac{1}{2}U_c dq_c - \frac{1}{2}q_c dU_c = \frac{1}{2}U_c dq_c - \frac{1}{2}q_c dU_c$$

Quest'ultima espressione è un differenziale non esatto, il che significa che il suo integrale dipende non solamente dagli estremi di integrazione ma anche dal percorso seguito per passare dall'uno all'altro. Ne consegue che il lavoro meccanico non è conservativo.

Ricordando che q_c può essere espresso come

$$q_c = cU_c$$

il suo differenziale diventa

$$dq_c = c dU_c + U_c dc$$

Sostituendo questa relazione nell'espressione del lavoro meccanico infinitesimo, si ottiene un'espressione più compatta:

$$L_{mec}^{inf} = \frac{1}{2}U_c dq_c - \frac{1}{2}q_c dU_c = \frac{1}{2}U_c(U_c dc + c dU_c) - \frac{1}{2}cU_c dU_c = \frac{1}{2}U_c^2 dc$$

Capitolo 9

Fenomeni magnetici

9.1 Induzione magnetica

9.1.1 Descrizione dell'esperimento

Si consideri il seguente esperimento. Un circuito filiforme, fisso e ed indeformabile, viene alimentato da un generatore di f.e.m. regolabile E secondo lo schema illustrato in fig. 9.1.

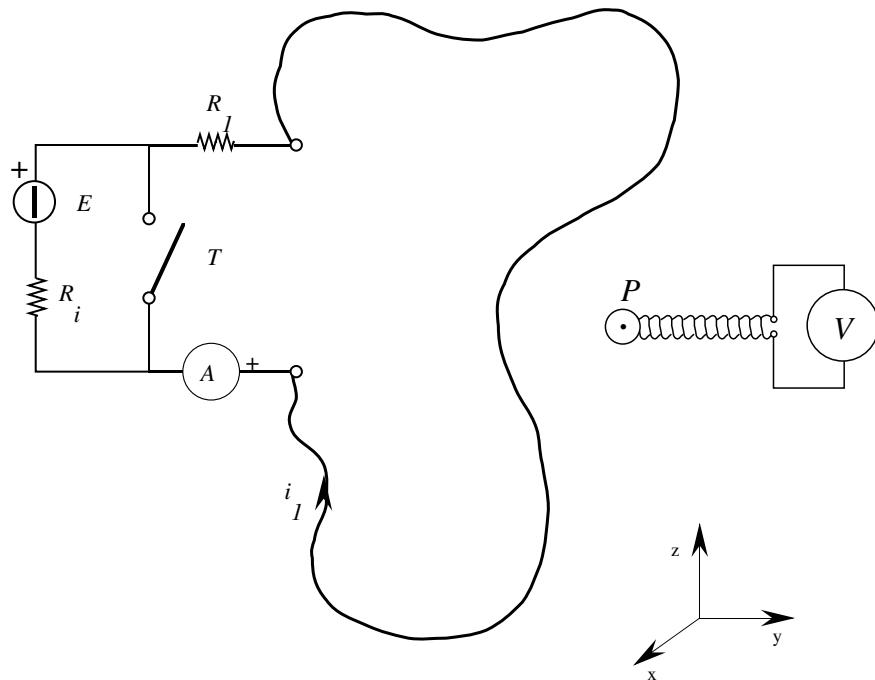


Figura 9.1: Schema del circuito filiforme, della sonda e della sua alimentazione

La resistenza R_i è la resistenza interna del generatore mentre R_1 rappresenta la resistenza

equivalente del resto del circuito. Aprendo e chiudendo l'interruttore T è possibile alimentare il circuito filiforme con il generatore o cortocircuitarlo. L'amperometro ideale A , posto in serie al circuito, consente di conoscere in ogni istante il valore della corrente i_1 .

Il circuito sia collocato in un mezzo uniforme (ad es. l'aria o il vuoto) e sia nota la sua posizione ed orientazione rispetto ad un sistema di riferimento in quiete con esso. In un punto P nelle vicinanze del circuito, poniamo ora una sonda, formata da N_2 spire di area A strettamente avvolte, collegate mediante due fili intrecciati ad un voltmetro integratore, ovvero uno strumento che fornisce, oltre al valore istantaneo di tensione, anche una lettura proporzionale all'integrale della tensione $\Delta\lambda$, misurato a partire da un certo istante t_0 fissato a piacere. La grandezza $\Delta\lambda$, misurata in V·s, è:

$$\Delta\lambda(t, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(t) - \lambda(t_0) = \int_{t_0}^t u(t') dt' \quad (9.1)$$

dove $u(t)$ è la tensione istantanea misurata dal voltmetro lungo i suoi collegamenti. Sia ideale il voltmetro, sia cioè nulla la corrente i_2 nel circuito formato dalla sonda e dal voltmetro. Sia inoltre "piccola" la sonda rispetto al circuito filiforme e sia nota la posizione del suo centro P .

Rimane ora da identificare l'orientazione delle spire della sonda. Si fissa innanzitutto il loro verso di percorrenza, come richiesto dalla definizione di tensione elettrica lungo una linea. L'orientazione deve essere poi completata individuando la giacitura della generica spira della sonda nello spazio: la cosa più naturale è allora fissare un'*orientazione interna delle superfici di cui le spire sono il bordo*. Inoltre identificheremo la giacitura del piano delle spire mediante la direzione dello spazio normale ad esse, espressa mediante un versore \mathbf{n} . Più avanti (sez. 9.1.4) esamineremo in dettaglio gli aspetti relativi all'orientazione delle spire.

9.1.2 Evidenze sperimentali

1. Quando l'interruttore T viene aperto, nel circuito si ha una corrente i_1 che non raggiunge istantaneamente il valore di regime $i_1 = E/(R_1 + R_i)$. Corrispondentemente, quando T viene chiuso, la corrente $i_1(t)$ non va istantaneamente a zero, anche se nel circuito filiforme il generatore non agisce più.
2. Nel periodo in cui i_1 varia, ai morsetti del voltmetro integratore si manifesta una tensione $u(t)$ che diventa nulla quando $i_1(t)$ si stabilizza. Corrispondentemente $\lambda(t)$ diviene costante.
3. Mantenendo fissi la posizione e l'orientamento della sonda si vede che la variazione dell'integrale di tensione $\Delta\lambda$, quando la corrente i_1 varia tra due valori I_1 ed I'_1 , è funzione dei due valori I_1 e I'_1 , ma non dipende dalla legge temporale di variazione.
4. A parità di valori di I_1 della corrente nel circuito filiforme, spostando la sonda in vari punti dello spazio si vede che la variazione dell'integrale di tensione $\Delta\lambda$ dipende dal punto P in cui la sonda è collocata. $\Delta\lambda$ può quindi così essere espresso: $\Delta\lambda = f(P, I_1) - f(P', I_1)$.

5. Per una stessa coppia di valori I_1 e I'_1 , e per un'assegnata posizione della sonda nello spazio, il valore di $\Delta\lambda$ varia in modo sinusoidale con l'angolo di rotazione della sonda rispetto ad una direzione prefissata.
6. Mantenendo costante la corrente I_1 e spostando o ruotando la sonda, si vede che $\Delta\lambda$ è in generale non nullo e dipende solo dai punti/orientazioni di partenza e di arrivo, non dalla traiettoria seguita, né dal tempo impiegato.
7. Sostituendo la sonda con altre sonde che differiscono tra loro per la superficie o il numero di spire, si vede che, per gli stessi esperimenti descritti nei punti precedenti, $\Delta\lambda$ è proporzionale al numero di spire ed alla loro area, purché piccola.

Interpretazione delle evidenze sperimentalistiche

Dalla 1) si vede che, con l'instaurarsi della corrente nel circuito filiforme, viene immagazzinata dell'energia che viene restituita quando il generatore è cortocircuitato e la corrente torna a zero. Nella maggior parte dei casi i valori di energia misurabili non possono essere spiegati semplicemente in termini di energia capacitiva. Le evidenze da 3) a 7) possono essere spiegate assumendo che il segnale $\Delta\lambda$ del voltmetro integratore sia proporzionale alla *variazione del flusso di un opportuno vettore attraverso la superficie della sonda*, intesa come l'unione delle superfici delle sue singole spire:

$$|\Delta\lambda| = |\Delta\varphi_c| = \left| N_2 \Delta \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \right| \quad (9.2)$$

dove:

\mathbf{B} : Vettore di cui si considera il flusso, denominato densità di flusso magnetico o, più comunemente, *induzione magnetica*

$\Delta\varphi_c$: Variazione del flusso;

S : area della superficie di ogni spira della sonda;

\mathbf{n} : versore normale alla superficie della sonda;

N_2 : numero di spire della sonda.

Si noti che nella relazione sopra scritta si sono considerati i valori assoluti delle variazioni di $\Delta\varphi_c$ e $\Delta\lambda$, perché non si è ancora definito il riferimento per l'induzione, per il calcolo della tensione e del flusso.

Il flusso φ_c è detto anche *flusso concatenato*, intendendo che la sua valutazione deve essere fatta tenendo conto del contributo di tutte le N_2 spire della sonda, per ciascuna delle quali si deve considerare la medesima superficie S , se le spire sono strettamente avvolte e realizzate con filo sottile. Si approfondirà più avanti il concetto di flusso concatenato. Il flusso si misura in *Weber*, unità avente le dimensioni di $V \cdot s$. Il vettore induzione magnetica si misura in *Tesla*, unità avente le dimensioni di $V \cdot s/m^2$.

Da quanto sopra scritto si vede dunque che l'induzione magnetica è funzione del punto P in cui si pone la sonda (la cui "piccolezza" fa sì che l'induzione sia in prima approssimazione uniforme sulla sua superficie), ma non della velocità con cui, eventualmente, la sonda si muove. In un mezzo a comportamento lineare, quali il vuoto e l'aria, la variazione di integrale di tensione è proporzionale alla variazione di corrente, a parità di altre condizioni. L'induzione può quindi essere espressa così: $\mathbf{B} = I_1 \mathbf{f}(P)$, dove $\mathbf{f}(P)$ è un'opportuna funzione vettoriale del punto. L'induzione magnetica costituisce dunque un campo vettoriale.

9.1.3 La legge di Lenz

Si considerino ora due *conduttori filiformi*, il più possibile vicini, di resistenza trascurabile, collegati ciascuno ad un amperometro in modo che i due riferimenti per la corrente siano concordi (figura 9.2). Il circuito 1 sia collegato ad un generatore di f.e.m. (per fissare le idee positiva), mentre il circuito 2 sia collegato ad una resistenza R_2 .

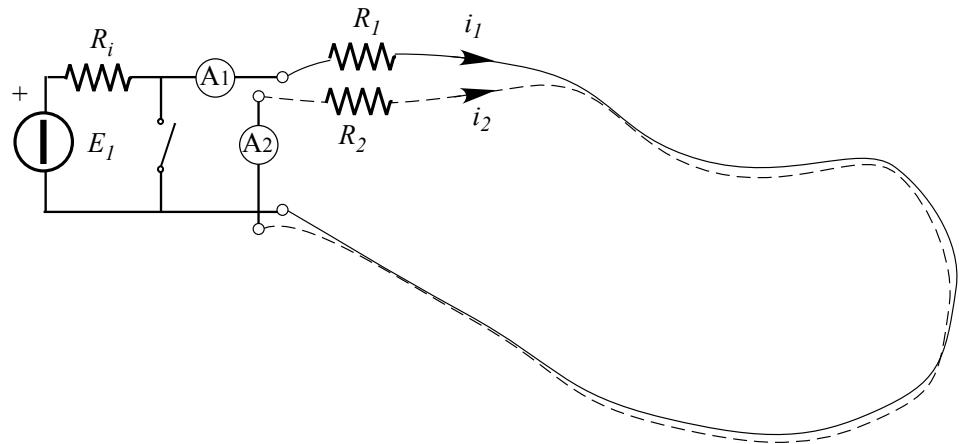


Figura 9.2: Circuiti filiformi vicini per lo studio della legge di Lenz. Nel disegno sono evidenziate le resistenze R_1 e R_2 dei due circuiti.

Si osserva sperimentalmente che, aprendo l'interruttore si ha una corrente i_1 positiva e, mentre questa cresce, nel circuito 2 si ha una corrente i_2 tanto più vicina a $-i_1$ quanto più la resistenza R_2 è piccola e quanto più i due circuiti sono geometricamente vicini (Fig. 9.3).

Entrambi i circuiti concatenano un flusso, ciascuno generato da *entrambe* le correnti i_1 ed i_2 . I due flussi concatenati φ_{c1} e φ_{c2} , quindi anche i due corrispondenti integrali di tensione $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2$ saranno tanto più simili quanto più i due circuiti sono geometricamente vicini. Poiché il segno della corrente i_2 è opposto a quello di i_1 e le due correnti hanno il medesimo riferimento, si può pensare che il contributo di i_2 alla generazione del campo di induzione, e quindi del flusso, sia opposto a quello di i_1 . D'altra parte, per avere una corrente i_2 non nulla, deve aver agito una f.e.m. e_2 lungo il circuito 2 e quindi una f.e.m. e_1 , quasi uguale ad e_2 , deve aver agito anche

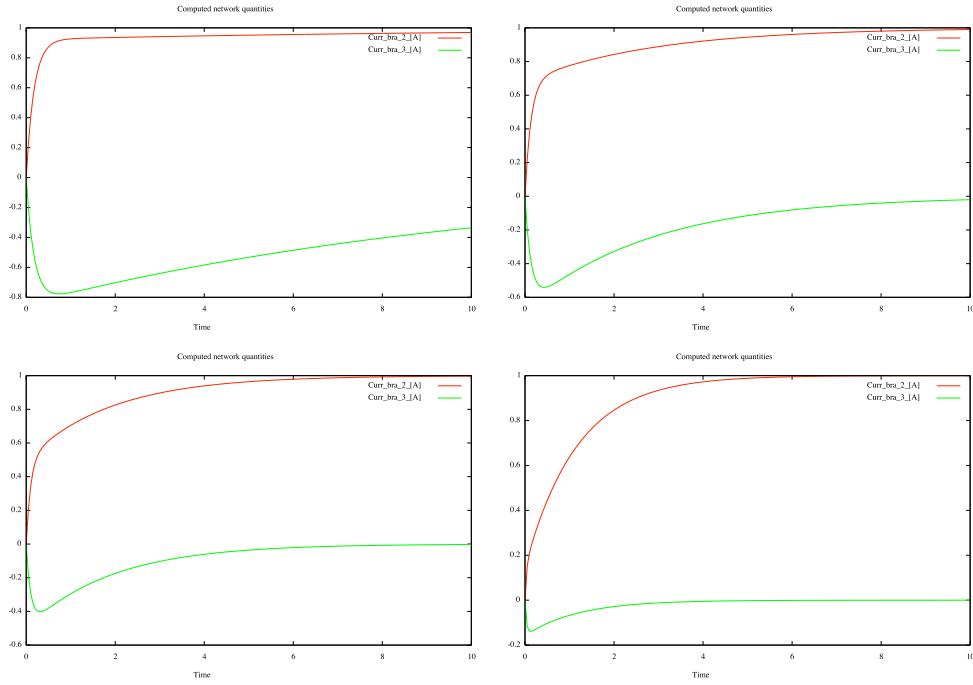


Figura 9.3: Da sinistra in alto: andamento temporale delle correnti nei circuiti di Fig. 9.2 per valori di $R_2/(R_1 + R_i) = 0,1; 0,5; 1$ e 5 . Corrente i_1 : $Curr_bra_2$; corrente i_2 : $Curr_bra_3$

sul circuito 1, dato che i due flussi concatenati sono pressoché coincidenti. Si possono quindi riassumere queste considerazioni enunciando la legge di Lenz: *In un circuito sottoposto ad una variazione di flusso concatenato viene indotta una f.e.m. di intensità e verso tale da cercare di opporsi a tale variazione mediante l'induzione di una corrente.*

L'azione di opposizione alla variazione di flusso per mezzo della corrente indotta è più o meno efficace in dipendenza della maggiore o minore resistenza del circuito. Ad esempio, se il circuito 2 ha resistenza R_2 nulla, la corrente i_2 è praticamente opposta ad i_1 , contrastando pressoché completamente l'effetto di i_1 , cosicché il flusso concatenato da entrambi i circuiti rimane costante. Nel caso più generale di due circuiti con geometria diversa, il fatto che il flusso concatenato dal circuito 2 non cambi non implica, si badi bene, che anche l'induzione resti costante in ogni punto dello spazio. Essa può infatti variare nei vari punti della superficie di cui il circuito è il bordo, però il flusso concatenato (grandezza globale associata all'intera superficie e non ad ogni suo punto) non varia. Si ha perciò una compensazione della variazione di induzione tra i vari punti della superficie della spira. Se, all'opposto, il circuito 2 ha resistenza infinita, in esso non può esservi corrente ed il flusso può variare liberamente (per quanto dipende dal circuito 2). In ogni caso, però, viene indotta una f.e.m. la cui intensità non dipende dalla conducibilità del materiale di cui il circuito è composto. Se il materiale è non conduttore, alla f.e.m. non fa seguito l'instaurarsi di una corrente, così come, collegando un generatore ad un circuito in materiale non conduttore, all'applicazione della f.e.m. non segue la presenza di una corrente.

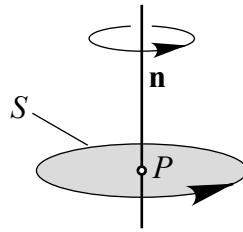


Figura 9.4: Orientazione interna della sonda mediante un versore orientato esternamente

9.1.4 Orientazione delle spire, definizione e misura e dell'induzione magnetica

Orientazione delle spire

Supponiamo per semplicità di considerare una spira singola, la cui superficie sia dotata di orientazione interna ed esaminiamo ora in modo sistematico gli aspetti relativi ai riferimenti per la tensione, forza elettromotrice, corrente ed induzione.

In fig. 9.4 si mostra come, per identificare la giacitura della spira si possa usare un *versore dotato di orientazione esterna*¹

In aggiunta, in conformità alla prassi comune che non prevede l'uso di vettori orientati esternamente, fisseremo spesso l'orientazione mediante un versore **n** orientato internamente, chiamando *pagina positiva* la pagina della superficie situata dalla stessa parte dove termina il versore. È allora chiaro che, mentre l'uso di un versore orientato esternamente non si presta ad ambiguità, per un versore orientato internamente sono possibili due orientazioni, come indicato nelle figure 9.5 C e D. Si sceglie, di norma, la *regola della mano destra*.

Si consideri ora una generica linea l_{AB} nello spazio, orientata internamente, *non necessariamente corrispondente ad una spira* ed avente A e B come estremi iniziale e finale. Useremo l'orientazione interna della linea per definire in modo congruente (Fig. 9.6):

- la corrente eventualmente presente, se la linea corrisponde ad una spira conduttrice: $i = i_{AB}$;
- la tensione elettrica: $u = u_{AB}$;
- la forza elettromotrice $e = e_{BA}$.

Se la linea è chiusa, le orientazioni sopra definite si estendono direttamente.

Si assume infine che, *quando una spira è alimentata con una corrente positiva, sia positivo anche il flusso d'induzione magnetica che essa genera e che concatena*.

¹Com'è noto, il vettore è un oggetto dotato di direzione verso e modulo. Se il vettore è orientato internamente (caso usuale) il verso è definito dalla percorrenza del segmento che rappresenta il vettore (dalla coda alla punta); se è orientato esternamente il verso è identificato dal senso di rotazione attorno al segmento che rappresenta il vettore. I vettori orientati esternamente sono anche detti *vettori assiali* o *pseudovettori*.

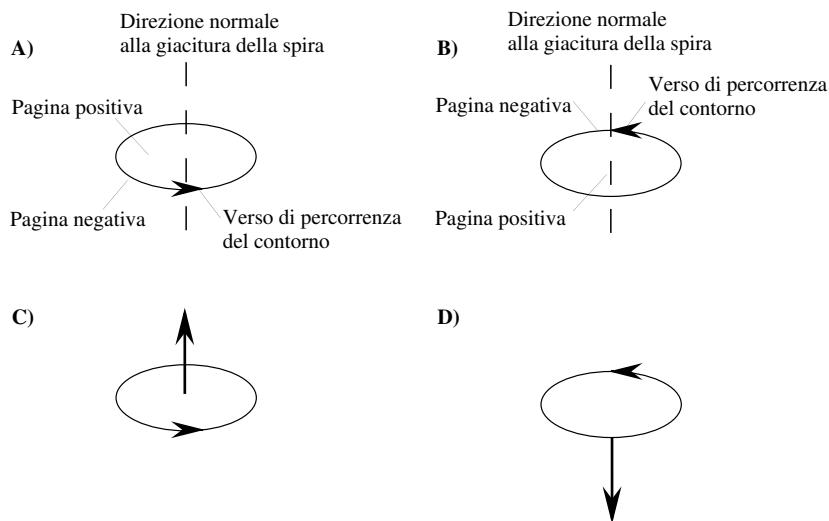


Figura 9.5: A e B: Orientazione interna della spira, C: Orientazione mediante la regola della mano destra, D: Orientazione mediante la regola della mano sinistra

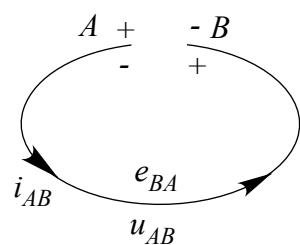


Figura 9.6: Linea orientata e riferimenti congruenti per corrente, tensione e forza elettromotrice

Orientazione dell'induzione

Sia data ora una spira che concatena un flusso variabile φ_c . In base alla legge di Lenz, lungo la spira agisce una forza elettrica specifica non conservativa \mathbf{F}_{es} (responsabile della f.e.m. lungo la spira stessa), che tende ad opporsi alla variazione del flusso: se il materiale con cui è fatta la spira lo consente, essa dà luogo ad una corrente che produce una variazione di flusso di segno opposto.

Quando il flusso cresce ($\Delta\varphi_c > 0$), la forza elettrica specifica avrà quindi direzione contraria al verso positivo di percorrenza della spira (figura 9.7 A). Se collegiamo un voltmetro che misuri la forza elettromotrice lungo la spira, come riportato in figura, avremo quindi $\Delta\lambda < 0$. All'opposto, quando il flusso decresce ($\Delta\varphi_c < 0$), la forza elettrica specifica avrà direzione concorde con il verso positivo di percorrenza della spira (figura 9.7 B), perciò $\Delta\lambda > 0$.

In entrambi i casi si può dunque scrivere, in base ai sistemi di riferimento assunti:

$$\Delta\lambda(t, t_0) = \int_{t_0}^t e(t') dt' = -\Delta\varphi_c \quad (9.3)$$

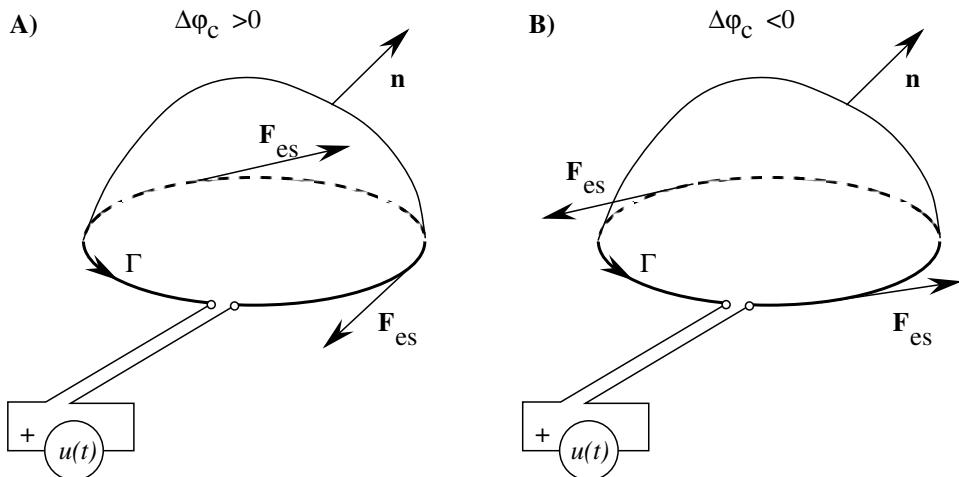


Figura 9.7: A) flusso crescente: $u(t) < 0$ e $\Delta\lambda(t) < 0$. B) flusso decrescente: $u(t) > 0$ e $\Delta\lambda(t) > 0$.

Essendo l'induzione magnetica definita a partire dal flusso attraverso una superficie dotata orientazione interna, anch'essa può essere definita come un vettore dotato di orientazione esterna, oppure come un vettore ordinario dotato di orientazione interna, avendo adottato la regola della mano destra, come per il versore normale alla superficie.

9.1.5 Misura dell'induzione

Dopo aver definito i riferimenti per le spire, si esamina ora un modo di misurare il vettore induzione magnetica in base alla sua definizione. Tale modo non è comunque l'unico. Esistono

infatti altri metodi basati su altri effetti dell'induzione sulla conduzione elettrica nei materiali conduttori (*ad esempio l'effetto Hall*). Sia la sonda formata da N_2 spire, ciascuna d'area S . Quando la spira è di dimensioni "piccole" rispetto alle dimensioni caratteristiche delle sorgenti (nel nostro caso il circuito 1), così da poter supporre pressoché uniforme il campo nella zona della spira, potremo ottenere la componente di \mathbf{B} lungo la direzione della normale alla spira, B_n :

$$\varphi_c = N_2 \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx N_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} S \quad \Rightarrow \quad B_n \approx \frac{\varphi_c}{N_2 S} \quad (9.4)$$

Le tre componenti di \mathbf{B} rispetto ad un sistema di riferimento possono perciò essere ottenute effettuando tre misurazioni in cui la spira è orientata lungo le tre direzioni degli assi. In pratica però, con questo metodo non risulta direttamente misurabile il flusso d'induzione, ma solo la sua variazione. Se il flusso è variabile nel tempo (ad esempio con legge periodica), può essere ricostruito integrando rispetto al tempo la forma d'onda della f.e.m., ma il flusso così ottenuto è determinato a meno di una costante additiva, che può essere fissata solo in base a considerazioni aggiuntive (figura 9.8).

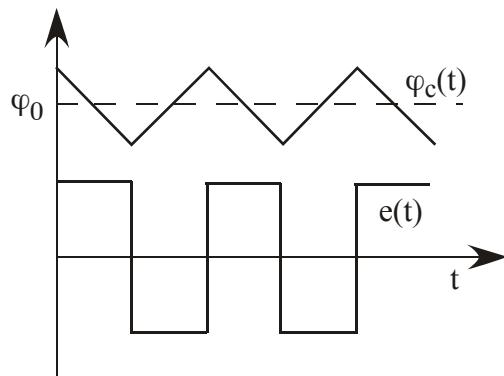


Figura 9.8: Una forma d'onda periodica di flusso $\varphi_c(t)$, avente valore medio φ_0 , induce una f.e.m. $e(t)$ avente valore medio nullo.

Se il campo d'induzione è stazionario nel tempo e si ha la possibilità di comandare la sua sorgente, si può immaginare d'accenderla e spegnerla, così da far variare il flusso da zero a φ_c . Un altro modo infine può essere il ribaltare di 180° la spira, mantenendo costante il campo, in modo da ottenere una variazione di flusso pari a $2\varphi_c$ (figura 9.9).

Esaminiamo infine in dettaglio il problema dei collegamenti tra la sonda ed il voltmetro integratore. Anche se si ha la cura di porre i morsetti della sonda il più possibile vicini tra loro, così da rendere la sonda assimilabile ad un percorso chiuso, i collegamenti tra la sonda ed il voltmetro identificano una superficie, che può concatenare un flusso variabile non nullo ed alterare quindi il risultato della misura (figura 9.10 A). Per ridurre quest'effetto, si ha cura di intrecciare i due collegamenti tra il voltmetro e la sonda, che danno origine a numerose spire equivalenti, orientate alternativamente in un senso e nel senso opposto, così da ridurre di molto il flusso concatenato complessivamente dalle connessioni.

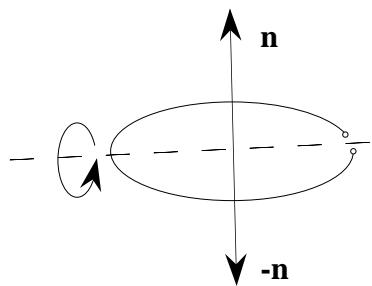


Figura 9.9: Una spira rotante in un campo stazionario subisce una variazione massima di flusso pari $2\varphi_c$.

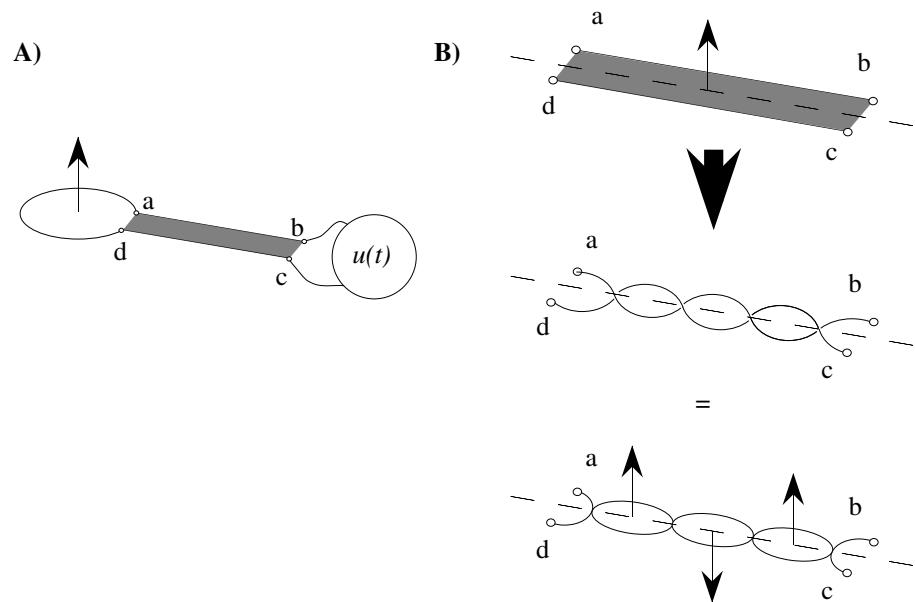


Figura 9.10: A) superficie (in grigio) formata dalle connessioni ab e dc tra la sonda ed il voltmetro. B) compensazione dell'effetto delle connessioni mediante collegamenti intrecciati. Le tre superfici sono orientate in modo opposto

9.2 Il potenziale vettore magnetico

Un'apparente contraddizione può essere notata nella teoria del campo di induzione finora sviluppata: data una linea chiusa orientata, ci sono infinite superfici orientate di cui essa è il contorno ed ognuna di queste concatena un flusso d'induzione (figura 9.11).

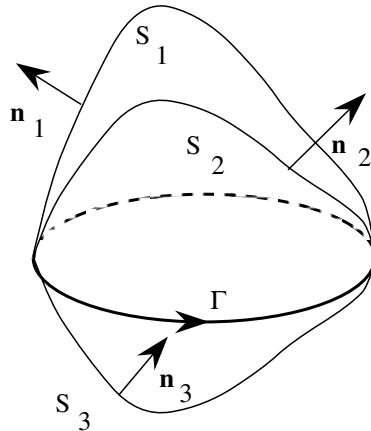


Figura 9.11: Linea chiusa orientata Γ e tre superfici di cui essa è il bordo. Le superfici sono state orientate internamente in modo congruente a partire dalla linea. Sono anche rappresentati i versori normali ad esse, definiti mediante la regola della mano destra.

Perché la teoria fin qui sviluppata sia coerente, tutti questi flussi devono essere uguali. Ciò è confermato dall'esperienza, che può essere ripetuta con l'esperimento ora descritto. Si consideri un insieme di sonde di flusso disposte sulla superficie $\partial\tau$ di un solido τ di forma e materiale qualsiasi, avendo cura che esse ricopriano interamente la superficie del solido, senza lasciare aree scoperte. Tutte le sonde siano orientate internamente in modo congruente, tale cioè che le spire di due sonde vicine siano sempre percorse con versi opposti. Tale costruzione, si noti, consente di definire l'orientazione interna dell'intera superficie chiusa $\partial\tau$.

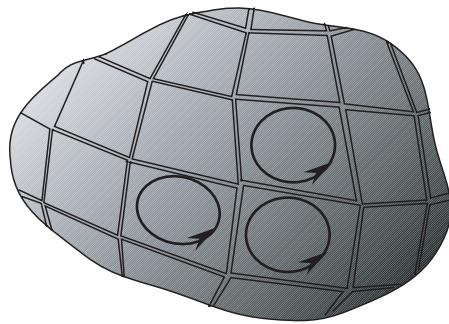


Figura 9.12: Superficie chiusa S ricoperta da un insieme di sonde tutte orientate nello stesso modo. Le sonde sono orientate con la loro normale uscente dalla superficie chiusa e la superficie S chiusa è così dotata di orientazione interna

Collegando in serie le sonde, in modo da sommare i loro integrali di tensione, si vede sperimentalmente che la f.e.m. risultante è sempre e dovunque nulla, per ogni posizione, forma ed orientamento del solido. Ciò implica che *il flusso d'induzione totale uscente dalla superficie del solido è sempre e dovunque costante*. Poiché il medesimo valore di flusso totale si ha anche in assenza di sorgenti del campo, quindi quando esso può essere considerato nullo, si può porre pari a zero tale valore costante. In forma integrale, quanto sopra detto equivale a:

$$\oint_S \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (9.5)$$

mentre, in forma differenziale, equivale a:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.6)$$

L'induzione magnetica è quindi sempre e dovunque solenoidale e questa proprietà vale qualunque sia il materiale o insieme di materiali in cui è presente il campo d'induzione. Per questa proprietà, si dimostra che è possibile esprimere il vettore induzione magnetica come rotore di un altro vettore \mathbf{A} , che forma un campo vettoriale, detto *potenziale vettore magnetico*. In forma matematica la definizione di \mathbf{A} è dunque:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (9.7)$$

Il potenziale vettore magnetico ha dimensioni di V·s/m.

Si noti che tale definizione vincola la sola componente solenoidale del potenziale vettore e quindi non permette di individuare \mathbf{A} in modo univoco, restando libera la sua componente irrotazionale. Nell'analisi dei campi magnetostatici o magneto-quasistatici (cioè dei campi in cui le grandezze elettriche sono costanti nel tempo, oppure variano con sufficiente lentezza da poter trascurare effetti di propagazione per onde del campo elettromagnetico) si pone $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Nello studio dei fenomeni di propagazione, invece, la scelta di $\operatorname{div} \mathbf{A}$ è subordinata alle cosiddette condizioni di compatibilità (in inglese *gauge conditions*) che vengono assunte per risolvere le equazioni di Maxwell, che governano il campo elettromagnetico. Applicando il teorema di Stokes, è pertanto possibile esprimere il flusso concatenato da una superficie S mediante la circolazione del vettore \mathbf{A} lungo il suo contorno ∂S :

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.8)$$

9.3 La legge di Faraday-Neumann

Considerando la (9.3) e derivando rispetto al tempo, si ottiene, per una generica linea chiusa ed orientata l , che identifica una superficie S orientata:

$$e(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} \quad (9.9)$$

Questa è la *legge di Faraday-Neumann*.

Si noti che in questa relazione compare la *derivata totale* del flusso rispetto al tempo, in quanto possono variare, nel tempo, sia l'induzione in ogni punto dello spazio, sia la geometria della linea chiusa l . Applicando le regole di derivazione delle funzioni composte di più variabili, scomponiamo allora la (9.9) in due termini, il primo dei quali corrisponde ad una variazione dell'induzione a geometria costante, mentre il secondo corrisponde all'effetto del cambiamento della geometria, mentre resta costante l'induzione:

$$e(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial\varphi_c(t)}{\partial t}\right|_{l \text{ fissa}} - \left.\frac{\partial\varphi_c(t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{B} \text{ costante}} \quad (9.10)$$

Nella formula sopra scritta il primo addendo riporta esplicitamente la dizione “ l fissa” in quanto il flusso concatenato dalla superficie è una caratteristica della linea chiusa orientata, più che delle superfici che ad essa si appoggiano, essendo l'induzione solenoidale. Fissata la linea, resta quindi fissato il flusso concatenato da ogni superficie di cui essa è il bordo. Per lo stesso motivo, quando si considera nel secondo termine della (9.10), corrispondente alla variazione di geometria, si prendono in considerazione solo le variazioni della geometria della linea l . Esaminiamo ora il primo addendo della (9.10): esso corrisponde ad una parte della totale f.e.m., detta *forza elettromotrice trasformatorica*, $e_t(t)$ che può così essere riscritta:

$$e_t(t) = -\left.\frac{\partial\varphi_c(t)}{\partial t}\right|_{l \text{ fissa}} = \int_S -\frac{\partial\mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (9.11)$$

Precisiamo ancora che la forza elettromotrice trasformatorica scritta nella (9.10) non dipende, per definizione, dall'eventuale moto della linea chiusa, ma può dipendere, ad esempio, dal moto di materiali aventi proprietà diverse, nelle vicinanze della spira. Esaminiamo ora il secondo addendo della (9.10), esso corrisponde al secondo addendo della totale f.e.m., detta *forza elettromotrice mozionale*, $e_m(t)$. Quando si calcola la f.e.m. mozionale l'induzione è costante e la linea chiusa l si muove o si deforma. Consideriamo allora la figura 9.13 A), che rappresenta la linea l agli istanti t e $t + dt$:

Il generico punto P della linea si muove nel punto P' , identificando il vettore spostamento infinitesimo $d\mathbf{P}$. La superficie S , di cui l è il bordo all'istante t , diventa la superficie S' , di cui $l' = l(t + dt)$ è il bordo. L'insieme dei vettori spostamento $d\mathbf{P}$ lungo la linea identifica una superficie laterale infinitesima S_l , illustrata in figura 9.13 B). Nella stessa figura si vede come l'unione di S , di S' e di S_l formi una superficie chiusa attraverso la quale è nullo il flusso d'induzione uscente:

$$\int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS' - \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l \, dS = 0 \quad (9.12)$$

Da questa relazione segue che:

$$d\varphi_c(t)|_{\mathbf{B} \text{ costante}} = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS' - \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_{S_l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l \, dS \quad (9.13)$$

Quindi la variazione del flusso concatenato, ad induzione costante, nel tempuscolo dt , corrisponde all'opposto del flusso uscente dalla superficie laterale infinitesima S_l . Per calcolarne

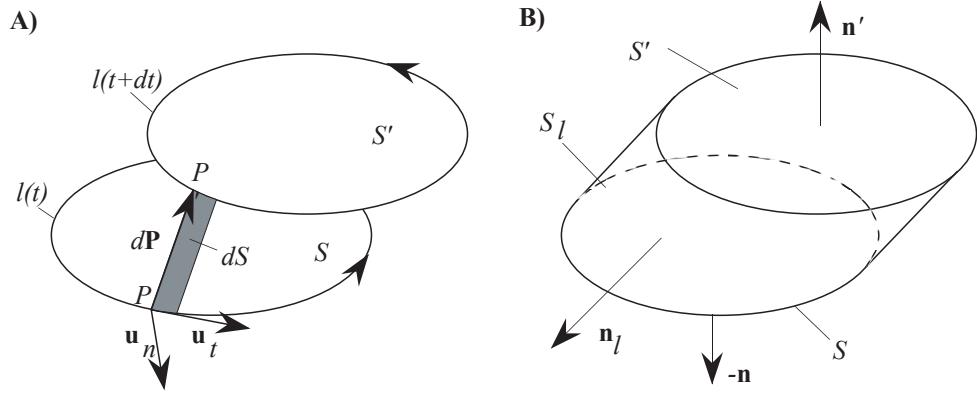


Figura 9.13: A): Movimento della linea l tra gli istanti t e $t + dt$: è evidenziato lo spostamento del generico punto P . B) Superficie chiusa data dall'unione della superficie S della spira all'istante t , della superficie S' all'istante $t + dt$ e della superficie laterale S_l

il valore, esaminiamo la figura 9.13 A). Se, lungo la linea l , si considera il vettore infinitesimo tangente $\mathbf{u}_t \, dl$, ad esso ed al vettore $d\mathbf{P}$ si può associare un'areola di superficie laterale dS pari al modulo del vettore d'area $dS = (\mathbf{u}_t \, dl) \times d\mathbf{P}$, cosicché l'integrale di superficie su S_l può essere ridotto ad un integrale curvilineo lungo l :

$$-\int_{S_l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l \, dS = -\oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_t \times d\mathbf{P}) \, dl$$

dividendo ora entrambi i membri della (9.13) per dt , e tenendo conto di quanto sopra scritto, si ricava infine:

$$e_m(t) = -\left. \frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{B} \text{ costante}} = \oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_t \times \mathbf{v}) \, dl = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.14)$$

dove $\mathbf{v} = d\mathbf{P}/dt$ è il vettore velocità del punto generico P della linea l . Riassumendo, la f.e.m. indotta lungo una linea chiusa (*indipendentemente dal materiale di cui è composta*), è pari a:

$$e(t) = e_t(t) + e_m(t) = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.15)$$

Utilizzando il potenziale vettore \mathbf{A} , la (9.15) può essere riscritta in questo modo:

$$e(t) = e_t(t) + e_m(t) = \oint_l \left[-\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.16)$$

9.3.1 La seconda equazione di Maxwell

La relazione integrale 9.16 esprime la f.e.m. di origine magnetica lungo un percorso chiuso come risultato dell'azione di forze elettriche specifiche lungo il circuito stesso. Ricordando la definizione di f.e.m., possiamo allora scrivere:

$$e(t) = e_t(t) + e_m(t) = \oint_l \mathbf{E}_g \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \oint_l \left[-\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{u}_t \, dl$$

La forza elettrica specifica di origine magnetica \mathbf{E}_g può allora essere espressa come somma di due vettori:

- *il campo elettrico indotto* $\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t}$, il quale forma un campo vettoriale dipendendo solo dal posto e dal tempo, ma non dallo spostamento della spira;
- *la forza elettrica specifica mozionale* $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, che non forma un campo vettoriale, dipendendo anche dalla velocità con cui la spira si muove.

Nel caso generale, in cui sono presenti anche il campo coulombiano \mathbf{E}_c ed una forza specifica di origine non magnetica \mathbf{E}'_g , la forza specifica totale sarà $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_m + \mathbf{E}'_g$, per cui la 9.16 può essere così riscritta:

$$\oint_l (\mathbf{E}_t - \mathbf{E}_c - \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{E}'_g) \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \oint_l -\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.17)$$

Si noti comunque che, in tale espressione, il campo coulombiano dà sempre integrale nullo, essendo l una linea chiusa e può quindi essere omesso. L'integrale sopra scritto è fatto lungo una linea fissa dello spazio, si può allora applicare il teorema di Stokes, ricavando:

$$\text{rot } (\mathbf{E}_t - \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{E}'_g) = -\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \quad (9.18)$$

Questa è la *seconda equazione di Maxwell* nella sua forma più generale. Considerando ora il caso particolare di assenza di moto ($\mathbf{v} = 0$ e di forze specifiche generatrici di origine non elettrica), la seconda equazione di Maxwell si scrive semplicemente:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \quad (9.19)$$

Tale equazione è alla base dello studio dei fenomeni di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto e nei mezzi non dissipativi.

9.4 Il vettore campo magnetico

9.4.1 Descrizione dell'esperimento ed evidenze sperimentalistiche

Si consideri uno strumento di misura, denominato *tensiometro magnetico*, così fatto: attorno ad un *sottile cilindro flessibile*, di lunghezza l , siano disposte uniformemente, concordemente e

fittamente un certo numero di spire aperte collegate tutte in parallelo ad una coppia di conduttori (figura 9.14); questi conduttori siano a loro volta collegati ad un amperometro. Sia trascurabile la resistenza delle spire, dei conduttori e dell'amperometro. Nel circuito così formato tutte le spire sono in parallelo e sono cortocircuitate dall'amperometro. Esse possono quindi avere correnti indipendenti l'una dall'altra.

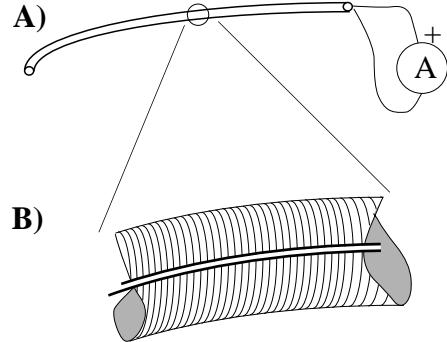


Figura 9.14: A): tensiometro collegato all'amperometro. B) ingrandimento di un tratto del tensiometro, che mostra il cilindro flessibile e le spire avvolte attorno ad esso.

L'amperometro misura la somma delle correnti nelle varie spire:

$$i_A = \sum_{k=1}^N i_{sp_k} \quad (9.20)$$

Si disponga ora il tensiometro lungo una linea chiusa Γ (evitando di cortocircuitare i due collegamenti delle spire in parallelo) in una regione dello spazio dov'è presente un campo di induzione. Supponiamo che le dimensioni della sezione trasversale del tensiometro siano *piccole* rispetto alle dimensioni caratteristiche del campo (e delle sue sorgenti), così da poter supporre pressoché uniforme il campo in ogni sezione trasversale del tensiometro. Agendo sulle correnti che generano il campo magnetico, dopo il collegamento dell'amperometro al tensiometro, facciamo in modo che l'induzione vari di una quantità $\Delta\mathbf{B}$ nel punto generico. Per effetto della variazione di induzione nei punti interni del tensiometro, ciascuna spira concatena una variazione di flusso esterno $\Delta\varphi_{esp}$, a cui si oppone per mezzo di una corrente di circolazione i_{sp} , il cui effetto è mantenere costante il flusso totale concatenato dalla spira, in base alla legge di Lenz. Si noti che l'assenza di fenomeni resistivi consente la presenza di correnti stazionarie nelle spire del tensiometro.

Nella regione dello spazio è possibile disporre il tensiometro lungo un numero infinito di linee chiuse, che potranno o meno concatenare le linee di corrente (anch'esse chiuse) responsabili della creazione del campo (figura 9.15). Si ricorda che, dal punto di vista geometrico, due linee chiuse (in questo caso la linea del tensiometro e la generica linea di corrente) sono concatenate se non è possibile sfilare una dall'altra, come se fossero due anelli di una catena.

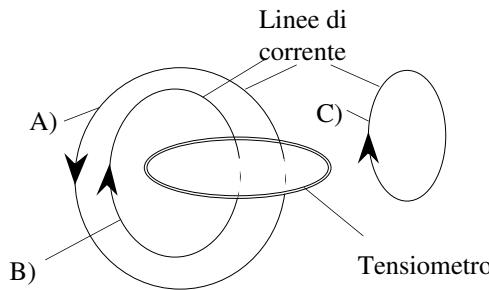


Figura 9.15: Tensiometro disposto su una linea chiusa che concatena alcune linee di corrente (A,B), mentre altre (C) non sono concatenate.

Supponiamo d'ora in poi che la variazione di \mathbf{B} sia dovuta all'accensione/spegnimento delle sorgenti, come ipotizzato in 9.1.1, cosicché $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}$. Si verifica sperimentalmente che, a seguito della variazione di induzione, si misura ai morsetti del tensiometro una variazione di corrente Δi_A . Qualunque sia la natura del materiale che riempie lo spazio, qualunque sia la geometria delle sorgenti e qualunque sia la geometria della linea di circolazione, la variazione di corrente è uguale e contraria alla variazione di corrente concatenata dalla linea media del tensiometro, Γ : $\Delta i_a = -\Delta i_c$ (Legge di Ampère). La corrente concatenata i_c è la corrente che attraversa la superficie orientata di cui la linea chiusa orientata Γ è il bordo, avente riferimento concorde con quello delle spire del tensiometro (fig. 9.16).

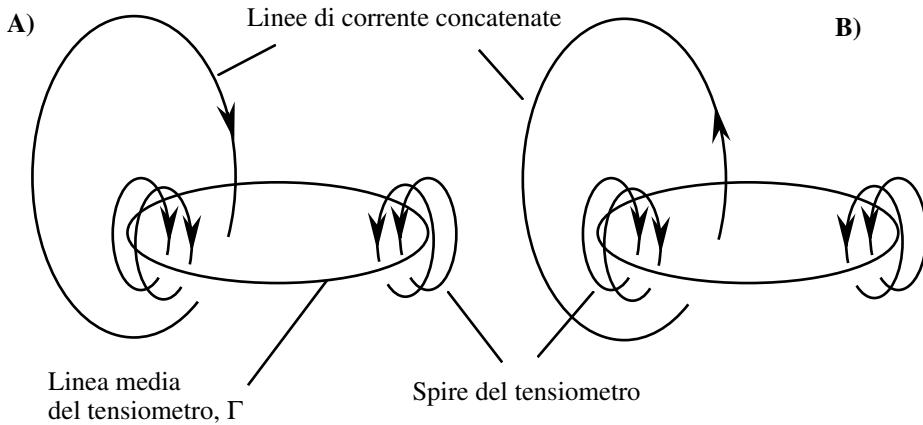


Figura 9.16: Correnti concatenate concatenate e correnti nel tensiometro: A) equiverse, B) controverse.

La corrente attraverso la superficie sarà allora contata con il suo segno se il riferimento della corrente e delle spire del tensiometro sono concordi (figura 9.17 A, corrente i_1), con il segno contrario se sono discordi (figura 9.17 A, corrente i_2). Se una medesima linea di corrente attraversa N volte la superficie, con lo stesso riferimento, essa va contata N volte (figura 9.17 B). Se sono presenti più correnti che formano linee chiuse distinte, si effettua la loro somma algebrica con le regole sopra stabilite. Si noti che, considerata la linea chiusa Γ , sono infinite

le superfici di cui essa è il contorno, ma tutte queste superfici sono attraversate dalla medesima corrente, perché le linee di corrente sono per ipotesi chiuse. (Si noti la corrispondenza con quanto visto circa il flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie chiusa, 9.2).

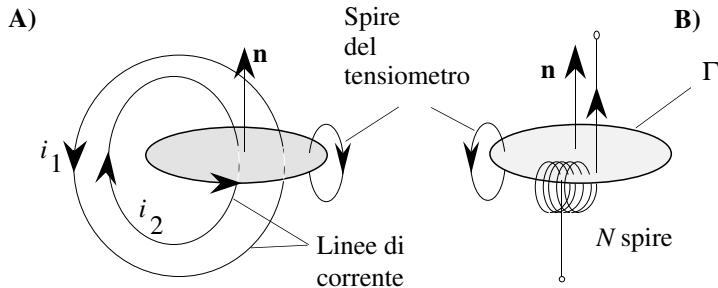


Figura 9.17: Linea media del tensiometro (Γ), superfici corrispondenti e correnti concatenate. A): una sola volta, B): N volte.

Poiché la corrente nell'amperometro è la somma delle correnti nelle spire del tensiometro, si può pensare che essa sia il contributo di N_t tratti di tensiometro, ciascuno dei quali sarà formato da un certo numero di spire. Esaminiamo ora uno di questi tratti di tensiometro, pensato come oggetto individuale, collegato all'amperometro ma non al resto del tensiometro (fig. 9.18). Sia i_l la corrente misurata. Supponiamo che il tratto considerato abbia una lunghezza l , sufficientemente piccola da poter approssimare la sua linea media con un segmento rettilineo, lungo il quale sia pressoché uniforme il campo, che è quindi uniforme nell'intero volume del tratto di tensiometro. La posizione spaziale del tratto e la sua direzione sono individuate rispettivamente dalle coordinate del centro del tratto, P , e dalla direzione del versore tangente all'asse \mathbf{u}_t . Il verso del tratto di tensiometro viene invece evidentemente identificato *dal verso di percorrenza delle sue spire*. Siamo perciò in presenza di una orientazione esterna dell'asse del tratto di tensiometro.

Per definire il verso si può anche procedere allo stesso modo seguito per fissare l'orientamento della sonda d'induzione magnetica (vedi 9.1.4): *si considera il versore \mathbf{u}_t corrispondente al verso di percorrenza delle spire mediante la regola della mano destra* (fig. 9.18).

Si può ora effettuare una serie di misurazioni di corrente usando il tratto di tensiometro collocato nei vari punti dello spazio. In particolare, mantenendo fisso il punto P , ma cambiando l'orientazione del tratto di tensiometro, si vede sperimentalmente che:

1. La corrente i_l dipende in modo sinusoidale dall'angolo tra \mathbf{u}_t ed una direzione fissata dello spazio, ma non dipende dall'area della sezione, esiste una direzione dello spazio lungo la quale la corrente è massima.
2. La corrente i_l non dipende inoltre dal numero di spire di cui è composto il tratto. Maggiore è il numero di spire nel tratto, minore è la corrente in ciascuna di esse.
3. La corrente i_l varia in proporzione alla lunghezza del tratto, l .

La prima evidenza sperimentale porta a considerare una grandezza vettoriale, ma ad escludere che la corrente sia ad essa legata mediante l'espressione matematica di un flusso attraverso

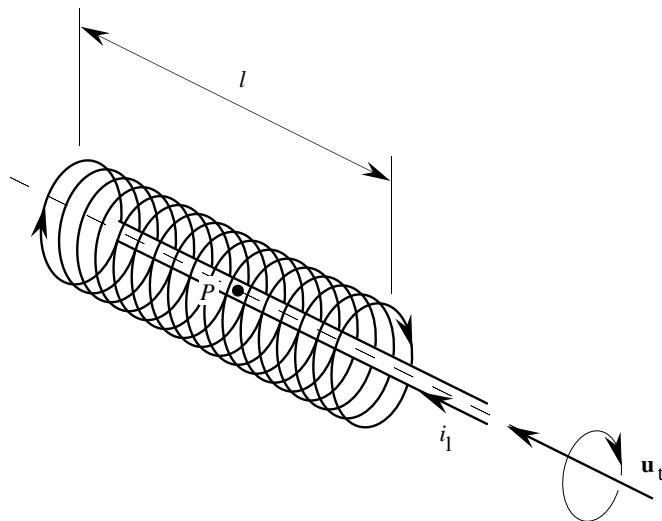


Figura 9.18: Tratto di tensiometro, identificato dal suo punto centrale P e dal suo vettore tangente \mathbf{u}_t .

la superficie delle spire, data l'indipendenza dall'area. Tutte queste evidenze sperimentali sono invece spiegate ammettendo che la corrente i_l possa essere espressa per mezzo della circolazione di un opportuno vettore \mathbf{H} , detto *vettore campo magnetico*, lungo l'asse del tratto di tensiometro. Poiché l è per ipotesi piccolo, si ha:

$$i_l \approx -\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t \cdot l \quad (9.21)$$

Il segno meno che si è scelto di porre in questa formula tiene conto del fatto che le correnti nel tratto di tensiometro *si oppongono* all'effetto delle correnti presenti, e quindi l'azione a distanza delle correnti sorgenti del campo magnetico, è opposta a quella delle correnti nel tratto di tensiometro. Questa scelta è in analogia con la definizione del vettore induzione elettrica \mathbf{D} . Dalla (9.21) vediamo che il vettore \mathbf{H} ha le dimensioni di A/m , quindi di una densità di corrente superficiale.

Quando l'asse del tratto di tensiometro ed il vettore \mathbf{H} sono paralleli, è massimo il modulo della corrente i_l . Procedendo in modo analogo a quello seguito a proposito dell'induzione magnetica, è allora possibile effettuare una misura di \mathbf{H} disponendo, nello stesso punto, il tratto di tensiometro lungo tre direzioni mutuamente ortogonali.

Consideriamo ora lo strumento completo, chiuso su se stesso lungo la linea Γ . Sommando il contributo degli N_t tratti del tensiometro ed applicando la legge di Ampère, si ottiene pertanto:

$$i_c = -i_A = -\sum_{k=1}^{N_t} i_{l_k} = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{u}_{t_k} \cdot l_k \quad (9.22)$$

Quando il numero di tratti tende all'infinito e la maggiore delle loro lunghezze l_k tende a zero, la sommatoria può essere sostituita dall'integrale, ottenendo infine la legge di Ampère in

forma integrale:

$$i_c = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t \, dl \quad (9.23)$$

Si ricorda ancora una volta che *questa legge non dipende dalla natura del materiale che riempie lo spazio dell'esperimento.*

Quanto sopra descritto considera un insieme di correnti filiformi quali sorgenti del campo magnetico. È però opportuno ricordare che l'intensità di corrente è definita come il flusso del vettore densità di corrente \mathbf{J} . Si considera perciò un'orientazione esterna della superficie S definita dall'orientazione interna delle spire del tensiometro o, applicando la regola della mano destra, un versore \mathbf{n} ad essa ortogonale.

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (9.24)$$

Quando si considera la corrente concatenata, la (9.24) è ancora vera. L'integrale corrisponderà infatti alla somma degli integrali estesi alle intersezioni tra i fili e la superficie S , come rappresentato in fig. 9.19.

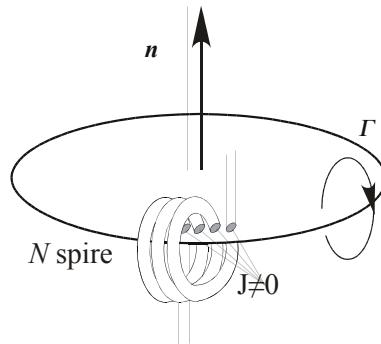


Figura 9.19: Corrente concatenata come flusso del vettore \mathbf{J} nella sezione delle N spire.

Uguagliando ora la (9.23) alla (9.24), ed applicando il teorema di Stokes, si ottiene la legge di Ampère in forma differenziale:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.25)$$

La (9.23) indica che il vettore \mathbf{H} in generale, non è conservativo, tuttavia la (9.25) permette di affermare che, se una regione è *semplicemente linearmente connessa* e non è sede di correnti, in essa il vettore campo magnetico è conservativo, ed è perciò possibile definire per esso un potenziale scalare, di cui esso è l'opposto del gradiente.

9.4.2 La prima equazione di Maxwell

Esaminiamo ora un problema che sorge considerando la legge di Ampère, sia nella sua forma integrale che differenziale.

Consideriamo un condensatore alimentato con una corrente $i(t)$ mediante i fili collegati alle sue armature (Fig. 9.20). Se circondiamo un filo col tensiometro, disposto lungo una linea Γ , ci aspettiamo che esso indichi una variazione di corrente, dato che abbiamo visto sperimentalmente che una corrente genera un campo magnetico. Se consideriamo il tensiometro come bordo della superficie S' della figura, risulta naturale considerare i come corrente concatenata ma, se consideriamo la superficie S'' , il flusso del vettore \mathbf{J} è nullo.

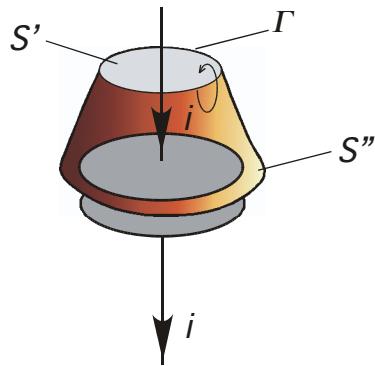


Figura 9.20: Tensiometro lungo una linea Γ attorno a uno dei fili che alimentano un condensatore. La superficie S' è attraversata dalle corrente i , la superficie S'' da una corrente nulla.

Esaminiamo ora la cosa da un punto di vista diverso: consideriamo la legge di Ampère in forma differenziale (9.25) e calcoliamo la divergenza di entrambi i membri, ottenendo $\text{div} \text{rot } \mathbf{H} = \text{div} \mathbf{J}$. Ricordiamo tuttavia che sussiste l'identità: $\text{div} \text{rot } \mathbf{V} \equiv 0$ (B.19, pag. 188) per ogni vettore generico \mathbf{V} derivabile due volte. Da ciò si ricaverebbe che $\text{div} \mathbf{J} \equiv 0$.

D'altra parte, la divergenza di \mathbf{J} è legata alla locale densità di carica ϱ_c mediante l'equazione di continuità (3.15):

$$\text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \varrho_c}{\partial t}, \quad (9.26)$$

pertanto la legge di Ampère in forma differenziale non può essere corretta nella forma (9.25). La soluzione fu trovata da Maxwell il quale suppose che, anziché considerare solo il vettore \mathbf{J} nella (9.25), si debba aggiungere un vettore \mathbf{J}_s , denominato *Densità di corrente di spostamento*, tale che:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_s \quad (9.27)$$

$$\text{div} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_s) = 0 \quad (9.28)$$

Per determinare \mathbf{J}_s sostituiamo la (9.26) nella (9.28), ottenendo:

$$\text{div} \mathbf{J}_s = \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.29)$$

Riassumendo, la legge di Ampère modificata, nota come *legge di Ampère-Maxwell* o come *seconda equazione di Maxwell* diventa:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.30)$$

Tale legge individua, quali sorgenti del campo magnetico, le correnti, espresse tramite il vettore \mathbf{J} , e la variazione dell'induzione elettrica nel tempo. Come conseguenza, anche un dielettrico sottoposto ad una variazione di spostamento elettrico, può essere sorgente di un campo magnetico.

Consideriamo ora un mezzo uniforme, con conducibilità elettrica σ e permittività dielettrica ε costanti. Sostituiamo ora nella legge di Ampère-Maxwell le leggi costitutive dei materiali dielettrici (7.11) e conduttori (5.4). Otteniamo:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.31)$$

A seconda delle proprietà materiali e del tipo di fenomeni, uno dei due termini può talvolta prevalere sull'altro:

- Nei mezzi conduttori, in presenza di fenomeni *non troppo rapidamente variabili*, prevale il primo addendo: il campo è generato praticamente solo dalle correnti ed il regime è detto *magneto-quasi statico*.
- All'opposto, in un dielettrico anche resistivo, ma in presenza di segnali elettrici molto rapidamente variabili, l'effetto della corrente di spostamento è determinante.
- Al limite, nel vuoto, l'assenza di cariche libere rende gli effetti del secondo addendo essenziali per la propagazione del segnale mediante un'onda.

9.5 Lavoro di magnetizzazione ed energia magnetica

In questa parte si considerano gli aspetti energetici collegati al campo magnetico.

9.5.1 Lavoro di magnetizzazione

Si procede in modo simile a quello seguito nel caso del campo elettrico quasi statico (sez. ??, p. ??), considerando dapprima un circuito con geometria fissa, alimentato da un generatore di corrente regolabile con continuità (Fig. 9.21). Siano assenti le perdite resistive (se fossero

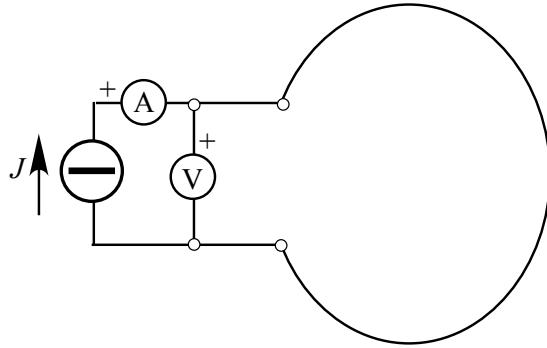


Figura 9.21: Circuito fisso alimentato da corrente impressa

presenti, il generatore erogherebbe un corrispondente lavoro elettrico supplementare). In queste ipotesi tutta la potenza erogata dal generatore viene assorbita dall'induttore e spesa per creare il campo magnetico. Si parla quindi di *lavoro di magnetizzazione*. Il lavoro di magnetizzazione assorbito dall'induttore nell'intervallo di tempo dt vale quindi $\mathcal{L}_m^* = J \cdot u_J dt = i_l d\varphi_c$. Da questa espressione si ricava che *l'unico modo in cui un induttore può scambiare lavoro elettrico è in seguito ad una variazione di flusso concatenato*.

Quando sono presenti più induttori, accoppiati magneticamente o meno, il lavoro di magnetizzazione complessivamente assorbito dagli induttori è la somma dei lavori erogati dai generatori, ottenendo quindi, per N induttori:

$$\mathcal{L}_m^* = \sum_{k=1}^N i_k d\varphi_{c_k} \quad (9.32)$$

Questa espressione può essere così riscritta in modo più compatto considerando i vettori colonna delle correnti $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)^T$ e dei flussi $\boldsymbol{\varphi}_c = (\varphi_{c_1}, \dots, \varphi_{c_N})^T$:

$$\mathcal{L}_m^* = \mathbf{i}^T \cdot d\boldsymbol{\varphi}_c \quad (9.33)$$

Consideriamo ora una variazione delle correnti non più infinitesima, ma finita. Iniziamo con il caso dell'induttore singolo. Se consideriamo una trasformazione da un flusso iniziale φ_{c_A} ad un flusso finale φ_{c_B} , il lavoro di magnetizzazione assorbito dall'induttore vale:

$$\mathcal{L}_{m_{A,B}} = \int_{\varphi_{c_A}}^{\varphi_{c_B}} i_l d\varphi_c \quad (9.34)$$

Esaminando la caratteristica flusso-corrente, osserviamo che tale integrale corrisponde all'area compresa tra l'asse delle ordinate e la caratteristica flusso-corrente (Fig. 9.22). A seconda della

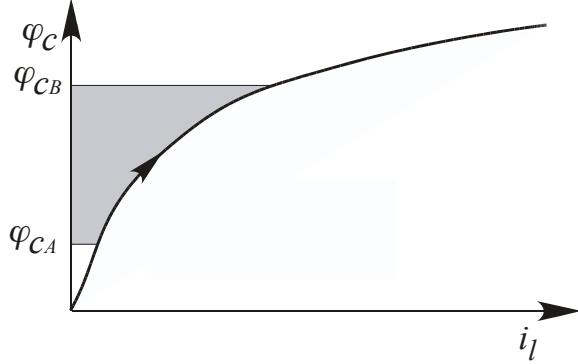


Figura 9.22: Il lavoro di magnetizzazione finito di un induttore è pari all'area tra l'asse delle ordinate e la caratteristica flusso-corrente.

natura del materiale che riempie lo spazio, la caratteristica corrente-flusso concatenato, detta *caratteristica di magnetizzazione* può assumere diverse forme. In particolare, essa può essere esprimibile in funzione del flusso o della corrente, nel qual caso la (9.34) può essere integrata per parti effettuando la cosiddetta *trasformazione di Legendre*:

$$\mathcal{L}_{m_{A,B}} = i_{l_B} \varphi_{c_B} - i_{l_A} \varphi_{c_A} - \int_{i_{l_A}}^{i_{l_B}} \varphi_c \, di_l \quad (9.35)$$

Se il materiale non è isteretico, quando la trasformazione va da un flusso iniziale φ_{c_A} ad un flusso φ_{c_B} e infine torna al flusso iniziale φ_{c_A} (*trasformazione ciclica*), la caratteristica di magnetizzazione viene percorsa prima in un senso, poi nel senso opposto e il lavoro di magnetizzazione corrispondente è zero (fig. 9.23).

Quando si considera il lavoro di magnetizzazione finito assorbito da un insieme di N induttori si deve integrare la forma differenziale (9.32) lungo un percorso N -dimensionale l nello spazio degli N flussi concatenati che descrive il processo di carica/scarica degli induttori tra la configurazione iniziale φ_{c_A} e la configurazione finale φ_{c_B} :

$$\mathcal{L}_{m_{A,B}} = \int_{\varphi_{c_A},l}^{\varphi_{c_B}} \mathbf{i}^T \, d\varphi_c. \quad (9.36)$$

Si ricorda che i flussi possono essere controllati indirettamente attraverso gli integrali di tensione e che per mantenere costante il flusso concatenato da un induttore ideale è sufficiente cortocircuitarlo.

Ad esempio, considerando un sistema formato da due induttori (Fig. 9.24 sinistra), si ha $\mathcal{L}_m^* = i_1 d\varphi_{c_1} + i_2 d\varphi_{c_2}$. I due induttori sono collegati a due generatori di tensione e a due voltmetri integratori. La trasformazione tra lo stato iniziale

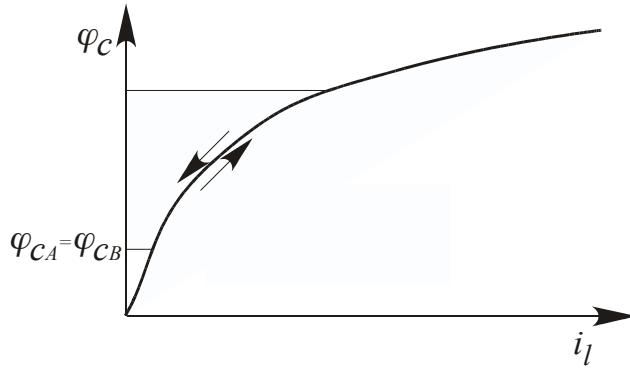


Figura 9.23: In assenza di isteresi, il lavoro di magnetizzazione associato a una trasformazione ciclica è zero.

A e il finale B può essere descritta da una curva nel piano identificato dalle due coordinate φ_{c_1} e φ_{c_2} , come mostrato in Fig. 9.24 destra, dove sono riportate tre delle possibili curve. Nel primo tratto della curva 1 l'avvolgimento 1 viene mantenuto cortocircuitato e viene caricato l'avvolgimento 2, nel secondo tratto si cortocircuita l'avvolgimento 2 e si carica l'avvolgimento 1. Nelle altre due curve la sequenza di carica è diversa. Per ogni punto del piano dei flussi si hanno un valore di corrente i_1 e uno di i_2 .

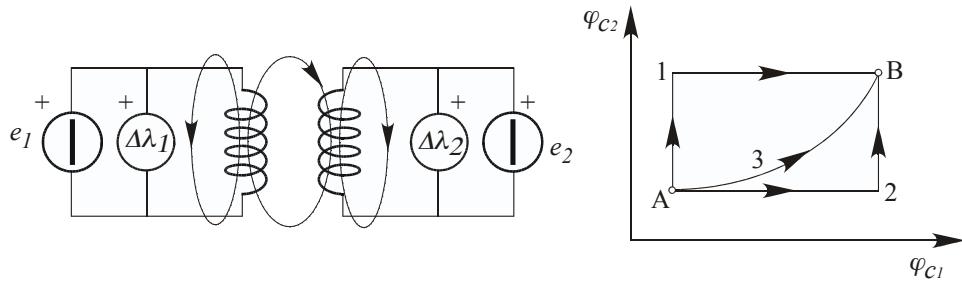


Figura 9.24: La variazione dello stato di due induttori può essere descritta da una curva nel piano identificato dalle due coordinate φ_{c_1} e φ_{c_2} .

Anche nel caso di N induttori può essere applicata la trasformazione di Legendre, integrando per parti la (9.36) ed ottenendo il lavoro di magnetizzazione in funzione delle correnti:

$$\mathcal{L}_{m_{A,B}} = \mathbf{i}_A^T \boldsymbol{\varphi}_{c_A} - \mathbf{i}_B^T \boldsymbol{\varphi}_{c_B} - \int_{\mathbf{i}_{A,l}}^{\mathbf{i}_B} \boldsymbol{\varphi}_c^T d\mathbf{i}. \quad (9.37)$$

Il processo di carica descritto nell'esempio precedente può allora essere ripetuto a correnti impresse, misurate da due amperometri in serie agli induttori. In questo

caso, per ogni coppia di correnti i_1 e i_2 si hanno due corrispondenti valori di flussi φ_{c1} e φ_{c2} . Le curve nel piano delle correnti saranno in generale diverse dalle curve dell'esempio precedente.

Mentre nel caso del lavoro di magnetizzazione di un induttore isolato si è arrivati immediatamente ad identificare le condizioni per avere un lavoro nullo lungo una trasformazione ciclica, nel caso di N induttori accoppiati si devono fare delle considerazioni aggiuntive, basate sui risultati descritti nella sezione seguente. La discussione sul lavoro lungo una trasformazione ciclica sarà perciò ripresa in sezione 9.5.3 che tratta l'energia magnetica.

9.5.2 Lavoro di magnetizzazione come contributo delle varie regioni dello spazio

Come nel campo elettrico quasi statico (sez. ??, pag. ??), il lavoro di magnetizzazione infinitesimo può essere espresso come integrale di una funzione dei vari punti dello spazio. Anche in questo caso la funzione può avere le due seguenti forme:

$$\mathcal{L}^* = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \quad \mathcal{L}^* = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} d\tau \quad (9.38)$$

Consideriamo la prima di queste espressioni e supponiamo sia presente, per semplicità, un solo induttore. Calcoliamo l'integrale per tubi di flusso del vettore $d\mathbf{B}$ che, come \mathbf{B} , è sempre e ovunque solenoidale (Fig. 9.25). Si noti che l'incremento infinitesimo $d\mathbf{B}$ è dovuto a variazioni infinitesime delle sorgenti. L'intero spazio può essere scomposto in una serie di tubetti di flusso

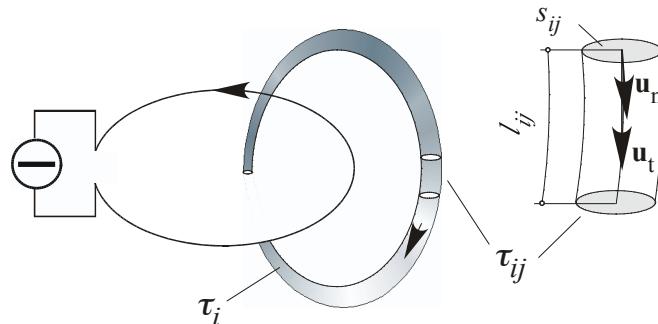


Figura 9.25: Calcolo del primo integrale (9.38) nello spazio per tubi di flusso del vettore $d\mathbf{B}$.

disgiunti τ_i , di lunghezza finita e di sezione infinitesima: $\bigcup_{i=1}^N \tau_i = \mathbb{R}^3$ e $\tau_i \cap \tau_k = \emptyset \quad \forall i, k$. Ciascuno di questi tubetti di flusso sia caratterizzato da una sua portata infinitesima $d\varphi_i$ in modo che $d\varphi = \sum_i d\varphi_i$. A sua volta, il generico tubetto di flusso τ_i può essere suddiviso lungo la sua direzione longitudinale in un insieme di tubetti di flusso $\tau_{i,j}$ di lunghezza e di sezione infinitesime: $\bigcup_{j=1}^{M(i)} \tau_{i,j} = \tau_i$ e $\tau_{i,j} \cap \tau_{i,k} = \emptyset \quad \forall j, k$.

Consideriamo ora la funzione scalare $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tau_{i,j}$, definita nei tubetti $\tau_{i,j}$, con i due vettori calcolati in un punto $P_{i,j}$ interno a $\tau_{i,j}$. Quando $N, M \rightarrow \infty$ e $\max\{\tau_{i,j}\} \rightarrow 0$ allora

$$\sum_{i,j} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tau_{i,j} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau.$$

Mostriamo che tale integrale è pari al lavoro di magnetizzazione infinitesimo. Infatti, con riferimento alla fig. 9.25 possiamo esprimere ciascun volumetto $\tau_{i,j}$ come $\tau_{i,j} = S_{i,j}\mathbf{u}_{n_{i,j}} \cdot l_{i,j}\mathbf{u}_{t_{i,j}}$, dove $\mathbf{u}_{n_{i,j}}$ e $\mathbf{u}_{t_{i,j}}$ sono rispettivamente i versori normale alla superficie $S_{i,j}$ e tangente alla linea media del tubetto di flusso l_i . L'orientazione della superficie $S_{i,j}$ può essere scelta con libertà: scegliamo d'averla ortogonale al vettore \mathbf{H} , di modo che nell'espressione $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tau_{i,j} = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) (S_{i,j}\mathbf{u}_{n_{i,j}} \cdot l_{i,j}\mathbf{u}_{t_{i,j}})$ i vettori \mathbf{H} e $\mathbf{u}_{n_{i,j}}$ sono paralleli per costruzione e sono quindi permutabili. Osserviamo allora che la grandezza $\mathbf{H} \cdot l_{i,j}\mathbf{u}_{n_{i,j}} = \psi_{i,j}$ è pari alla tensione magnetica lungo il trattino $l_{i,j}$ della linea media del tubetto di flusso τ_i mentre $d\mathbf{B} S_{i,j}\mathbf{u}_{t_{i,j}} = d\varphi_{i,j}$ è il flusso infinitesimo uguale per tutti i tubetti di flusso $\tau_{i,j}$. Per la legge di Ampère (9.23) ne segue che

$$\sum_{i,j=1}^{M(i)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tau_{i,j} = d\varphi_i \sum_{i,j=1}^{M(i)} \psi_{i,j} = d\varphi_i i,$$

dove i è la corrente concatenata dalla linea media del tubetto di flusso τ_i . Sommando ora il contributo di tutti i tubetti τ_i si ricava:

$$\sum_{i=1}^N d\varphi_i i = i d\varphi = \mathcal{L}^*,$$

ovvero la tesi. Questa dimostrazione si estende facilmente al caso di più circuiti, ciascuno caratterizzato da una sua corrente e un suo flusso concatenato.

9.5.3 Energia magnetica

La prima delle (9.38) ci consente di stabilire un criterio per verificare la conservatività del lavoro di magnetizzazione nello spazio delle variabili di stato e quindi l'esistenza dell'energia magnetica. Consideriamo per semplicità due induttori mutuamente accoppiati e, agendo sui generatori, seguiamo un percorso chiuso l_{ch} nello spazio delle loro due variabili di stato (i_1, i_2) o (φ_1, φ_2) (fig. 9.26 (a)). Il lavoro di magnetizzazione complessivamente assorbito dagli induttori vale:

$$\mathcal{L}_{m,l_{ch}} = \oint_{l_{ch}} i_1 d\varphi_{c_1} + i_2 d\varphi_{c_2} \quad (9.39)$$

In ogni punto dello spazio si può allora considerare la corrispondente variazione di \mathbf{B} e di \mathbf{H} che, in generale, potrà essere rappresentata da un insieme di grafici che legano le componenti dei due vettori. Ad esempio, potremo avere grafici che legano H_x a B_x , H_y a B_y e così via. In ciascuno di questi grafici la linea chiusa l_c nello spazio delle variabili di stato corrisponderà ad una linea l' nello spazio delle componenti di \mathbf{H} e \mathbf{B} . Il lavoro di magnetizzazione, espresso in termini di integrale di volume, vale:

$$\mathcal{L}_{m,l_c} = \int_{\mathbb{R}^3} d\tau \int_{l'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (9.40)$$

Per semplicità, supponiamo che ciascuna componente di \mathbf{B} sia in relazione solo con la corrispondente componente \mathbf{H} , come mostrato nelle fig. 9.26 (b) e (c) rispettivamente per il caso isteretico e non isteretico, per la componente x dei vettori.

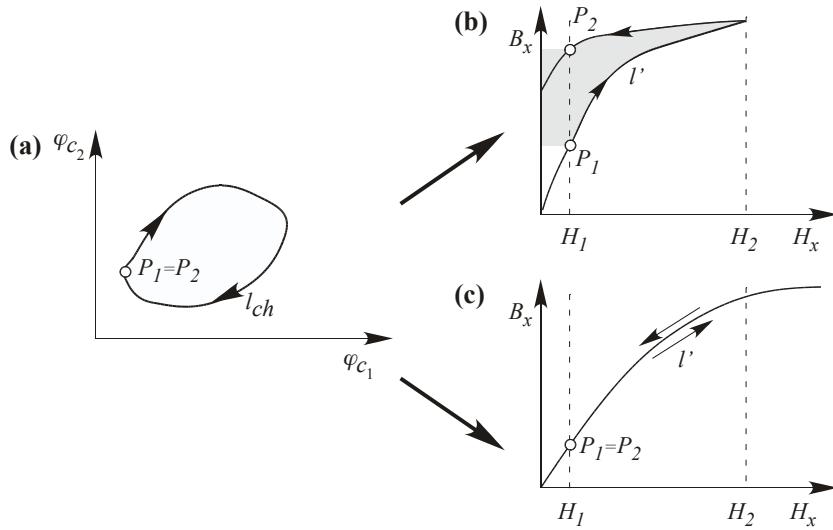


Figura 9.26: In assenza di isteresi, il lavoro di magnetizzazione associato a una trasformazione ciclica è zero.

Nella fig. 9.26 (b) si considera un materiale isteretico e si vede come il percorso seguito durante la crescita di H_x sia diverso da quello durante il suo calo (supponiamo di essere tornati al valore iniziale di H_x , H_1). I punti iniziale e finale, P_1 e P_2 non sono pertanto coincidenti nel piano $B_x - H_x$ e viene quindi assorbito un lavoro di magnetizzazione per unità di volume che, per le sole componenti x dei vettori, è pari all'area grigia della figura. A questo va aggiunto il contributo delle altre componenti y e z .

Invece, nella fig. 9.26 (c) si considera un materiale non isteretico in cui i punti iniziale e finale sono pertanto coincidenti. Non si ha quindi assorbimento di lavoro di magnetizzazione sul ciclo, il lavoro di magnetizzazione è conservativo nello spazio delle variabili di stato e, infine, si può definire l'energia magnetica.

Ne concludiamo che *in un sistema composto da induttori fissi immersi in un materiale in cui il legame tra \mathbf{B} ed \mathbf{H} è biunivoco è possibile definire l'energia magnetica W_m ed esprimere il lavoro di magnetizzazione assorbito dal campo tra una configurazione iniziale e finale come:*

$$\mathcal{L}_{m,A,B} = W_m(\boldsymbol{\varphi}_B) - W_m(\boldsymbol{\varphi}_A) \quad (9.41)$$

Si noti la convenzione adottata per l'energia, secondo la quale il valore finale va considerato con il segno + e l'iniziale con il segno -. In tal modo un aumento dell'energia corrisponde ad un assorbimento di lavoro di magnetizzazione.

9.5.4 Lavoro ed energia nel caso lineare

Nel caso lineare, in cui la permeabilità magnetica del mezzo è costante, risulta conveniente fare uso dei coefficienti di auto e mutua induzione, nonché delle auto e mutue inertanze, descritte in

sez. ?? . Sappiamo che:

$$\boldsymbol{\varphi}_c = \mathbf{M}\mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{i} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_c, \quad (9.42)$$

dove $\boldsymbol{\varphi}_c$ e \mathbf{i} sono i vettori colonna dei flussi concatenati e delle correnti e \mathbf{M} e $\boldsymbol{\Gamma}$ sono le matrici delle auto e mutue induttanze e inertanze. Dalla (9.32) possiamo pertanto ricavare subito il lavoro di magnetizzazione infinitesimo in funzione delle correnti:

$$\mathcal{L}_m^* = \sum_{k=1}^N i_k d\varphi_{c_k} = \sum_{k=1,s=1}^N M_{k,s} i_k d i_s = \mathbf{i}^T \mathbf{M} d\mathbf{i} \quad (9.43)$$

o, in alternativa, in funzione dei flussi:

$$\mathcal{L}_m^* = \sum_{k=1}^N i_k d\varphi_{c_k} = \sum_{k=1,s=1}^N \Gamma_{k,s} \varphi_k d\varphi_s = \boldsymbol{\varphi}_c^T \boldsymbol{\Gamma} d\boldsymbol{\varphi}_c \quad (9.44)$$

Essendo in questo caso assenti fenomeni isteretici, possiamo affermare che esiste l'energia magnetica e, come dimostreremo nel seguito, questo implica la simmetria delle matrici \mathbf{M} e $\boldsymbol{\Gamma}$. Le (9.43) e (9.44) sono pertanto dei differenziali esatti e possono essere integrati. Considerando la prima di queste e riunendo a due a due i termini corrispondenti alle varie coppie di correnti, e tenendo conto che $M_{k,s} = M_{s,k}$ abbiamo infatti:

$$\mathcal{L}_m^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1,s=1}^N (M_{k,s} i_k d i_s + M_{s,k} i_s d i_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1,s=1}^N d(M_{k,s} i_k i_s),$$

In modo simile si può procedere con la (9.44), ottenendo infine le espressioni dell'energia magnetica:

$$\begin{aligned} W_m(\mathbf{i}) &= \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{M} \mathbf{i} \\ W_m(\boldsymbol{\varphi}_c) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_c^T \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_c \\ W_m(\mathbf{i}, \boldsymbol{\varphi}_c) &= \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \boldsymbol{\varphi}_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \varphi_{c_k} \end{aligned} \quad (9.45)$$

Si osserva che, anche se la funzione calcolata è la stessa nei tre casi, le tre espressioni sono diverse: nel primo caso l'energia è scritta in funzione delle variabili di sorgente, nel secondo delle variabili di configurazione mentre nel terzo sono presenti entrambi i tipi di variabili. Per questo nelle prime due espressioni compaiono le proprietà degli oggetti (le matrici \mathbf{M} e $\boldsymbol{\Gamma}$ che esprimono le leggi costitutive in forma globale, mentre nel terzo non compaiono leggi costitutive.

Simmetria delle matrici delle auto e mutue induttanze e inertanze

Si consideri un sistema formato da N induttori, alimentati con correnti i_1, \dots, i_N e che concatenano i flussi $\varphi_{c_1}, \dots, \varphi_{c_N}$ immersi in un materiale anche non lineare. Mostriamo ora che, se è possibile definire l'energia magnetica come funzione di stato delle correnti o dei flussi concatenati, le matrici dei coefficienti di auto e mutua induzione o delle auto e mutue inertanze differenziali formano due matrici simmetriche..

Induttanze differenziali Si inizia supponendo che si possa definire l'energia magnetica in funzione delle correnti: $W_m = W_m(i_1, \dots, i_N)$. Si può allora esprimere il differenziale di energia magnetica, pari al lavoro di magnetizzazione infinitesimo \mathcal{L}_m^* , come:

$$dW_m = \sum_{k=1}^N \frac{\partial W_m}{\partial i_s} di_s = \mathcal{L}_m^*$$

D'altra parte, nelle ipotesi date è anche possibile esprimere il lavoro di magnetizzazione infinitesimo in funzione delle correnti, applicando le regole della derivazione delle funzioni composte di più variabili. Dalla (9.32) e dalla (9.46) otteniamo:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial W_m}{\partial i_s} di_s = \sum_{k=1}^N i_k \sum_{s=1}^N \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_s} di_s$$

Da cui:

$$\frac{\partial W_m}{\partial i_s} = \sum_{k=1}^N i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_s} \quad \text{e anche} \quad \frac{\partial W_m}{\partial i_t} = \sum_{k=1}^N i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_t}$$

Si considerano ora le derivate seconde miste dell'energia magnetica rispetto alle correnti:

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial i_s \partial i_t} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial i_t} \left(i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_s} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W_m}{\partial i_t \partial i_s} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial i_s} \left(i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_t} \right)$$

Le derivate seconde miste di una funzione sono uguali, pertanto sono uguali i secondi membri di queste relazioni, ottenendo:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial i_t} \left(i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_s} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial i_s} \left(i_k \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_t} \right), \tag{9.46}$$

quindi:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial i_k}{\partial i_t} \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_s} + i_k \frac{\partial^2 \varphi_{c_k}}{\partial i_s \partial i_t} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial i_k}{\partial i_s} \frac{\partial \varphi_{c_k}}{\partial i_t} + i_k \frac{\partial^2 \varphi_{c_k}}{\partial i_t \partial i_s} \right) \tag{9.47}$$

Si osserva che i secondi membri di entrambe le sommatorie sono uguali, pertanto possono essere eliminati. Ricordando inoltre che le correnti sono variabili indipendenti si ha:

$$\frac{\partial i_k}{\partial i_s} = \begin{cases} 1 & k = s \\ 0 & k \neq s, \end{cases} \quad \frac{\partial i_k}{\partial i_t} = \begin{cases} 1 & k = t \\ 0 & k \neq t, \end{cases}$$

nel primo membro della (9.47) sopravvive solo il termine t -esimo e nel secondo s -esimo, quindi:

$$\frac{\partial \varphi_{ct}}{\partial i_s} = M_{t,s_d} = \frac{\partial \varphi_{cs}}{\partial i_t} = M_{s,t_d}, \quad (9.48)$$

Ovvero, quando è possibile esprimere l'energia magnetica in funzione delle correnti, le mutue induttanze differenziali formano una matrice simmetrica.

Inertanze differenziali Consideriamo ora l'energia magnetica funzione di stato dei flussi: $W_m = W_m(\varphi_{c_1}, \dots, \varphi_{c_N})$. Dalla (9.32) otteniamo:

$$\frac{\partial W_m}{\partial \varphi_{c_k}} = i_k \quad \text{e anche} \quad \frac{\partial W_m}{\partial \varphi_{c_s}} = i_s \quad (9.49)$$

Differenziando ulteriormente in modo incrociato rispetto ai flussi e considerando l'uguaglianza delle derivate seconde miste si ricava:

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial \varphi_{c_k} \partial \varphi_{c_s}} = \frac{\partial i_k}{\partial \varphi_{c_s}} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \varphi_{c_s} \partial \varphi_{c_k}} = \frac{\partial i_s}{\partial \varphi_{c_k}},$$

pertanto

$$\Gamma_{k,s} = \frac{\partial i_k}{\partial \varphi_{c_s}} = \Gamma_{s,k} = \frac{\partial i_s}{\partial \varphi_{c_k}}.$$

9.6 Le forze dovute al campo magnetico

In presenza di un campo magnetico, sulle linee di corrente agiscono delle forze, dovute al moto delle cariche rispetto al riferimento solidale con l'osservatore e il campo. Tali forze possono poi essere trasferite ai conduttori dove tali linee di corrente si trovano.

9.6.1 Forze sulle linee di corrente in un campo magnetico

Sia data una regione τ sede di un campo magnetico in cui siano presenti delle linee di corrente che siano inizialmente tutte contenute in essa. Ricordiamo che, per la legge di Faraday-Neumann (9.16) agisce lungo la linea di corrente l una f.e.m. pari a:

$$e(t) = e_t(t) + e_m(t) = \oint_l \left[-\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{u}_t \, dl$$

Il primo addendo corrisponde ad una variazione del flusso in presenza di una geometria costante della linee di corrente, e il suo effetto è presente solo in regime variabile. Il secondo addendo

invece è associato al moto delle cariche ed è presente anche in regime stazionario. Volendo studiare l'effetto del campo sulle cariche in moto, considereremo d'ora in poi solo questo termine, ovvero la f.e.m. mozionale e_m , cui corrisponde la forza elettrica specifica mozionale pari a:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Sia ora data una distribuzione di cariche in moto rispetto all'osservatore: le cariche positive, con densità $\varrho_c^+(P_0)$ con velocità \mathbf{v}^+ e le cariche negative, con densità $\varrho_c^-(P_0)$ con velocità \mathbf{v}^- . Per la (3.8) la forza per unità di volume agente complessivamente su queste cariche, detta *forza ponderomotrice di origine magnetica* vale allora:

$$\mathbf{f}_m = \varrho_c^+(P_0) (\mathbf{v}^+ \times \mathbf{B}) + \varrho_c^-(P_0) (\mathbf{v}^- \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{N/m}^3). \quad (9.50)$$

Considerando ora un volume τ , la forza ponderomotrice risultante vale:

$$\mathbf{F}_m = \int_{\tau} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, d\tau \quad (\text{N}). \quad (9.51)$$

Questa espressione può essere utilizzata per calcolare la forza che agisce su un conduttore filiforme immerso in un campo magnetico. Con riferimento alla fig. 9.27, ammettendo che la densità di corrente sia uniforme nella sezione del conduttore filiforme si ricava per un tratto di conduttore di lunghezza infinitesima l^* :

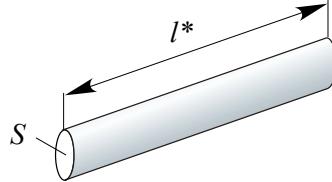


Figura 9.27: Tratto di conduttore filiforme di lunghezza infinitesima.

$$\mathbf{F}_{ml} l^* = l^* \int_S \mathbf{f}_m \, dS = l^* \int_S \frac{I}{S} \mathbf{u}_t \times \mathbf{B} \, dS,$$

ottenendo infine:

$$\mathbf{F}_{ml} = I \mathbf{u}_t \left(\frac{1}{S} \times \int_S \mathbf{B} \, dS \right) = I \mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_{med} \quad (\text{N/m}), \quad (9.52)$$

dove I è la corrente nel conduttore e \mathbf{B}_{med} è il *valore medio del vettore induzione* sulla sezione trasversale².

Vediamo ora alcune applicazioni di quanto ottenuto.

²Si tratta quindi della media di un vettore, ovvero una grandezza vettoriale. Da non confondersi col flusso del vettore, nella cui espressione integrale compare il prodotto scalare per il versore normale alla superficie, qui assente.

Forze su un conduttore cilindrico illimitato e isolato

Consideriamo un conduttore cilindrico di lunghezza illimitata, soggetto solamente al campo da esso stesso generato, in un mezzo uniforme. Supponiamo che la densità di corrente sia uniforme sulla sezione del conduttore. Sappiamo che, per la legge di Ampère, l'induzione è puramente tangenziale e dipende solo dal raggio (sez. ??). Se r_0 è il raggio del conduttore si ha:

$$\mathbf{B}(r) = B_0 \frac{r}{r_0} \mathbf{u}_\theta,$$

dove $B_0 = \mu I / 2\pi r_0$. Esaminiamo ora la distribuzione della forza ponderomotrice. In questo caso, data la simmetria assiale del campo, l'induzione media nella sezione del conduttore è zero, pertanto il conduttore non sarà soggetto a una forza risultante per unità di lunghezza. La forza ponderomotrice è comunque non nulla, e ha sempre direzione radiale centripeta e modulo crescente col raggio, pari a

$$\mathbf{f}_m(r) = -\frac{\mu I^2 r}{2\pi^2 r_0^4} \mathbf{u}_r. \quad (9.53)$$

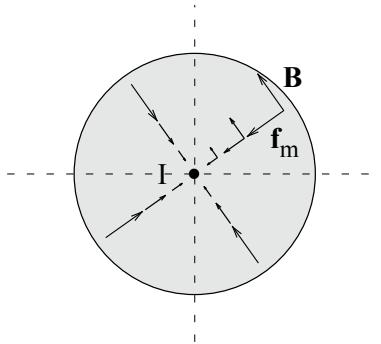


Figura 9.28: Sezione di conduttore cilindrico di lunghezza infinita, con densità di corrente uniforme uscente dal piano del disegno: distribuzione delle forze ponderomotrici.

Se la corrente è distribuita in modo pellicolare sulla superficie esterna del conduttore, questa sarà interessata da una densità di corrente superficiale pari a $J_s = I / 2\pi r_0$ e ci si aspetta quindi una *pressione magnetica centripeta*, agente sulla superficie esterna del conduttore, pari a: $P = B_0 I / 2\pi r_0 = B_0^2 / \mu$ (N/m²=Pa). Tale espressione tuttavia non è corretta, in quanto la discontinuità riguarda sia la densità di corrente, sia l'induzione. Considerando il caso della corrente pellicolare come il limite di una distribuzione di corrente su un anello molto sottile, ma di spessore radiale comunque finito, si ricava l'espressione corretta:

$$P = \frac{1}{2} \frac{I}{2\pi r_0} B_0 = \frac{B_0^2}{2\mu} \quad (9.54)$$

Forze su un due conduttori cilindrici illimitati e paralleli

Consideriamo ora il caso di due conduttori paralleli, illimitati, sedi di correnti opposte (Fig. 9.29)

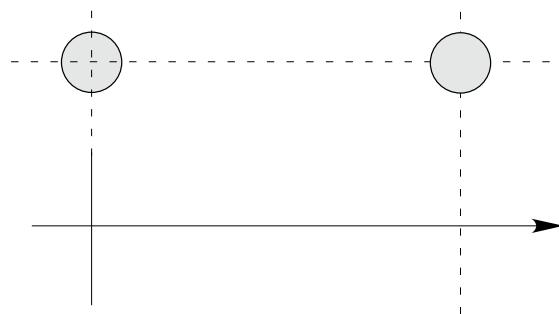


Figura 9.29: Conduttori paralleli, illimitati, sedi di correnti opposte.

fin qui

9.7 Equazione costitutiva del campo magnetico

Si consideri un'assegnata, nota, distribuzione di correnti nello spazio. Si vuole ora approfondire l'effetto del materiale che riempie lo spazio sui campi d'induzione \mathbf{B} e magnetico \mathbf{H} . Si osserva sperimentalmente che i valori di \mathbf{B} e di \mathbf{H} in ogni punto dello spazio cambiano al cambiare del materiale, *anche se rimane sempre vero che \mathbf{B} è solenoidale (9.5) e che vale la legge di Ampère (9.23)*.

Per studiare il comportamento del materiale si prepara perciò un provino di materiale *omogeneo* posto in un campo d'induzione ed un campo magnetico *omogenei*, in modo che le misure di induzione e campo magnetico, effettuate con gli strumenti precedentemente descritti, siano rappresentative anche di ciò che avviene a livello locale nel provino. Tralasciando per il momento i cosiddetti materiali ferromagnetici, di cui si parlerà più in dettaglio più avanti, si trova che negli altri casi il legame tra \mathbf{B} ed \mathbf{H} è lineare. Nella maggioranza dei casi i due vettori sono inoltre paralleli, cosicché si può scrivere la seguente relazione, detta *equazione costitutiva del campo magnetico*:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.55)$$

μ è una costante, detta *permeabilità magnetica*, dipendente solo dal materiale e non dalla forma, né dall'intensità delle sorgenti del campo (nei materiali non ferromagnetici). La permeabilità magnetica ha le dimensioni di $\text{V}\cdot\text{s} / (\text{A}\cdot\text{m})$, espresse nel Sistema Internazionale come *Henry su metro* (H/m). La permeabilità magnetica del vuoto viene indicata con μ_0 ed il suo valore è pari a $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. Si noti che tale valore non è il risultato di una misurazione, ma è stato fissato a priori in base a considerazioni sulle forze di natura elettromagnetica tra conduttori percorsi da corrente. Dalla scelta di μ_0 deriveranno per questo le dimensioni dell'intensità di corrente e della permittività dielettrica del vuoto ε_0 (il cui valore è legato a μ_0 attraverso l'espressione della *velocità della luce nel vuoto*, c , che si dimostra essere pari a $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$).

9.8 Momento magnetico e dipoli magnetici

9.8.1 Momento magnetico

Si consideri una regione dello spazio τ sede di un campo di corrente \mathbf{J} e sia stato scelto un punto fisso di riferimento Ω , detto *polo*.

Si definisce *momento magnetico del campo di corrente, rispetto al polo Ω* , la seguente grandezza vettoriale:

$$\mathcal{M}_\Omega = \int_{\tau} \frac{1}{2} (\mathbf{r}_\Omega \times \mathbf{J}) \, d\tau \quad (9.56)$$

dove $\mathbf{r}_\Omega = \overline{\Omega P_0}$ è il raggio vettore che unisce il polo Ω al punto d'applicazione P_0 del generico vettore \mathbf{J} . Il momento magnetico è quindi un vettore avente dimensioni di A·m. Come già fatto a proposito dei dipoli elettrici (vedi pag. 79) valutiamo ora come cambia il momento magnetico di un'assegnata distribuzione di correnti a seguito del cambiamento del polo Ω . Rispetto ad un polo $\Omega' \neq \Omega$ si ha: $\overline{\Omega' P_0} = \overline{\Omega' \Omega} + \overline{\Omega P_0}$, pertanto la (9.56) può così essere modificata:

$$\mathcal{M}_{\Omega'} = \int_{\tau} \frac{1}{2} (\overline{\Omega' \Omega} + \overline{\Omega P_0}) \times \mathbf{J} \, d\tau = \frac{1}{2} \overline{\Omega' \Omega} \times \int_{\tau} \mathbf{J} \, d\tau + \mathcal{M}_\Omega \quad (9.57)$$

Si noti che, in questa formula, l'ultimo integrale scritto *non è un flusso*. Nell'ipotesi che *tutte le linee di corrente siano chiuse e non taglino il contorno $\partial\tau$ del volume in esame*, si può dimostrare che tale integrale è nullo.³ Da questa relazione si vede anche che, quando le linee di \mathbf{J} sono tutte racchiuse in τ , il momento magnetico risulta indipendente dal polo di calcolo Ω .

9.8.2 Dipolo magnetico generato da una spira

Il caso più semplice di dipolo magnetico è dato da una spira filiforme l , percorsa da una corrente I . Sia S una qualunque superficie di cui la spira è il bordo. In tal caso, la (9.56) vale:

$$\mathcal{M}_\Omega = \int_l \frac{1}{2} \mathbf{r}_\Omega \times (I \mathbf{u}_t) \, dl \quad (9.58)$$

Esaminiamo ora il significato del prodotto $\frac{1}{2} \mathbf{r}_\Omega \times \mathbf{u}_t \, dl$. Con riferimento alla figura 9.30, si può notare che il vettore $\frac{1}{2} \mathbf{r}_\Omega \times \mathbf{u}_t \, dl$ rappresenta un elemento di superficie infinitesima orientata $\mathbf{n} \, dS$, avente modulo pari all'area del triangolo infinitesimo formato dai vettori \mathbf{r}_Ω e $\mathbf{u}_t \, dl$. Se si considera l'insieme di tutte queste superfici triangolari, si genera una sorta di piramide, la cui base è data dalla superficie S della spira ed il cui vertice è Ω (fig. 9.31).

Si può dimostrare che la (9.58) non dipende dal polo Ω . Infatti, per la (C.23) riportata in appendice, ponendo $f = 1$ (costante) si ricava

$\text{Grad } f = 0$, quindi:

$$\oint_{\partial\tau} f \mathbf{n} \, dS = \int_{\tau} \text{grad } f \, d\tau = 0$$

³ Se tutte le linee di corrente sono racchiuse in τ , si può considerare di integrare $\int_{\tau} \mathbf{J} \, d\tau$ per tubetti di flusso di \mathbf{J} . Scegliendo tra essi un tubetto chiuso τ^* di portata infinitesima i^* , avente linea media l , il suo contributo all'integrale è pari a $i^* \oint_l \mathbf{u}_t \, dl = 0$.

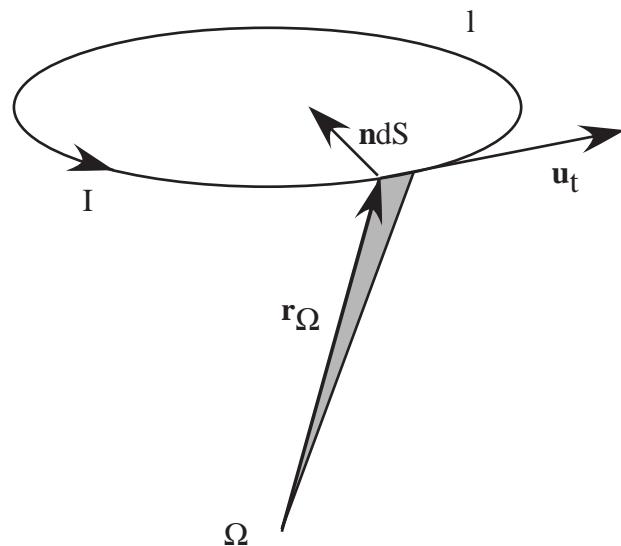


Figura 9.30: Elemento di superficie orientata \mathbf{n} dS generato dal raggio vettore \mathbf{r}_Ω e dal vettore infinitesimo tangente \mathbf{u}_t dl .

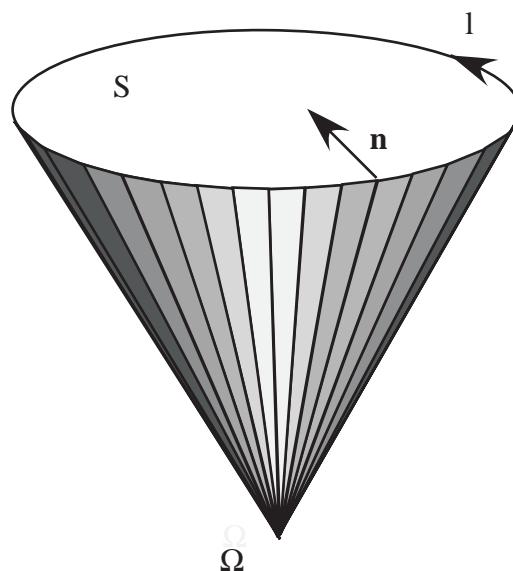


Figura 9.31: Piramide a base curvilinea formata dagli elementi d'area triangolari e dalla superficie S della spira.

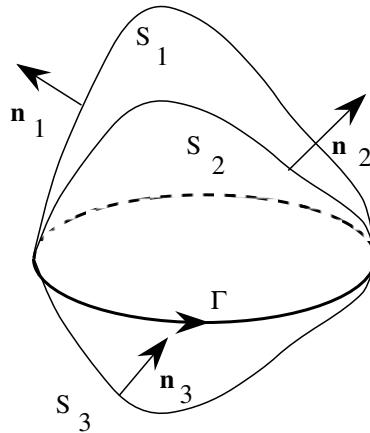


Figura 9.32: Linea chiusa orientata e tre superfici di cui essa è il bordo.

Si consideri ora la figura 9.32: pensando alla superficie chiusa formata da S_1 ed S_3 , e tenendo conto della loro orientazione, l'integrale appena scritto implica che:

$$\int_{S_1} \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \mathbf{n} dS = \int_{S_3} \mathbf{n} dS$$

Possiamo concludere quindi che l'integrale (9.58) è equivalente all'integrale

$$\mathcal{M} = I \int_S \mathbf{n} dS \quad (9.59)$$

esteso a *qualunque superficie* S di cui Γ è il bordo. Nel caso particolare in cui S è piana, l'integrale (9.59) diventa semplicemente:

$$\mathcal{M} = SI\mathbf{n} \quad (9.60)$$

Quando l'area della superficie S tende a zero assieme alla massima delle sue dimensioni e, contemporaneamente, la corrente I cresce in modo che il prodotto SI resti limitato e non nullo, si parla di *dipolo magnetico ideale*. Tale dipolo è identificato solamente dal vettore \mathcal{M} applicato nel generico punto P_0 dello spazio.

Si può dimostrare che il potenziale vettore magnetico generato in un punto P da un dipolo magnetico ideale collocato in un punto P_0 , vale:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \times \overline{P_0 P}}{|\overline{P_0 P}|^3} \quad (9.61)$$

Si noti la notevole somiglianza con la (7.34), che esprime il potenziale elettrico generato da un dipolo elettrico ideale.

9.8.3 Proprietà asintotica dei dipoli magnetici

Consideriamo ora una regione limitata τ dello spazio, sede di un campo di corrente e supponiamo di voler calcolare il potenziale vettore in un punto P molto lontano dalla regione τ .

Scegliamo un punto dello spazio Ω , vicino a τ , e sia \mathcal{M}_Ω il momento magnetico della distribuzione di corrente rispetto ad esso. Sappiamo che il potenziale vettore in P vale:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_\tau \frac{\mathbf{J}(P_0)}{|P_0 P|} d\tau \quad (9.62)$$

dove P_0 è il generico punto di τ . Poiché $\overline{P_0 P} = \overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}$, tenendo conto che $|\overline{P_0 \Omega}| \ll |\overline{\Omega P}|$, esprimiamo *asintoticamente* il modulo $1/|\overline{P_0 \Omega} + \overline{\Omega P}|$ procedendo come a pag. 82. Sostituendo perciò la (9.65) nella (9.62), si ricava:

$$\mathbf{A}(P) \approx \frac{\mu}{4\pi} \int_\tau \frac{\mathbf{J}(P_0)}{|\overline{\Omega P}|} \left(1 - \frac{\overline{P_0 \Omega} \cdot \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^2} \right) d\tau$$

Da qui, attraverso un'ulteriore serie di passaggi, omessi per brevità, trascurando termini infinitesimi di ordine superiore, si ottiene infine:

$$\mathbf{A}(P) \approx \frac{\mu}{4\pi |\overline{\Omega P}|} \int_\tau \mathbf{J}(P_0) d\tau + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_\Omega \times \overline{\Omega P}}{|\overline{\Omega P}|^3}, \quad (9.63)$$

dove \mathcal{M}_Ω è il momento magnetico della distribuzione di correnti rispetto al polo Ω . Quando tutte le linee di \mathbf{J} sono racchiuse in τ , il momento magnetico della distribuzione di correnti non dipende da Ω e l'integrale nella (9.63) è zero. Pertanto, *a grande distanza da una distribuzione di correnti, tutta racchiusa in un volume τ , il potenziale vettore è calcolabile come il potenziale vettore generato da un dipolo magnetico pari al momento magnetico della distribuzione di corrente.*

Tale espressione è quindi utile per avere delle espressioni approssimate del campo ad una certa distanza da una distribuzione di correnti, anche complessa.

9.8.4 Fenomeni di magnetizzazione espressi mediante la teoria dei dipoli magnetici

È noto dai corsi di fisica che i fenomeni di magnetizzazione sono riconducibili alla comparsa di una distribuzione di dipoli magnetici nel materiale che, pur non essendo percorso da alcuna corrente macroscopica, vede modificarsi il moto degli elettroni attorno ai nuclei in modo da dare origine ad una distribuzione mediamente non nulla di dipoli magnetici ideali. L'elettrone in moto attorno al nucleo corrisponde infatti ad una microscopica corrente che, viste le dimensioni geometriche non nulle dell'orbitale, dà origine ad un momento magnetico non nullo, continuamente variabile in orientazione spaziale. In presenza di un capo magnetico esterno, questi dipoli, altrimenti orientati in modo casuale, tendono ad allinearsi con il campo, così da dare un valore medio volumico non nullo.

Senza entrare nel dettaglio di questi meccanismi di magnetizzazione, *assumeremo che il materiale magnetizzato sia sede di una distribuzione continua di dipoli magnetici*, la quale genera un campo magnetico che si aggiunge al campo esterno generato da correnti o da altri materiali magnetizzati nelle vicinanze.

Definiamo pertanto il *vettore magnetizzazione* \mathbf{M} come il *momento di dipolo magnetico per unità di volume*. Per calcolare \mathbf{M} in un assegnato punto P_0 dello spazio, possiamo immaginare di considerare un volumetto infinitesimo τ^* di cui P_0 è il centro, e di sommare il momento di dipolo magnetico di tutti i dipoli compresi in τ^* . La piccolezza di τ^* fa sì che la distanza tra i vari dipoli magnetici sia infinitesima rispetto alla distanza tra il punto P_0 ed il punto generico P dove vogliamo calcolare il campo, perciò l'effetto di tutti i dipoli contenuti in τ^* sarà pari a quello di un unico dipolo concentrato in P_0 , di valore pari alla somma dei dipoli di τ^* . Pertanto:

$$\mathbf{M}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau^* \rightarrow P_0} \frac{\sum_{k \in \tau^*} \mathcal{M}_k}{\tau^*} \quad (9.64)$$

Il vettore magnetizzazione ha le dimensioni fisiche di $\text{A}\cdot\text{m}$ come il vettore \mathbf{H} , ed è nullo all'esterno del materiale magnetizzato.

Riprendiamo ora il potenziale generato da un dipolo elementare (9.58) e con questa espressione calcoliamo il potenziale vettore generato da una distribuzione continua di dipoli magnetici, descritta mediante il vettore magnetizzazione.

Il volumetto infinitesimo τ^* che circonda il generico punto P_0 del materiale magnetizzato, genera un potenziale vettore infinitesimo:

$$d\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(P_0) \times \mathbf{r}}{r^3} \tau^*$$

dove $\mathbf{r} = \overline{P_0 P}$. Il potenziale complessivamente generato dalla distribuzione di dipoli in τ vale allora:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{M}(P_0) \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (9.65)$$

Nella (9.65) si è considerata una permeabilità magnetica μ_0 anziché μ perché *con questo modello si rappresenta il materiale magnetizzato come una distribuzione di dipoli magnetici nel vuoto* e, quindi, le proprietà materiali del materiale vengono già prese in considerazione.

Nella (9.65) compare la frazione \mathbf{r}/r^3 che può venire riscritta come $\text{grad}_p(1/r)$, come già visto a pag. 83 (si ricorda a proposito che il pedice P indica che il gradiente è calcolato rispetto al punto di partenza). La funzione integranda nella (9.65) diventa allora:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{M}(P_0) \times \text{grad}_p \left(\frac{1}{r} \right) d\tau$$

e, applicando la (C.6) in appendice, tenendo conto che si fa variare il punto di partenza, si ricava:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \left[\frac{\text{rot}_p \mathbf{M}}{r} - \text{rot}_p \left(\frac{\mathbf{M}}{r} \right) \right] d\tau$$

Il secondo addendo entro parentesi quadra può venire ulteriormente trasformato, tenendo conto della (C.25) in appendice. Si ricava infine:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\tau} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{r} dS \quad (9.66)$$

Possiamo interpretare ora tale relazione come *l'espressione del potenziale vettore generato nel vuoto da una distribuzione di corrente nel materiale magnetizzato, con densità volumica $\text{rot } \mathbf{M}$, e da una distribuzione superficiale di corrente sulla superficie del materiale, con densità superficiale $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$* . Poniamo pertanto:

$$\mathbf{J}_m \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \mathbf{M} \quad (9.67)$$

la *densità di corrente di magnetizzazione* (A/m^2), e

$$\mathbf{J}_{sm} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (9.68)$$

la *densità superficiale di corrente di magnetizzazione* (A/m). La densità volumica è definita per ogni punto interno al materiale, la densità superficiale per ogni punto della sua superficie. La (9.66) diventa allora:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}_m}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\tau} \frac{\mathbf{J}_{sm}}{r} dS \quad (9.69)$$

Si può dimostrare che, calcolando la divergenza del potenziale vettore \mathbf{A} ottenuto con la (9.69), si ottiene zero. Viene rispettata dunque l'ipotesi iniziale di solenoidalità del potenziale vettore.

Il vettore magnetizzazione \mathbf{M} è una variabile sorgente, dato che descrive una distribuzione di correnti equivalenti. Ci si può allora aspettare che esso sia legato ad una variabile di configurazione mediante un'equazione costitutiva. Infatti, i fenomeni di magnetizzazione dipendono dall'intensità dell'induzione magnetica, che è responsabile delle forze che agiscono sulle cariche in moto e tendono ad allineare i momenti magnetici elementari presenti nel materiale. Per molti materiali il legame tra vettore magnetizzazione e vettore induzione è lineare, viene espresso dalla seguente legge costitutiva:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu} \mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9.70)$$

La costante adimensionale χ_m viene detta *suscettività magnetica*.

Esaminiamo ora in dettaglio le due densità di corrente di magnetizzazione sopra definite. Tenendo conto della legge costitutiva appena scritta, dalla (9.67) si ricava:

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } (\chi_m \mathbf{H})$$

Per la (C.6) in appendice, e per la legge di Ampère in forma differenziale (9.25), si può scrivere:

$$\mathbf{J}_m = \text{grad } \chi_m \times \mathbf{H} + \chi_m \text{rot } \mathbf{H} = \text{grad } \chi_m \times \mathbf{H} + \chi_m \mathbf{J} \quad (9.71)$$

Dunque, considerando un materiale magnetizzato non percorso dalle normali correnti macroscopiche ($\mathbf{J} = 0$), si può avere una densità corrente di magnetizzazione \mathbf{J}_m non nulla anche quando la suscettività magnetica non è uniforme lungo la direzione ortogonale al campo magnetico.

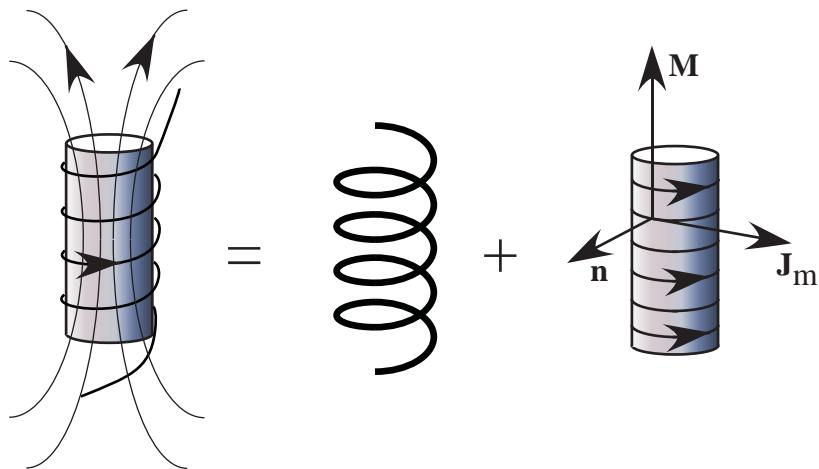


Figura 9.33: Solenoide avvolto attorno ad un materiale magnetizzato.

Per quanto riguarda la densità superficiale di corrente \mathbf{J}_{sm} , osserviamo come, grazie al prodotto vettore che compare nella sua definizione, essa sia presente sulla superficie del materiale solo se il vettore magnetizzazione ha una componente non nulla parallela ad essa. Tenendo conto poi che, in un materiale per cui vale la legge costitutiva appena scritta, il vettore \mathbf{M} è parallelo a \mathbf{H} , si ottiene ad esempio quanto illustrato nella figura 9.33, dove si mostra come il campo generato da un solenoide avvolto attorno ad un cilindro di materiale magnetizzato può essere considerato come risultato delle linee di corrente nel solenoide e delle linee del vettore densità di corrente superficiale \mathbf{J}_{sm} sulla superficie esterna del materiale, calcolato mediante il prodotto vettore tra la magnetizzazione \mathbf{M} ed il versore normale \mathbf{n} . Nelle due facce piane d'estremità del cilindro, se il campo è ad esse praticamente perpendicolare, risulta trascurabile la densità di corrente superficiale di magnetizzazione e l'intero cilindro di materiale magnetizzato può essere rappresentato mediante un solenoide cilindrico equivalente, avente le stesse dimensioni del cilindro magnetizzato.

9.8.5 Il legame tra induzione magnetica e campo magnetico in presenza di materiali magnetizzati

Supponiamo d'essere in regime magnetostatico o magneto quasi statico, così da poter trascurare la corrente di spostamento. L'esperimento descritto in sezione 9.4 ha permesso di definire il vettore campo magnetico \mathbf{H} evidenziando, tra l'altro, che $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Nel vuoto tale relazione equivale a:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

In presenza di correnti e di materiali magnetizzati, ci si aspetta che $\text{rot } \mathbf{B}$ dipenda sia dalla densità di corrente \mathbf{J} che dalla densità di corrente di magnetizzazione presente localmente nel materiale, \mathbf{J}_m , dovuta alla magnetizzazione:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m). \quad (9.72)$$

Tenendo allora conto della (9.67) tale relazione diventa:

$$\operatorname{rot} [\mathbf{B} - \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})] = 0 \quad (9.73)$$

In questa relazione il termine entro la parentesi quadra è determinato a meno di una componente irrotazionale, che è un grado di libertà che potremo assumere pari a 0, ottenendo:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9.74)$$

ed anche:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (9.75)$$

Anche nel caso della magnetizzazione, si mette in evidenza che, nella relazione sopra scritta, vengono collegati tra loro due modelli fisici del materiale completamente diversi. Nel primo il materiale viene completamente descritto mediante il parametro μ , senza entrare nel dettaglio dei fenomeni di magnetizzazione. Nel secondo il materiale viene rappresentato da un'opportuna distribuzione di correnti o dipoli magneticci nel vuoto.

Essendo poi $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, ricaviamo anche che $\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}$.

Esprimiamo ora le sorgenti per le componenti irrotazionale e solenoidale dei vettori \mathbf{H} , ed \mathbf{M} . Dalla legge di Ampère in forma differenziale (9.25) e dalla (9.71) otteniamo subito le sorgenti per \mathbf{H}_{sol} e per \mathbf{M}_{sol} , mentre, dalla (9.70) ricaviamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \operatorname{div} \left[\left(\frac{\chi_m}{\mu} \right) \mathbf{B} \right] = \operatorname{grad} \left(\frac{\chi_m}{\mu} \right) \cdot \mathbf{B} + \left(\frac{\chi_m}{\mu} \right) \operatorname{div} \mathbf{B}$$

e quindi:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = -\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \left(\frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \right) \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (9.76)$$

Un materiale magnetizzato avente proprietà materiali non omogenee può quindi avere una magnetizzazione \mathbf{M} non solenoidale se la grandezza χ_m non è costante lungo la direzione del vettore induzione magnetica.

Si noti infine che, quando le proprietà materiali variano con continuità nella regione in esame, esse corrispondono a *sorgenti distribuite* nel materiale. Le discontinuità delle proprietà materiali in corrispondenza delle superfici di separazione tra materiali diversi corrispondono invece a *sorgenti superficiali*, associate sempre a termini di tipo laplaciano nei volumi di cui tali superfici formano la frontiera.

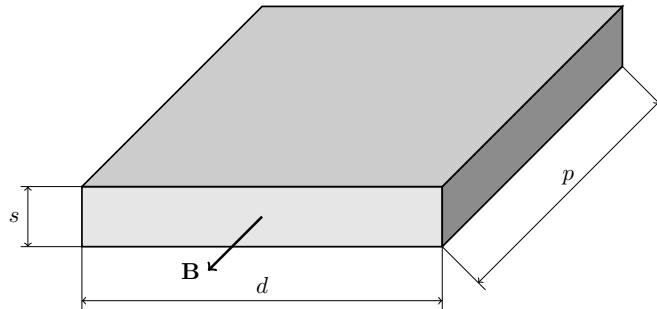


Figura 9.34: Piatto di materiale conduttore soggetto a un campo di induzione uniforme e variabile nel tempo.

9.9 Corpi conduttori in un campo magnetico variabile

Analizziamo ora cosa succede quando un corpo conduttore viene immerso in un campo magnetico variabile nel tempo. Per semplicità supponiamo in quiete il corpo rispetto al sistema di riferimento.

Se il campo magnetico è variabile nel tempo esisterà, in generale, in ogni punto dello spazio, un campo elettrico indotto che, per la conducibilità non nulla del corpo, permetterà la circolazione di una corrente che tende ad opporsi alla variazione del campo magnetico. La corrente indotta, tuttavia, concorre essa stessa alla formazione del campo.

9.9.1 Un modello semplificato

Esaminiamo inizialmente un modello semplificato in cui si considera un piatto di materiale conduttore, di spessore s , larghezza d e profondità p interessato da un campo magnetico uniforme parallelo alla direzione della profondità (Fig. 9.34). Le ragioni di queste ipotesi sulla sua geometria saranno chiarite nel seguito. Siano costanti e uniformi la permeabilità magnetica μ e la conducibilità elettrica σ del materiale. Il campo magnetico variabile provocherà una f.e.m. che, tenendo conto della direzione dell'induzione, indurrà a sua volta delle correnti le cui linee giacciono sui piani trasversali del conduttore (Fig. 9.35) e quindi concatenano valori differenti di flusso. Si noti che, assumere il campo di induzione uniforme sulla sezione trasversale implica supporre che gli effetti magnetici di tali correnti indotte siano trascurabili. Ciò si può verificare ad esempio quando il conduttore è sufficientemente resistivo o l'induzione non varia troppo rapidamente nel tempo. Le linee di corrente avranno la stessa geometria su tutti i piani trasversali del conduttore. Una rappresentazione molto grossolana delle linee di corrente può essere quella di un'unica spira avente sezione trasversale S^* di dimensioni $s/2$ e p e linea media l^* di lunghezza $l \approx 2d$ (Fig. 9.36). Indicando ora con $S \approx sp/2$ l'area della sezione trasversale della spira, possiamo stimare la sua conduttanza

$$G \approx \frac{\sigma S}{l} = \frac{\sigma sp}{4d} \quad (9.77)$$

e l'area della superficie che concatena il flusso di induzione $S_c \approx sd/2$, pari all'area racchiusa dalla linea media l^* , il flusso concatenato dalla spira sarà $\varphi_c = BS$. Supponiamo sinu-

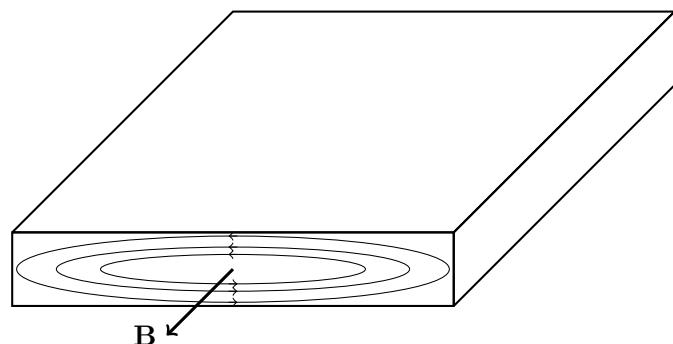


Figura 9.35: Linee di corrente indotta nel piatto di materiale conduttore.

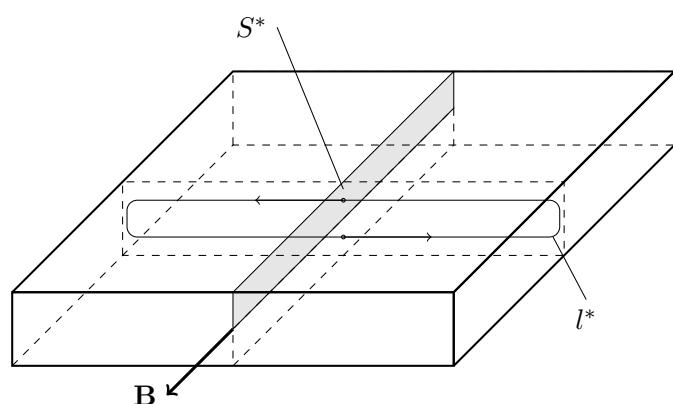


Figura 9.36: Spira media equivalente, di cui si evidenziano la linea media l^* e la sezione trasversale S^* .

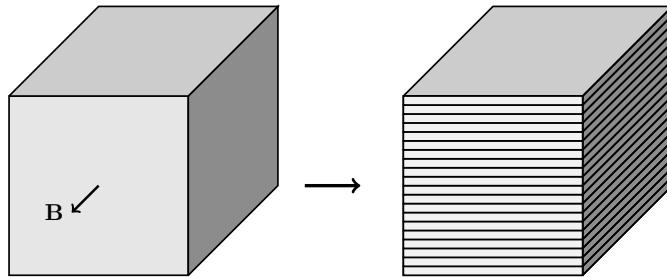


Figura 9.37: Suddivisione di un blocco massiccio di materiale ferromagnetico in un pacco di lamierini sottili isolati reciprocamente.

soidale l'induzione: $B(t) = B_M \sin(\omega t)$, da cui la forza elettromotrice indotta vale $e(t) = -d\varphi_c/dt = -\omega B_M S_c \cos(\omega t)$, con un valore efficace pari a $E = \omega B_M S_c / \sqrt{2}$.

Nella spira, questa forza elettromotrice dà luogo a una potenza dissipata pari a $P_J = GE^2$ per cui, in base alla (9.77) si ricava:

$$P_J = \frac{\sigma s p}{4d} \frac{(\omega B_M s d)^2}{8} = \frac{\sigma s^3 p d \omega^2 B_M^2}{32} \quad (\text{J}). \quad (9.78)$$

Dividendo ora questa potenza per il volume del conduttore $V = s p d$ si ottengono le perdite *medie* per unità di volume:

$$p_J = \frac{\sigma s^2 \omega^2 B_M^2}{32} \quad (\text{J}/\text{m}^3). \quad (9.79)$$

Se ora si considera il piatto di materiale conduttore come un tratto di materiale ferromagnetico facente parte di un circuito magnetico che convoglia un flusso sinusoidale (quale ad esempio il nucleo di un trasformatore, o lo statore di una macchina sincrona), risulta obiettivo prioritario cercare di ridurre le perdite che, evidentemente, vengono convertite in potenza termica, la quale può comportare un riscaldamento eccessivo della macchina.

Dalla (9.79) si ricavano le seguenti conclusioni.

- Le perdite *dipendono dalla conducibilità elettrica del materiale*, σ : per calare la conducibilità senza compromettere le proprietà magnetiche si usa aggiungere silicio al ferro, in una percentuale tra 1 e il 4%.
- Le perdite *dipendono dal quadrato dello spessore s del materiale*: una data sezione trasversale del circuito magnetico può essere suddivisa in un pacco di lamierini *isolati*, in modo da costringere le correnti indotte all'interno di ciascun lamierino, ottenendo così delle spire di sezione trasversale ridotta e quindi bassa conduttanza (Fig. 9.37). Questa è la ragione che ha portato ad assumere le ipotesi iniziali sulla geometria del conduttore come un piatto sottile.
- Le perdite *dipendono dal quadrato della frequenza*: ciò pone un limite ai valori massimi di frequenza di lavoro, che si aggirano intorno a 1: 2 kHz per pacchi di lamierini molto sottili (0,1 mm); per valori superiori si devono usare altri materiali, ed esempio le ferriti.

- Le perdite *dipendono dal quadrato del valore massimo dell'induzione*: anche questo pone un limite alle condizioni di lavoro: i massimi valori di induzione si aggirano intorno a 1,8 : 2 T e, localmente, arrivano a 2,2 T.

Considerando ora le perdite totali nei materiali ferromagnetici, in aggiunta alle perdite specifiche espresse dalla (9.79) vanno considerate le perdite per isteresi. Le perdite totali per unità di volume possono pertanto essere espresse in questo modo:

$$P_{Fe} = C_1 f B_M^\beta + C_2 f^2 B_M^2 \quad (\text{J/m}^3), \quad (9.80)$$

dove i coefficienti C_1 , C_2 e β dipendono dal materiale e sono forniti dal produttore del materiale. In questa espressione il primo addendo corrisponde alle perdite per isteresi e il secondo alle perdite per correnti indotte. A bassa frequenza predominano le perdite per isteresi mentre, al suo crescere, le perdite per correnti parassite divengono sempre più importanti.

9.9.2 L'equazione di diffusione

Per descrivere in modo più generale e accurato il fenomeno della diffusione e delle correnti indotte, le equazioni da considerare per analizzare il fenomeno sono le equazioni di Maxwell, completate dalle leggi costitutive del materiale conduttore e del mezzo che lo circonda. Se il corpo ha una conducibilità elettrica sufficientemente alta e il campo magnetico ha tempi di variazione sufficientemente lunghi, il termine corrispondente alla densità di corrente di spostamento risulta trascurabile rispetto alla densità di corrente nella prima equazione di Maxwell. In tali condizioni, inoltre, le linee di corrente possono ancora essere con buona approssimazione considerate linee chiuse, cosicché il corpo si trova in regime magneto quasi-statico, descrivibile mediante queste relazioni:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} & \text{div } \mathbf{J} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{J} &= \gamma \mathbf{E} & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (9.81)$$

Ammettiamo che il corpo sia omogeneo, cosicché μ e γ sono uniformi in esso. Sostituendo l'espressione di \mathbf{J} ottenuta dalla prima equazione di Maxwell si ricava, dopo alcuni semplici passaggi, la cosiddetta *equazione della diffusione*, scritta in termini di campo magnetico, che descrive il comportamento dei corpi conduttori in regime magneto quasi-statico:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\text{rot rot } \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9.82)$$

Sostituendo invece il vettore campo elettrico ottenuto dalla legge costitutiva si ricava la stessa equazione, ma scritta in termini di densità di corrente:

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (9.83)$$

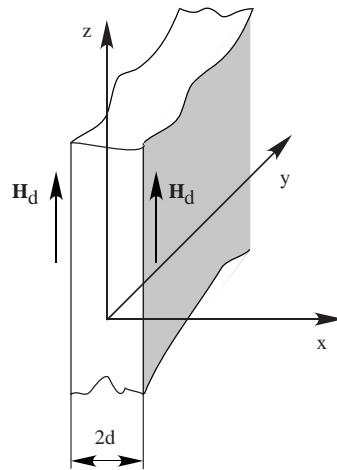


Figura 9.38: Lastra illimitata di materiale conduttore immersa in un campo magnetico uniforme.

Le due equazioni sono identiche perché entrambe del massimo ordine (secondo) rispetto alle coordinate spaziali, e perché entrambe omogenee, mancando una grandezza forzante applicata nei vari punti del corpo conduttore.

A titolo di esempio, nella sezione seguente utilizzeremo l'equazione 9.82 per studiare la diffusione di un campo magnetico sinusoidale nel tempo in un corpo conduttore, mentre in sezione 9.9.4 useremo l'equazione (9.83) per studiare la distribuzione di corrente sinusoidale in un conduttore massiccio.

9.9.3 La diffusione del campo magnetico

Come applicazione studiamo l'equazione di diffusione nel caso della semplice geometria schematizzata in fig. 9.38: una lastra di materiale conduttore di spessore \$2d\$, disposta lungo il piano \$yz\$, illimitata lungo queste due direzioni, viene sottoposta a un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse \$z\$, quindi tangente alla lastra. Studiamo il problema supponendo che il campo magnetico:

- sia uniforme e diretto lungo l'asse \$z\$ nello spazio esterno alla lastra;
- assuma lo stesso valore \$\mathbf{H}_d\$ a sinistra e a destra della lastra;
- abbia un andamento sinusoidale nel tempo, del tipo:

$$\mathbf{H} = H_d \sin(\omega t) \mathbf{u}_z = H(d, t) \mathbf{u}_z$$

Si osserva che la coppia di valori \$\mathbf{H}_d\$ assegnati ai due lati della lastra costituisce le condizioni al contorno da imporre per lo studio della regione conduttrice con la geometria monodimensionale. Si cerca allora la soluzione della (9.82) nella forma:

$$H(x, t) = H_M(x) \sin[\omega t + \beta(x)] \quad (9.84)$$

Per risolvere l'equazione si applica il metodo simbolico, per cui la soluzione si considera un fasore nella forma:

$$\bar{H}(x, t) = H_M(x) e^{j[\omega t + \beta(x)]} \Rightarrow H(x, t) = \text{Im}\{\bar{H}(x, t)\}$$

Sostituendo H nella (9.82) si ricava la seguente equazione differenziale ordinaria nel fasore incognito:

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_M}{\partial x^2} - j\omega\mu\gamma\bar{H}_M = 0.$$

Tale equazione è detta *equazione di Helmholtz*. Si pone $\delta^2 = 1/(\pi f \mu \gamma)$, cosicché:

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_M}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \bar{H}_M = 0. \quad (9.85)$$

La grandezza

$$\delta = \sqrt{1/(\pi f \mu \gamma)} \quad (9.86)$$

ha le dimensioni di una lunghezza, ed è detta *spessore di penetrazione*. L'equazione caratteristica $s^2 - 2j/\delta^2 = 0$ ha come radici $\dot{s} = \pm(1+j)/\delta$, per cui la soluzione è scrivibile nelle due seguenti forme alternative:

$$\begin{aligned} \bar{H}_M &= \bar{H}_1 e^{\dot{s}x} + \bar{H}_2 e^{-\dot{s}x} \\ \bar{H}_M &= \bar{H}_3 \cosh(\dot{s}x) + \bar{H}_4 \sinh(\dot{s}x) \end{aligned}$$

Dove $\bar{H}_1 \dots \bar{H}_4$ sono costanti complesse di indeterminazione. Vista la simmetria geometrica del problema e delle condizioni al contorno rispetto al piano medio della lastra, la seconda di tali forme è preferibile, avendosi immediatamente $\bar{H}_4 = 0$ e riducendosi la soluzione alla forma $\bar{H}_M = \bar{H}_3 \cosh(\dot{s}x)$.

L'unica costante di indeterminazione \bar{H}_3 va determinata in base alle condizioni al contorno, che nel nostro caso impongono:

$$\bar{H}_M(d) = \bar{H}_3 \cosh(\dot{s}d) = \bar{H}_d,$$

per cui:

$$\bar{H}_M(x) = \bar{H}_d \frac{\cosh(\dot{s}x)}{\cosh(\dot{s}d)} = \bar{H}_d \frac{\cosh\left[(1+j)\frac{x}{\delta}\right]}{\cosh\left[(1+j)\frac{d}{\delta}\right]} \quad (9.87)$$

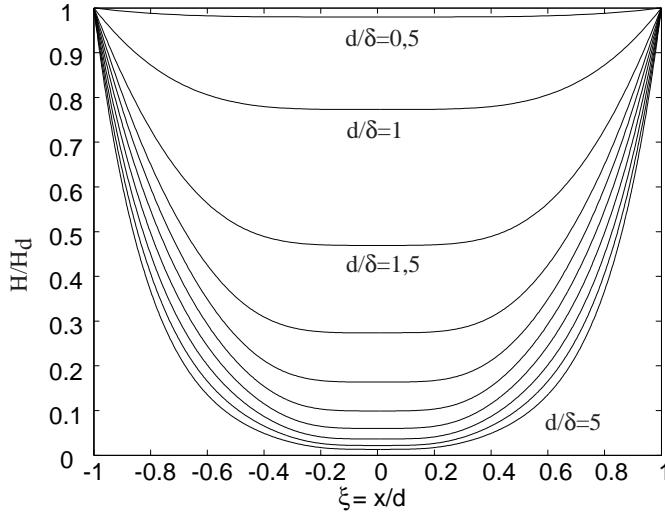


Figura 9.39: Andamento H/H_d in funzione di $\xi = x/d$ per d/δ variabile tra 0,5 e 5.

dove \bar{H}_d è il valore assunto da \bar{H} per $x = d$. Dall'espressione del fasore \bar{H} si può ricavare il fasore della densità di corrente nella lastra, che sarà⁴:

$$\bar{J}_M(x) = -\frac{\partial \bar{H}_M}{\partial x} = -\dot{s}\bar{H}_d \frac{\sinh \left[(1+j) \frac{x}{\delta} \right]}{\cosh \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right]} = \bar{J}_d \frac{\sinh \left[(1+j) \frac{x}{\delta} \right]}{\sinh \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right]} \quad (9.88)$$

dove $\bar{J}_d = -\dot{s}\bar{H}_d \sinh(\dot{s}d) / \cosh(\dot{s}d)$ è il valore assunto da \bar{J} per $x = d$.

Le 9.87 e 9.88 possono venire rappresentate in funzione della posizione x o, ancora meglio, in funzione della coordinata adimensionale $\xi = x/d$, che varia tra -1 ed 1. Trattandosi di funzioni complesse di variabile reale, si sceglie la rappresentazione in termini di modulo e fase ottenendo, sia per il campo che per la densità di corrente, due famiglie di curve al variare del parametro adimensionale d/δ . La figura 9.39 riporta l'andamento del rapporto dei moduli H/H_d in funzione di ξ , per d/δ variabile tra 0,5 e 5. Come si vede, appena il semispessore d della lastra è alcune volte lo spessore di penetrazione, il campo all'interno della lastra è grandemente ridotto e al centro è praticamente trascurabile: la lastra riesce quindi a schermare pressoché completamente il campo esterno. All'opposto, quando lo spessore di penetrazione è confrontabile o maggiore del semispessore, ci sarà un'attenuazione trascurabile da parte della lastra.

⁴Considerando i vettori avremo:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{u}_y$$

essendo $H_x = H_y = 0$ e $H_z = H_z(x)$

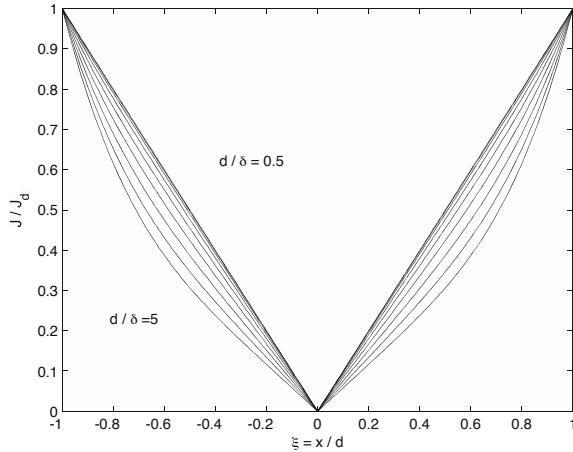


Figura 9.40: Andamento J/J_d in funzione di $\xi = x/d$ per d/δ variabile tra 0,5 e 5.

L'effetto di schermatura è dovuto alla corrente indotta nella lastra, presente maggiormente in prossimità delle facce della lastra. La figura 9.40 riporta l'andamento del rapporto dei moduli J/J_d , in funzione di ξ , ancora per d/δ variabile tra 0,5 e 5. Si noti come, per d/δ ‘piccolo’ (0,5), l'andamento della densità di corrente sia rettilineo in quanto, per tali valori, valgono le approssimazioni $\sinh(\dot{s}x) \approx \dot{s}x$ e $\cosh(\dot{s}x) \approx 1$, per cui il campo nella lastra è pressochè uniforme.

In conclusione è possibile affermare che *lo spessore di penetrazione δ è il parametro che influenza la distribuzione di campo e di densità di corrente*.

La grandezza $J_u = H_d/\delta$ ha un semplice significato: si tratta della densità di corrente presente se il campo variasse linearmente nella lastra, dal valore H_d a zero in uno spessore δ . In tali condizioni la densità di corrente nella lastra sarebbe uniforme e pari a J_u , ma con valori opposti in ciascuna metà della lastra, come schematizzato in figura 9.41.

In corrispondenza del piano medio della lastra ($x = 0$) si hanno:

$$\bar{H}_0 = \bar{H}_M(0) = \bar{H}_d \frac{1}{\cosh \left[(1+j) \frac{d}{\delta} \right]} \quad \bar{J}_0 = \bar{J}_M(0) = 0$$

Osservando che $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, che $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$, $\cosh j\alpha = \cos \alpha$ e $\sinh j\alpha = j \sin \alpha$, si può anche scrivere:

$$H_0 = H_d \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 \frac{d}{\delta} + \cos^2 \frac{d}{\delta}}} \quad J_d = \sqrt{2} \left(\frac{H_d}{\delta} \right) \sqrt{\frac{\cosh^2 \frac{d}{\delta} - \cos^2 \frac{d}{\delta}}{\sinh^2 \frac{d}{\delta} + \cos^2 \frac{d}{\delta}}} \quad (9.89)$$

L'andamento della grandezza H_0/H_d in funzione di d/δ è riportato in figura 9.42.

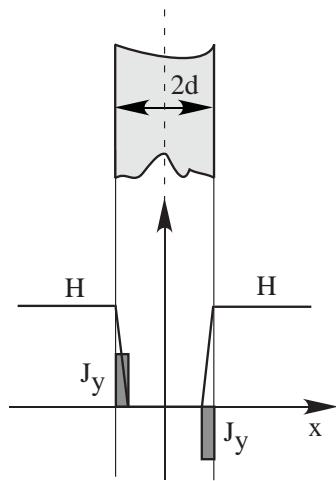


Figura 9.41: Schema della lastra e della distribuzione lineare del campo (H_z) e della densità di corrente (IJ_y).

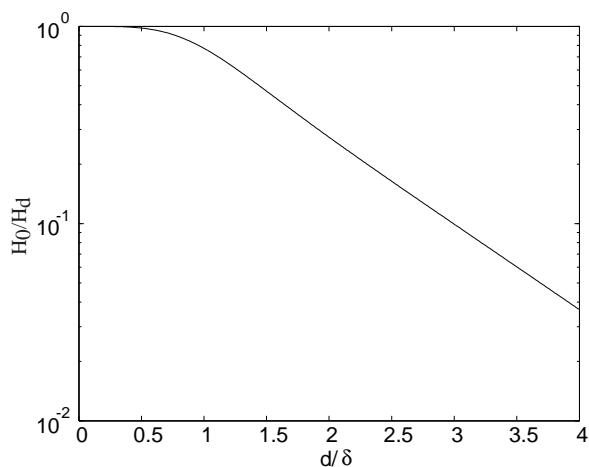


Figura 9.42: Rapporto H_0/H_d tra il campo magnetico sul piano medio della lastra e il campo al suo bordo, in funzione del rapporto d/δ .

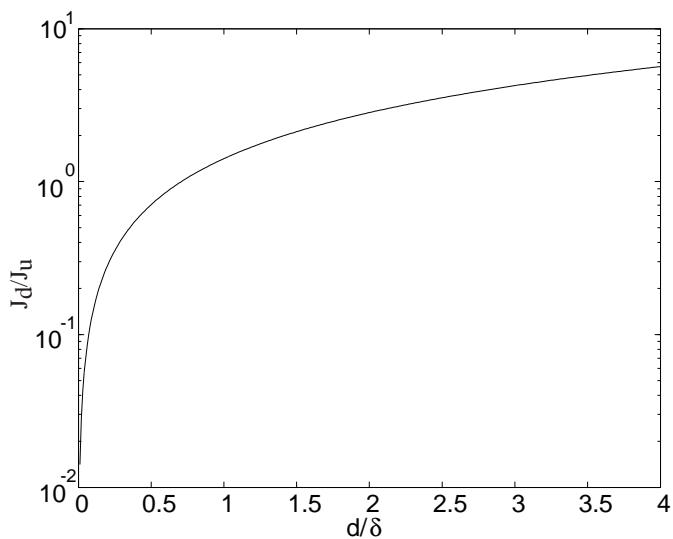


Figura 9.43: Rapporto $J_d/(J_u)$ tra densità di corrente al bordo della lastra e densità di corrente nel caso di campo che varia linearmente in uno spessore δ , in funzione del rapporto d/δ .

Si consideri ora la seconda delle 9.89, che esprime il valore della densità di corrente in corrispondenza sulla superficie della lastra in funzione del rapporto d/δ . L'andamento del rapporto J_d/J_u , espresso dalla seconda delle 9.89 è riportato in figura 9.43.

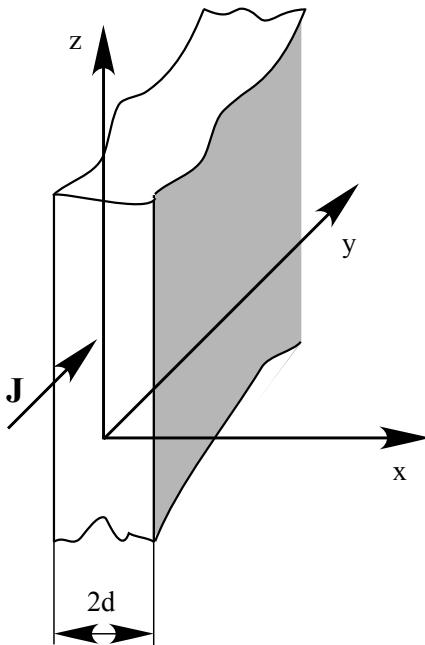


Figura 9.44: Lastra illimitata di materiale conduttore che porta una corrente lungo la direzione y .

9.9.4 L'effetto pelle

Consideriamo ora la stessa lastra conduttrice illimitata, ma con diverse condizioni di lavoro. Supponiamo che essa sia sede di una corrente sinusoidale diretta lungo l'asse y , con densità che non varia né lungo z , né lungo y (Fig. 9.44). In tali condizioni la densità di corrente nella lastra è anch'essa sinusoidale nel tempo, è orientata lungo y e dipende solo da x : $\mathbf{J}(t) = J_M \sin(\omega t) \mathbf{u}_y$ (A/m^2).

Per studiare la distribuzione della densità di corrente, usiamo l'equazione 9.83, procedendo come nella sezione precedente. Cercheremo la soluzione nella forma:

$$J(x, t) = J_M(x) \sin[\omega t + \beta(x)] \quad (9.90)$$

Per risolvere l'equazione si applica ancora il metodo simbolico, per cui la soluzione si considera un fasore nella forma:

$$\bar{J}(x, t) = J_M(x) e^{j[\omega t + \beta(x)]} \Rightarrow J(x, t) = \text{Im}\{\bar{J}(x, t)\}$$

Sostituendo J nella (9.83) si ricava la seguente equazione differenziale ordinaria nel fasore incognito:

$$\frac{\partial^2 \bar{J}_M}{\partial x^2} - j\omega\mu\gamma\bar{J}_M = 0$$

Sfruttando le condizioni di simmetria, come nella sezione precedente possiamo alla fine scrivere la soluzione nella forma $\bar{J}_M = \bar{J}_3 \cosh(\dot{s}x)$, dove \bar{J}_3 è la costante di indeterminazione che va determinata imponendo delle condizioni in forma diversa da quella seguita nella sezione precedente. Infatti ora il vincolo è la corrente trasportata dalla lastra. In base all'uniformità di $J(t)$ rispetto ad x ed y , è definibile infatti una densità di corrente per unità di altezza z pari a:

$$i(t) = \int_{-d}^d J(x) dx \quad (\text{A/m}).$$

Assumiamo pertanto nota l'espressione $i(t) = I_M \sin(\omega t)$ (Fig. 9.44) e consideriamo il suo fasore $\bar{I}(t) = I_M \exp(\omega t + \gamma(x))$. Avremo:

$$\bar{I} = \int_{-d}^d \bar{J}_M(x) dx = \frac{2}{\dot{s}} \bar{J}_3 \sinh(\dot{s}d),$$

da cui:

$$\bar{J} = \frac{\dot{s}}{2} \bar{I} \frac{\cosh(\dot{s}x)}{\sinh(\dot{s}d)} = \bar{J}_d \frac{\cosh(\dot{s}x)}{\cosh(\dot{s}d)}, \quad (9.91)$$

ovvero un'espressione formalmente identica alla (9.87). Riguardo alla densità di corrente si possono pertanto fare le stesse considerazioni che hanno portato al tracciamento della figura 9.39, che corrisponde quindi anche all'andamento J/J_d in funzione di $\xi = x/d$ per d/δ variabile tra 0,5 e 5. Anche in questo caso, appena il semispessore d della lastra è alcune volte lo spessore di penetrazione ($d/\delta \gg 1$), la densità di corrente all'interno della lastra è grandemente ridotta, al centro è praticamente trascurabile e la corrente è concentrata nei due strati più esterni. Ciò è dovuto al campo magnetico generato dalla corrente stessa, il quale induce un campo elettrico che si oppone alla presenza di corrente all'interno della lastra. All'opposto, quando lo spessore di penetrazione è confrontabile o maggiore del semispessore, ci sarà un'attenuazione trascurabile da parte della lastra e la densità di corrente è praticamente uniforme in essa.

La figura 9.45 riporta lo sfasamento di $j(x, t)$ rispetto a $j(d, t)$, pari all'argomento della frazione complessa nella (9.87): come si vede, la densità di corrente arriva ad essere addirittura in opposizione di fase rispetto al suo valore sul bordo.

L'effetto pelle ha un'importante conseguenza sui criteri di progettazione dei conduttori per elevate correnti sinusoidali. Infatti, per evitare un eccessivo riscaldamento dovuto ad effetti resistivi, mentre in corrente continua si può trasportare un'elevata corrente semplicemente scegliendo un conduttore di adeguata sezione traversale, in corrente alternata occorre tenere presente lo spessore di penetrazione (9.86). Scegliere ad esempio un conduttore cilindrico con raggio confrontabile o addirittura maggiore dello spessore di penetrazione non comporta un efficiente aumento della sezione utile per la corrente, dato che la zona più interna del conduttore non è praticamente sede di densità di corrente. Per risolvere questo problema si usa allora suddividere il conduttore in più conduttori di minore sezione, isolati reciprocamente e trasposti nello spazio lungo i conduttori stessi. Soluzioni tipiche sono il cavo *Roebel*, fatto da più piattine, adatto per correnti elevate a frequenze industriali, e il cavo *Litz*, fatto da molti fili ritorti in più stadi, adatto per frequenze molto elevate, tipiche ad esempio delle apparecchiature di conversione statica dell'energia.

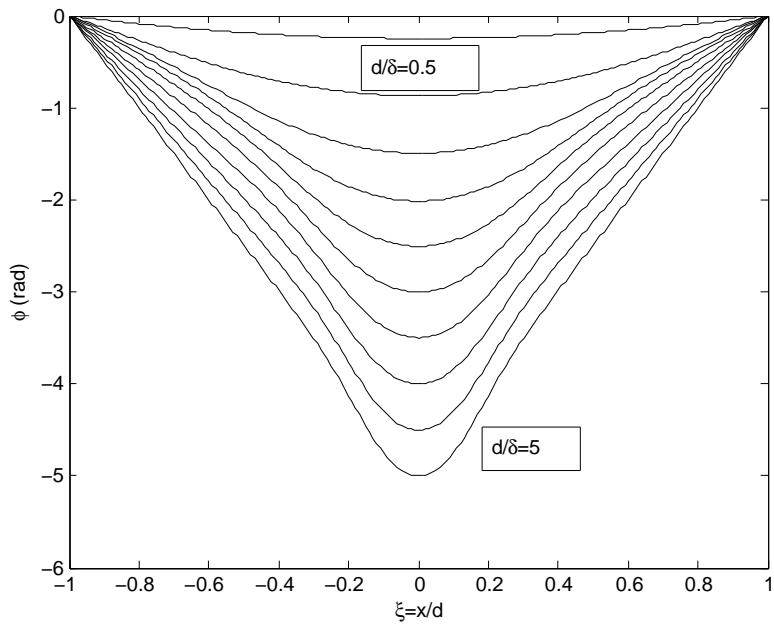


Figura 9.45: Andamento della fase di j in funzione di $\xi = x/d$ per d/δ variabile tra 0,5 e 5.

I conduttori isolati sono collegati tra loro elettricamente solo alle estremità di ingresso e d'uscita del conduttore, in modo da non permettere lo scambio di correnti tra essi. L'effetto delle trasposizioni è tale da rendere *mediamente equivalenti* dal punto di vista geometrico i singoli conduttori in parallelo, rendendo pertanto minimi gli effetti che tendono a concentrare le linee di corrente su alcuni di essi.

Appendice A

Elementi di topologia e geometria

In questa sezione sono riportate alcune nozioni di topologia di frequente applicazione o utilizzate nelle presenti dispense.

A.1 Definizioni

Una regione \mathcal{D}^n dello spazio è un *dominio di dimensione n* se esiste un'applicazione lineare biunivoca \mathcal{C} che associa ad ogni suo punto una n -pla di numeri reali chiamati *coordinate* del punto: $\mathcal{C} : \mathcal{D}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, dove \mathbb{R}^n è l'insieme delle n -ple di numeri reali. Assumeremo che nel dominio sia stata definita una *metrica*, ovvero un modo per definire le distanze tra i punti vicini e gli angoli tra le linee incidenti. Supporremo inoltre che il dominio sia *regolare*, ovvero le coordinate dei punti siano funzioni continue e derivabili con derivata continua.

Chiameremo *intorno* \mathcal{I} di un punto P_0 di \mathcal{D}^n un insieme di punti P posti a distanza d inferiore ad un assegnato valore d_0 :

$$\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{D}^n | d(P_0, P) < d_0\} \quad (\text{A.1})$$

Un punto P è detto *interno* ad un dominio \mathcal{D}^n se appartiene a \mathcal{D}^n e se esiste almeno un intorno di P formato solo da punti di \mathcal{D}^n .

Chiameremo *frontiera* di un dominio \mathcal{D}^n un insieme di punti $\partial\mathcal{D}^n$ tali che, per ogni punto di essa esiste almeno un intorno che comprende punti del dominio e punti non appartenenti ad esso. Un dominio è detto *chiuso* se contiene la propria frontiera.

A.2 Costruzione dei domini ed orientazione interna

Ogni dominio di dimensione $n + 1$ può essere costruito in modo induttivo a partire da domini di dimensione n che ne diventano la frontiera, e ricevere un'orientazione, detta *orientazione interna*, secondo lo schema seguente.

Il dominio di partenza è il dominio zero-dimensionale: il punto P . Per esso si può definire l'orientazione interna associando un verso uscente o entrante nel punto, che diventa orientato rispettivamente come *sorgente* o *pozzo* (Fig. A.1 (a) e (b)).

Il dominio monodimensionale, una linea l , può essere costruito a partire da due punti e considerando una linea regolare dello spazio che ha questi due punti come estremi, e quindi come frontiera. Scegliendo per uno dei due punti l'orientazione interna come pozzo e per l'altro come sorgente, la linea riceve naturalmente un verso di percorrenza che ne costituisce l'orientazione interna (Fig. A.1 (c) e (d)). Se i due punti P_1 e P_2 sono coincidenti si considera una linea chiusa. In tal caso la linea è un dominio monodimensionale privo di frontiera.

Il dominio bidimensionale aperto, una superficie S , può essere costruito considerando una superficie delimitata da due linee aperte distinte, che congiungono gli stessi punti, orientate internamente in modo opposto. Tali linee diventano la frontiera del dominio formando una linea chiusa orientata. Tale orientazione interna definisce naturalmente l'orientazione interna della superficie (Fig. A.1 (e) e (f)).

Se invece si considera un dominio bidimensionale chiuso, ovvero una superficie chiusa, sparisce la sua frontiera. Possiamo tuttavia estendere l'orientazione interna anche a questo dominio considerandolo come limite di una superficie aperta con una frontiera che si contrae progressivamente fino ad un punto P attorno al quale viene scelto un verso di percorrenza (Fig. A.1 (g) e (h)).

Infine, nel caso di un dominio tridimensionale, risulta naturale associare al volume V racchiuso l'orientazione interna della superficie chiusa che ne è frontiera (ancora Fig. A.1 (g) e (h)).

A.3 Costruzione dei domini duali

La definizione di dualità dei domini data in questa sede è molto generale. Ipotesi più restrittive vengono adottate in applicazioni più specialistiche, quali ad esempio il metodo numerico delle celle.

Considerando una regione dello spazio n -dimensionale, in essa si possono trovare dei domini di dimensione $n' < n$. Ad esempio, possiamo considerare la distribuzione di una carica elettrica su una lamiera metallica ($n' = 2$) all'interno di uno spazio tridimensionale ($n = 3$), oppure possiamo considerare la corrente elettrica in un filo di sezione trascurabile, assimilato ad un dominio monodimensionale ($n' = 1$).

In uno spazio di dimensione n consideriamo un dominio \mathcal{D} , di dimensione $n' \leq n$, che chiameremo *dominio primale*. Chiameremo *dominio duale* $\tilde{\mathcal{D}}$ un dominio avente dimensione $n - n'$ ed intersezione non nulla con il dominio \mathcal{D} tale che, muovendo nello spazio il dominio \mathcal{D} rispetto a $\tilde{\mathcal{D}}$ in modo che l'intersezione $\tilde{\mathcal{D}} \cap \mathcal{D}$ percorra tutto $\tilde{\mathcal{D}}$, si generi un dominio di dimensione n .

Si noti che la relazione di dualità è simmetrica, ovvero, se il dominio \mathcal{D}_1 è duale del dominio \mathcal{D}_2 , è vero anche che il dominio \mathcal{D}_2 è duale del dominio \mathcal{D}_1 .

A.3.1 Domini duali in uno spazio tridimensionale

Esaminiamo innanzitutto il caso di uno spazio tridimensionale ($n = 3$) in cui sia assegnata una superficie primale S ($n' = 2$). Elemento duale di questa superficie è ogni linea l che interseca

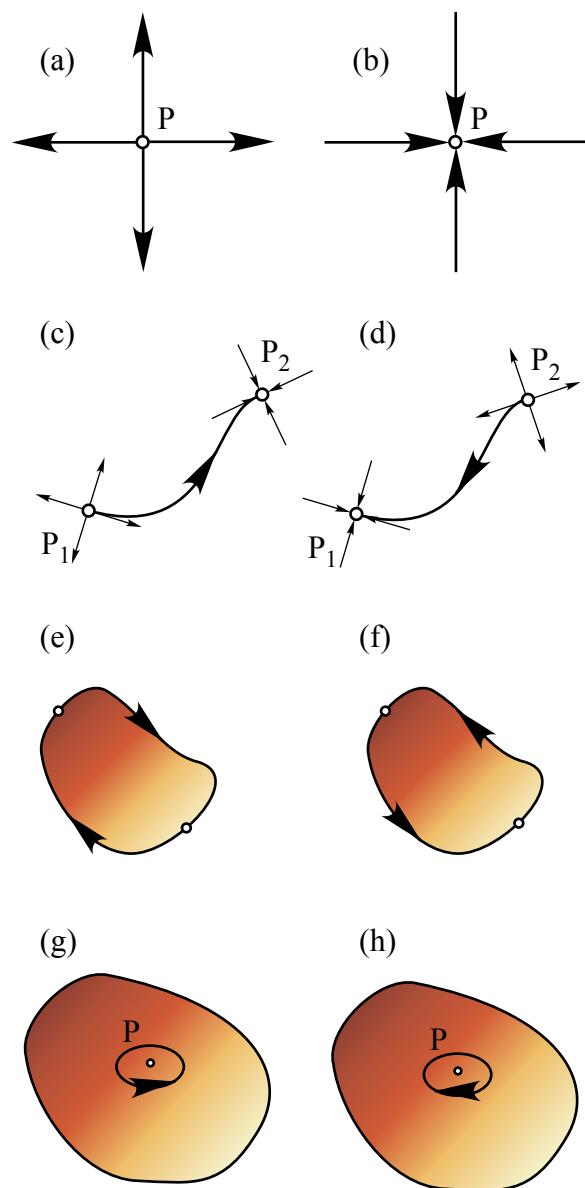


Figura A.1: Orientazione interna: del punto orientato (a): come sorgente o (b) come pozzo; della linea (c), (d); della superficie aperta (e), (f); di una superficie chiusa e di un volume (g), (h).

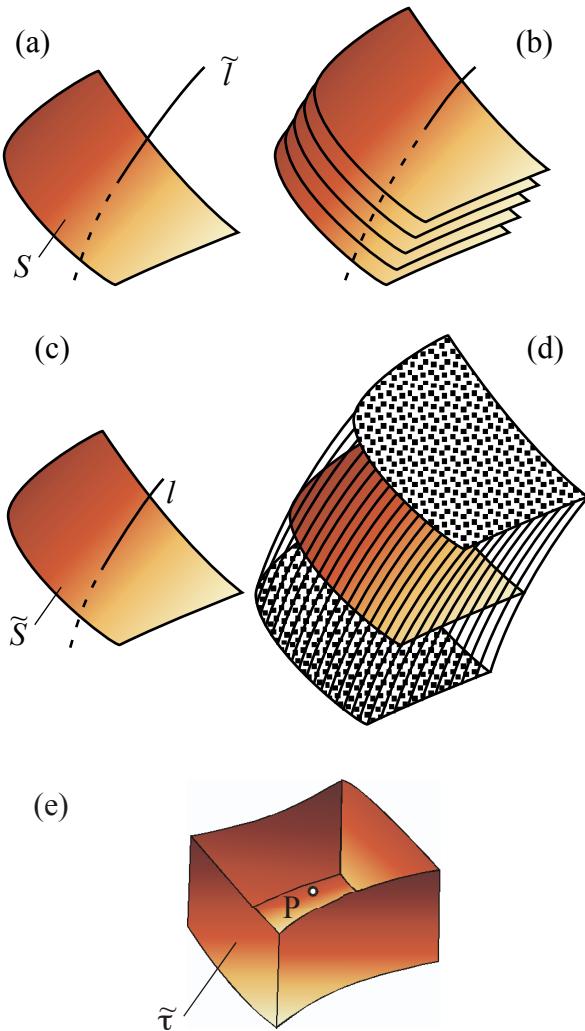


Figura A.2: Domini duali in uno spazio tridimensionale (a) Superficie S e linea duale \tilde{l} . (b) Movimento della superficie lungo la linea duale e generazione di un volume. (c) Linea l e superficie duale \tilde{S} . (d) Movimento della linea sulla superficie duale e generazione di un volume. (e) Punto P e volume duale $\tilde{\tau}$.

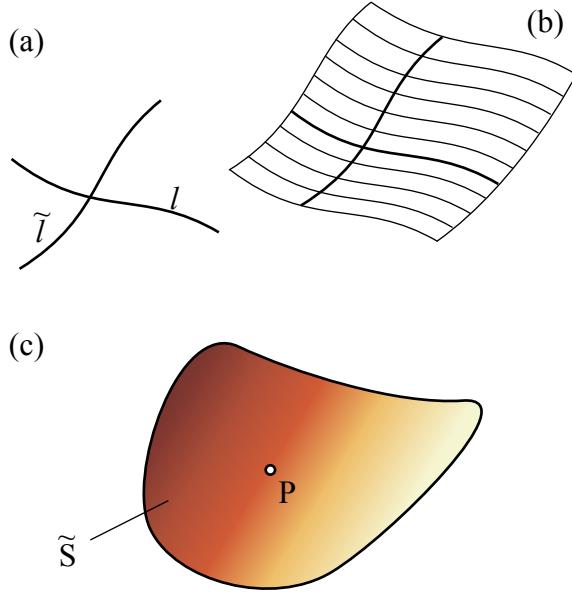


Figura A.3: Domini duali in uno spazio bidimensionale (a) Linea l e linea duale \tilde{l} . (b) Movimento della linea lungo la linea duale e generazione di una superficie. (c) Punto P e superficie duale \tilde{S} .

la superficie in uno punto. Spostando la superficie lungo la linea si genera un volume (Fig. A.2 (a) e (b)).

Nel caso in cui sia assegnata una linea primale l ($n' = 1$) il dominio duale è ogni superficie \tilde{S} attraversata dalla linea in un punto. Spostando la linea sui vari punti di intersezione della superficie si genera un volume (Fig. A.2 (c) e (d)).

Nel caso di un punto P ($n' = 0$) il dominio duale è ogni volume $\tilde{\tau}$ che contiene il punto (Fig. A.2 (e)). Spostando il punto nel dominio duale si genera un volume, che coincide con il volume duale.

Infine, nel caso di un volume V ($n' = 3$) il dominio duale è ogni punto \tilde{P} contenuto nel volume. In questo caso il volume non si sposta, essendo l'elemento duale privo di dimensioni.

A.3.2 Domini duali in uno spazio bidimensionale

Nel caso di uno spazio bidimensionale ($n = 2$) in cui sia assegnata una linea l ($n' = 1$) avremo, come elemento duale, ogni linea \tilde{l} che interseca la linea in uno punto. Spostando la linea primale lungo la linea duale si genera una superficie (Fig. A.3 (a), (b)).

Considerando ora un punto P ($n' = 0$), il suo elemento duale sarà una superficie \tilde{S} che lo contiene (Fig. A.3 (c)). Spostando il punto nel dominio duale si genera una superficie che coincide con la superficie duale.

Infine, nel caso di una superficie ($n' = 1$) il dominio duale è ogni punto \tilde{P} contenuto nella superficie.

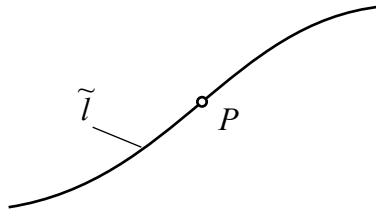


Figura A.4: Domini duali in uno spazio monodimensionale: punto P e linea duale \tilde{l} .

A.3.3 Domini duali in uno spazio monodimensionale

Nel caso di uno spazio monodimensionale ($n = 1$) in cui sia assegnato un punto P ($n' = 0$) avremo, come elemento duale, ogni linea \tilde{l} che lo contiene. Spostando il punto lungo la linea si genera una linea coincidente con la linea duale (Fig. A.4).

Nel caso di una linea ($n' = 1$) il dominio duale è ogni punto \tilde{P} appartenente alla linea.

A.4 Orientazione esterna dei domini

In uno spazio ad n dimensioni, ogni dominio può essere orientato in modo univoco anche assegnando ad esso l’orientazione interna dell’elemento duale corrispondente. Tale orientazione, denominata *orientazione esterna* non dipende perciò solo dall’elemento considerato ma anche dall’elemento duale corrispondente, la cui natura, a sua volta, dipende dal numero di dimensioni dello spazio in cui si lavora.

In uno spazio tridimensionale l’orientazione esterna del volume corrisponde all’orientazione interna del punto duale. Il volume avrà quindi un’orientazione uscente o entrante, a seconda se il punto duale è orientato come sorgente o come pozzo (Fig. A.5 (a)).

Una superficie invece avrà orientazione corrispondente alla linea duale, che definirà su di essa due *pagine* o facce (Fig. A.5 (b)).

Una linea avrà un’orientazione corrispondente all’orientazione interna della superficie duale, che determinerà quindi sulla linea un verso di rotazione attorno ad essa (Fig. A.5 (c)).

Infine, un punto avrà orientazione corrispondente al volume duale, che definirà un verso di rotazione attorno al punto (Fig. A.5 (d)).

Considerando ora uno spazio bidimensionale, una superficie avrà l’orientazione esterna corrispondente all’orientazione interna del punto duale che, essendo orientato come pozzo o sorgente, definirà un verso uscente o entrante dal contorno della superficie (Fig. A.6 (a)).

Una linea avrà invece un’orientazione esterna corrispondente all’orientazione interna della linea duale, che definirà pertanto un verso di attraversamento della linea stessa (Fig. A.6 (b)).

Infine, un punto avrà un’orientazione esterna corrispondente all’orientazione interna della superficie duale, che definirà pertanto un verso di percorrenza attorno al punto stesso (Fig. A.6 (c)).

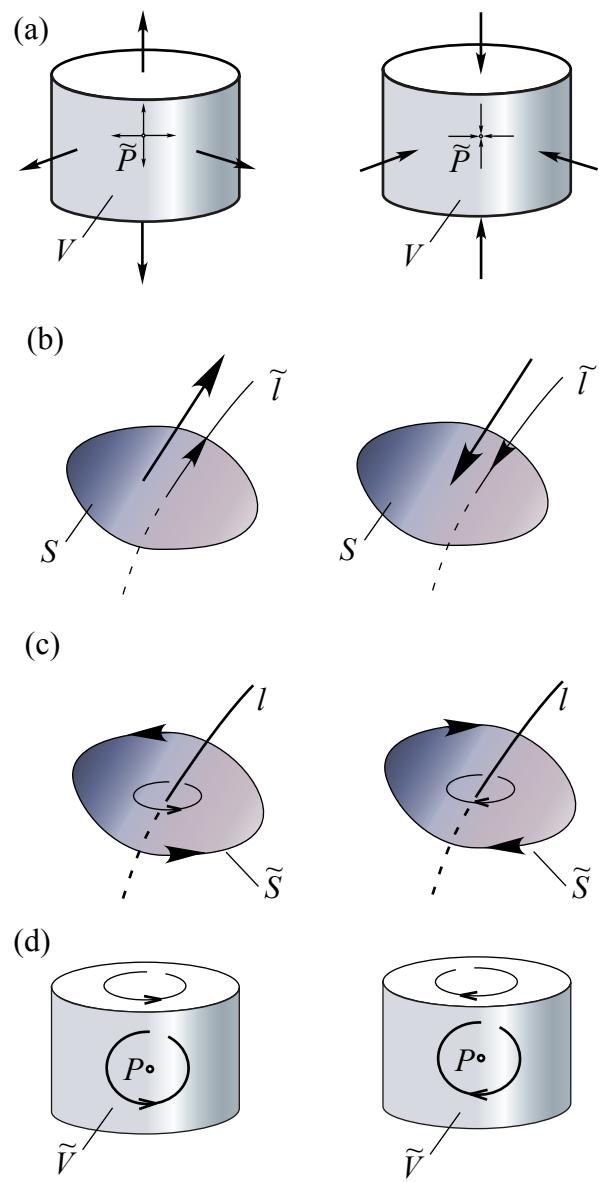


Figura A.5: Orientazione esterna in uno spazio tridimensionale: (a) del volume, (b) della superficie, (c) della linea, (d) del punto.

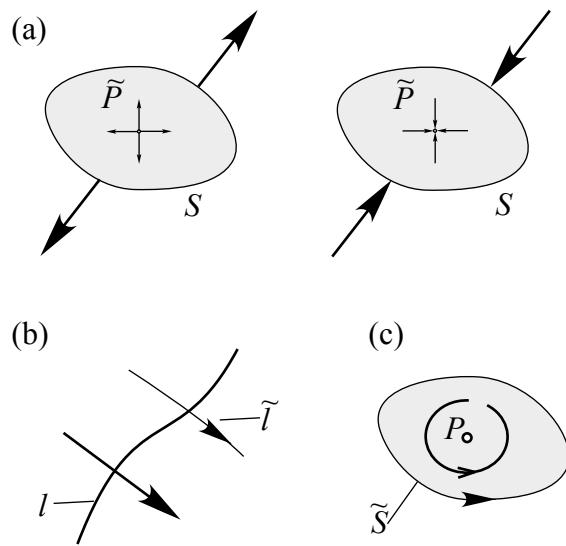


Figura A.6: Orientazione esterna in uno spazio bidimensionale: (a) della superficie, (b) della linea, (c) del punto.

Considerando infine uno spazio monodimensionale, una linea avrà l'orientazione esterna corrispondente all'orientazione interna del punto duale che, essendo orientato come pozzo o sorgente, definirà un verso uscente o entrante da *entrambi gli estremi della linea* (Fig. A.7 (a)).

Un punto avrà invece un'orientazione esterna corrispondente all'orientazione interna della linea duale, che definirà pertanto un verso di *attraversamento del punto* stesso (Fig. A.7 (b)).

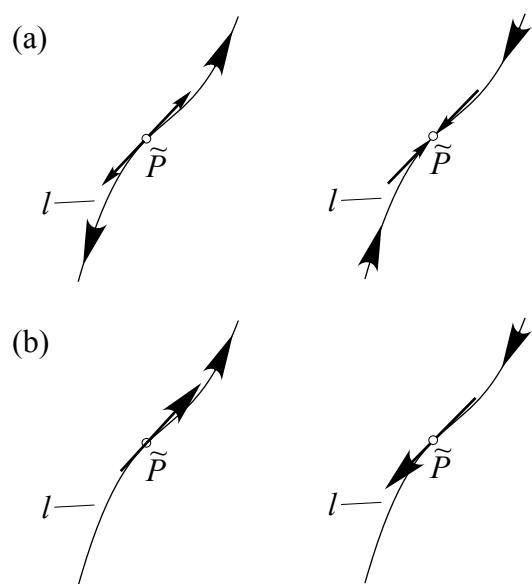


Figura A.7: Orientazione esterna in uno spazio monodimensionale: (a) della linea, (b) del punto.

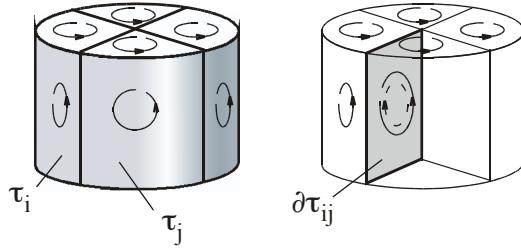


Figura A.8: Suddivisione di un volume orientato internamente in più sottovolumi dotati di orientazione interna congruente.

A.5 Suddivisione dei domini

Per effettuare operazioni di somma, integrazione o passaggio al limite di una grandezza definita su un dominio \mathcal{D} , può essere talvolta necessario suddividere il dominio in più sottodomini \mathcal{D}_i disgiunti, tali che $\mathcal{D} = \bigcup_i \mathcal{D}_i$, di cui si deve definire l'orientazione. La cosa più naturale è mantenere per ciascuno di questi sottodomini un'orientazione congruente con il dominio di partenza.

Se il dominio di partenza ha un'orientazione interna si osserva allora come il generico tratto $\partial\mathcal{D}_{ij}$ di frontiera comune ai sottodomini \mathcal{D}_i e \mathcal{D}_j si veda attribuire due orientazioni interne opposte da parte dei due sottodomini. Ad esempio, in Fig. A.8 è riportato un volume τ orientato internamente, scomposto in più sottovolumi τ_i . Nella figura di destra si vede come la superficie $\partial\tau_{ij}$ abbia due orientazioni interne opposte attribuite dai due volumi τ_i e τ_j di cui è frontiera. Esaminando ora la superficie superiore del volume riportato in figura, considerata come elemento a se stante, si osserva lo stesso fatto per quanto riguarda la suddivisione di superfici, in cui le linee di frontiera tra sottosuperficie sono percorse in due modi opposti.

Se il dominio è dotato di orientazione esterna si procede allo stesso modo. Ad esempio, in Fig. A.9 è riportato un volume τ orientato esternamente, scomposto in più sottovolumi τ_i . Nella figura di destra si vede come la superficie $\partial\tau_{ij}$ abbia due orientazioni esterne opposte attribuite dai due volumi τ_i e τ_j di cui è frontiera. In Fig. A.9 (b) è visibile la suddivisione di una superficie \tilde{S} e sono evidenziate le due orientazioni esterne associate alla linea $\partial\tilde{S}_{ij}$. Infine, in Fig. A.9 (c) si vede come, nel caso della suddivisione di una linea \tilde{l} , il punto di frontiera $\partial\tilde{l}_{ij}$ riceva due orientazioni interne opposte da parte dei due tratti di linea adiacenti.

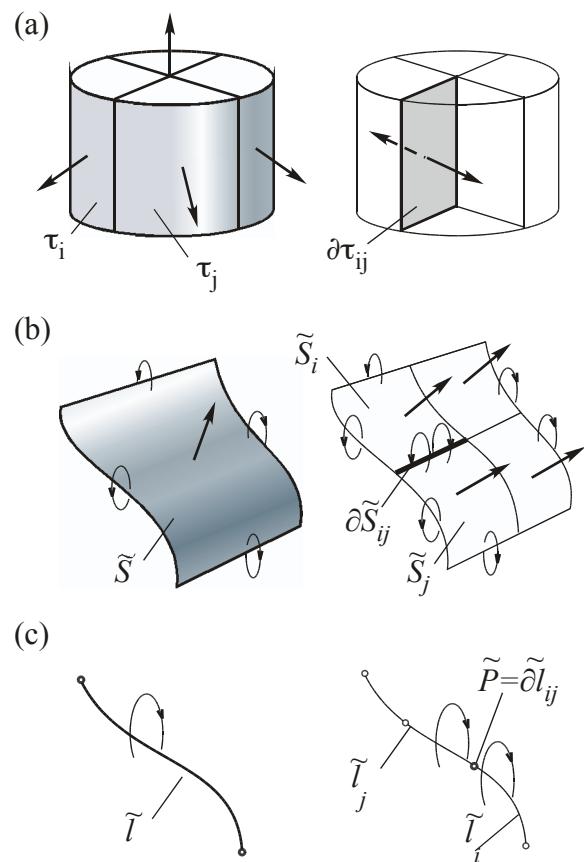


Figura A.9: Suddivisione domini orientati esternamente in più sottodomini dotati di orientazione esterna congruente in uno spazio tridimensionale. (a) volumi, (b) superfici, (c) linee.

Appendice B

Operatori differenziali vettoriali

Utilizzando i concetti riportati in appendice A sviluppiamo i concetti di *gradiente di una funzione, rotore di un vettore e divergenza di un vettore*. Queste tre entità possono venire definite in un modo unitario, come emergerà dall'esposizione seguente. Supponiamo che tutte le grandezze qui considerate, scalari e vettoriali, siano definite in un dominio regolare \mathcal{D} tridimensionale e siano ivi derivabili.

B.1 Gradiente di una funzione

Sia data una funzione $f(P) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e siano dati due punti A e B in \mathcal{D} tra i quali calcoliamo la differenza dei valori della funzione $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f(B) - f(A)$. Mostriamo che tale differenza può essere espressa mediante un integrale lungo una linea l in \mathcal{D} che collega A e B . Supponiamo la linea orientata internamente e i suoi punti estremi orientati internamente, uno come sorgente e uno come pozzo (Fig. B.1 (a)). Suddividiamo la linea in un certo numero di segmenti curvilinei l_k , tutti orientati in modo congruente, che identificano così un insieme di punti di frontiera $P_k = l_{k-1} \cap l_k$ intermedi lungo l (Fig. B.1 (b)), con $P_1 \equiv A$ e $P_N \equiv B$. La differenza della funzione Δf può essere così riscritta:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{N-1} f(P_{k+1}) - f(P_k).$$

In questa somma ogni punto intermedio P_k compare due volte e dà contributi opposti. Gli estremi invece compaiono una sola volta. Moltiplichiamo e dividiamo ora il generico addendo di questa somma per la lunghezza l_k del segmento corrispondente:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f(P_{k+1}) - f(P_k)}{l_k} l_k$$

Per $N \rightarrow \infty$ e $\max\{l_k\} \rightarrow 0$ questa somma diventa un integrale lungo la linea orientata da A a B :

$$\Delta f = \int_{A,l}^B \frac{\partial f(P)}{\partial l} dl. \quad (\text{B.1})$$

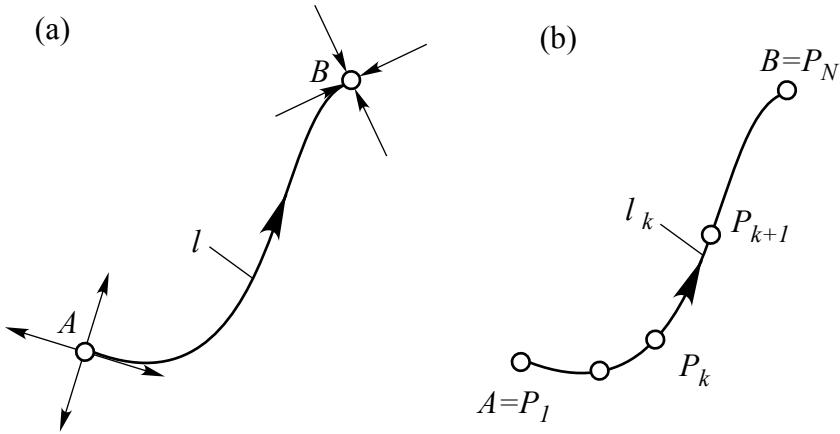


Figura B.1: Gradiente di una funzione. (a): linea l orientata internamente tra due estremi in \mathcal{D}
(b): Suddivisione della linea in tratti separati da punti di frontiera intermedi.

La funzione integranda nella B.1 è la derivata della funzione f nella direzione tangente alla linea nel punto in esame. Essa è *per definizione* la proiezione del gradiente di f lungo la direzione tangente alla linea:

$$\text{grad } f(P) \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(P)}{\partial l} dl \quad (\text{B.2})$$

dove \mathbf{u}_t è il versore tangente alla linea nel punto P . Avremo, in conclusione:

$$f(B) - f(A) = \int_{A,l}^B \text{grad } f \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{B.3})$$

Esaminiamo ora la grandezza $\text{grad } f \cdot d\mathbf{l}$: essa è un prodotto scalare, pertanto la grandezza $\text{grad } f$ deve essere anch'essa un vettore, come $d\mathbf{l}$ ¹. In un assegnato punto P dello spazio, al variare dell'orientazione della linea che passa per esso, si determina una diversa componente del gradiente. Si noti inoltre come tale definizione del gradiente non dipenda dal sistema di coordinate scelto.

Le tre componenti del gradiente possono essere trovate considerando la derivata direzionale di f lungo tre direzioni ortogonali. A differenza della definizione del gradiente sopra data, l'espressione di tali derivate dipende dal sistema di coordinate scelto. Ad esempio, *in coordinate cartesiane* x, y, z si ha:

$$\text{grad } f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{B.4})$$

¹A differenza di questo versore, il vettore $\text{grad } f$ si trasforma in modo inverso al variare del sistema di coordinate, è cioè un *vettore covariante*.

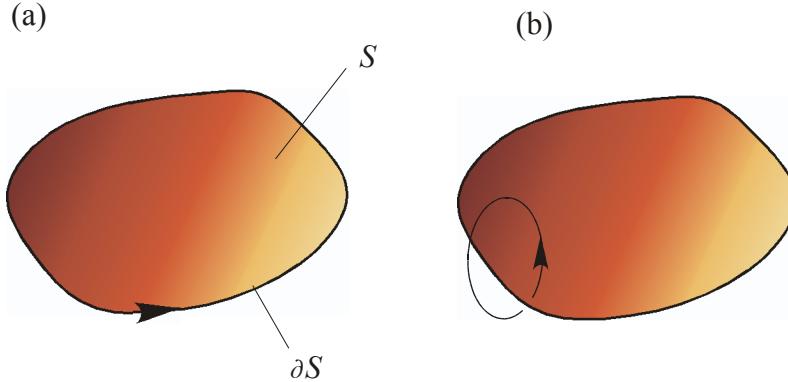


Figura B.2: Rotore di un vettore. Linea chiusa di integrazione orientata (a) internamente, (b) esternamente.

B.2 Rotore di un vettore

Sia data una funzione vettoriale $\mathbf{A}(P) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di cui si calcola la circolazione lungo una linea chiusa l in \mathcal{D} (Fig. B.2):

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Mostriamo che tale integrale può essere espresso anche come un integrale esteso ad una superficie S in \mathcal{D} di cui l è il contorno: $l \equiv \partial S$.

Iniziamo suddividendo la superficie S in due superfici S_1 e S_2 , tali che $S_1 \cup S_2 = S$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (Fig. B.3). Si identificano in tal modo due linee di frontiera esterne ∂S_{11} e ∂S_{22} , corrispondenti rispettivamente a S_1 e S_2 , e una linea di frontiera in comune ∂S_{12} (Fig. B.3). Calcolando ora la circolazione complessiva associata alle due linee chiuse come somma dei loro contributi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\partial S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\partial S_{11}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\partial S_{12}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_t d\mathbf{l} - \\ &\quad \int_{\partial S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\partial S_{22}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma \end{aligned}$$

infatti, il tratto di frontiera in comune ∂S_{12} viene considerato due volte, con orientazioni opposte (vedi sez. A.5) e dà quindi contributo complessivamente nullo.

Si può pertanto generalizzare la procedura, suddividendo S in N superfici tali che $\bigcup_i S_i = S$ e $S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i, j$. Inoltre, moltiplicando e dividendo il generico addendo per l'area della superficie ad esso corrispondente, si ottiene:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \int_{\partial S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N \frac{\int_{\partial S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{S_i} S_i.$$

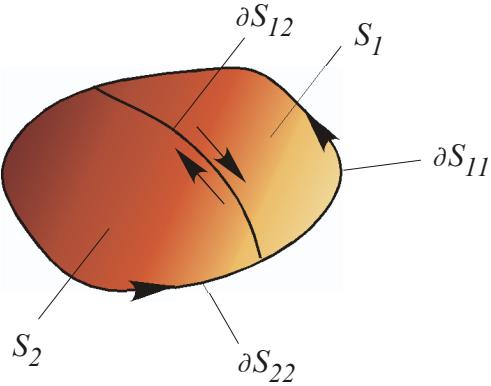


Figura B.3: Rotore di un vettore. Superficie di integrazione suddivisa in due superfici orientate internamente in modo concorde.

Quando $N \rightarrow \infty$ e $\max\{\partial S_i\} \rightarrow 0$ il denominatore e il numeratore della frazione in questa espressione tendono a zero e la sommatoria si trasforma in un integrale di superficie. Il limite cui tende la frazione in tali condizioni è *per definizione* la proiezione del rotore di \mathbf{A} lungo la direzione normale alla superficie:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(P) \cdot d\mathbf{S} \stackrel{def}{=} \lim_{S \rightarrow P} \frac{\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot dl}{S} dS. \quad (\text{B.5})$$

Avremo pertanto:

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot dl = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{B.6})$$

Tale espressione, qui ottenuta direttamente in base alla definizione di rotore, è l'enunciato del *teorema di Stokes*.

Esaminiamo ora la grandezza $\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$: essa è un prodotto scalare, pertanto la grandezza $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ deve essere anch'essa un vettore, come $d\mathbf{S}$. In un assegnato punto P dello spazio, al variare dell'orientazione della superficie che passa per esso, si determina una diversa componente del rotore. Si noti inoltre come, anche in questo caso, la definizione non dipenda dal sistema di coordinate scelto.

Le tre componenti del rotore possono essere trovate considerando la circolazione di \mathbf{A} lungo il contorno di tre aree infinitesime perpendicolari a tre direzioni ortogonali, ottenendo un'espressione che dipende dal sistema di coordinate scelto. Ad esempio, *in coordinate cartesiane* x, y, z

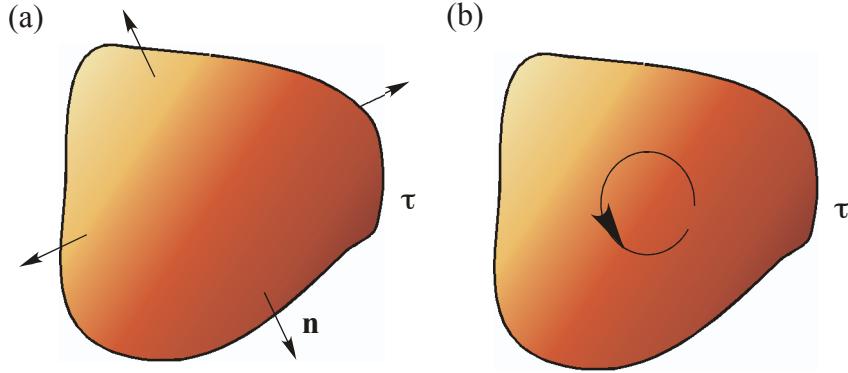


Figura B.4: Divergenza di un vettore. Volume finito di integrazione orientato (a) internamente, (b) esternamente.

si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A}_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \mathbf{A}_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \operatorname{rot} \mathbf{A}_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Se, nel dominio, si ha $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, si dice che il vettore \mathbf{A} è irrotazionale.

B.3 Divergenza di un vettore

Sia data una funzione vettoriale $\mathbf{A}(P) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di cui si calcola il flusso su una superficie chiusa $\partial\tau$ che racchiude un volume τ in \mathcal{D} (Fig. B.4):

$$\varphi = \int_{\partial\tau} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Mostriamo che tale integrale può essere espresso anche come un integrale esteso al volume racchiuso. Iniziamo suddividendo il volume τ in due volumi τ_1 e τ_2 , tali che $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau$ e $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$ (Fig. B.5). Si identificano in tal modo due superfici di frontiera esterne $\partial\tau_{11}$ e $\partial\tau_{22}$, corrispondenti rispettivamente a τ_1 e τ_2 , ed una superficie di frontiera in comune $\partial\tau_{12}$ (Fig. B.5). Calcolando ora il flusso complessivo associato ai due volumi come somma dei loro contributi

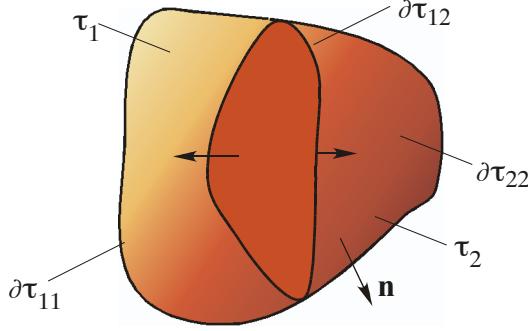


Figura B.5: Divergenza di un vettore. Volume finito di integrazione suddiviso in due volumi orientati esternamente in modo concorde.

possiamo scrivere:

$$\int_{\partial\tau_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial\tau_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\tau_{11}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial\tau_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial\tau_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial\tau_{22}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \varphi.$$

Infatti, la superficie di frontiera in comune $\partial\tau_{12}$ viene considerata due volte, con orientazioni opposte (vedi sez. A.5) e dà quindi contributo complessivamente nullo.

Si può pertanto generalizzare la procedura, suddividendo τ in N domini tali che $\bigcup_i \tau_i = \tau$ e $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset \quad \forall i, j$. Inoltre, moltiplicando e dividendo ciascun addendo per il volume corrispondente si ottiene:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\tau_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \frac{\int_{\partial\tau_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\tau_i} \tau_i, \quad (\text{B.8})$$

dove τ_i è il volume racchiuso dalla superficie generica $\partial\tau_i$. Quando $N \rightarrow \infty$ e $\max\{\partial\tau_i\} \rightarrow 0$ il denominatore e il numeratore della frazione nella B.8 tendono a zero e la sommatoria si trasforma in un integrale di volume. Il limite cui tende la frazione in tali condizioni è la *divergenza* del vettore:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \rightarrow P} \frac{\int_{\partial\tau} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\tau} d\tau \quad (\text{B.9})$$

Avremo pertanto:

$$\int_{\partial\tau} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau \quad (\text{B.10})$$

Tale espressione è l'enunciato del *teorema della divergenza, o di Ostrogradskij*.

Esaminiamo ora la grandezza $\operatorname{div} \mathbf{A}$: essa è apparentemente scalare, in quanto il risultato dell'integrale è uno scalare e non figurano prodotti scalari tra vettori. In realtà l'elemento di volume $d\tau$ dipende dal sistema di coordinate scelto, assumendo espressioni diverse per i diversi sistemi di coordinate, pertanto non è una grandezza scalare. Di conseguenza, essendo il prodotto $\operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$ scalare, anche la divergenza non può essere scalare.² Si noti comunque come, anche in questo caso, la definizione non dipenda dal sistema di coordinate scelto.

La divergenza può essere calcolata considerando il flusso di \mathbf{A} attraverso un parallelepipedo infinitesimo avente le facce parallele ai tre piani coordinati ortogonali. Ad esempio, *in coordinate cartesiane* x, y, z si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{B.11})$$

Se, nel dominio, si ha $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, si dice che il vettore \mathbf{A} è solenoidale.

B.4 Campi vettoriali conservativi e il potenziale scalare

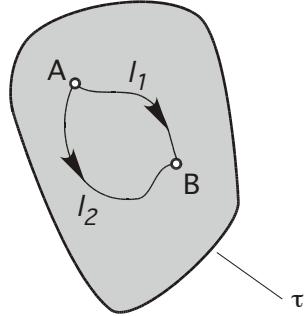


Figura B.6: Coppia di punti nel dominio uniti da due diverse linee.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$ di qualunque natura, definito in una regione τ dello spazio, spesso si considera la sua circolazione lungo un percorso l di estremi A e B :

$$\Gamma = \int_{A,l}^B \mathbf{A}(P) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.12})$$

In generale tale circolazione, anche a parità di estremi, dipende dal percorso seguito. Esiste tuttavia un importante caso in cui tale dipendenza non è presente e l'integrale dipende solo dagli estremi. Un campo vettoriale viene detto *conservativo* in una regione τ dello spazio se la sua circolazione compiuta *lungo ogni percorso* tutto interno al dominio dipende solo dai suoi estremi e non dal percorso stesso, qualunque sia la coppia di estremi prescelta (Fig. B.6).

²La divergenza di un vettore e l'elemento di volume sono dei casi particolari di *trivettore*.

In modo equivalente, si può dire che un campo vettoriale è conservativo in una regione se è nulla la circolazione compiuta lungo ogni percorso chiuso completamente contenuto nel dominio (fig. B.7).

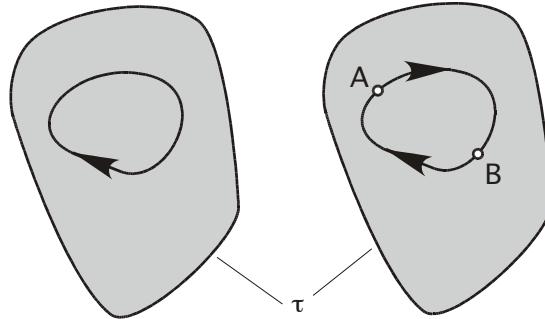


Figura B.7: Una linea chiusa (sinistra) può essere scomposta in due linee aperte orientate discordemente (destra).

Si sottolinea il fatto che la definizione di conservatività è sempre associata alla definizione di una regione dove il campo vettoriale è conservativo. Tale regione può benissimo essere l'intero spazio ma, talvolta, può essere limitata. Consideriamo ad esempio il caso di un vettore non nullo, uniforme in una regione τ_1 e nullo all'esterno (fig. B.8 sinistra). È immediato verificare che, *in* τ_1 tale campo vettoriale è conservativo. Se ora si considera una regione τ_2 più grande, che include τ_1 (fig. B.8 destra), si nota che linee come l_2 , che si svolgono parzialmente in τ_1 e parzialmente all'esterno di esso, danno una circolazione non nulla.

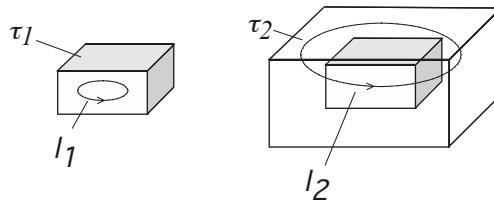


Figura B.8: Un campo vettoriale conservativo in un dominio può non esserlo più in un dominio più grande che lo include.

La definizione di conservatività sopra data non si presta direttamente a formulare un criterio di verifica pratica: non è ovviamente possibile verificare l'azzerarsi della circolazione per ogni linea chiusa nella regione d'interesse. Esiste un criterio molto più pratico basato su queste condizioni sufficienti:

- la regione è a connessione lineare semplice,
- il campo vettoriale è irrotazionale nella regione (sez. B.2).

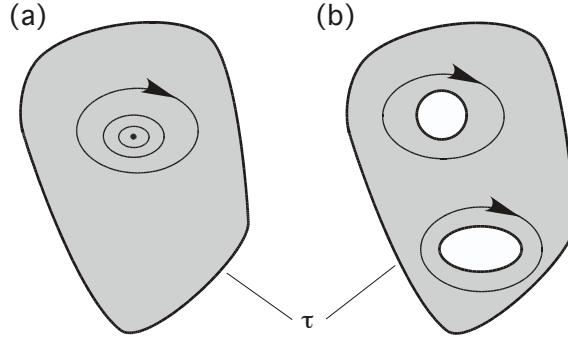


Figura B.9: (a): regione τ a connessione lineare semplice. (b): regione a connessione lineare multipla: in questo esempio la regione presenta due buchi, pertanto esistono due classi di linee non riconducibili ad un punto senza uscire dalla regione

Una regione è a connessione lineare semplice se ogni linea interna ad essa può essere ridotta ad un punto mediante una sua deformazione progressiva e continua senza rompere la linea e senza uscire dalla regione (Fig. B.9 (a)). Un campo vettoriale è irrotazionale in una regione se è nullo il suo rotore in ogni suo punto (vedi B.2). In tali ipotesi, risulta applicabile il teorema di Stokes (B.6) per ogni linea chiusa ∂S , contorno di una superficie S interna alla regione e si avrà:

$$\int_{\partial S} \mathbf{A}(P) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Se la regione non è a connessione lineare semplice, viene detta *moltiplicemente connessa*. In tal caso la regione presenta uno o più buchi dove non sono definiti né il vettore né, quindi, il suo rotore (Fig. B.9 (b)). Il teorema di Stokes non è quindi applicabile a nessuna delle linee che circondano i buchi della regione. Questo non vuol dire che la circolazione lungo tali linee sia necessariamente non nulla. Si può comunque facilmente dimostrare che tutte le linee topologicamente equivalenti, ovvero che circondano uno stesso buco, danno lo stesso valore di circolazione.

Quando un campo vettoriale è conservativo in una regione, si può definire in essa un *potenziale scalare* $\phi(P)$, funzione del posto, con cui esprimere immediatamente ogni circolazione del vettore nella regione. Essendo in questo caso la circolazione funzione solo dei due punti estremi, potremo infatti scrivere:

$$\int_{A,l}^B \mathbf{A}(P) \cdot d\mathbf{l} = \phi(A) - \phi(B) \quad \Rightarrow \quad \phi(B) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(A) - \int_{A,l}^B \mathbf{A}(P) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.14})$$

Il potenziale è pertanto sempre determinato a meno di una costante additiva, che non influenza il valore della circolazione in quanto in questa figurano sempre differenze di potenziale.

Ricordando poi quanto descritto in B.1, avremo che:

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \phi$$

Si osserva infine che, quando una regione τ è a connessione lineare multipla, è possibile suddividere rendere la regione nuovamente connessa mediante l'effettuazione di un numero di *tagli* pari alla molteplicità della connessione (Fig. B.10). Questa nuova regione τ' , ottenuta con i tagli, differisce dalla regione di partenza per l'esclusione dei punti delle superfici di taglio. Se il campo vettoriale è irrotazionale, in τ' si può definire un potenziale scalare $\phi(P)$ utilizzabile unicamente per le circolazioni al suo interno. Si osserva che, in tal caso, *valori diversi del potenziale possono essere presenti sulle due facce di ogni taglio*. Ciò tuttavia non implica che il gradiente del potenziale sia illimitato in corrispondenza del taglio, non essendo ammesse circolazioni che attraversano le superfici di taglio.

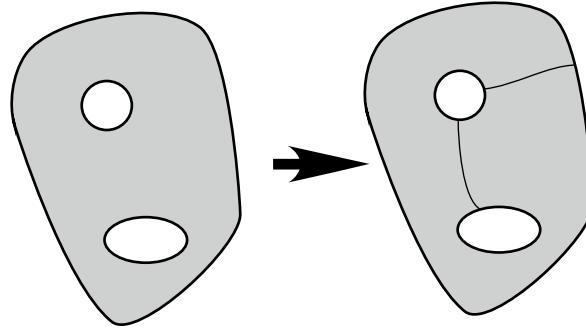


Figura B.10: Taglio di una regione molteplicemente connessa (sinistra) per ottenere una regione semplicemente connessa.

B.5 Campi vettoriali conservativi del flusso e il potenziale vettore

Dato un campo vettoriale $\mathbf{B}(P)$ di qualunque natura, definito in una regione τ dello spazio, spesso si considera il suo flusso su una superficie S delimitata da una linea chiusa $l = \partial S$ in τ :

$$\varphi = \int_S \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{B.15})$$

In generale tale flusso, anche a parità di contorno ∂S , dipende dalla superficie S .

Esiste tuttavia un importante caso in cui tale dipendenza non è presente e l'integrale dipende solo dal contorno della superficie. Un campo vettoriale viene detto *conservativo del flusso* in una regione τ dello spazio se il suo flusso su *ogni superficie* tutta interna al dominio dipende solo dal suo contorno e non dalla superficie stessa (Fig. B.11).

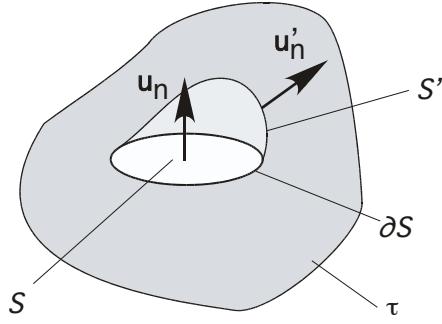


Figura B.11: Fusso di vettore su due superfici S e S' orientate esternamente aventi lo stesso contorno ∂S .

In modo equivalente, si può dire che un campo vettoriale è conservativo del flusso in una regione se è nullo il suo flusso su ogni superficie chiusa completamente contenuta nella regione (fig. B.12). Se consideriamo infatti ad esempio la superficie chiusa S , orientata esternamente col versore uscente \mathbf{u}_n uscente, formata da due superfici S' e S'' , orientate con i versori \mathbf{u}'_n e \mathbf{u}''_n , rispettivamente uscente ed entrante, si avrà:

$$\int_S \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S'} \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S}' = \int_{S''} \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S}'' \quad (\text{B.16})$$

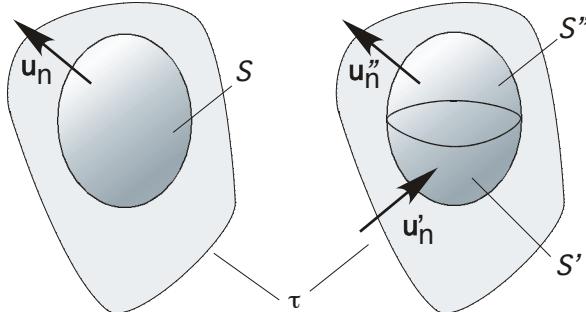


Figura B.12: Una superficie chiusa (sinistra) può essere scomposta in due superfici aperte orientate discordemente (destra) che si appoggiano sullo stesso contorno. Il flusso risultante sarà la differenza dei due flussi, data la differente orientazione.

Si sottolinea il fatto che, come nella definizione di conservatività, anche in questo caso la conservatività del flusso è sempre associata alla definizione di una regione dove il campo vettoriale è conservativo del flusso. Tale regione può benissimo essere l'intero spazio ma, talvolta, può essere limitata.

La definizione di conservatività del flusso sopra data non si presta direttamente a formulare un criterio di verifica pratica: non è ovviamente possibile in pratica verificare l'azzerarsi della circolazione per ogni linea chiusa nella regione d'interesse. Esiste un criterio molto più pratico basato su queste condizioni sufficienti:

- la regione è *a connessione superficiale semplice*,
- il campo vettoriale è solenoidale nella regione.

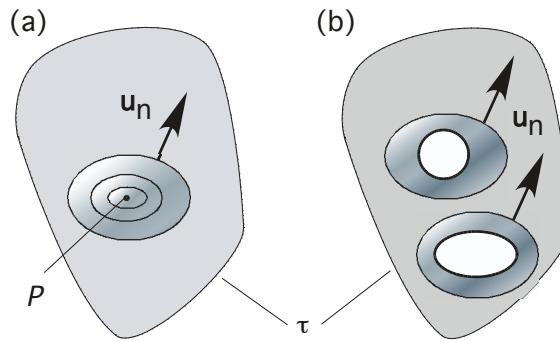


Figura B.13: (a): regione τ a connessione superficiale semplice. (b): regione a connessione superficiale multipla: in questo esempio la regione presenta due buchi, pertanto esistono due classi di superfici non riconducibili ad un punto senza uscire dalla regione

Una regione è a connessione superficiale semplice se ogni superficie interna ad essa può essere ridotta ad un punto mediante una sua deformazione progressiva e continua senza rompere la superficie e senza uscire dalla regione (Fig. B.13 (a)). Un campo vettoriale è solenoidale in una regione se è nulla la sua divergenza in ogni suo punto (sez. B.3). In tali ipotesi, risulta applicabile il teorema della divergenza (B.10) per ogni superficie chiusa $\partial\tau'$, contorno di una regione τ' interna alla regione e si avrà:

$$\int_{\partial\tau'} \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau'} \operatorname{div} \mathbf{B} d\tau = 0 \quad (\text{B.17})$$

Se la regione non è a connessione superficiale semplice, viene detta *molteplicemente connessa* (Fig. B.13 (b)). In tal caso la regione presenta uno o più buchi dove non sono definiti né il vettore né, quindi, la sua divergenza. Il teorema della divergenza non è quindi applicabile a nessuna delle superfici che circondano i buchi della regione. Questo non vuol dire che il flusso su tali superfici sia necessariamente non nullo. Si può comunque facilmente dimostrare che tutte le superfici topologicamente equivalenti, ovvero che circondano uno stesso buco, danno lo stesso valore di flusso.

Quando un campo vettoriale è conservativo del flusso in una regione, si dimostra che, in ipotesi abbastanza generali, si può definire in essa un *potenziale vettore A*, funzione del posto,

con cui esprimere immediatamente ogni flusso del vettore nella regione. Essendo in questo caso il flusso funzione solo del contorno, si potrà pertanto scrivere:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B}(P) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{A}(P) \cdot dl$$

Il potenziale vettore è pertanto sempre determinato a meno di una componente irrotazionale, che non influenza il valore della circolazione in quanto questa viene svolta sempre lungo una linea chiusa.

Ricordando poi quanto descritto in B.1, avremo che:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Si osserva infine che, quando una regione τ è a connessione superficiale multipla, è possibile suddividere rendere la regione nuovamente superficialmente connessa mediante l'effettuazione di un numero di *tagli* pari alla molteplicità della connessione (Fig. B.10). Questa nuova regione τ' , ottenuta con i tagli, differisce dalla regione di partenza per l'esclusione dei punti delle superfici di taglio. Se il campo vettoriale è solenoidale, in τ' si può definire un potenziale vettore $\mathbf{A}(P)$ utilizzabile unicamente per i flussi al suo interno.

B.5.1 Tubo di flusso di un vettore

Un importante concetto può essere sviluppato in relazione a un campo vettoriale \mathbf{A} conservativo del flusso in un dominio \mathcal{D} : quello del *tubo di flusso*. Un tubo di flusso può venir costruito in questo modo:

- Si consideri in \mathcal{D} una linea chiusa ∂S_A che delimita una superficie orientata S_A (Fig. B.14 (a))
- Poiché il vettore \mathbf{A} è solenoidale, non esistono pozzi né sorgenti del vettore, quindi si possono tracciare le *linee del vettore* che passano per tutti i punti P della linea chiusa ∂S_A (Fig. B.14 (b)).
- L'insieme di queste linee del vettore identifica una superficie laterale S_l (Fig. B.14 (c)) a cui il vettore \mathbf{A} è ovunque tangente.
- Si taglia la superficie laterale considerando un'altra superficie S_B , orientata come S_A , identificando un volume τ : il tubo di flusso di \mathbf{A} (Fig. B.14 (d))

Per costruzione è nullo il flusso del vettore uscente dalla superficie laterale pertanto, essendo il vettore conservativo del flusso, il flusso sulla superficie S_A (*superficie tappo* d'ingresso) è uguale al flusso sulla superficie S_B e su ogni superficie intermedia S orientata come le due superfici tappo. Il flusso del vettore è pertanto una grandezza associata all'intero tubo di flusso e cambia segno se si inverte l'orientazione delle superfici tappo e di ogni superficie intermedia.

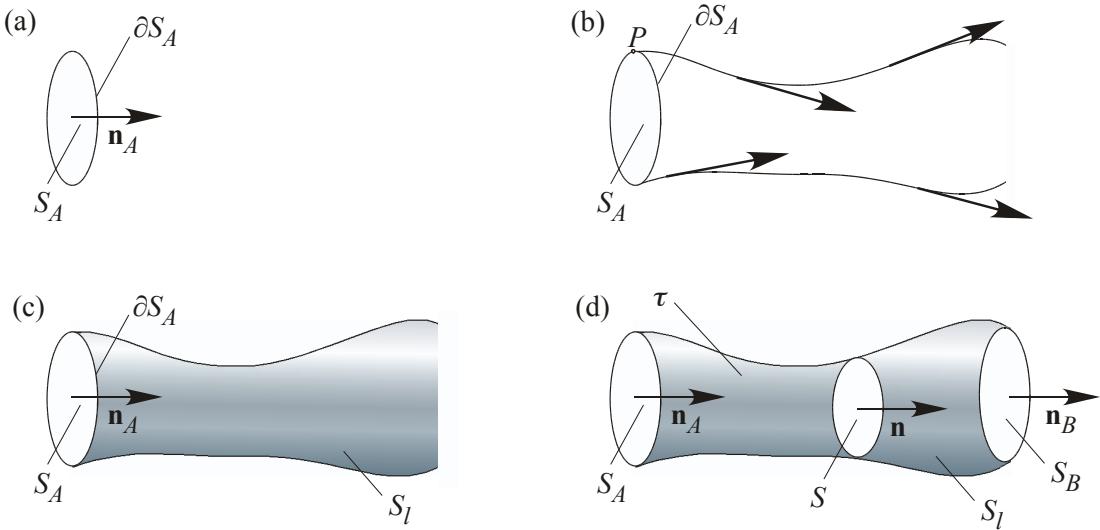


Figura B.14: Costruzione di un tubo di flusso.

B.6 Ortogonalità degli operatori differenziali vettoriali

Le definizioni di gradiente, rotore e divergenza sopra date consentono di ricavare direttamente due identità che esprimono l'*ortogonalità* di questi operatori differenziali. Tali identità non dipendono dal sistema di coordinate adottato.

Iniziamo considerando $\text{rot grad } f$. In base alla definizione di rotore (B.5), dobbiamo considerare la circolazione Γ del vettore $\mathbf{A} = \text{grad } f$ lungo una linea chiusa che, con il passaggio al limite B.5 viene ridotta ad un punto. Tuttavia la circolazione del gradiente lungo una linea chiusa è identicamente nulla, pertanto

$$\text{rot grad } f \equiv 0. \quad (\text{B.18})$$

Consideriamo ora $\text{div rot } \mathbf{A}$. In base alla definizione di divergenza (B.9), dobbiamo calcolare il flusso φ del vettore $\text{rot } \mathbf{A}$ attraverso una superficie chiusa $\partial\tau$ che, con il passaggio al limite, viene ridotta ad un punto. Tale flusso può essere espresso come la somma dei contributi delle due superfici aperte $\partial\tau_{11}$ e $\partial\tau_{22}$ in cui $\partial\tau$ può essere suddivisa da una qualsiasi linea chiusa Γ tracciata su $\partial\tau$ (Fig. B.15). Per il fatto che si sta considerando il rotore di un vettore, per la (B.6) possiamo esprimere i flussi associati alle due superfici mediante due circolazioni di \mathbf{A} sulla linea Γ con orientazioni opposte. La somma di tali circolazioni è ovviamente zero, il che prova che

$$\text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0. \quad (\text{B.19})$$

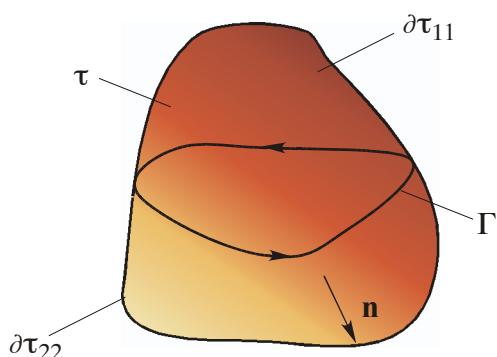


Figura B.15: Divergenza del rotore di un vettore di un vettore.

Appendice C

Algebra ed analisi vettoriale

In questo capitolo sono riportate alcune formule notevoli dell'analisi vettoriale, di frequente applicazione o utilizzate nelle presenti dispense.

Nelle formule seguenti f e g indicano due funzioni scalari delle coordinate, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} indicano generici vettori, ζ una generica variabile indipendente, diversa dalle coordinate e dal tempo, t è il tempo, \mathbf{v} è il vettore velocità, \mathbf{n} indica il versore normale ad una generica superficie S (se chiusa, uscente da essa), \mathbf{t} il versore tangente ad una generica linea l e dl il differenziale di lunghezza della curva, τ è un generico volume dello spazio e $\partial\tau$ la sua frontiera, infine ∇^2 è l'operatore di Laplace per uno scalare o una funzione. Tutti i vettori e le funzioni sono derivabili/integrabili nel dominio considerato quanto serve.

C.1 Algebra vettoriale

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (\text{C.1})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (\text{C.2})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{C.3})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] \mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{D} \quad (\text{C.4})$$

C.2 Operatori rotore, gradiente e divergenza

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{C.5})$$

$$\text{rot } (f \mathbf{A}) = \text{grad } f \times \mathbf{A} + f \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{C.6})$$

$$\text{rot grad } f = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \operatorname{grad} \left(\frac{A^2}{2} \right) \quad (C.8)$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (C.9)$$

$$\operatorname{grad} (fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \quad (C.10)$$

$$\operatorname{grad} |\mathbf{A}| = \frac{1}{2|\mathbf{A}|} \operatorname{grad} (|\mathbf{A}|^2) \quad (C.11)$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (C.12)$$

$$\operatorname{div} (f \mathbf{A}) = f \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{A} \quad (C.13)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (C.14)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad (C.15)$$

C.3 Operatore di Laplace

$$\nabla^2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \quad (C.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (C.17)$$

C.4 Derivate rispetto ad una variabile

$$\frac{d}{d\zeta} (f \mathbf{A}) = \frac{df}{d\zeta} \mathbf{A} + f \frac{d\mathbf{A}}{d\zeta} \quad (C.18)$$

$$\frac{d}{d\zeta} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\zeta} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{d\zeta} \quad (C.19)$$

$$\frac{d}{d\zeta} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\zeta} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{d\zeta} \quad (C.20)$$

$$\frac{df}{d\mathbf{n}} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n} \quad (C.21)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (C.22)$$

C.5 Integrali di volume, superficie e linea

$$\oint_{\partial\tau} f \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{grad} f \mathbf{d}\tau \quad (\text{C.23})$$

$$\oint_{\partial\tau} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} \mathbf{d}\tau \quad (\text{C.24})$$

$$\oint_{\partial\tau} \mathbf{A} \times \mathbf{n} dS = - \int_{\tau} \operatorname{rot} \mathbf{A} \mathbf{d}\tau \quad (\text{C.25})$$

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (\text{C.26})$$

$$\int_S \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_{\partial S} f dl \quad (\text{C.27})$$

$$\int_{\tau} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\tau = \oint_{\partial\tau} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (\text{C.28})$$

C.6 Derivate di integrali aventi il dominio dipendente dal tempo

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} f d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{C.30})$$

In questa formula S può essere una superficie aperta, avendo quindi due possibili versori normali ad essa. Tali versori devono essere gli stessi al primo e secondo membro. Se la superficie S è chiusa, il termine $\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{v})$ può essere omesso, perché dà contributo nullo.

$$\frac{d}{dt} \int_{P_1, l}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \mathbf{A}(P_2) \cdot \mathbf{t}(P_2) - \mathbf{A}(P_1) \cdot \mathbf{t}(P_1) + \frac{d}{dt} \int_{P_1, l}^{P_2} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right] \cdot \mathbf{t} dl \quad (\text{C.31})$$

In questa formula l può essere una linea aperta, di estremi P_1 iniziale e P_2 finale. Se la linea è chiusa, i termini fuori del segno di integrale scompaiono.

Indice analitico

Ampère (unità di misura), 7

Amperometro, 17

Anodo, 19

Armatura, 89

Auto e mutue

induttanze, 134

inertanze, 134

Campo

elettrico, 50

coulombiano, 23, 59

indotto, 50, 121

magnetico, 125

vettoriale

conservativo, 181

conservativo del flusso, 184

irrotazionale, 179, 183

solenoidale, 181, 186

Capacità

di un condensatore, 90

cilindrico, 93

piano, 91

parziali, 99

Caratteristica

di magnetizzazione, 130

Carica

dell'elettrone, 8

elettrica, 7

Circolazione

di un vettore

lungo una linea aperta, 181

lungo una linea chiusa, 177

Componente

irrotazionale, 74

laplaciana, 74

Condensatore, 89

Conducibilità

elettrica, 33

Conduttanza

elettrica, 32

Connessione

lineare

multipla, 183

semplice, 183

superficiale

multipla, 186

semplice, 186

Convenzione

del generatore, 27, 54

dell'utilizzatore, 27, 32, 90

Coulomb (unità di misura), 7

Densità

di carica

lineare, 93

Densità di

carica

lineare, 9

superficiale, 9

carica di polarizzazione

superficiale, 84

volumica, 84

corrente

di spostamento, 127

lineare, 11

superficiale, 11

volumica, 11

flusso

di cariche, 14

massa, 3

Dipoli

elettrici, 10

- Dipolo
 - elettrico, 83
- Dispersore di terra, 41
- Divergenza, 180
- Dominio
 - primale, 164
 - chiuso, 163
 - dello spazio, 163
 - duale, 164
 - frontiera di-, 163
- Effetto
 - Peltier, 57
 - Joule, 43
 - Seebeck, 56
- Equazione di
 - continuità della carica, 16
 - diffusione, 153
 - Helmoltz, 155
 - Laplace, 46, 74
 - Maxwell (1^a), 128
 - Maxwell (2^a), 121
 - Poisson, 46, 73
- Farad, 90, 99
- Faraday (esperienza di), 63
- Flusso
 - concatenato, 109
 - di un vettore
 - su una superficie chiusa, 184
- Forza
 - ponderomotrice di origine magnetica, 138
- Forza elettrica, 19
 - conservativa, 22
 - specifica, 19
 - generatrice, 49
 - mozionale, 50, 121, 138
- Forza elettromotrice, 51
 - mozionale, 119
 - trasformatorica, 119
- Generatore, 31, 52
- Gradiente, 176
- Grandezze
 - globali, 3
- Henry, 141
- Induttanze
 - differenziali, 136
- Induzione
 - elettrica, 65
 - nei conduttori, 63
 - magnetica, 109
- Inertanze
 - differenziali, 136
- Integrale di
 - tensione, 108
- Intensità di
 - corrente
 - filiforme, 13
 - superficiale, 13
 - volumica, 12
- Intorno, 163
- Lavoro
 - di magnetizzazione, 129
 - elettrico
 - specifico, 20
 - infinitesimo, 20
- Legge costitutiva, 5
- Legge di
 - Ohm, 6
 - Ampère, 123, 126
 - Ampère-Maxwell, 128
 - Continuità della carica el., 15
 - Coulomb, 7
 - Faraday-Neumann, 118, 137
 - Fourier, 6
 - Gauss, 66
 - Lenz, 111
 - rifrazione
 - delle linee di corrente, 45
- Magnetizzazione, 145
 - vettore, 145
- Materiale
 - conduttore, 33
 - ideale, 33

- dielettrico, 10, 33
- ideale, 33
- lineare, 32
- metallo, 10
- semiconduttore, 10
- superconduttore, 19, 33
- Metrica, 163
- Momento
 - elettrico, 80
- Morsetti, 17
- Ohm, 32
- Orientazione
 - di un dominio
 - esterna, 168
 - interna, 163
- di un vettore, 112
- Pila
 - Daniell, 56
- Polarizzazione, 10, 83
 - vettore, 83
- Potenza
 - elettrica
 - in un tubo di flusso, 25
 - specifica, 25, 43
- Potenziale
 - elettrico
 - assoluto, 22
 - coulombiano, 59
 - scalare, 183
 - elettrico, 22
 - vettore, 186
 - magnetico, 118
- Pozzo, 17
- Pressione
 - magnetica, 139
- Problema
 - di Dirichlet, 47
 - di Neumann, 47
 - misto, 47
- Resistenza
 - di terra, 42
- elettrica, 32
- interna, 53
- Resistività
 - elettrica, 33
- Resistore
 - cilindrico, 38
 - di forma generica, 36
 - filiforme, 37
 - sferico, 39
- Rigidità dielettrica, 10
- Rotore, 178
- Sorgente, 16
- Spessore di penetrazione, 155
- Spostamento elettrico, 65
- Superficie
 - tappo, 187
- Tasso, 4
- Tempo di rilassamento, 68, 79
- Tensiometro, 121
- Tensione
 - elettrica, 20
 - conservativa, 21
- Teorema
 - della divergenza, 180
 - di Stokes, 178
- Trasformazione
 - di Legendre, 130
- Tubo di flusso, 187
 - di \mathbf{J} , 16
- Variabile
 - di configurazione, 4
 - di sorgente, 4
 - energetica, 4
- Vettore
 - forza, 5
 - raggio, 3, 4
 - spostamento, 3
 - velocità, 4
- Voltmetro, 28
- Weber, 109