

# **Campionamento, Sintesi ed Elaborazione dei Segnali Musicali (CSEDSM) II dispense**

(ver.14 2014-02-04)

Nicola Bernardini



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Un ripasso dei filtri FIR</b>	<b>7</b>
2.1	Trasformata zeta applicata ai filtri FIR . . . . .	7
2.1.1	Ritardo e linearità . . . . .	7
2.2	Una collezione di trasformate zeta notevoli . . . . .	9
2.2.1	La trasformata zeta più semplice . . . . .	9
2.2.2	Un caso più interessante . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Filtri a feedback (IIR)</b>	<b>13</b>
3.1	Introduzione . . . . .	13
3.2	Risonanza e larghezza di banda . . . . .	16
3.2.1	Risonanza e larghezza di banda di un filtro . . . . .	16
3.3	Resons . . . . .	17
3.4	Per migliorare i reson: aggiungere gli zeri . . . . .	18
3.5	Filtri bi-quad (ellittici) . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Filtri a pettine (Comb)</b>	<b>19</b>
4.1	Implementazione <i>real-world</i> . . . . .	20
4.2	Analogia con le onde stazionarie . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Filtri delle corde pizzicate</b>	<b>23</b>
5.0.1	Implementazione dei filtri delle corde pizzicate . . . . .	23



# 1 Introduzione

Queste sono le dispense della seconda annualità dell'insegnamento di *topic* (aka *CSEDSM*) tenuto da Nicola Bernardini nell'A.A 2012-2013 al Conservatorio "C.Pollini" di Padova. Queste dispense sono tratte in larga parte da alcuni capitoli di *A Digital Signal Processing Primer* di Ken Steiglitz [Steiglitz, 1996] - integrati con spiegazioni supplementari laddove l'aspetto matematico è un po' più difficile, e con materiali elaborati in classe dagli studenti nonché tratti da altri testi (cf. [Steiglitz, 1974, Parks and Burrus, 1987, Park, 2010, Sheno, 2005]).



## 2 Un ripasso dei filtri FIR

### 2.1 Trasformata zeta applicata ai filtri FIR

#### 2.1.1 Ritardo e linearità

Recuperiamo le proprietà della trasformata Z e applichamole ai filtri FIR.

- filtro FIR:

$$X(k) \xrightarrow{H} Y(k) \quad (2.1)$$

La forma generalizzata di un filtro FIR è:

$$Y(k) = C(1)X(k) + C(2)X(k-1) + \dots + C(M)X(k-M+1) \quad (2.2)$$

- per via della proprietà 2 della trasformata Z (linearità) la trasformata Z di questa somma è uguale alla somma delle trasformata Z di ogni termine. Per via della proprietà 1, ciascun termine può essere letto come multiplo della trasformata Z di  $X(k)$ , perché:

$$\begin{array}{ccc} C(1)X(k) & \xrightarrow{Z} & C(1)X^*(z) \\ C(2)X(k-1) & \xrightarrow{Z} & C(2)z^{-1}X^*(z) \\ C(3)X(k-2) & \xrightarrow{Z} & C(3)z^{-2}X^*(z) \\ & \vdots & \\ C(M)X(k-M+1) & \xrightarrow{Z} & C(M)z^{-(M+1)}X^*(z) \end{array} \quad (2.3)$$

quindi:

$$Y(k) \xrightarrow{Z} Y^*(z) = [C(1) + C(2)z^{-1} + C(2)z^{-2} + \dots + C(M)z^{-(M+1)}]X^*(z) \quad (2.4)$$

ponendo

$$H(z) = [C(1) + C(2)z^{-1} + C(2)z^{-2} + \dots + C(M)z^{-(M+1)}] \quad (2.5)$$

ossia

## 2 Un ripasso dei filtri FIR

$$H(z) = \frac{Y^*(z)}{X^*(z)} \quad (2.6)$$

- quindi: quando  $X$  è un fasore, anche  $Y$  è un fasore e il rapporto tra  $X$  e  $Y$  è proprio  $H(z)$  (quando  $z = e^{i\omega}$ ): quando io metto dentro al filtro un segnale sinusoidale ottengo un segnale sinusoidale riscalato
- ma la faccenda è molto più generale: quando  $X$  è un qualsiasi segnale causale (one-sided), l'uscita di un black box può essere ottenuta semplicemente moltiplicando la sua trasformata  $Z$  per la funzione di trasferimento  $H(z)$ 
  - facciamo un esempio semplice:

$$\begin{aligned} X(k) &= 0 && \text{per } k < 0 \\ X(0) &= 1 \\ X(1) &= 1 \\ X(k) &= 0 && \text{per } k > 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

- dalla definizione di trasformata  $Z$  ( $X^*(z) = \sum_0^N X(n)z^{-n}$ ), la trasformata di questo segnale è:

$$X^*(z) = 1 + z^{-1} \quad (2.8)$$

- ora filtriамolo col solito filtro di media semplicissimo:

$$Y(k) = X(k) + X(k-1) \quad (2.9)$$

- la funzione di trasferimento è:

$$H(z) = 1 + z^{-1} \quad (2.10)$$

- quindi:

$$Y^*(z) = H(z)X^*(z) = (1 + z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \quad (2.11)$$

- è facile fare la trasformata inversa perché ci sono tutte potenze decrescenti di zeta, quindi:

$$\begin{aligned} Y(k) &= 0 && \text{per } k < 0 \\ Y(0) &= 1 \\ Y(1) &= 2 \\ Y(2) &= 1 \\ Y(k) &= 0 && \text{per } k > 2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

si può verificare la correttezza facendo girare “a mano” il filtro



**Esercizi**

- rifare il filtraggio sopra esposto con il seguente segnale:

$$X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 (\text{o anche } \leq 5) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.13)$$

e con le seguenti funzioni di trasferimento:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - z^{-1} \\ H(z) &= 1 + z^{-1} \\ H(z) &= (1 - z^{-1})^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

**2.2 Una collezione di trasformate zeta notevoli****2.2.1 La trasformata zeta più semplice**

La trasformata più semplice è quella che prevede campioni non zero per un numero finito di campioni. Per come abbiamo visto l'altra volta, la trasformata  $Z$  di un segnale del genere è semplicemente un polinomio in  $z^{-1}$ . P.es.:

$$X(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ .5 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ .5 & k = 3 \\ 0 & k > 3 \end{cases} \quad (2.15)$$

Per la definizione di trasformata  $Z$ , la trasformata  $Z$  di questo segnale è

$$X^*(z) = .5z^{-1} + z^{-2} + .5z^{-3} \quad (2.16)$$

E la trasformata inversa è semplicemente la sequenza dei coefficienti del polinomio (== come se fossero ciascuno moltiplicato per 1)

**2.2.2 Un caso più interessante**

Un caso più interessante ha luogo quando il segnale è non zero per un infinito/indefinito numero di valori di  $k$ , cioè quando il segnale va avanti per sempre. Questo a noi fa comodo per i segnali audio. Per noi p.es. sono molto importanti classi di segnali che sono esponenziali o sinusoidali di natura, e one-sided.

Il segnale più semplice è la unit-step function in cui  $X(k) = 1$  per  $k \geq 0$ . La sua trasformata  $z$  è:

$$X^*(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \quad (2.17)$$

Questa è una serie geometrica ben conosciuta e sappiamo dall'algebra che la sua trasformata  $z$  è quindi:

## 2 Un ripasso dei filtri FIR

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2.18)$$

La serie geometrica funziona così: poniamo una serie

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \left\{ a \frac{1 - r^n}{1 - r} \right\} \quad (2.19)$$

come ci si arriva? poniamo:

$$s = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (2.20)$$

allora

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (2.21)$$

ma  $s - sr = a - ar^n$ , quindi  $s(1 - r) = a(1 - r^n)$ , quindi

$$s = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (2.22)$$

quando  $n$  va all'infinito, è necessario che  $r < 1$  per far convergere la somma. In questo caso

$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$  diventa  $= \frac{a}{1-r}$  e se  $a = 1$ ,  $= \frac{1}{1-r}$   
quindi

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2.23)$$

a patto che  $|z^{-1}| < 1$  e dato che  $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$  questo equivale a dire che  $|z| > 1$

Se esaminiamo questo polinomio più da vicino, e moltiplichiamo num e den per  $z$ , questo diventa:

$$\frac{z}{z - 1} \quad (2.24)$$

e per  $z = 1$ , la trasformata zeta diventa infinita. Questo punto si chiama un *polo*. In questo caso quindi la trasformata  $z$  ha uno zero per  $z = 0$  e un polo per  $z = 1$ . (un piano con uno zero al centro e un polo sul 1 reale – cf. Fig. 2.1 a fronte). Quindi a frequenza zero si sommano tutti gli uni e la somma infinita esplode. Possiamo trovare la magnitudine della trasformata  $z$  sul cerchio unitario e questa si chiama “contenuto frequenziale” o *risposta in frequenza* del segnale. Ponendo  $z = e^{-i\omega}$

$$X^*(z) = \frac{1}{1 - e^{i\omega}} \quad (2.25)$$

la magnitudine (il modulo) è quindi:

$$|X^*(z)| = \frac{1}{|1 - e^{i\omega}|} \quad (2.26)$$

## 2.2 Una collezione di trasformate zeta notevoli

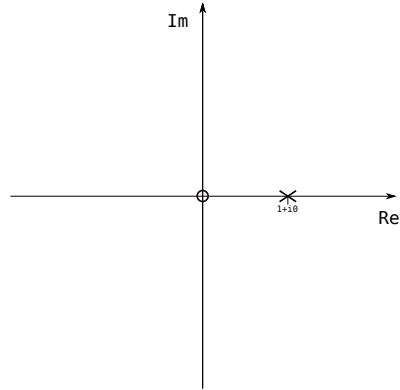


Figura 2.1: Poli e zeri del filtro  $X^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

e se moltiplico entrambi i membri del denominatore per  $e^{-i\omega/2}$  ottengo

$$|X^*(z)| = \frac{1}{|e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}|} \quad (2.27)$$

e quindi per via della formula di Eulero

$$|X^*(z)| = \frac{1}{2|\sin\omega/2|} \quad (2.28)$$

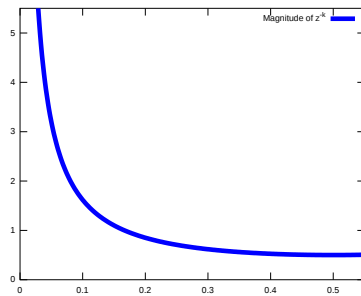


Figura 2.2: Magnitudine dell'eq.2.28 con freq. normalizzata



## 3 Filtri a feedback (IIR)

### 3.1 Introduzione

I filtri a feedback (IIR - per *Infinite Impulse Response*) sono filtri nei quali vengono re-immessi in ingresso versioni ritardate e riscalate dell'uscita.

Il filtro IIR più semplice è:

$$y_t = x_t + a_1 y_{t-1} \quad (3.1)$$

In eq.3.1 l'ultimo campione in uscita viene riscalato di un fattore  $a_1$  e sommato di nuovo all'ingresso.

Potenzialmente la risposta di questo filtro a un impulso unitario è infinita: p.es., introducendo un segnale consistente in un 1 al campione zero e zero per tutti gli altri campioni all'interno di un filtro del genere con un fattore  $a_1 = 0.5$  otterremo in uscita:

$$y_t = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \dots \quad (3.2)$$

e cioè una risposta *infinita*. Questo non può mai succedere con i filtri FIR, la cui risposta è al massimo il numero dei campioni in ingresso più il numero di campioni del filtro (i *termini* meno uno).

L'altra differenza grossa con i filtri FIR è che gli IIR possono letteralmente *esplodere*. Per capire questo riprendiamo il filtro descritto in 3.1 e poniamo il fattore  $a_1 = 2$ . L'uscita numerica del filtro sarà:

$$y_t = 1, 2, 4, 8, 16, \dots \quad (3.3)$$

Essa divergerà all'infinito.

Per capire bene perché, sostituiamo in eq.3.1 a  $y_t$  e  $x_t$  (singoli campioni) i vettori  $Y$  e  $X$  (che rappresentano "interi segnali"):

$$Y = X + a_1 z^{-1} Y \quad (3.4)$$

Se raggruppiamo i termini, l'eq.3.4 diventa:

$$X = Y - a_1 z^{-1} Y \quad (3.5)$$

Ma questa è l'equazione dei filtri FIR (feed-forward), solo che ingressi e uscite sono scambiati. Sappiamo che la funzione di trasferimento del corrispondente filtro FIR è:

$$1 - a_1 z^{-1} \quad (3.6)$$

### 3 Filtri a feedback (IIR)

e, dato che il caso del filtro IIR presenta l'equazione in forma invertita, ossia:

$$X = H(z)Y \quad (3.7)$$

ovvero

$$Y = \frac{1}{H(z)}X \quad (3.8)$$

la funzione di trasferimento sarà quindi:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (3.9)$$

La magnitudine della risposta in frequenza si otterrà come sempre operando la sostituzione  $z = e^{i\omega}$  e calcolando il modulo:

$$|H(z)| = \frac{1}{|1 - a_1 e^{-i\omega}|} \quad (3.10)$$

Quando  $z = a_1$ ,  $z^{-1} = \frac{1}{a_1}$ , il denominatore dell'eq.3.10 diventa

$$1 - \frac{a_1}{a_1} = 1 - 1 = 0 \quad (3.11)$$

e quindi in  $a_1$  noi abbiamo un punto che diverge all'infinito. Quel punto si chiama *polo*. Per calcolare bene la magnitudine della risposta sarà opportuno moltiplicare numeratore e denominatore per  $z$ :

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1} \quad (3.12)$$

Il modulo sarà

$$|H(z)| = \frac{|z|}{|z - a_1|} \quad (3.13)$$

ossia, sostituendo  $z = e^{i\omega}$

$$|H(z)| = \frac{|e^{i\omega}|}{|e^{i\omega} - a_1|} \quad (3.14)$$

ma  $|e^{i\omega}| = 1$  per qualsiasi  $\omega$ , quindi l'eq.3.14 diventa:

$$|H(z)| = \frac{1}{|e^{i\omega} - a_1|} \quad (3.15)$$

Scomponendo il denominatore in parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\begin{aligned} Re_{den} &= \cos\omega - a_1 \\ Im_{den} &= \sin\omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

e il modulo sarà quindi

$$|den| = \sqrt{(\cos\omega - a_1)^2 + (\sin\omega)^2} \quad (3.17)$$

ma

$$(\cos\omega - a_1)^2 = (\cos\omega - a_1)(\cos\omega - a_1) = \cos^2(\omega) - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2 \quad (3.18)$$

e quindi

$$|den| = \sqrt{\cos^2(\omega) - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2 + \sin^2(\omega)} \quad (3.19)$$

Ricordando che  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  per qualsiasi  $\omega$ , possiamo semplificare:

$$|den| = \sqrt{1 - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2} \quad (3.20)$$

e l'eq.3.15 diventa:

$$|H(z)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a_1\cos(\omega) + a_1^2}} \quad (3.21)$$

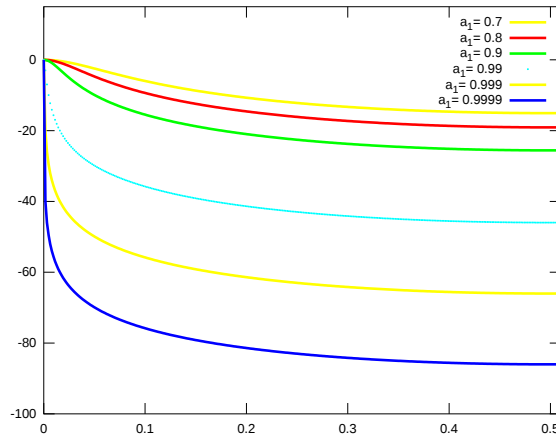


Figura 3.1: Magnitudine (normalizzata a 0dB) del filtro IIR  $\frac{1}{1-a_1z^{-1}}$

La figura 3.1 illustra la magnitudine (normalizzata a 0dB) del nostro filtro con valori diversi di  $a_1$ .

## 3.2 Risonanza e larghezza di banda

### 3.2.1 Risonanza e larghezza di banda di un filtro

Dato che si tratta di una funzione continua, la larghezza di banda di un filtro è per definizione il punto in cui la potenza è dimezzata (cioè  $1/\sqrt{2} = -3dB$  – cf.Fig. 3.2)

### 3 Filtri a feedback (IIR)

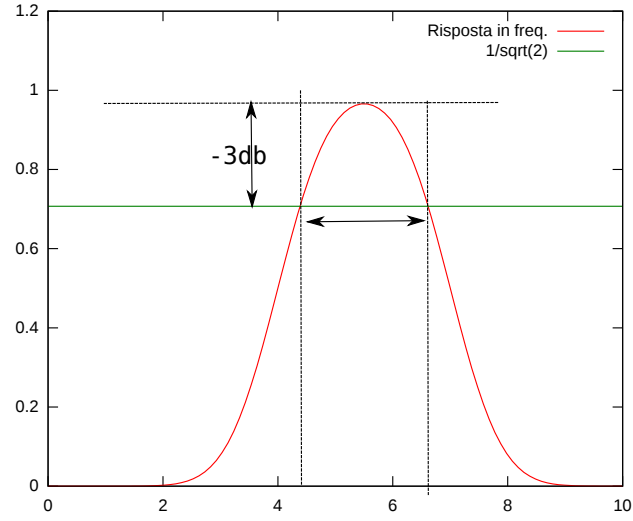


Figura 3.2: Misurazione della larghezza di banda di un filtro

Quando un filtro ha un polo collocato da qualche parte sul piano  $z$  questo polo avrà un modulo  $R$  e un angolo  $\theta$ .

Consideriamo ora l'effetto di un polo sul cerchio unitario sull'asse reale: se  $\theta$  è 0 avremo un filtro passa basso e l'algebra si semplifica. Se  $\theta$  è non-zero l'effetto sarà uguale ruotato di un angolo  $\theta$ .

Dato che per i filtri IIR a un polo la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (3.22)$$

l'inverso del quadrato della risposta in magnitudine ad una frequenza  $\psi(\text{rad/campione})$  legata a questo polo sull'asse reale laddove  $z = R$  è

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = |1 - a_1 z^{-1}|^2 = |z - a_1|^2 \quad (3.23)$$

ponendo  $z = e^{i\theta}$  e  $a_1 = R$

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = |e^{i\theta} - R|^2 \quad (3.24)$$

svolgendo il modulo

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R \cos \theta + R^2 \quad (3.25)$$

Nel centro della risonanza  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$  e l'equazione diventa:



$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R\cos\theta + R^2 \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = 1 - 2R + R^2 = (1 - R)^2 \quad (3.27)$$

cioè il quadrato della distanza tra la frequenza zero sul cerchio unitario ( $z = 1$ ) è il polo. Per trovare i punti in cui la magnitudine è  $1/\sqrt{2}$ , guardiamo per quale  $\theta$  la magnitudine è il doppio di questo, quindi:

$$1 - 2R\cos\theta + R^2 = 2(1 - R)^2 = 2[1 - 2R + R^2] \quad (3.28)$$

Risolviemo quindi l'eq.3.28 per  $\theta$ :

$$-2R\cos\theta = 2 - 4R + 2R^2 - 1 - 2R^2 = 1 - 4R \quad (3.29)$$

ossia

$$\cos\theta = -\frac{1}{2R} + \frac{4R}{2R} = -\frac{1}{2R} + 2R \quad (3.30)$$

quindi

$$\theta = \arccos\left(2R - \frac{1}{2R}\right) \quad (3.31)$$

### 3.3 Resons

I filtri a un polo hanno i poli e gli zeri che si dispongono soltanto a freq. zero o nyquist, a seconda del fatto che il polo sia più vicino a  $z = +1$  o  $z = -1$ .

Per avere filtri che risuonino ad una frequenza desiderata qualsiasi abbiamo (e per fare in modo che il filtro tiri fuori un segnale reale) ci vogliono almeno un paio di poli disposti in maniera complessa coniugata

$$H(z) = \frac{1}{(1 - Re^{i\theta}z^{-1})(1 - Re^{-i\theta}z^{-1})} \quad (3.32)$$

dove  $R$  è il modulo del polo e  $\theta$  è l'angolo (frq) e  $Re^{+/-\theta}$  sono le radici del denominatore (poli)

Ora se eseguiamo la moltiplicazione del denominatore quello che otteniamo è:

$$\begin{aligned} den &= (1 - Re^{i\theta}z^{-1})(1 - Re^{-i\theta}z^{-1}) \\ &= 1 - Re^{-i\theta}z^{-1} - Re^{i\theta}z^{-1} + R^2z^{-2} \\ &= 1 - Rz^{-1}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + R^2z^{-2} \\ &= 1 - Rz^{-1}2\cos\theta + R^2z^{-2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2R\cos\theta)z^{-1} + R^2z^{-2}} \quad (3.34)$$

### 3 Filtri a feedback (IIR)

Se interpretiamo  $z^{-1}$  come “ritardo di un campione”, vediamo subito che questa funzione di trasferimento corrisponde al filtro:

$$y_t = x_t + (2R\cos\theta)y_{t-1} - R^2y_{t-2} \quad (3.35)$$

### 3.4 Per migliorare i reson: aggiungere gli zeri

Combinando *feedback* (filtri a poli) con *feed-forward* (filtri FIR, con zeri) si migliora sostanzialmente la risposta dei filtri Reson (ed  $\cos$  che sono fatti normalmente). Questo permette di avere delle buone risposte anche quando la campana del filtro è a bassa frequenza.

Un modo per migliorare la forma è quello di porre uno zero a  $z = 1$ , e già che ci siamo per simmetria porne uno anche per  $z = nyquist = \pi$ .

Possiamo farlo moltiplicando la funzione di trasferimento del reson per un fattore  $1 - z^{-2}$ , che pone degli zeri a  $z = \pm 1$ . Quindi la funzione di trasferimento diventerà:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2R\cos\theta z^{-1} + R^2 z^{-2}} \quad (3.36)$$

### 3.5 Filtri bi-quad (ellittici)

Nei filtri FIR è sufficiente creare un numero esteso di termini (i.e. un sufficiente numero di zeri) per ottenere la funzione di trasferimento desiderata. La cosa è molto più complicata con i filtri IIR, perché i poli sono più complicati da gestire che gli zeri.

Negli anni '30 i matematici hanno formulato alcune possibili risposte “prefabbricate” al problema. Una di queste, ad esempio, è il filtro biquadratico (*biquad*) *ellittico*, il quale è combinabile in serie e/o in parallelo per ottenere la funzione di trasferimento desiderata. La forma canonica del filtro ellittico è

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}} \quad (3.37)$$

(due poli e due zeri). Utilizzando questa forma in stadi successivi (filtri a cascata) è possibile approssimare la funzione di trasferimento desiderata.

## 4 Filtri a pettine (Comb)

Quando abbiamo studiato i filtri FIR (cf. Cap.2) abbiamo visto che si possono realizzare filtri nella forma

$$y_t = x_t - R^L x_{t-L} \quad (4.1)$$

dove  $y$  e  $x$  sono, come di consueto, rispettivamente la nostra uscita e il nostro ingresso. Questi filtri erano costituiti dalla somma algebrica dell'ingresso e della sua copia ritardata di  $L$  campioni.

Se sostituiamo all'ingresso ritardato  $l'$ uscita ritardata, otteniamo

$$y_t = x_t + R^L y_{t-L} \quad (4.2)$$

La rappresentazione vettoriale di questa equazione è

$$Y = X + R^L z^{-L} Y \quad (4.3)$$

Se raggruppo i fattori ottengo

$$Y - R^L z^{-L} Y = Y(1 - R^L z^{-L}) = X \quad (4.4)$$

ossia

$$Y = \frac{X}{1 - R^L z^{-L}} \quad (4.5)$$

Quindi la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{1 - R^L z^{-L}} \quad (4.6)$$

Un filtro con questa funzione di trasferimento si chiama *filtro a pettine*.

Questa funzione di trasferimento è il reciproco della funzione di trasferimento dell'equazione 4.1. Quindi se li mettiamo in cascata otteniamo una risposta unitaria perché l'azione del primo cancellerà quella del secondo. Per constatare questo basta metterli uno dietro l'altro:

$$\begin{aligned} y_t &= x_t - R^L x_{t-L} \\ w_t &= y_t + R^L w_{t-L} \end{aligned} \quad (4.7)$$

( $w_t$  è l'uscita ottenuta usando l'uscita del primo filtro,  $y_t$ , come ingresso del secondo filtro).

Ma

#### 4 Filtri a pettine (Comb)

$$y_t = w_t - R^L w_{t-L} \quad (4.8)$$

Se sostituisco  $y_t$  nella prima equazione ottengo

$$x_t - R^L x_{t-L} = w_t - R^L w_{t-L} \quad (4.9)$$

Se il segnale è causale, noteremo che  $x_t = w_t$  per  $t = 0, 1, \dots, L-1$  dato che  $x_{t-L}$  e  $w_{t-L}$  valgono zero in quell'ambito. Applicando lo stesso ragionamento potremo osservare che  $x_t = w_t$  per  $t = L, L+1, \dots, 2L-1$ . E così via a blocchi di  $L$  campioni. Quindi evidentemente si tratta dello stesso segnale spostato di  $L$  campioni.

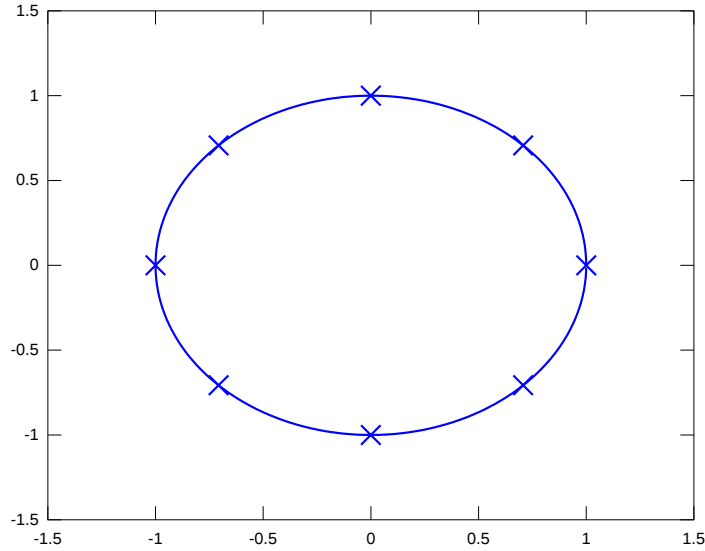


Figura 4.1: La collocazione dei poli in un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$

### 4.1 Implementazione real-world

Nel mondo reale i filtri a pettine vengono usati per diversi effetti in campo audio e musicale. La fig. 4.4 a pagina 22 illustra la risposta all'impulso di un filtro comb con frequenza di risonanza  $233\text{Hz}$ , ossia con un ritardo di 189 campioni.

### 4.2 Analogia con le onde stazionarie

Riflettendoci sopra, i filtri comb altro non fanno che aggiungere l'uscita attenuata e ritardata di  $L$  campioni all'ingresso. E' il meccanismo dell'*eco*.

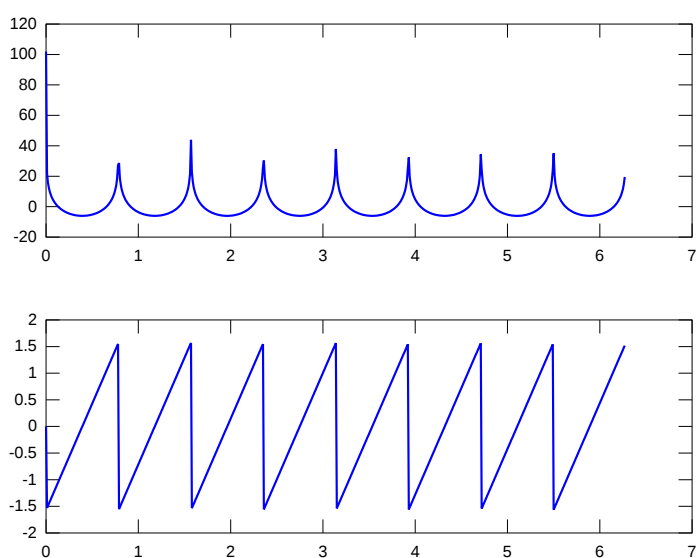


Figura 4.2: Magnitudine e fase di un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$

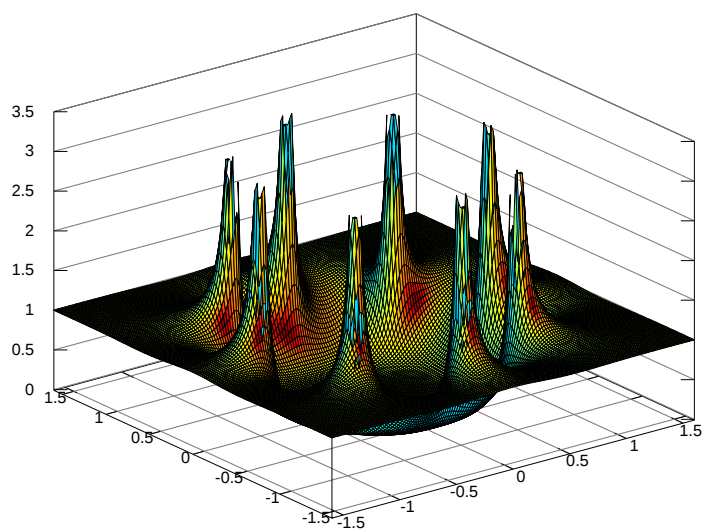


Figura 4.3: Magnitudine di un filtro comb di ottavo ordine con fattore  $R = 0.999999$  sul piano zeta

#### 4 Filtri a pettine (Comb)

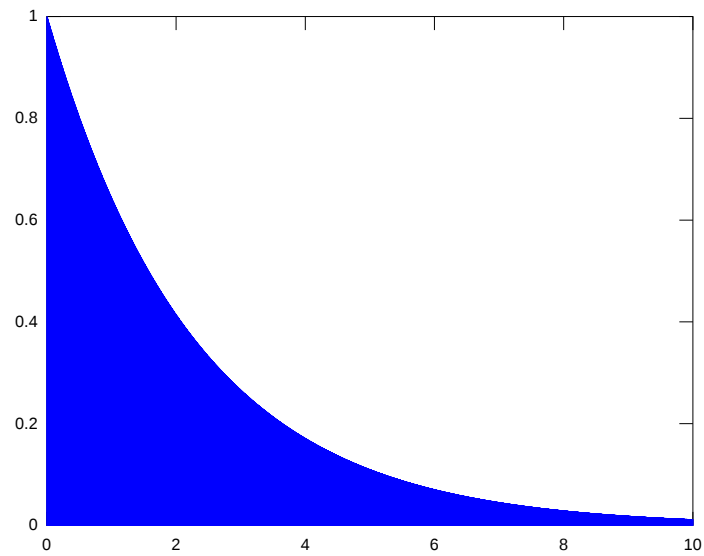


Figura 4.4: Risposta all'impulso di un filtro a pettine con frequenza di risonanza  $233Hz$

C'è anche una robusta analogia con la riflessione delle onde stazionarie, ad esempio in un tubo con entrambi le estremità chiuse (o con entrambi le estremità aperte): le estremità chiuse cambiano di segno alla riflessione mentre le estremità aperte no. Le altre onde che si propagano in questo modo sono quelle delle corde tenute ferme ad entrambe le estremità.

## 5 Filtri delle corde pizzicate

Cosa succede se immetto un impulso unitario in un filtro comb? Semplicemente, l'impulso tornerà  $L$  campioni dopo moltiplicato per il coefficiente  $R^L$ .

Tutti gli altri campioni valgono 0, per cui non succede niente tra il tempo 0 e il tempo  $L$ .

La risposta all'impulso sarà quindi:

Ossia  $h_t = R^t$  per  $t = 0, L, 2L, \dots$  e 0 altrimenti. Questa è una sequenza periodica di impulsi alla frequenza fondamentale di  $f_c/L$  Hz – una frazione intera della frequenza di campionamento, salvo il fatto che questi impulsi decadono con una velocità determinata da  $R$ . Più  $R$  è vicino a 1, più lento sarà il decadimento, e viceversa.

Fin qui, nulla di particolarmente eccitante. I suoni musicali, in particolare quelli percussivi, sono caratterizzati da una variazione dello spettro nel tempo. E' vero che in questo caso il suono decade nel tempo, ma il suo spettro *decade tutto insieme* e quindi non si modifica in maniera musicale.

Karplus e Strong suggerirono una modifica del filtro comb per poterlo rendere più musicale. L'idea è semplicissima: si tratta di inserire un filtro passa-basso nel loop di feedback in modo da attenuare più rapidamente le frequenze acute rispetto a quelle gravi.

Il filtro passabasso può anche essere un semplicissimo filtro di media

$$y_t = 1/2 [x_t + x_{t-1}] \quad (5.1)$$

con funzione di trasferimento

$$H(z) = 1/2 [1 + z^{-1}] \quad (5.2)$$

con uno zero che si trova in corrispondenza della frequenza di Nyquist, poiché lì  $z = -1$ .

### 5.0.1 Implementazione dei filtri delle corde pizzicate

Per scrivere l'equazione del filtro, è utile introdurre il segnale intermedio  $w$ , il quale compare immediatamente dopo la chiusura del loop di feedback. Il segnale  $w$  è quindi determinato dall'ingresso  $x$  e dal segnale di output ritardato e pesato  $y$ :

$$w_t = x_t + R^L y_{t-L} \quad (5.3)$$

mentre l'uscita al tempo  $t$  è determinata dal filtro FIR con input  $w$ , quindi

$$y_t = 1/2 w_t + 1/2 w_{t-1} \quad (5.4)$$

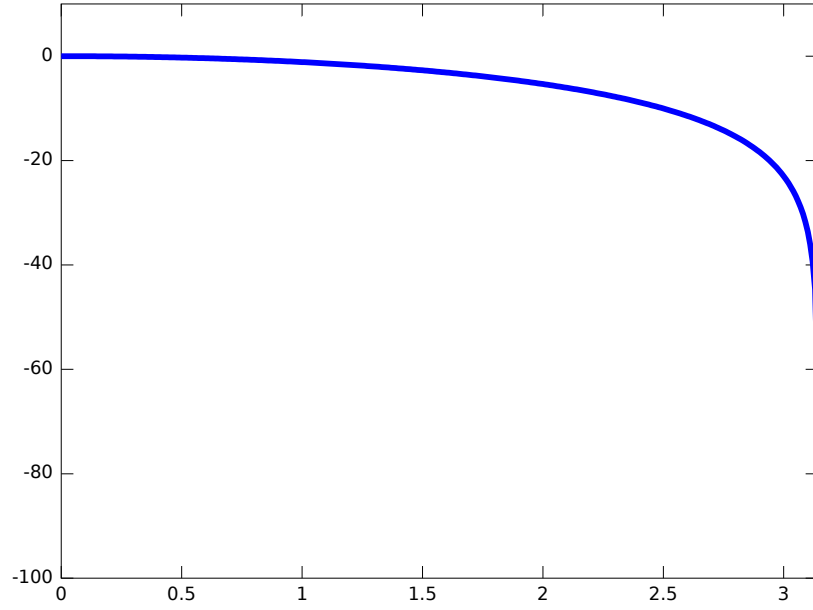


Figura 5.1: La risposta in frequenza del filtro passabasso usato nell'algoritmo di Karplus e Strong

Quindi per ogni campione  $t$  dobbiamo prima trovare  $w_t$  nei termini dell'equazione 5.3 e poi il valore dell'uscita  $y_t$  da  $w_t$  e  $w_{t-1}$  secondo l'equazione 5.4.

Cerchiamo ora di capire quale sia la risposta in frequenza di questo filtro. Se guardiamo il segnale come vettore, le equazioni 5.3 e 5.4 diventano

$$W = X + R^L z^{-L} Y \quad (5.5)$$

$$Y = 1/2[1 + z^{-1}]W \quad (5.6)$$

Per trovare la funzione di trasferimento  $H(z)$  dobbiamo risolvere l'equazione per  $Y/X$ , ossia prima sostituire l'eq.5.5 nell'eq.5.6 per ottenere solo  $X$  e  $Y$

$$X = 1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}] \quad (5.7)$$

e da qui trovare la funzione di trasferimento

$$H(z) = Y/X = \frac{1/2[1 + z^{-1}]}{1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}]} \quad (5.8)$$

Per risolvere questa equazione dobbiamo prima ottenere una formula più chiara. Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per  $2z^{L+1}$ :



$$H(z) = Y/X = \frac{1/2[1 + z^{-1}]2z^{L+1}}{(1 - R^L z^{-L} 1/2[1 + z^{-1}])2z^{L+1}} = \frac{z^{L+1} + z^L}{2z^{L+1} - R^L z - R^L} \quad (5.9)$$

Per avere la risposta in frequenza dobbiamo valutare l'eq.5.9 sul cerchio unitario, quindi quando  $z = e^{i\omega}$ . Possiamo quindi sostituire  $z$  usando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} z &= \cos\omega + i\sin\omega \\ z^L &= \cos(L\omega) + i\sin(L\omega) \\ z^{L+1} &= \cos((L+1)\omega) + i\sin((L+1)\omega) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Separando quindi le parti reali e le parti immaginarie dell'eq.5.9 sia al numeratore che al denominatore ottengo:

$$\begin{aligned} \text{Reale(numeratore)} &= \cos((L+1)\omega) + \cos(L\omega) \\ \text{Immag(numeratore)} &= \sin((L+1)\omega) + \sin(L\omega) \\ \text{Reale(denominatore)} &= 2\cos((L+1)\omega) - R^L \cos\omega - R^L \\ \text{Immag(denominatore)} &= 2\sin((L+1)\omega) - R^L \sin\omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

A questo punto per trovare la risposta in frequenza devo trovare la magnitudine di  $H(z)$  sostituendo le equazioni 5.11:

$$|H(\omega)| = \left[ \frac{[\text{Reale(numeratore)}]^2 + [\text{Immag(numeratore)}]^2}{[\text{Reale(denominatore)}]^2 + [\text{Immag(denominatore)}]^2} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

Realizziamone un'implementazione concreta per  $L = 32$  con un coefficiente  $R = 0.999$ . Dato che il ritardo totale del loop di feedback sarà di 32.5 campioni, ci aspettiamo che le risonanze siano ai multipli di  $f_c/32.5$ .



## Bibliografia

- [Park, 2010] Park, T. (2010). *Introduction To Digital Signal Processing: Computer Musically Speaking*. World Scientific.
- [Parks and Burrus, 1987] Parks, T. W. and Burrus, C. (1987). *Digital filter design*. Topics in digital signal processing. Wiley.
- [Shenoi, 2005] Shenoi, B. (2005). *Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design*. Wiley.
- [Steiglitz, 1974] Steiglitz, K. (1974). *An introduction to discrete systems*. Wiley.
- [Steiglitz, 1996] Steiglitz, K. (1996). *A digital signal processing primer*. Addison–Wesley, Menlo Park, California.