

# **Campionamento, Sintesi ed Elaborazione dei Segnali Musicali (CSEDSM) dispense**

(ver.14 2014-02-04)

Nicola Bernardini



Except where otherwise noted, this work is licensed under  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Fondamentali</b>	<b>7</b>
2.1	Cosa sono i numeri complessi? . . . . .	7
2.2	Le scomposizioni in serie . . . . .	8
2.3	Altre proprietà dei numeri complessi . . . . .	8
2.4	Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40]) . . . . .	9
2.5	Rivisitando <i>nyquist</i> e <i>foldover</i> con i fasori complessi . . . . .	10
2.6	Il piano Z . . . . .	11
2.7	La trasformata <i>zeta</i> . . . . .	14
2.8	L'operazione di convoluzione . . . . .	14
2.8.1	Convoluzione e spettri . . . . .	16
<b>3</b>	<b>I filtri FIR</b>	<b>19</b>
3.1	Un filtro FIR semplice . . . . .	19
3.1.1	Dominio continuo di tempo . . . . .	19
3.1.2	Passaggio dal tempo continuo al tempo discreto . . . . .	20
3.2	Trasformata zeta applicata ai filtri FIR . . . . .	23
3.2.1	Ritardo e linearità . . . . .	23
3.3	Una collezione di trasformate zeta notevoli . . . . .	25
3.3.1	La trasformata zeta più semplice . . . . .	25
3.3.2	Un caso più interessante . . . . .	25
3.4	La risposta in fase . . . . .	27
3.5	Introduzione ai filtri comb inversi . . . . .	30
3.6	Introduzione alla progettazione di filtri FIR . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Filtri a feedback (IIR)</b>	<b>39</b>
4.1	Introduzione . . . . .	39
4.2	Risonanza e larghezza di banda . . . . .	41
4.2.1	Risonanza e larghezza di banda di un filtro . . . . .	41
4.3	Resons . . . . .	43
4.4	Per migliorare i reson: aggiungere gli zeri . . . . .	44
4.5	Filtri bi-quad (ellittici) . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Filtri a pettine (Comb)</b>	<b>45</b>
5.1	Implementazione <i>real-world</i> . . . . .	46
5.2	Analogia con le onde stazionarie . . . . .	46

<b>6</b>	<b>Filtri delle corde pizzicate</b>	<b>49</b>
6.1	Implementazione dei filtri delle corde pizzicate . . . . .	49

# 1 Introduzione

Queste sono le dispense dell'insegnamento di *Campionamento, Sintesi ed Elaborazione dei Segnali Musicali* (aka *CSEDSM*) tenuto da Nicola Bernardini nell'A.A 2012-2013 al Conservatorio "C.Pollini" di Padova e negli anni successivi al Conservatorio "S.Cecilia" di Roma.

Queste dispense sono tratte in larga parte da alcuni capitoli di *A Digital Signal Processing Primer* di Ken Steiglitz [Steiglitz, 1996] - integrati con spiegazioni supplementari laddove l'aspetto matematico è più complicato, e con materiali elaborati in classe dagli studenti nonché tratti da altri testi (cf. [Steiglitz, 1974, Parks and Burrus, 1987, Park, 2010, Shenoi, 2005]).



## 2 Fondamentali

### 2.1 Cosa sono i numeri complessi?

- qual'è il risultato dell'equazione  $x^2 + 1 = 0$ ?
- per trovare la soluzione a questa domanda i matematici hanno esteso il dominio dei numeri reali con i numeri *immaginari*, detti anche numeri *complessi*
- proprietà dei numeri complessi:
  - si tratta di numeri bidimensionali (costituiti di due parti, una parte reale e una parte *immaginaria*)
  - si possono immaginare quindi come numeri che invece di trovarsi su una retta si trovano su un piano
  - pertanto si perde la possibilità di *ordinarli* in maniera semplice (== non ha senso dire che “un numero complesso è più grande o più piccolo di un altro”)
  - operazioni sui numeri complessi:

**coniugazione** il *complesso coniugato* di un numero complesso è lo stesso numero con la parte immaginaria invertita:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \quad (2.1)$$

la moltiplicazione di un numero complesso con il suo complesso coniugato dà luogo a un numero reale che è il quadrato della parte reale sommato al quadrato della parte immaginaria

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + ixy - ixy = x^2 + y^2 \quad (2.2)$$

**addizione/sottrazione** si aggiungono e si sottraggono separatamente: parte reale con parte reale e parte immaginaria con parte immaginaria

**moltiplicazione** si moltiplicano come nella moltiplicazione di binomi, ricordando però che  $i^2 = -1$ :

$$a = x_1 + iy_1, \quad b = x_2 + iy_2 \quad a \times b = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2.3)$$

**divisione** le divisioni sono definite negli termini delle moltiplicazioni, moltiplicando entrambi i fattori per il complesso coniugato del denominatore:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (2.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad (2.5)$$

$$\frac{(x_1 + iy_1) \times (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \times (x_2 - iy_2)} = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left( \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(y_1x_2 + x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (2.7)$$

## 2.2 Le scomposizioni in serie

- come si calcolano al computer i valori di  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ , ecc.?
- si calcolano in forma approssimata *scomponendoli in serie*:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (2.8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.9)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2.10)$$

se si usano i numeri complessi, si ottiene la formula di Eulero:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad (2.11)$$

(ossia sommando le scomposizioni in serie di  $\cos(x)$  e  $i\sin(x)$  e si ottiene la scomposizione in serie di  $e^x$ )

dato che  $i = 0 + i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = 0 - i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ ,  $i^6 = -1$ , ecc.

quindi:  $e^x$  va all'infinito, ma  $e^{ix}$  oscilla tra  $+1$  e  $-1$

dato che anche  $i^n$  oscilla invece di andare all'infinito

## 2.3 Altre proprietà dei numeri complessi

- parte reale:

$$z = x + iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad (2.12)$$



## 2.4 Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40])

- parte immaginaria:

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \text{Im}(z) &= y\end{aligned}\tag{2.13}$$

attenzione! la “parte immaginaria” di un numero complesso è costituita da un numero *reale*, il quale viene a sua volta moltiplicato per l’operatore immaginario  $i$

- modulo: la “distanza dal centro”, ossia la somma del quadrato della parte reale con il quadrato della parte immaginaria sotto radice:

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \text{abs}(z) &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}\tag{2.14}$$

nel caso di fenomeni periodici, *modulo* e *magnitudine* sono sinonimi

- argomento: l’angolo costituito dal numero complesso rispetto all’asse reale

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \arg(z) = \angle z &= \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}\tag{2.15}$$

nel caso di fenomeni periodici, *argomento* e *fase* sono sinonimi

### Esercizi

- rifare la dft con  $e$  invece che con  $\sin/\cos$
- verificare la giustezza della fase

## 2.4 Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40])

- Abbiamo visto che un oscillatore cosinusoidale può essere rappresentato come segue:

$$F(k) = A \cos(\omega k + \phi) \quad \text{dove } k \text{ è un intero}\tag{2.16}$$

(fare il plot di  $F(k)$  per valori non-negativi di  $k$ )

- secondo la formula di Eulero,

$$F(k) = \text{Re}\left(Ae^{i(\omega k + \phi)}\right)\tag{2.17}$$

## 2 Fondamentali

- mentre un oscillatore sinusoidale  $F(k) = A \sin(\omega k + \phi)$  corrisponde a

$$F(k) = \text{Im} \left( A e^{i(\omega k + \phi)} \right) \quad (2.18)$$

- quindi  $A e^{i(\omega k + \phi)}$  è un *fasore complesso*
- interpretazione grafica:
  - un punto che si muove su un cerchio sul piano complesso:  $A$  è il raggio del cerchio.  $k$  sono i punti crescenti sul cerchio
  - parte reale: coseno campionato
  - parte immaginaria: seno campionato
  - $\phi$  è il punto di partenza (la fase)
- se  $\phi = 0$  e  $\omega = 0$ , il fasore rimane fermo al punto di partenza e  $F(k) = A$  (costante reale)
- alla fine del giro il fasore ricomincia perché:

$$e^{i(\omega k + \phi)} = e^{i(\omega k + \phi + 2\pi)} \quad (2.19)$$

### 2.5 Rivisitando nyquist e foldover con i fasori complessi

- cosa succede se  $\omega = \pi$ ?
- e se  $\omega > \pi$ ?
- mettiamo conto che  $\omega = \pi + x$ :

$$e^{i\omega k} = e^{i(\pi+x)k} \quad (2.20)$$

dato che  $e^{i(2\pi k)} = 1$  possiamo aggiungere o togliere  $2\pi$  al nostro fasore a piacere:

$$e^{i\omega k} = e^{i(\pi+x)k} = e^{i(-2\pi+\pi+x)k} = e^{i(-\pi+x)k} \quad (2.21)$$

quindi sembra che il fasore stia andando all'indietro (effetto stroboscopico)

## 2.6 Il piano Z

La rappresentazione delle caratteristiche della funzione di trasferimento di un filtro sul piano  $z$  complesso permette di capirne meglio il funzionamento.

Riprendiamo il nostro filtro semplice

$$y_t = x_t - a_1 x_{t-1} \quad (2.22)$$

Se sostituiamo in 2.22  $x_t$  con un fasore, l'effetto di questo filtro equivale alla moltiplicazione dell'ingresso per la funzione complessa

$$1 - a_1 e^{-i\omega} = 1 - a_1 z^{-1} \quad (2.23)$$

perché abbiamo introdotto la stenografia  $z = e^{i\omega}$ .

Abbiamo quindi una funzione di trasferimento complessa  $\mathcal{H}(z)$  alla quale corrisponde la risposta in frequenza

$$H(\omega) = \mathcal{H}(e^{i\omega}) \quad (2.24)$$

In sostanza, la risposta in frequenza è la funzione di trasferimento della variabile complessa  $z$  valutata sul cerchio unitario. I valori di  $\omega$  che ci interessano vanno da  $\omega = 0$  alla frequenza di Nyquist  $\omega = \pi$  radianti per campione. Si tratta quindi della metà superiore del cerchio nel piano  $z$ , come illustrato in Fig. 2.1

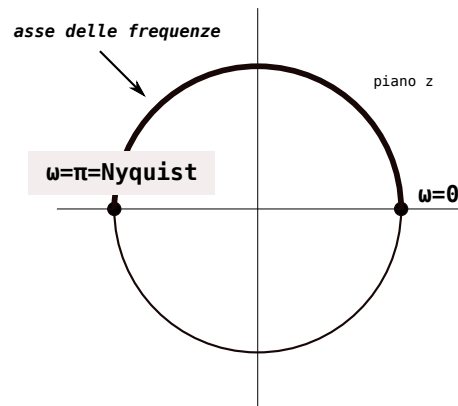


Figura 2.1: L'asse delle frequenze sul piano  $z$ .

Ora guardiamo più attentamente la funzione di trasferimento del nostro esempio. Essa è

$$\mathcal{H}(z) = 1 - a_1 z^{-1} \quad (2.25)$$

Riscriviamola ora come rapporto di polinomi moltiplicando sopra e sotto per  $z$ :

$$\mathcal{H}(z) = 1 - a_1 z^{-1} = \frac{z}{z} - \frac{a_1}{z} = \frac{z - a_1}{z} \quad (2.26)$$

In questo modo appaiono chiaramente le radici dell'equazione: c'è uno zero nel numeratore a  $z = a_1$  e uno zero nel denominatore a  $z = 0$ . Vale a dire: la funzione di trasferimento diventa zero a  $z = a_1$  e infinita per  $z = 0$ . La magnitudine della risposta in frequenza è la magnitudine di  $\mathcal{H}(z)$  calcolata sul cerchio unitario (cioè quando  $z = e^{i\omega}$ ):

$$|H(\omega)| = \frac{|z - a_1|}{|z|} \quad (2.27)$$

$|z| = 1$  perché ci troviamo sul cerchio unitario (dato che  $z = e^{i\omega}$ ). In effetti, nei filtri *feed-forward* (FIR) gli unici zeri al denominatore possono apparire solo all'origine, e non hanno quindi alcun effetto sulla risposta in frequenza. Possiamo quindi riscrivere l'Eq.2.27 così:

$$|H(\omega)| = |z - a_1| \text{ per } z = e^{i\omega} \quad (2.28)$$

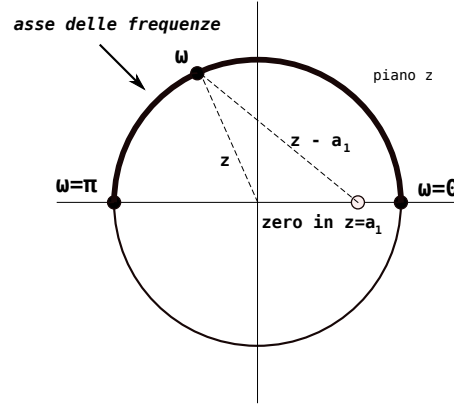


Figura 2.2: Valutazione della risposta in magnitudine per  $z = e^{i\omega}$ . Il fattore  $|z - a_1|$  è la lunghezza del vettore dallo zero in  $a_1$  sino al punto sul cerchio unitario corrispondente alla frequenza  $\omega$

Ecco il significato della figura 2.2: immaginiamo di camminare sul cerchio unitario da  $\omega = 0$  sino a  $\omega = \pi$ . Quando ci troveremo vicino a  $\omega = 0$ , il modulo del vettore  $|z - a_1|$  sarà molto piccolo e quindi influirà molto sulla magnitudine della funzione di trasferimento (riducendola). Man mano che ci allontaneremo da  $\omega = 0$  il modulo aumenterà e di conseguenza anche la magnitudine della funzione di trasferimento. Quindi è ovvio che la Fig. 2.2 ci sta mostrando la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto. Mentre per  $a_1$  negativi si avrebbe un filtro passa-basso.

La figura 2.3 a fronte illustra la magnitudine della funzione  $z$  all'interno del cerchio unitario per  $a_1 = 0.8$ .

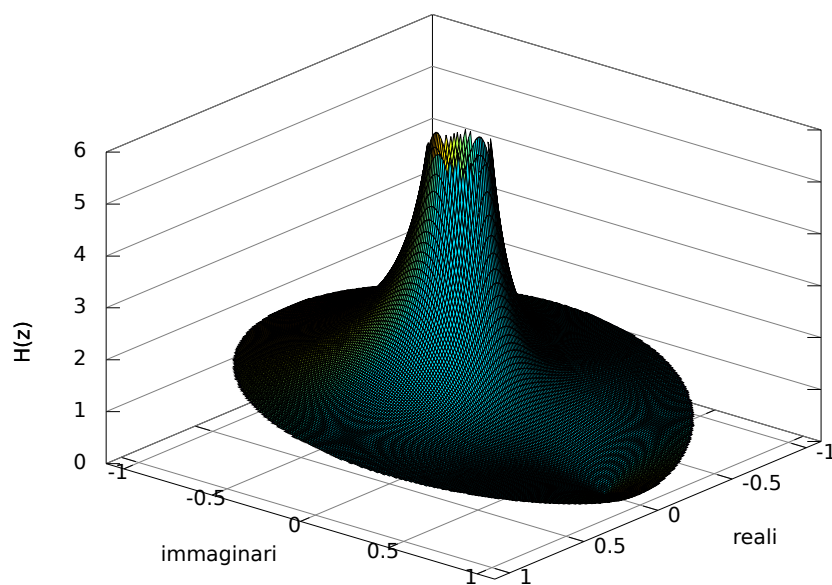


Figura 2.3: La funzione  $|\mathcal{H}(z)|$  sul piano  $z$

## 2.7 La trasformata zeta

- funzioni di variabile complessa: come sono fatte? funzioni di mappatura tra un piano e un altro; esempi:  $\frac{1}{z}$ ,  $\frac{1}{z^2}$ , ecc.
- trasformata  $z$ :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.29)$$

quando  $z = e^{i\omega t}$  la trasformata  $z$  dà la risposta in freq.

- perché si usa? perché trasforma la sequenza di campioni in un polinomio, e un polinomio si può trattare matematicamente (== è possibile vedere cosa “fa” su tutto il piano  $z$ )
- radice di un polinomio  $\Rightarrow$  quando il polinomio va a zero

## 2.8 L'operazione di convoluzione

L'operazione di convoluzione è la somma di una sorta di moltiplicazione “scorrevole” di un segnale con una data risposta all'impulso. In pratica, questa operazione permette di analizzare il contributo della moltiplicazione di ciascun campione del segnale a un dato tempo  $t$  con *tutti* i campioni della risposta all'impulso.

Per esempio: il contributo della moltiplicazione della risposta all'impulso  $h_t$  con il campione  $x_0$  al tempo  $t$  sarà:

$$x_0 h_t \quad (2.30)$$

mentre quella del campione  $t_1$  al tempo  $t$  sarà:

$$x_1 h_{t-1} \quad (2.31)$$

ecc.

Quindi, tipicamente il contributo della moltiplicazione della risposta all'impulso con il segnale  $x_k$  è  $x_k h_{t-k}$ .

Dato che gestiamo sistemi lineari, possiamo sommare insieme tutti questi contributi per avere il risultato finale:

$$y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{t-k} \quad (2.32)$$

Insomma, si tratta di un'operazione che permette di ricavare un terzo segnale dalla moltiplicazione “scorrevole” di due segnali sommando poi insieme tutti i contributi. Siccome si tratta di un'operazione molto usata, è stato inventato un operatore e un simbolo apposta per lei:

$$y = x * h \quad (2.33)$$

Nel caso dell'equazione 2.32 nella pagina precedente i limiti della somma di convoluzione sono tra  $-\inf$  e  $+\inf$ , ma generalmente si tratta di operazioni fatte su segnali finiti con risposte all'impulso finite. Usando ad esempio segnali *causali* che iniziano al tempo  $t = 0$  e terminano entro il tempo  $t$ , la convoluzione diventa semplicemente:

$$y_t = \sum_{k=0}^t x_k h_{t-k} \quad (2.34)$$

Esercitemoci ora con l'operazione di convoluzione, per capire esattamente come funziona. Prendiamo un segnale di tre campioni  $x = \{1, 2, 3\}$  e una risposta all'impulso  $h = \{4, 5, 6\}$ . Ecco un modo intuitivo di “vedere” l'operazione di convoluzione:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{al tempo } t_0 & \\
 1 & & \times \\
 4 & 5 & 6 \\
 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 & \text{al tempo } t_1 & \\
 4 & 5 & 6 & + \\
 & 2 & & \times \\
 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 4 & 13 & 16 & 12 & \text{uscita al tempo } t_1 \\
 \hline
 & \text{al tempo } t_2 & \\
 4 & 13 & 16 & 12 & + \\
 & & 3 & & \times \\
 & & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 4 & 13 & 28 & 27 & 18 & \text{uscita al tempo } t_2
 \end{array} \quad (2.35)$$

Dopo il tempo  $t_2$  non ci sono più campioni non-zero, quindi il risultato sarà sempre zero. Quindi:

$$\{1, 2, 3\} * \{4, 5, 6\} = \{4, 13, 28, 27, 18\} \quad (2.36)$$

Come si può notare, l'uscita dell'operazione di convoluzione è lunga  $N + M - 1$ , dove  $N$  è il numero dei campioni in ingresso e  $M$  è il numero dei campioni della risposta all'impulso.

### Esercizi

1. implementare “a mano” l'operazione di convoluzione in linguaggio `matlab/octave` (costruire la funzione `myconv` e verificarne il corretto funzionamento con la funzione `conv`)
2. verificare le seguenti proprietà dell'operazione di convoluzione: commutatività, associatività, operazione neutra

- verificare il risultato della convoluzione di un segnale di lunghezza a piacere con una funzione gradino (nota come *funzione di Heavyside*), e cioè con

$$h = \{\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Qual'è l'uscita che ci si attende?

### 2.8.1 Convoluzione e spettri

La convoluzione di due segnali equivale alla moltiplicazione delle magnitudini delle loro rappresentazioni in frequenza (spettri).

Facciamo il seguente esperimento: prendiamo del rumore bianco (rappresentato nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza in Fig. 2.4).

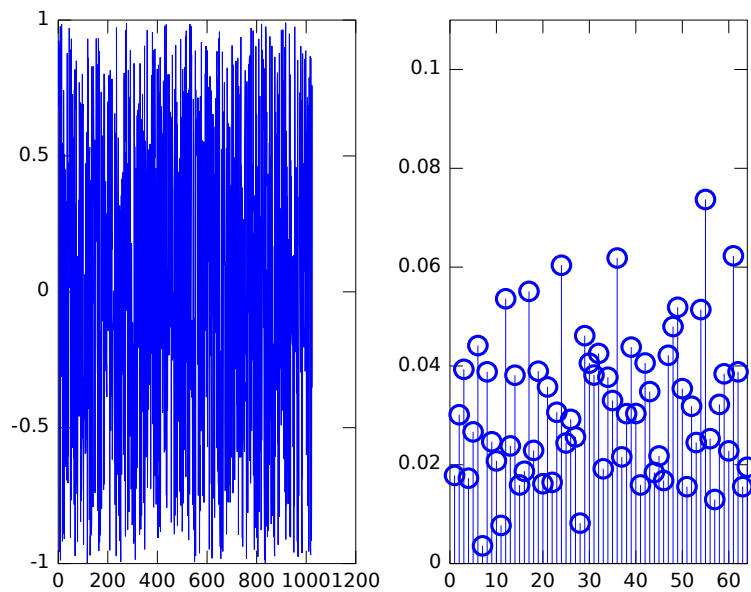


Figura 2.4: Rumore bianco nel dominio del tempo e in quello della frequenza

Usiamo un'onda a dente di sega (rappresentata in Fig. 2.5 nella pagina successiva) come risposta all'impulso.

Convolgendo il rumore bianco per l'onda a dente di sega otterremo la moltiplicazione delle magnitudini delle due rappresentazioni spettali (cf. Fig. 2.6 a pagina 18),

Il codice `matlab/octave` che produce questi grafici è riportato qui di seguito:

```
%
% Convolution of noise and a sawtooth wave to show that a convolution in the
% time domain is equivalent to a multiplication of spectra.
```



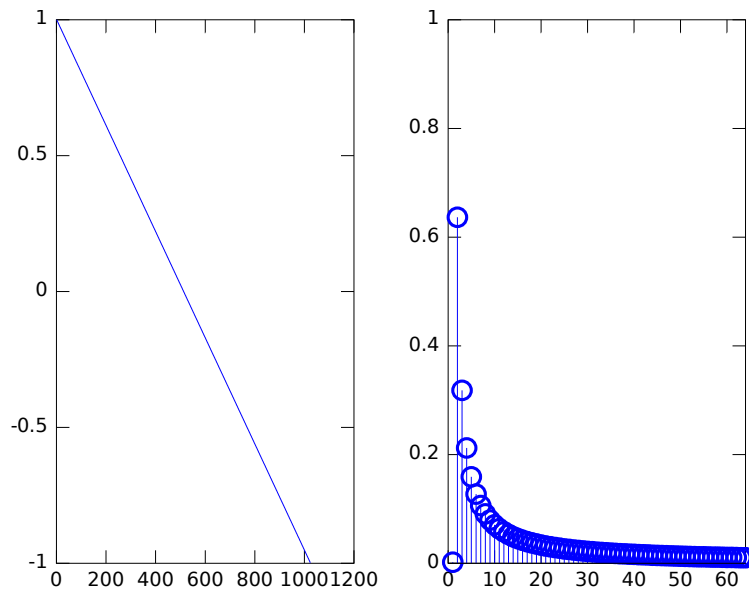


Figura 2.5: Onda a dente di sega nel dominio del tempo e in quello della frequenza

```
%
winsize = 1024;
x = (2 * rand(1, winsize)) - 1;
xfft = fft(x);
amp = 2;
wstep = amp/winsize;
h = [amp/2:-wstep:-(amp/2)+wstep];
hfft = fft(h);

figure(1, 'visible', 'off')
subplot(1,2,1)
plot(x)
subplot(1,2,2)
stem((2*abs(xfft))/winsize)
axis([0 winsize/16 0 0.11])
%PRINT 1

figure(2, 'visible', 'off')
subplot(1,2,1)
plot(h)
subplot(1,2,2)
```

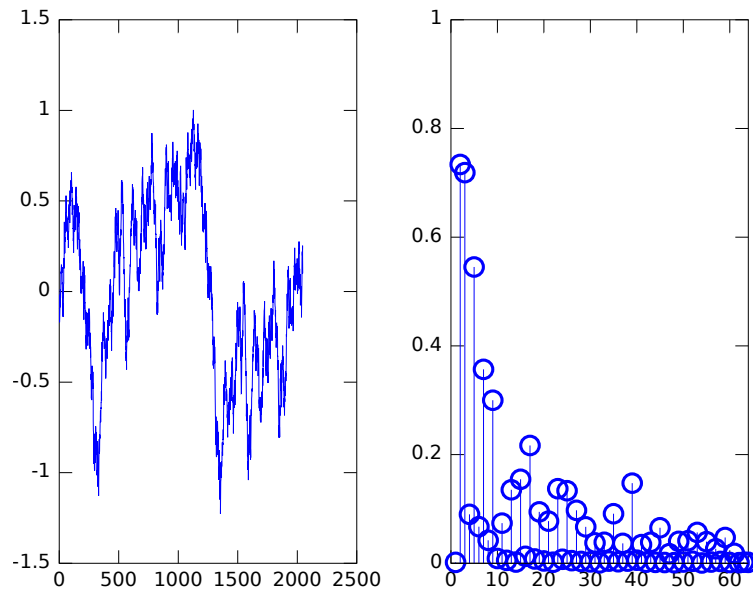


Figura 2.6: Convoluzione dei due segnali

```
stem((2*abs(hfft))/winsize)
axis([0 winsize/16 0 amp/2])
%PRINT 2

%
% convolve both signals
%
y = conv(x, h*0.1);
yfft = fft(y);

figure(3, 'visible', 'off')
subplot(1,2,1)
plot(y)
subplot(1,2,2)
stem((2*abs(yfft))/winsize)
axis([0 winsize/16 0 1])
%PRINT 3
```

## 3 I filtri FIR

### 3.1 Un filtro FIR semplice

#### 3.1.1 Dominio continuo di tempo

Nei filtri FIR (*feed-forward*) l'output è la somma dell'input e una versione riscalata e ritardata dell'input:

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-\tau} \quad (3.1)$$

(aggiungere grafico)

Poniamo che  $x_t$  sia un segnale sinusoidale complesso:

$$x_t = e^{i\omega t}$$

$$y_t = e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega(t-\tau)} \quad (3.2)$$

(fare schemino sul cerchio unitario)

$$y_t = e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} = e^{i\omega t} [1 + a_1 e^{-i\omega\tau}] \quad (3.3)$$

Quindi l'uscita è sempre un fasore di frequenza  $\omega$  moltiplicato per un'ampiezza che è funzione di  $\omega$  (ma indipendente dal tempo!)

La funzione del filtro è dunque  $[1 + a_1 e^{-i\omega\tau}]$  e la chiameremo  $H(\omega)$ .

Per capire la risposta in frequenza e in fase dobbiamo capire che  $H(\omega)$  è in realtà la magnitudine (valore assoluto di  $H(\omega)$ ) moltiplicata per una funzione della fase:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} \quad (3.4)$$

dove  $|H(\omega)| = |1 + a_1 e^{-i\omega\tau}|$ ; siccome per il teorema di Pitagora il modulo è il quadrato della parte reale + il quadrato della parte immaginaria sotto radice, e ricordando l'uguaglianza di Eulero  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ ,

$$\operatorname{Re}(H(\omega)) = 1 + a_1 \cos(\omega\tau) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Im}(H(\omega)) = -a_1 \sin(\omega\tau) \quad (3.6)$$

$$\operatorname{Re}^2 = 1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a_1^2 \cos^2(\omega\tau) \quad (3.7)$$

$$\operatorname{Im}^2 = a_1^2 \sin^2(\omega\tau) \quad (3.8)$$

### 3 I filtri FIR

quindi

$$Re^2 + Im^2 = 1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a_1^2 [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)] \quad (3.9)$$

Dato che

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad (3.10)$$

per  $\alpha$  qualsiasi, la magnitudine risulterà quindi

$$\sqrt{1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a_1^2 [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)]} = \sqrt{1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a_1^2} \quad (3.11)$$

Le Figg. 3.1 e 3.2 a fronte mostrano la risposta in frequenza rispettivamente per  $\tau = 1/f_c$

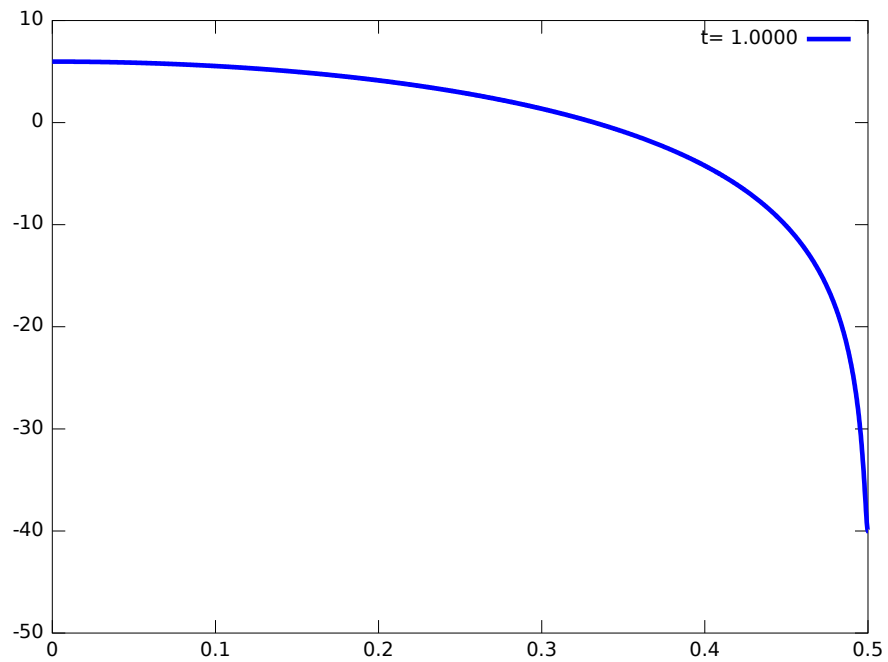


Figura 3.1: Filtro FIR con  $\tau = 1/f_c$

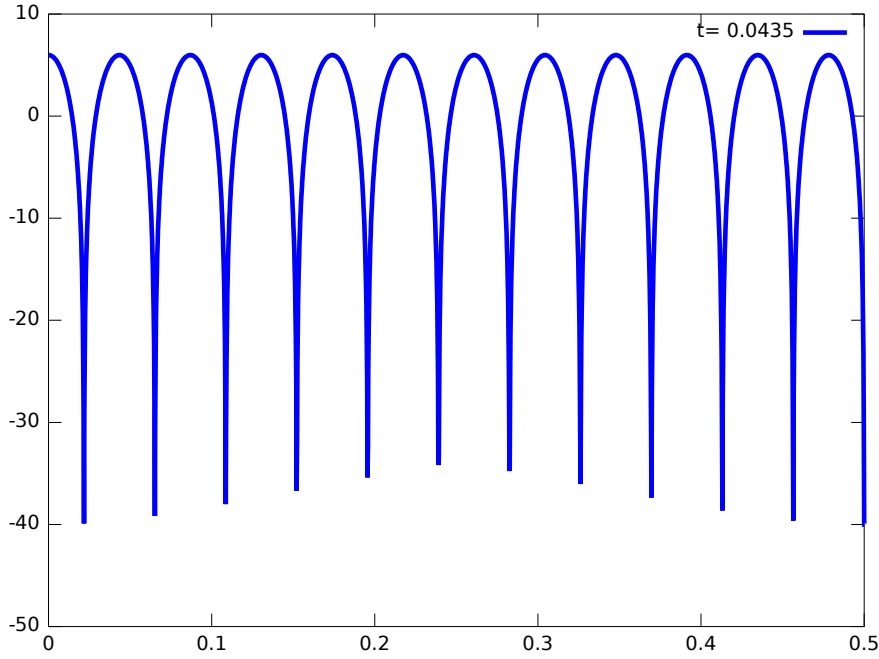
e per  $\tau = 23/f_c$ .

#### Esercizi

- fare il plot della risposta in frequenza con vari valori di  $\omega$  e di  $\tau$

#### 3.1.2 Passaggio dal tempo continuo al tempo discreto

Il ritardo  $\tau$  viene ristretto ad un numero intero di campioni multiplo della periodo di campionamento  $T_s$  (restrizione).

Figura 3.2: Filtro FIR con  $\tau = 23/f_c$ 

Dato che la frequenza di campionamento interesserà la definizione del nostro segnale (per le frequenze che servono per una applicazione piuttosto che un'altra), ma non il funzionamento del filtro, possiamo benissimo normalizzare la nostra frequenza di campionamento a 1, avendo così la frequenza di Nyquist a 0.5.

Ora, se noi ritardiamo il nostro segnale di un campione (invece che del valore continuo  $\tau$ ) moltiplicheremo il nostro fasore in ingresso per  $e^{-i\omega T}$  dove  $\omega T$  è l'angolo in radianti per campione. Possiamo sempre ricavare il tempo nel dominio digitale moltiplicando per il periodo di campionamento  $T_s$  - possiamo quindi evitare di scrivere  $T_s$ , che diventa una sorta di costante di conversione: se la costante è 1 (frq di campionamento 1) possiamo evitare di scriverla ogni volta.

La frequenza di campionamento diventa  $\omega = 2\pi$  e la frequenza di nyquist è  $\omega = \pi$  radianti per campione e il nostro fasore sarà sempre

$$x_t = e^{i\omega k T} \quad (3.12)$$

dove  $k$  è un numero intero di campioni e  $T$  è il periodo di campionamento.

Ora rifacciamo il filtro dell'eq.3.1 della Sez. 3.1.1 a pagina 19 ritardando però non di  $\tau$  ma di un solo campione:

$$y_k = x_k + a_1 x_{k-1} \quad (3.13)$$

applicando il fasore digitale, il filtro diventerà:

### 3 I filtri FIR

$$y_k = e^{i\omega kT} [1 + a_1 e^{-i\omega \times 1}] = e^{i\omega kT} [1 + a_1 e^{-i\omega}] \quad (3.14)$$

e la magnitudine (== risposta in frequenza) sarà:

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2a_1 \cos(\omega) + a_1^2} \quad (3.15)$$

Ricapitolando, se l'input di un filtro FIR è il fasore  $e^{i\omega kT}$

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} \quad (3.16)$$

(ritardo di un campione).

L'output è anche un fasore con frequenze inalterate

$$y_k = x_k [a_0 + a_1 e^{-i\omega}] \quad (3.17)$$

possiamo aggiungere quanti termini vogliamo in un filtro del genere:

$$y_k = x_k [a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} + a_3 e^{-i3\omega} + \dots + a_n e^{-in\omega}] \quad (3.18)$$

Invece di ripetere  $e^{i\omega}$  ogni volta, possiamo operare una sostituzione: sostituiamo  $z = e^{i\omega}$ . Il ritardo di un campione diventa così  $z^{-1}$ , e il ritardo di  $k$  campioni diventa così  $z^{-k}$ .  $z^{-1}$  è trattabile sia come una variabile complessa che come un operatore, cioè una operazione applicata ad un certo oggetto (pensate p.es. ad un operatore che ruota un disegno di 90 gradi) =  $\rho$ :  $\rho^2$  lo ruota di 180 gradi in senso antiorario,  $\rho^{-1}$  lo ruota in senso orario).

Possiamo anche usare la notazione  $X$  per rappresentare un *intero segnale* (un vettore di campioni); nota bene:  $x_k$  rappresenta il valore di un segnale al tempo  $k$ ,  $X$  rappresenta l'intero segnale.

L'intero segnale ritardato di un campione è quindi notato  $z^{-1}X$  quindi significa "applica l'operatore  $z^{-1}$  al segnale  $X$ "

L'equazione si riscrive:

$$Y = a_0 X + a_1 z^{-1} X = [a_0 + a_1 z^{-1}] X \quad (3.19)$$

(nota che anche l'ampiezza diventa un operatore: moltiplica *tutto il segnale* per la costante  $a_0$ , e quest'operatore è commutativo).

Quindi  $Y = H(z)X$  dove  $H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}$ .

### Esercizi

1. Si descriva un filtro FIR con l'equazione che segue:

$$y_k = x_k + x_{k-1} + x_{k-2} + \dots + x_{k-19} \quad (3.20)$$

Si derivi una espressione algebrica semplice per la sua risposta in magnitudine. Si trovi quali siano le frequenze alle quali si trovano dei picchi e quelle alle quali si trovano dei buchi

## 3.2 Trasformata zeta applicata ai filtri FIR

### 3.2.1 Ritardo e linearità

Recuperiamo le proprietà della trasformata Z e applichamole ai filtri FIR.

- filtro FIR:

$$X(k) \xrightarrow{H} Y(k) \quad (3.21)$$

La forma generalizzata di un filtro FIR è:

$$Y(k) = C(1)X(k) + C(2)X(k-1) + \dots + C(M)X(k-M+1) \quad (3.22)$$

- per via della proprietà 2 della trasformata Z (linearità) la trasformata Z di questa somma è uguale alla somma delle trasformata Z di ogni termine. Per via della proprietà 1, ciascun termine può essere letto come multiplo della trasformata Z di  $X(k)$ , perché:

$$\begin{array}{ccc} C(1)X(k) & \xrightarrow{Z} & C(1)X^*(z) \\ C(2)X(k-1) & \xrightarrow{Z} & C(2)z^{-1}X^*(z) \\ C(3)X(k-2) & \xrightarrow{Z} & C(3)z^{-2}X^*(z) \\ & \vdots & \\ C(M)X(k-M+1) & \xrightarrow{Z} & C(M)z^{-(M+1)}X^*(z) \end{array} \quad (3.23)$$

quindi:

$$Y(k) \xrightarrow{Z} Y^*(z) = [C(1) + C(2)z^{-1} + C(2)z^{-2} + \dots + C(M)z^{-(M+1)}]X^*(z) \quad (3.24)$$

ponendo

$$H(z) = [C(1) + C(2)z^{-1} + C(2)z^{-2} + \dots + C(M)z^{-(M+1)}] \quad (3.25)$$

ossia

$$H(z) = \frac{Y^*(z)}{X^*(z)} \quad (3.26)$$

- quindi: quando  $X$  è un fasore, anche  $Y$  è un fasore e il rapporto tra  $X$  e  $Y$  è proprio  $H(z)$  (quando  $z = e^{i\omega}$ ): quando io metto dentro al filtro un segnale sinusoidale ottengo un segnale sinusoidale riscalato

### 3 I filtri FIR

- ma la faccenda è molto più generale: quando  $X$  è un qualsiasi segnale causale (one-sided), l'uscita di un black box può essere ottenuta semplicemente moltiplicando la sua trasformata  $Z$  per la funzione di trasferimento  $H(z)$

– facciamo un esempio semplice:

$$\begin{aligned} X(k) &= 0 & \text{per } k < 0 \\ X(0) &= 1 \\ X(1) &= 1 \\ X(k) &= 0 & \text{per } k > 1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

- dalla definizione di trasformata  $Z$  ( $X^*(z) = \sum_0^N X(n)z^{-n}$ ), la trasformata di questo segnale è:

$$X^*(z) = 1 + z^{-1} \tag{3.28}$$

- ora filtriamolo col solito filtro di media semplicissimo:

$$Y(k) = X(k) + X(k-1) \tag{3.29}$$

- la funzione di trasferimento è:

$$H(z) = 1 + z^{-1} \tag{3.30}$$

- quindi:

$$Y^*(z) = H(z)X^*(z) = (1 + z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \tag{3.31}$$

- è facile fare la trasformata inversa perché ci sono tutte potenze decrescenti di  $z$ , quindi:

$$\begin{aligned} Y(k) &= 0 & \text{per } k < 0 \\ Y(0) &= 1 \\ Y(1) &= 2 \\ Y(2) &= 1 \\ Y(k) &= 0 & \text{per } k > 2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

si può verificare la correttezza facendo girare “a mano” il filtro



**Esercizi**

- rifare il filtraggio sopra esposto con il seguente segnale:

$$X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 (\text{o anche } \leq 5) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.33)$$

e con le seguenti funzioni di trasferimento:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - z^{-1} \\ H(z) &= 1 + z^{-1} \\ H(z) &= (1 - z^{-1})^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

**3.3 Una collezione di trasformate zeta notevoli****3.3.1 La trasformata zeta più semplice**

La trasformata più semplice è quella che prevede campioni non zero per un numero finito di campioni. Per come abbiamo visto l'altra volta, la trasformata  $Z$  di un segnale del genere è semplicemente un polinomio in  $z^{-1}$ . P.es.:

$$X(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ .5 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ .5 & k = 3 \\ 0 & k > 3 \end{cases} \quad (3.35)$$

Per la definizione di trasformata  $Z$ , la trasformata  $Z$  di questo segnale è

$$X^*(z) = .5z^{-1} + z^{-2} + .5z^{-3} \quad (3.36)$$

E la trasformata inversa è semplicemente la sequenza dei coefficienti del polinomio (== come se fossero ciascuno moltiplicato per 1)

**3.3.2 Un caso più interessante**

Un caso più interessante ha luogo quando il segnale è non zero per un infinito/indefinito numero di valori di  $k$ , cioè quando il segnale va avanti per sempre. Questo a noi fa comodo per i segnali audio. Per noi p.es. sono molto importanti classi di segnali che sono esponenziali o sinusoidali di natura, e one-sided.

Il segnale più semplice è la unit-step function in cui  $X(k) = 1$  per  $k \geq 0$ . La sua trasformata  $z$  è:

$$X^*(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \quad (3.37)$$

Questa è una serie geometrica ben conosciuta e sappiamo dall'algebra che la sua trasformata  $z$  è quindi:

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3.38)$$

La serie geometrica funziona così: poniamo una serie

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \left\{ a \frac{1 - r^n}{1 - r} \right\} \quad (3.39)$$

come ci si arriva? poniamo:

$$s = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (3.40)$$

allora

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (3.41)$$

ma  $s - sr = a - ar^n$ , quindi  $s(1 - r) = a(1 - r^n)$ , quindi

$$s = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (3.42)$$

quando  $n$  va all'infinito, è necessario che  $r < 1$  per far convergere la somma. In questo caso

$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$  diventa  $= \frac{a}{1-r}$  e se  $a = 1$ ,  $= \frac{1}{1-r}$

quindi

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3.43)$$

a patto che  $|z^{-1}| < 1$  e dato che  $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$  questo equivale a dire che  $|z| > 1$

Se esaminiamo questo polinomio più da vicino, e moltiplichiamo num e den per  $z$ , questo diventa:

$$\frac{z}{z - 1} \quad (3.44)$$

e per  $z = 1$ , la trasformata zeta diventa infinita. Questo punto si chiama un *polo*. In questo caso quindi la trasformata  $z$  ha uno zero per  $z = 0$  e un polo per  $z = 1$ . (un piano con uno zero al centro e un polo sul 1 reale – cf. Fig. 3.3 a fronte). Quindi a frequenza zero si sommano tutti gli uni e la somma infinita esplode. Possiamo trovare la magnitudine della trasformata  $z$  sul cerchio unitario e questa si chiama “contenuto frequenziale” o *risposta in frequenza* del segnale. Ponendo  $z = e^{-i\omega}$

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - e^{i\omega}} \quad (3.45)$$

la magnitudine (il modulo) è quindi:

$$|X^*(z)| = \frac{1}{|1 - e^{i\omega}|} \quad (3.46)$$

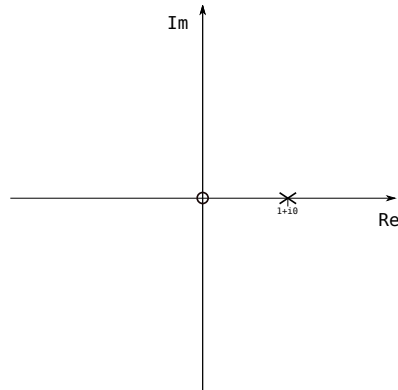


Figura 3.3: Poli e zeri del filtro  $X^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

e se moltiplico entrambi i membri del denominatore per  $e^{-i\omega/2}$  ottengo

$$|X^*(z)| = \frac{1}{|e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}|} \quad (3.47)$$

e quindi per via della formula di Eulero

$$|X^*(z)| = \frac{1}{2|\sin\omega/2|} \quad (3.48)$$

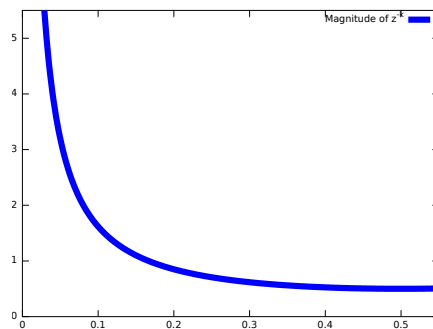


Figura 3.4: Magnitudine dell'eq.3.48 con freq. normalizzata

### 3.4 La risposta in fase

Riconsideriamo ancora una volta il filtro che abbiamo analizzato in Cap.3 Sez. 3.1 a pagina 19 (eq.3.1):

### 3 I filtri FIR

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-\tau} \quad (3.49)$$

la cui risposta in frequenza è una funzione della frequenza  $\omega$

$$H(\omega) = 1 + a_1 e^{-i\omega} \quad (3.50)$$

Questa risposta complessa in frequenza avrà quindi una magnitudine e un angolo per ciascun  $\omega$ . Cioè l'eq.3.50 può essere riscritta come

$$1 + a_1 e^{-i\omega} = |H(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} \quad (3.51)$$

Se il segnale in ingresso fosse un fasore complesso  $x = e^{i\omega t}$ , il fasore in uscita  $y$  sarebbe il prodotto di questo ingresso moltiplicato questa funzione di trasferimento

$$y_t = |H(\omega)| e^{i(\omega t + \Theta(\omega))} \quad (3.52)$$

il che significa che l'uscita è una copia dell'ingresso ritardata in fase di un angolo  $\Theta(\omega)$  e riscalata in ampiezza di  $|H(\omega)|$ .

Per capire quanto valga il ritardo di fase possiamo usare la funzione *arcotangente*. Riscrivendo l'eq.3.50 come  $1 + a_1 \cos\omega - ia_1 \sin\omega$ , avremo

$$\begin{aligned} \Theta(\omega) &= \arctan \left[ \frac{\text{Immag}H(\omega)}{\text{Reale}H(\omega)} \right] \\ &= \arctan \left[ \frac{-a_1 \sin\omega}{1 + a_1 \cos\omega} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Quando  $a_1 = 1$  l'espressione contenuta in eq.3.53 si semplifica. Riscrivendo la funzione di trasferimento di eq.3.50 con  $a_1 = 1$ :

$$H(\omega) = 1 + e^{-i\omega} = e^{-i\omega/2} \left[ e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2} \right] \quad (3.54)$$

Ricordiamo che la formula di Eulero  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ , e che quindi

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} &= 2\cos\alpha \\ e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2} &= 2\cos\omega/2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

allora l'eq.3.54 si semplifica in

$$H(\omega) = e^{-i\omega/2} 2\cos(\omega/2) \quad (3.56)$$

Confrontando l'eq.3.51 con la 3.56,  $2\cos(\omega/2)$  è la magnitudine della risposta (reale)  $|H(\omega)|$ , mentre l'esponenziale complesso  $e^{-i\omega/2}$  è la risposta in fase e rappresenta un ritardo di fase di un angolo  $-\omega/2$ . Quindi, se l'ingresso è il fasore  $e^{i\omega t}$ , l'uscita del filtro sarà il fasore

$$2\cos(\omega/2) e^{i\omega(t-1/2)} \quad (3.57)$$

il che equivale a dire che l'effetto del filtro sulla fase del segnale è quello di ritardarlo esattamente di un tempo equivalente alla metà della frequenza di campionamento, *indipendentemente dalla frequenza  $\omega$  del fasore in ingresso*.

Questo è un caso speciale di una caratteristica importante dei filtri FIR: se i coefficienti di un filtro FIR sono simmetrici intorno al proprio centro (in questo caso i coefficienti sono  $\{1, 1\}$ , la risposta in fase è proporzionale ad  $\omega$ , trattandosi quindi di un ritardo di tempo fisso per tutte le frequenze. Il filtro si dice quindi *a fase lineare*, ossia non introduce distorsioni nella risposta in fase.

La fig. 3.5 riporta la risposta in frequenza e la risposta in fase del filtro FIR

$$H(z) = 0.5 - 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2} \quad (3.58)$$

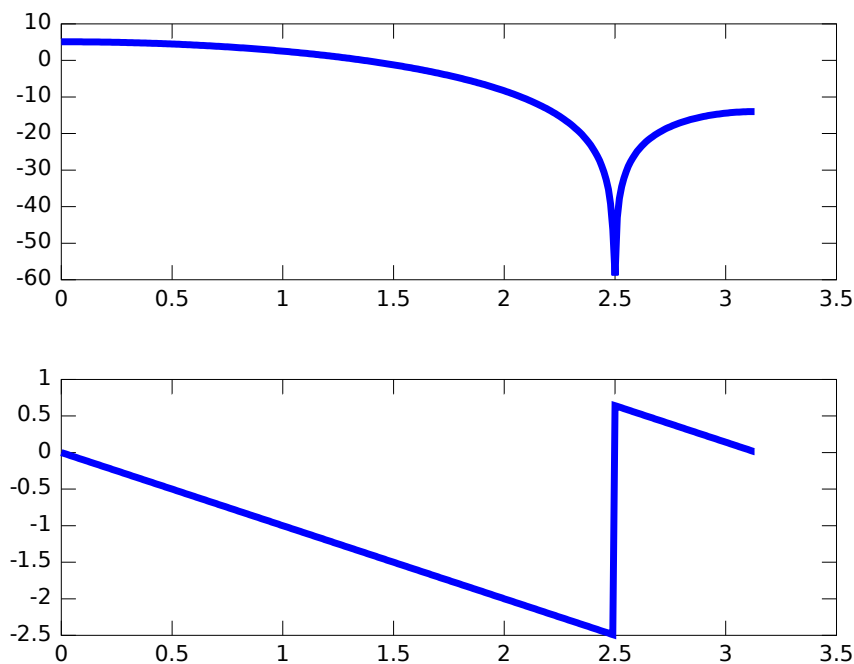


Figura 3.5: Risposta in frequenza e in fase del filtro la cui funzione di trasferimento è riportata in eq.3.58

Come si può notare, un numero dispari di coefficienti genera una risposta in fase lineare. Lo script `octave` che genera questa figura è riportato qui:

```
%
% $Id: fase_3.m 28 2013-05-03 04:38:41Z nicb $
```

### 3 I filtri FIR

```
%
step = 0.01;
W = [0:step:pi-step];
Coefs = [0.5 0.8 0.5];
z=exp(i*W);
H = Coefs(1) + (Coefs(2)*z.^(-1)) + (Coefs(3)*z.^(-2));
ReH = real(H);
ImH = imag(H);
PHI = atan2(ImH, ReH);
Mag = abs(H);

figure(1, 'visible', 'off')
subplot(2,1,1);
plot(W, 20*log10(Mag), 'LineWidth', 4)
subplot(2,1,2);
plot(W, PHI, 'LineWidth', 4)
```

## 3.5 Introduzione ai filtri comb inversi

I filtri comb inversi sono un caso particolare di filtri FIR. Essi permettono, ad esempio, di cancellare le componenti di un segnale armonico.

Si tratta come sempre di un filtro FIR come quello studiato in Sez.3.1. 3.1.1 a pagina 19 (eq.3.1). Sostituiamo al posto del ritardo arbitrario  $\tau$  un numero intero di campioni  $L$ . Come coefficiente del filtro prenderemo  $R^L$ .

L'equazione diventerà quindi

$$y_t = x_t - R^L x_{t-L} \quad (3.59)$$

e la sua funzione di trasferimento si ricaverà così

$$\begin{aligned} Y &= 1 \times Xz^{-0} - R^L \times Xz^{-L} = X \begin{bmatrix} 1 - R^L z^{-L} \\ 1 - R^L z^{-L} \end{bmatrix} \\ H(z) &= \end{aligned} \quad (3.60)$$

Ripassiamo un pò di algebra dei numeri complessi. Quali sono le radici dell'equazione seguente:

$$z^L = 1 \quad (3.61)$$

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che un polinomio di grado  $n$  ha  $n$  radici ( $n$  punti in cui la funzione è zero). Prendiamo ad es.

$$y = x^2 - 9 \quad (3.62)$$

Dobbiamo trovare i punti in cui  $y = 0$ . Allora:

$$\begin{aligned}
x^2 - 9 &= 0 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \sqrt{9} \\
x &= \pm 3
\end{aligned}
\tag{3.63}$$

E' possibile quindi pensare qualsiasi funzione nei termini delle sue radici:

$$y = a_1(x - r_1)(x - r_2) \dots \tag{3.64}$$

P.es. nel caso dell'eq.3.63

$$x^2 - 9 = 1(x + 3)(x - 3) \tag{3.65}$$

Spesso è necessario ricorrere ai numeri complessi per risolvere le equazioni. P.es., quali sono le radici dell'eq.3.66?

$$x^2 - x + 1 = 0 \tag{3.66}$$

Ricordando che

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.67}$$

e sostituendo i fattori  $a$ ,  $b$ , e  $c$  con quelli presenti nell'eq.3.66

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{-1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{\pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 \pm i0.866 \tag{3.68}$$

In linea generale, le equazioni di grado  $n$  con fattori complessi possiedono  $n$  radici in coppie complesse coniugate (per  $n$  pari) oppure 1 radice reale e  $n - 1$  radici in coppie complesse coniugate (per  $n$  dispari).

Ecco dunque la risposta alla domanda: quali sono le radici dell'equazione  $z^L = 1$ ? ce ne sono  $L$ , complesse-coniugate e equispaziate sul cerchio unitario. Questo è abbastanza ovvio quando si pensa a cosa significhi innalzare un numero complesso alla sua  $L$ -esima potenza. Significa elevare la sua magnitudine (== il suo modulo) all' $L$ -esima potenza e moltiplicare il suo angolo per  $L$ . Qualsiasi punto con magnitudine 1 e angolo in una forma  $k2\pi/L$  funzionerà per qualsiasi  $k$  intero. Le  $L$  radici dell'unità saranno quindi:

$$e^{ik2\pi/L} \text{ per } k = 0, 1, \dots, L - 1 \tag{3.69}$$

E nel caso dell'eq.3.60 le radici saranno:

$$z^L = R^L \quad (3.70)$$

e si troveranno agli stessi angoli, ma con raggio  $R^L$  anziché 1.

Facciamo un esempio con  $L = 8$  (cioè: il segnale sarà composto dall'ingresso più l'ingresso ritardato di otto campioni) con  $R = 0.999999$ .

Ci aspetteremo quindi di trovare otto zeri, e per la precisione (dato che il segnale finale è reale) quattro coppie complesse coniugate. In effetti, il plot sul piano zeta rappresentato in Fig. 3.6 mostra proprio che gli otto zeri si dispongono in maniera simmetrica intorno all'asse reale (e anche simmetrica intorno all'asse immaginario).

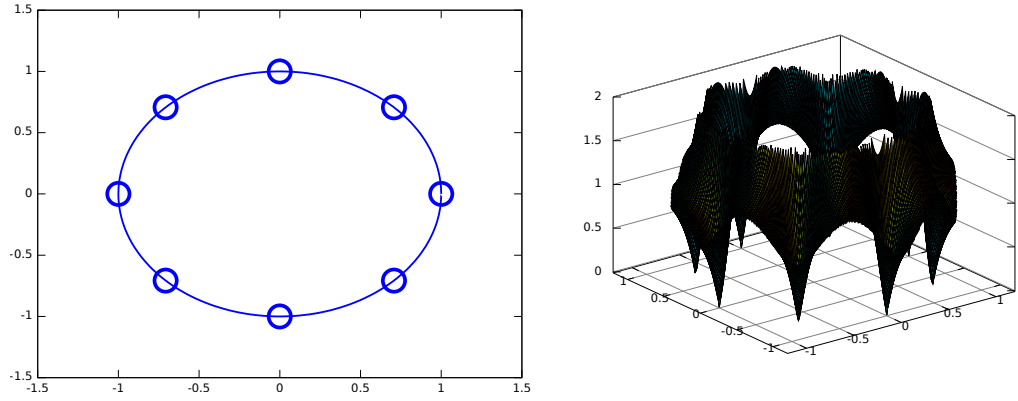


Figura 3.6: Disposizione degli zeri sul piano zeta per un filtro comb inverso di ordine 8

Come si può notare, gli zeri appaiono a  $R^L e^{i2\pi \times 0/L} = 1$ ,  $R^L e^{i2\pi \times 1/L} = R^L e^{i2\pi/8} = R^L e^{i\pi/4} = 0.707 + i0.707$ ,  $R^L e^{i2\pi \times 2/L} = R^L e^{i4\pi/8} = e^{i\pi/2} = i$ , ecc. La Fig. 3.7 nella pagina successiva invece mostra che la fase è per lo più lineare, con gli shift di fase che accadono al passaggio dagli zeri della magnitudine.



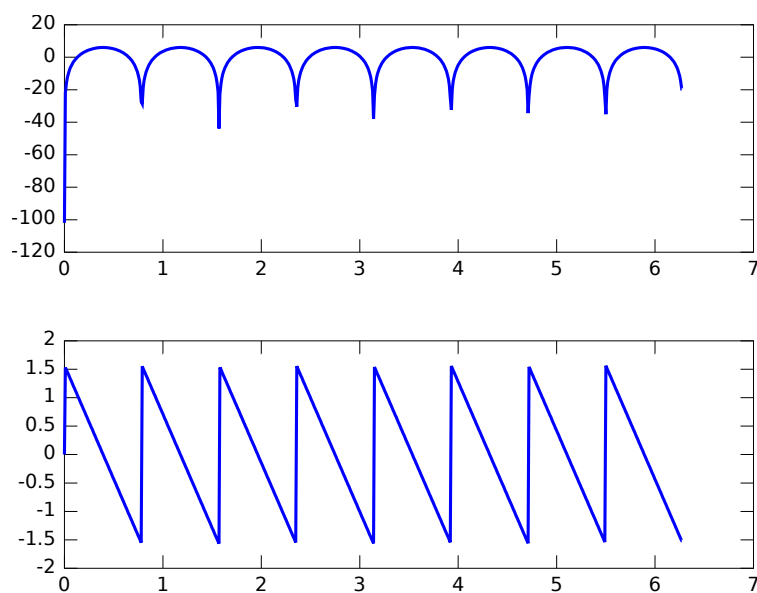


Figura 3.7: Risposta in frequenza e in fase di un filtro comb inverso di ordine 8

Lo script *octave* che produce questi plot è riportato qui di seguito:

```
%
% $Id: ICF2.m 29 2013-05-17 04:18:06Z nicb $
%
clear all;
close all;

% yt = xt - R^L*x(t-L)
% H(z) = [1-R^L*z^-L]

R = 0.999999; % profondit dei denti
L = 8; % ordine del filtro (L+1 termini, da 0 a L+1)
step = 0.01;
W = [0:step:2*pi-step];
z = exp(i*W);

H = 1-((R.^(L))*(z.^(-L))); %fn di trasferimento ==> che diventa
figure(1, 'visible', 'off') % la risp in freq per via di z
subplot (2,1,1)
plot (W,20*log10(abs(H)), 'LineWidth', 2);
```

### 3 I filtri FIR

```
subplot(2,1,2)
plot(W,arg(H), 'LineWidth', 2);
%PRINT 1

figure(2, 'visible', 'off')
% L+1 coefficienti (include anche lo zero),
% dal pi alto al pi basso
coefs = zeros(1,L+1);
coefs(L+1) = 1; % coefficiente zero (ultimo)
coefs(1) = -R^L; % coefficiente L-esimo (primo)
zri = roots(coefs);
cerchio = exp(i*W);
hold on
plot(cerchio, 'LineWidth', 2)
plot(zri, 'o', 'markersize', 12);
hold off
%PRINT 2

figure(3, 'visible', 'off')
meshstep = 0.01;
reals = [-1.2:meshstep:1.2];
imags = reals;
zplane = zeros(length(reals), length(imags));
ringsize=0.2;
lowerring=R-ringsize;
upperring=R+ringsize;
for k=1:length(imags)
    for l=1:length(reals)
        zval = reals(l) + (i*imags(k));
        zvalmag = abs(zval);
        if zvalmag >= lowerring && zvalmag <= upperring
            zplane(l,k) = 1 - ((R.^L)*zval^(-L));
        else
            zplane(l,k) = NaN;
        end
    end
end
surf1(reals, imags, abs(zplane))
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2 -0.01 2]);
%PRINT 3
```

Attenzione: un errore comune è quello di invertire l'ordine dei coefficienti nel passare l'argomento alla funzione `roots()` di *matlab/octave*. L'ordine è dal coefficiente più alto a quello più basso (zero incluso).

### 3.6 Introduzione alla progettazione di filtri FIR

Il problema sostanziale nel progettare i filtri è quello di trovare i giusti coefficienti per raggiungere la migliore approssimazione alla “risposta ideale” che si desidera ottenere. In linea generale, la “risposta ideale” non è ottenibile direttamente perché si tratta di una funzione discontinua (che non è realizzabile con un polinomio). Il problema è rappresentato in fig. 3.8.

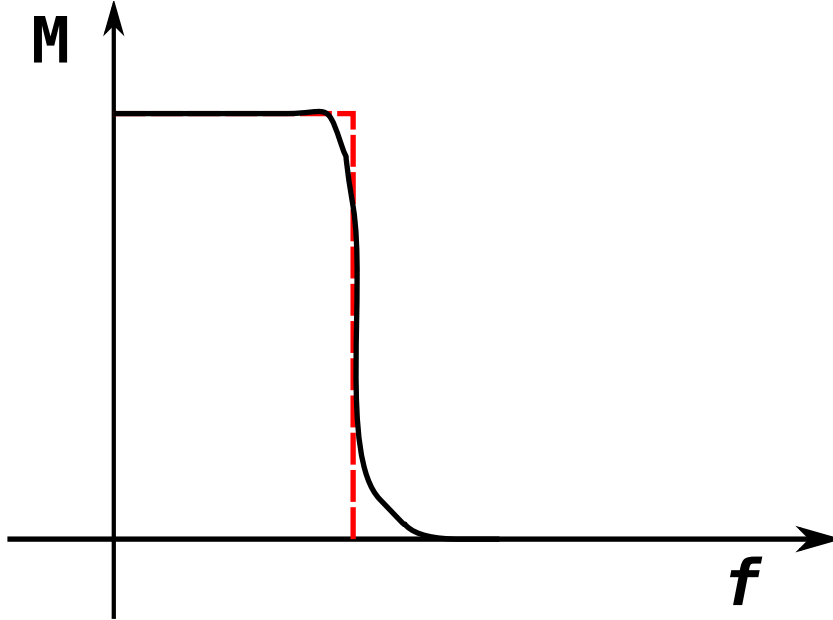


Figura 3.8: La risposta ideale di un filtro (in rosso) e la sua risposta reale

Ci sono varie soluzioni per ottenere questi coefficienti, e queste soluzioni si applicano meglio a certi tipi di filtri che ad altri. In alcuni casi è possibile (o necessario) trovare delle “forme chiuse” (vale a dire delle equazioni matematiche finite) per individuare i coefficienti, mentre in altri casi è possibile trovarli attraverso una “ottimizzazione iterativa” (vale a dire ottenendo prima una approssimazione mediocre per poi migliorarla a discrezione).

I coefficienti dei filtri FIR si trovano più facilmente attraverso quest’ultima tecnica (ottimizzazione iterativa).

Ricordiamo che la forma dei filtri FIR è specificata da un’equazione del tipo:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots + a_{n-1} x_{t-(n-1)} \quad (3.71)$$

Il primo coefficiente è il coefficiente 0, quindi l’ultimo coefficiente di un filtro di lunghezza  $n$  è  $n - 1$ . La sua funzione di trasferimento è

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} \quad (3.72)$$

### 3 I filtri FIR

Considerando che la risposta  $y_t$  deve essere una risposta reale, possiamo semplificare la nostra progettazione utilizzando un numero pari di coefficienti. Questi coefficienti distribuiranno gli zeri sul piano zeta in posizioni complesse-coniugate ed il risultato sarà quindi reale. Il problema è che abbiamo un coefficiente 0, e che quindi se usiamo filtri di lunghezza pari avremo una asimmetria intorno all'asse dei numeri reali. Dobbiamo quindi utilizzare una lunghezza *dispari* per ottenere un numero *pari* di coefficienti simmetrici (e un coefficiente direttamente sull'asse reale – che quindi sarà un numero reale). Ad esempio, se usiamo un filtro di lunghezza 5, avremo la funzione di trasferimento

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4} \quad (3.73)$$

Il trucco standard è quello di mettere a fattore una potenza di  $z$  corrispondente al *ritardo medio* del nostro filtro. Nel caso dell'equazione 3.73 il ritardo medio sarà  $z^{-2}$ . L'equazione viene così riscritta

$$H(z) = z^{-2} [a_0z^2 + a_1z + a_2 + a_3z^{-1} + a_4z^{-2}] \quad (3.74)$$

La risposta in frequenza corrispondente viene ottenuta, come sempre, sostituendo  $z = e^{i\omega}$ .

$$H(\omega) = e^{-i2\omega} [a_0e^{i2\omega} + a_1e^{i\omega} + a_2 + a_3e^{-i\omega} + a_4e^{-i2\omega}] \quad (3.75)$$

Abbiamo visto che coefficienti simmetrici producono una risposta in fase lineare. Daremo quindi per scontato che  $a_0 = a_4$  e  $a_1 = a_3$ . Ma

$$a_0(e^{i2\omega} + e^{-i2\omega}) = 2a_0\cos(2\omega) \quad (3.76)$$

e

$$a_1(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = 2a_1\cos(\omega) \quad (3.77)$$

Quindi:

$$H(\omega) = e^{-i2\omega} [a_2 + 2a_1\cos\omega + 2a_0\cos(2\omega)] \quad (3.78)$$

Come si può notare, la parte fra parentesi quadre è *reale*, e il fattore complesso che la moltiplica altro non è che un ritardo “complessivo” di due campioni. Questo fattore non influisce sulla magnitudine del filtro, perché il modulo di  $e^{-i2\omega}$  è 1.

Per semplificare ulteriormente, possiamo utilizzare dei coefficienti  $c_i$  in ordine ascendente, riscrivendo così l'equazione 3.78 come:

$$\hat{H}(\omega) = e^{i2\omega} H(\omega) = c_0 + c_1\cos\omega + c_2\cos(2\omega) \quad (3.79)$$

dove  $c_0 = a_2$ ,  $c_1 = 2a_1$  e  $c_2 = 2a_0$ . Il ritardo lo abbiamo spostato a sinistra dell'equazione (dove in realtà è un anticipo piuttosto che un ritardo).

La nuova risposta in frequenza  $\hat{H}(\omega)$  incorpora quindi il ritardo generale ed è esclusivamente reale. Per semplificarci la vita ulteriormente, diamo per scontato che la lunghezza

del filtro sia sempre un intero dispari. È facile notare che la forma generale dell'eq.3.78 è

$$\hat{H}(\omega) = e^{im\omega} H(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos(2\omega) + \dots + c_m \cos(m\omega) \quad (3.80)$$

dove  $m = 1/2(n - 1)$ . Dal momento che contiamo sempre a partire da 0, ci saranno  $m + 1 = 1/2(n + 1)$  coefficienti  $c$ . Dato che i coefficienti  $a$  sono simmetrici,  $m + 1$  saranno i coefficienti con i quali avremo a che fare.

Ultima cosa: dato che a noi interessa soprattutto la magnitudine della risposta in frequenza, considereremo quindi la parte destra dell'equazione 3.80 senza il ritardo. Questa parte sarà costituita da valori reali sia positivi che negativi. Volendo, possiamo interpretare la magnitudine negativa come un shift di fase di  $\pi$  radianti.

Riassumendo: quando disegniamo un filtro FIR, diamo per scontato che questi filtri abbiano un numero dispari di termini ( $n$ ) i cui coefficienti siano simmetrici intorno al termine centrale. La risposta in frequenza è quindi determinata dalla serie (solo di valori reali) dei coseni dell'eq.3.80 con  $m = 1/2(n + 1)$  incognite  $c_i$ . Il problema della progettazione del filtro si riduce così alla scelta di questi coefficienti  $c_i$  in modo da soddisfare le specifiche date.

La chiave della soluzione è legata al fatto che la risposta in frequenza della serie dei coseni in eq.3.80 è una funzione *lineare* con coefficienti sconosciuti. Facciamo un esempio volutamente molto semplice per illustrare l'idea. Supponiamo di voler progettare un filtro di lunghezza 3 – nel quale dovremo scegliere appunto due soli coefficienti. Potremmo dare le specifiche seguenti:

1. nella parte *passband*, il confine superiore della funzione non deve superare il valore 1.05, ossia:

$$\hat{H}(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega \leq 1.05 \quad (3.81)$$

2. nella parte *passband*, il confine inferiore della funzione non deve essere meno di 0.95, ossia:

$$\hat{H}(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega \geq 0.95 \quad (3.82)$$

3. e così via.

Si mettono insieme tante “restrizioni” di questo tipo suddividendo la funzione in tanti punti e poi si cercano i coefficienti  $c_i$  che soddisfino simultaneamente tutti questi punti. Se, ad esempio, suddividiamo la parte *passband* in 500 punti e la parte *stopband* in altri 500 punti, avremo 1000 “restrizioni” da rispettare simultaneamente. La soluzione sembra molto difficile, ma in realtà la matematica degli anni '40 ha trovato degli algoritmi (detti di *programmazione lineare*) per risolvere questo tipo di problemi. Questo tipo di problemi si chiama *minimax* perché vogliamo *massimizzare la distanza minima* per ogni “restrizione”.

A questo punto, tenendo conto del fatto che i coefficienti che si stanno cercando sono quelli di una serie di coseni, possiamo utilizzare una serie di Fourier di soli coseni con le ampiezze che soddisfino le restrizioni poste. I coefficienti della serie dovranno essere

### 3 I filtri FIR

opportunamente “finestrati” per evitare il fenomeno del *ripple* nella parte *passband* e nella parte *band-reject*. La lunghezza del filtro sarà basata sulle restrizioni poste sulla larghezza di banda della transizione.

## 4 Filtri a feedback (IIR)

### 4.1 Introduzione

I filtri a feedback (IIR - per *Infinite Impulse Response*) sono filtri nei quali vengono re-immessi in ingresso versioni ritardate e riscalate dell'uscita.

Il filtro IIR più semplice è:

$$y_t = x_t + a_1 y_{t-1} \quad (4.1)$$

In eq.4.1 l'ultimo campione in uscita viene riscalato di un fattore  $a_1$  e sommato di nuovo all'ingresso.

Potenzialmente la risposta di questo filtro a un impulso unitario è infinita: p.es., introducendo un segnale consistente in un 1 al campione zero e zero per tutti gli altri campioni all'interno di un filtro del genere con un fattore  $a_1 = 0.5$  otterremo in uscita:

$$y_t = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \dots \quad (4.2)$$

e cioè una risposta *infinita*. Questo non può mai succedere con i filtri FIR, la cui risposta è al massimo il numero dei campioni in ingresso più il numero di campioni del filtro (i *termini* meno uno).

L'altra differenza grossa con i filtri FIR è che gli IIR possono letteralmente *esplodere*. Per capire questo riprendiamo il filtro descritto in 4.1 e poniamo il fattore  $a_1 = 2$ . L'uscita numerica del filtro sarà:

$$y_t = 1, 2, 4, 8, 16, \dots \quad (4.3)$$

Essa divergerà all'infinito.

Per capire bene perché, sostituiamo in eq.4.1 a  $y_t$  e  $x_t$  (singoli campioni) i vettori  $Y$  e  $X$  (che rappresentano "interi segnali"):

$$Y = X + a_1 z^{-1} Y \quad (4.4)$$

Se raggruppiamo i termini, l'eq.4.4 diventa:

$$X = Y - a_1 z^{-1} Y \quad (4.5)$$

Ma questa è l'equazione dei filtri FIR (feed-forward), solo che ingressi e uscite sono scambiati. Sappiamo che la funzione di trasferimento del corrispondente filtro FIR è:

$$1 - a_1 z^{-1} \quad (4.6)$$

#### 4 Filtri a feedback (IIR)

e, dato che il caso del filtro IIR presenta l'equazione in forma invertita, ossia:

$$X = H(z)Y \quad (4.7)$$

ovvero

$$Y = \frac{1}{H(z)}X \quad (4.8)$$

la funzione di trasferimento sarà quindi:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (4.9)$$

La magnitudine della risposta in frequenza si otterrà come sempre operando la sostituzione  $z = e^{i\omega}$  e calcolando il modulo:

$$|H(z)| = \frac{1}{|1 - a_1 e^{-i\omega}|} \quad (4.10)$$

Quando  $z = a_1$ ,  $z^{-1} = \frac{1}{a_1}$ , il denominatore dell'eq.4.10 diventa

$$1 - \frac{a_1}{a_1} = 1 - 1 = 0 \quad (4.11)$$

e quindi in  $a_1$  noi abbiamo un punto che diverge all'infinito. Quel punto si chiama *polo*. Per calcolare bene la magnitudine della risposta sarà opportuno moltiplicare numeratore e denominatore per  $z$ :

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1} \quad (4.12)$$

Il modulo sarà

$$|H(z)| = \frac{|z|}{|z - a_1|} \quad (4.13)$$

ossia, sostituendo  $z = e^{i\omega}$

$$|H(z)| = \frac{|e^{i\omega}|}{|e^{i\omega} - a_1|} \quad (4.14)$$

ma  $|e^{i\omega}| = 1$  per qualsiasi  $\omega$ , quindi l'eq.4.14 diventa:

$$|H(z)| = \frac{1}{|e^{i\omega} - a_1|} \quad (4.15)$$

Scomponendo il denominatore in parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\begin{aligned} Re_{den} &= \cos\omega - a_1 \\ Im_{den} &= \sin\omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

e il modulo sarà quindi



$$|den| = \sqrt{(\cos\omega - a_1)^2 + (\sin\omega)^2} \quad (4.17)$$

ma

$$(\cos\omega - a_1)^2 = (\cos\omega - a_1)(\cos\omega - a_1) = \cos^2(\omega) - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2 \quad (4.18)$$

e quindi

$$|den| = \sqrt{\cos^2(\omega) - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2 + \sin^2(\omega)} \quad (4.19)$$

Ricordando che  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  per qualsiasi  $\omega$ , possiamo semplificare:

$$|den| = \sqrt{1 - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2} \quad (4.20)$$

e l'eq.4.15 diventa:

$$|H(z)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2}} \quad (4.21)$$

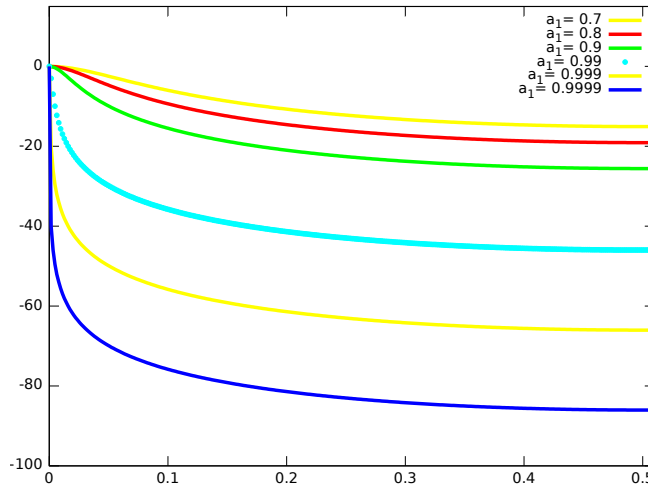


Figura 4.1: Magnitudine (normalizzata a 0dB) del filtro IIR  $\frac{1}{1-a_1z^{-1}}$

La figura 4.1 illustra la magnitudine (normalizzata a 0dB) del nostro filtro con valori diversi di  $a_1$ .

## 4.2 Risonanza e larghezza di banda

### 4.2.1 Risonanza e larghezza di banda di un filtro

Dato che si tratta di una funzione continua, la larghezza di banda di un filtro è per definizione il punto in cui la potenza è dimezzata (cioè  $1/\sqrt{2} = -3dB$  – cf. Fig. 4.2 nella pagina seguente)

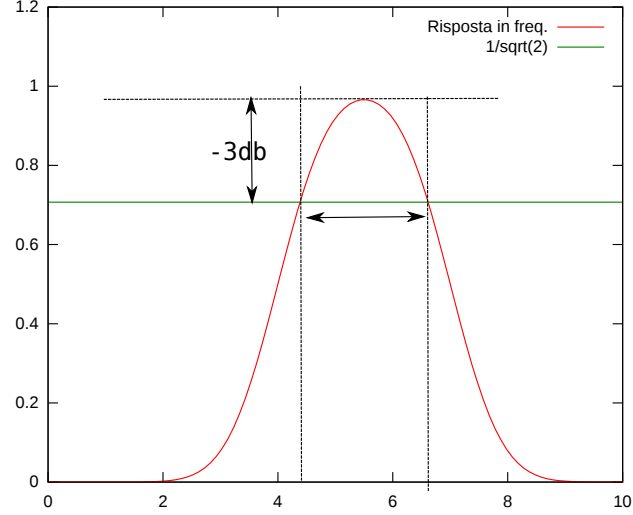


Figura 4.2: Misurazione della larghezza di banda di un filtro

Quando un filtro ha un polo collocato da qualche parte sul piano  $z$  questo polo avrà un modulo  $R$  e un angolo  $\theta$ .

Consideriamo ora l'effetto di un polo sul cerchio unitario sull'asse reale: se  $\theta$  è 0 avremo un filtro passa basso e l'algebra si semplifica. Se  $\theta$  è non-zero l'effetto sarà uguale ruotato di un angolo  $\theta$ .

Dato che per i filtri IIR a un polo la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (4.22)$$

l'inverso del quadrato della della risposta in magnitudine ad una frequenza  $\psi(\text{rad/campione})$  legata a questo polo sull'asse reale laddove  $z = R$  è

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = |1 - a_1 z^{-1}|^2 = |z - a_1|^2 \quad (4.23)$$

ponendo  $z = e^{i\theta}$  e  $a_1 = R$

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = |e^{i\theta} - R|^2 \quad (4.24)$$

svolgendo il modulo

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R\cos\theta + R^2 \quad (4.25)$$

Nel centro della risonanza  $\theta = 0$ ,  $\cos\theta = 1$  e l'equazione diventa:

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R\cos\theta + R^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R + R^2 = (1 - R)^2 \quad (4.27)$$

cioè il quadrato della distanza tra la frequenza zero sul cerchio unitario ( $z = 1$ ) è il polo. Per trovare i punti in cui la magnitudine è  $1/\sqrt{2}$ , guardiamo per quale  $\theta$  la magnitudine è il doppio di questo, quindi:

$$1 - 2R\cos\theta + R^2 = 2(1 - R)^2 = 2[1 - 2R + R^2] \quad (4.28)$$

Risolviamo quindi l'eq.4.28 per  $\theta$ :

$$-2R\cos\theta = 2 - 4R + 2R^2 - 1 - 2R^2 = 1 - 4R \quad (4.29)$$

ossia

$$\cos\theta = -\frac{1}{2R} + \frac{4R}{2R} = -\frac{1}{2R} + 2R \quad (4.30)$$

quindi

$$\theta = \arccos\left(2R - \frac{1}{2R}\right) \quad (4.31)$$

## 4.3 Resons

I filtri a un polo hanno i poli e gli zeri che si dispongono soltanto a freq. zero o nyquist, a seconda del fatto che il polo sia più vicino a  $z = +1$  o  $z = -1$ .

Per avere filtri che risuonino ad una frequenza desiderata qualsiasi abbiamo (e per fare in modo che il filtro tiri fuori un segnale reale) ci vogliono almeno un paio di poli disposti in maniera complessa coniugata

$$H(z) = \frac{1}{(1 - Re^{i\theta}z^{-1})(1 - Re^{-i\theta}z^{-1})} \quad (4.32)$$

dove  $R$  è il modulo del polo e  $\theta$  è l'angolo (freq) e  $Re^{+/-\theta}$  sono le radici del denominatore (poli)

Ora se eseguiamo la moltiplicazione del denominatore quello che otteniamo è:

#### 4 Filtri a feedback (IIR)

$$\begin{aligned}
 den &= (1 - Re^{i\theta}z^{-1})(1 - Re^{-i\theta}z^{-1}) \\
 &= 1 - Re^{-i\theta}z^{-1} - Re^{i\theta}z^{-1} + R^2z^{-2} \\
 &= 1 - Rz^{-1}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + R^2z^{-2} \\
 &= 1 - Rz^{-1}2\cos\theta + R^2z^{-2}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2R\cos\theta)z^{-1} + R^2z^{-2}} \tag{4.34}$$

Se interpretiamo  $z^{-1}$  come “ritardo di un campione”, vediamo subito che questa funzione di trasferimento corrisponde al filtro:

$$y_t = x_t + (2R\cos\theta)y_{t-1} - R^2y_{t-2} \tag{4.35}$$

#### 4.4 Per migliorare i reson: aggiungere gli zeri

Combinando *feedback* (filtri a poli) con *feed-forward* (filtri FIR, con zeri) si migliora sostanzialmente la risposta dei filtri Reson (ed cos che sono fatti normalmente). Questo permette di avere delle buone risposte anche quando la campana del filtro è a bassa frequenza.

Un modo per migliorare la forma è quello di porre uno zero a  $z = 1$ , e già che ci siamo per simmetria porne uno anche per  $z = nyquist = \pi$ .

Possiamo farlo moltiplicando la funzione di trasferimento del reson per un fattore  $1 - z^{-2}$ , che pone degli zeri a  $z = \pm 1$ . Quindi la funzione di trasferimento diventerà:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2R\cos\theta z^{-1} + R^2z^{-2}} \tag{4.36}$$

#### 4.5 Filtri bi-quad (ellittici)

Nei filtri FIR è sufficiente creare un numero esteso di termini (i.e. un sufficiente numero di zeri) per ottenere la funzione di trasferimento desiderata. La cosa è molto più complicata con i filtri IIR, perché i poli sono più complicati da gestire che gli zeri.

Negli anni '30 i matematici hanno formulato alcune possibili risposte “prefabbricate” al problema. Una di queste, ad esempio, è il filtro biquadratico (*biquad*) *ellittico*, il quale è combinabile in serie e/o in parallelo per ottenere la funzione di trasferimento desiderata. La forma canonica del filtro ellittico è

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}} \tag{4.37}$$

(due poli e due zeri). Utilizzando questa forma in stadi successivi (filtri a cascata) è possibile approssimare la funzione di trasferimento desiderata.

## 5 Filtri a pettine (Comb)

Quando abbiamo studiato i filtri FIR (cf. Cap.3) abbiamo visto che si possono realizzare filtri nella forma

$$y_t = x_t - R^L x_{t-L} \quad (5.1)$$

dove  $y$  e  $x$  sono, come di consueto, rispettivamente la nostra uscita e il nostro ingresso. Questi filtri erano costituiti dalla somma algebrica dell'ingresso e della sua copia ritardata di  $L$  campioni.

Se sostituiamo all'ingresso ritardato  $l'$ uscita ritardata, otteniamo

$$y_t = x_t + R^L y_{t-L} \quad (5.2)$$

La rappresentazione vettoriale di questa equazione è

$$Y = X + R^L z^{-L} Y \quad (5.3)$$

Se raggruppo i fattori ottengo

$$Y - R^L z^{-L} Y = Y(1 - R^L z^{-L}) = X \quad (5.4)$$

ossia

$$Y = \frac{X}{1 - R^L z^{-L}} \quad (5.5)$$

Quindi la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{1 - R^L z^{-L}} \quad (5.6)$$

Un filtro con questa funzione di trasferimento si chiama *filtro a pettine*.

Questa funzione di trasferimento è il reciproco della funzione di trasferimento dell'equazione 5.1. Quindi se li mettiamo in cascata otteniamo una risposta unitaria perché l'azione del primo cancellerà quella del secondo. Per constatare questo basta metterli uno dietro l'altro:

$$\begin{aligned} y_t &= x_t - R^L x_{t-L} \\ w_t &= y_t + R^L w_{t-L} \end{aligned} \quad (5.7)$$

( $w_t$  è l'uscita ottenuta usando l'uscita del primo filtro,  $y_t$ , come ingresso del secondo filtro).

Ma

## 5 Filtri a pettine (Comb)

$$y_t = w_t - R^L w_{t-L} \quad (5.8)$$

Se sostituisco  $y_t$  nella prima equazione ottengo

$$x_t - R^L x_{t-L} = w_t - R^L w_{t-L} \quad (5.9)$$

Se il segnale è causale, noteremo che  $x_t = w_t$  per  $t = 0, 1, \dots, L-1$  dato che  $x_{t-L}$  e  $w_{t-L}$  valgono zero in quell'ambito. Applicando lo stesso ragionamento potremo osservare che  $x_t = w_t$  per  $t = L, L+1, \dots, 2L-1$ . E così via a blocchi di  $L$  campioni. Quindi evidentemente si tratta dello stesso segnale spostato di  $L$  campioni.

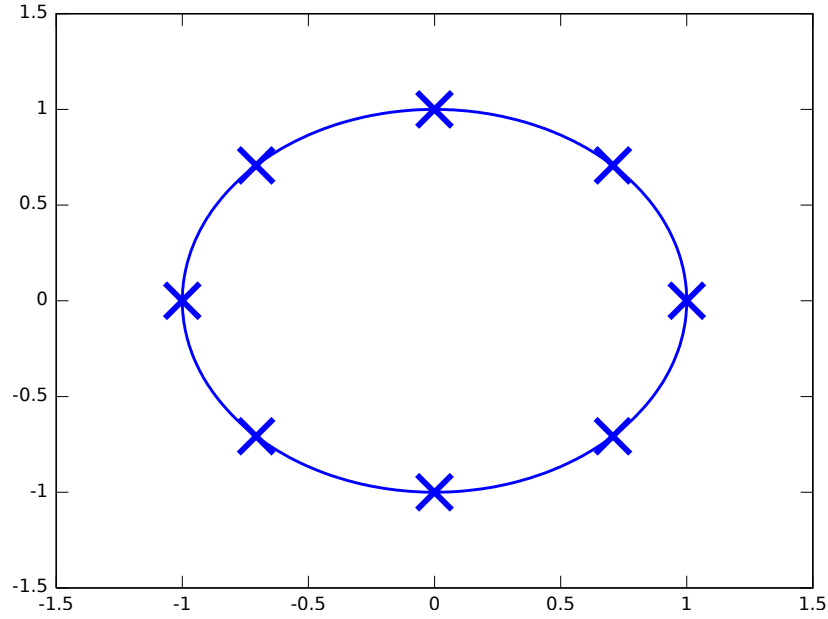


Figura 5.1: La collocazione dei poli in un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$

### 5.1 Implementazione real-world

Nel mondo reale i filtri a pettine vengono usati per diversi effetti in campo audio e musicale. La fig. 5.4 a pagina 48 illustra la risposta all'impulso di un filtro comb con frequenza di risonanza  $233Hz$ , ossia con un ritardo di 189 campioni.

### 5.2 Analogia con le onde stazionarie

Riflettendoci sopra, i filtri comb altro non fanno che aggiungere l'uscita attenuata e ritardata di  $L$  campioni all'ingresso. E' il meccanismo dell'*eco*.

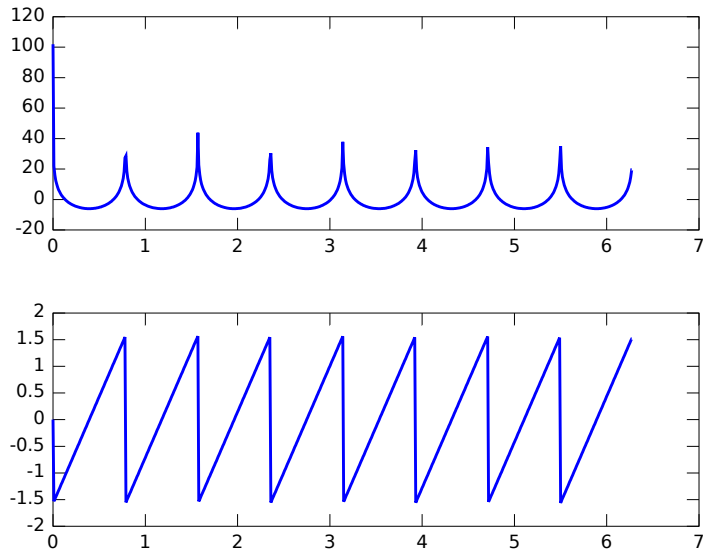


Figura 5.2: Magnitudine e fase di un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$

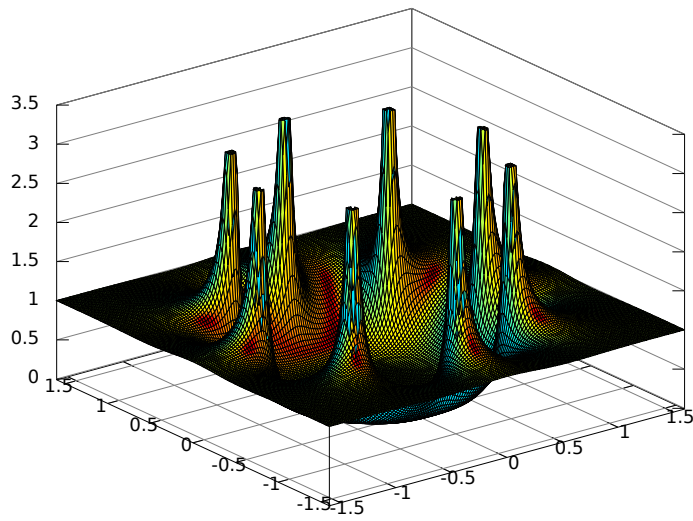


Figura 5.3: Magnitudine di un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$  sul piano zeta

## 5 Filtri a pettine (Comb)

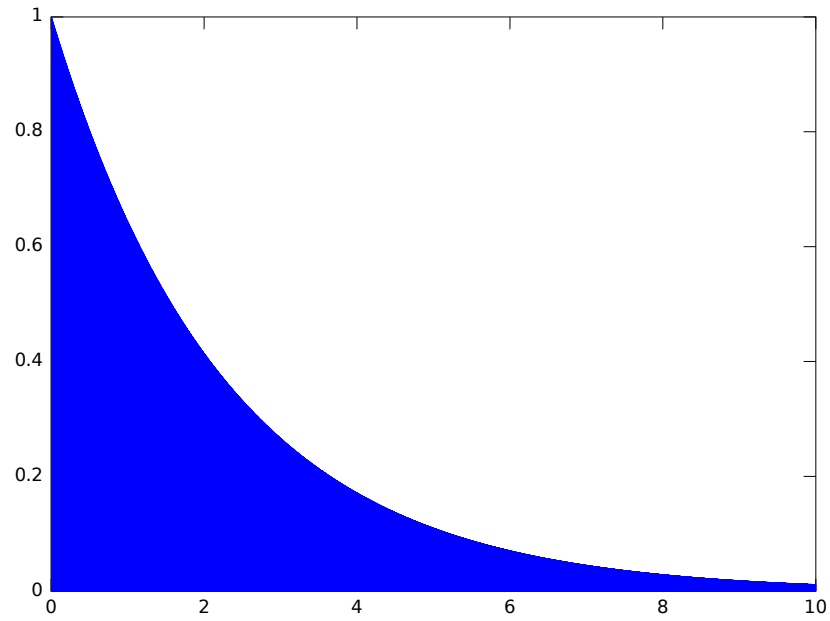


Figura 5.4: Risposta all'impulso di un filtro a pettine con frequenza di risonanza  $233Hz$

C'è anche una robusta analogia con la riflessione delle onde stazionarie, ad esempio in un tubo con entrambi le estremità chiuse (o con entrambi le estremità aperte): le estremità chiuse cambiano di segno alla riflessione mentre le estremità aperte no. Le altre onde che si propagano in questo modo sono quelle delle corde tenute ferme ad entrambe le estremità.



## 6 Filtri delle corde pizzicate

Cosa succede se immetto un impulso unitario in un filtro comb? Semplicemente, l'impulso tornerà  $L$  campioni dopo moltiplicato per il coefficiente  $R^L$ .

Tutti gli altri campioni valgono 0, per cui non succede niente tra il tempo 0 e il tempo  $L$ .

La risposta all'impulso sarà quindi:

Ossia  $h_t = R^t$  per  $t = 0, L, 2L, \dots$  e 0 altrimenti. Questa è una sequenza periodica di impulsi alla frequenza fondamentale di  $f_c/L$  Hz – una frazione intera della frequenza di campionamento, salvo il fatto che questi impulsi decadono con una velocità determinata da  $R$ . Più  $R$  è vicino a 1, più lento sarà il decadimento, e viceversa.

Fin qui, nulla di particolarmente eccitante. I suoni musicali, in particolare quelli percussivi, sono caratterizzati da una variazione dello spettro nel tempo. E' vero che in questo caso il suono decade nel tempo, ma il suo spettro *decade tutto insieme* e quindi non si modifica in maniera musicale.

Karplus e Strong suggerirono una modifica del filtro comb per poterlo rendere più musicale. L'idea è semplicissima: si tratta di inserire un filtro passa-basso nel loop di feedback in modo da attenuare più rapidamente le frequenze acute rispetto a quelle gravi.

Il filtro passabasso può anche essere un semplicissimo filtro di media

$$y_t = 1/2 [x_t + x_{t-1}] \quad (6.1)$$

con funzione di trasferimento

$$H(z) = 1/2 [1 + z^{-1}] \quad (6.2)$$

con uno zero che si trova in corrispondenza della frequenza di Nyquist, poiché lì  $z = -1$ .

### 6.1 Implementazione dei filtri delle corde pizzicate

Per scrivere l'equazione del filtro, è utile introdurre il segnale intermedio  $w$ , il quale compare immediatamente dopo la chiusura del loop di feedback. Il segnale  $w$  è quindi determinato dall'ingresso  $x$  e dal segnale di output ritardato e pesato  $y$ :

$$w_t = x_t + R^L y_{t-L} \quad (6.3)$$

mentre l'uscita al tempo  $t$  è determinata dal filtro FIR con input  $w$ , quindi

$$y_t = 1/2 w_t + 1/2 w_{t-1} \quad (6.4)$$

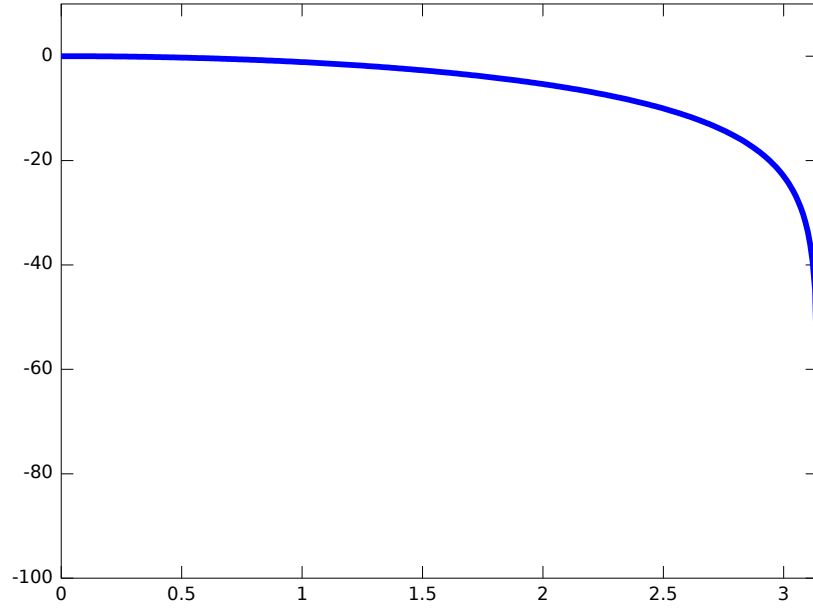


Figura 6.1: La risposta in frequenza del filtro passabasso usato nell'algoritmo di Karplus e Strong

Quindi per ogni campione  $t$  dobbiamo prima trovare  $w_t$  nei termini dell'equazione 6.3 e poi il valore dell'uscita  $y_t$  da  $w_t$  e  $w_{t-1}$  secondo l'equazione 6.4.

Cerchiamo ora di capire quale sia la risposta in frequenza di questo filtro. Se guardiamo il segnale come vettore, le equazioni 6.3 e 6.4 diventano

$$W = X + R^L z^{-L} Y \quad (6.5)$$

$$Y = 1/2[1 + z^{-1}]W \quad (6.6)$$

Per trovare la funzione di trasferimento  $H(z)$  dobbiamo risolvere l'equazione per  $Y/X$ , ossia prima sostituire l'eq.6.5 nell'eq.6.6 per ottenere solo  $X$  e  $Y$

$$X = 1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}] \quad (6.7)$$

e da qui trovare la funzione di trasferimento

$$H(z) = Y/X = \frac{1/2[1 + z^{-1}]}{1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}]} \quad (6.8)$$

Per risolvere questa equazione dobbiamo prima ottenere una formula più chiara. Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per  $2z^{L+1}$ :

## 6.1 Implementazione dei filtri delle corde pizzicate

$$H(z) = Y/X = \frac{1/2[1 + z^{-1}]2z^{L+1}}{(1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}])2z^{L+1}} = \frac{z^{L+1} + z^L}{2z^{L+1} - R^L z - R^L} \quad (6.9)$$

Per avere la risposta in frequenza dobbiamo valutare l'eq.6.9 sul cerchio unitario, quindi quando  $z = e^{i\omega}$ . Possiamo quindi sostituire  $z$  usando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} z &= \cos\omega + i\sin\omega \\ z^L &= \cos(L\omega) + i\sin(L\omega) \\ z^{L+1} &= \cos((L+1)\omega) + i\sin((L+1)\omega) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Separando quindi le parti reali e le parti immaginarie dell'eq.6.9 sia al numeratore che al denominatore ottengo:

$$\begin{aligned} \text{Reale(numeratore)} &= \cos((L+1)\omega) + \cos(L\omega) \\ \text{Immag(numeratore)} &= \sin((L+1)\omega) + \sin(L\omega) \\ \text{Reale(denominatore)} &= 2\cos((L+1)\omega) - R^L \cos\omega - R^L \\ \text{Immag(denominatore)} &= 2\sin((L+1)\omega) - R^L \sin\omega \end{aligned} \quad (6.11)$$

A questo punto per trovare la risposta in frequenza devo trovare la magnitudine di  $H(z)$  sostituendo le equazioni 6.11:

$$|H(\omega)| = \left[ \frac{[\text{Reale(numeratore)}]^2 + [\text{Immag(numeratore)}]^2}{[\text{Reale(denominatore)}]^2 + [\text{Immag(denominatore)}]^2} \right]^{1/2} \quad (6.12)$$

Realizziamone un'implementazione concreta per  $L = 32$  con un coefficiente  $R = 0.999$ . Dato che il ritardo totale del loop di feedback sarà di 32.5 campioni, ci aspettiamo che le risonanze siano ai multipli di  $f_c/32.5$ .



## Bibliografia

- [Park, 2010] Park, T. (2010). *Introduction To Digital Signal Processing: Computer Musically Speaking*. World Scientific.
- [Parks and Burrus, 1987] Parks, T. W. and Burrus, C. (1987). *Digital filter design*. Topics in digital signal processing. Wiley.
- [Shenoi, 2005] Shenoi, B. (2005). *Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design*. Wiley.
- [Steiglitz, 1974] Steiglitz, K. (1974). *An introduction to discrete systems*. Wiley.
- [Steiglitz, 1996] Steiglitz, K. (1996). *A digital signal processing primer*. Addison–Wesley, Menlo Park, California.