

Campionamento, Sintesi ed Elaborazione dei Segnali Musicali (CSEDSM) I dispense

(ver.14 2014-02-04)

Nicola Bernardini



Except where otherwise noted, this work is licensed under
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

Indice

1	Introduzione	5
2	Introduzione ai numeri complessi	7
2.1	Cosa sono i numeri complessi?	7
2.2	Le scomposizioni in serie	8
2.3	Altre proprietà dei numeri complessi	8
2.3.1	Esercizi	9
2.4	Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40])	9
2.5	Rivisitando <i>nyquist</i> e <i>foldover</i> con i fasori complessi	10
3	I filtri FIR	11
3.1	Un filtro FIR semplice	11
3.1.1	Dominio continuo di tempo	11
3.1.2	Esercizi	12
3.1.3	Passaggio dal tempo continuo al tempo discreto	12
3.1.4	Esercizi	14
4	Funzioni di variabile complessa	15
4.1	Il piano Z	15
5	La risposta in fase dei filtri FIR	19
5.1	La risposta in fase	19
6	I filtri comb inversi	23
6.1	Introduzione	23
7	La progettazione dei filtri FIR	29
7.1	Introduzione	29

1 Introduzione

Queste sono le dispense della prima annualità dell'insegnamento di *Campionamento, Sintesi ed Elaborazione dei Segnali Musicali* (aka *CSEDSM*) tenuto da Nicola Bernardini nell'A.A 2012-2013 al Conservatorio "C.Pollini" di Padova.

Queste dispense sono tratte in larga parte da alcuni capitoli di *A Digital Signal Processing Primer* di Ken Steiglitz [Steiglitz, 1996] - integrati con spiegazioni supplementari laddove l'aspetto matematico è più complicato, e con materiali elaborati in classe dagli studenti nonché tratti da altri testi (cf. [Steiglitz, 1974, Parks and Burrus, 1987, Park, 2010, Sheno, 2005]).

2 Introduzione ai numeri complessi

2.1 Cosa sono i numeri complessi?

- qual'è il risultato dell'equazione $x^2 + 1 = 0$?
- per trovare la soluzione a questa domanda i matematici hanno esteso il dominio dei numeri reali con i numeri *immaginari*, detti anche numeri *complessi*
- proprietà dei numeri complessi:
 - si tratta di numeri bidimensionali (costituiti di due parti, una parte reale e una parte *immaginaria*)
 - si possono immaginare quindi come numeri che invece di trovarsi su una retta si trovano su un piano
 - pertanto si perde la possibilità di *ordinarli* in maniera semplice (== non ha senso dire che “un numero complesso è più grande o più piccolo di un altro”)
 - operazioni sui numeri complessi:

coniugazione il *complesso coniugato* di un numero complesso è lo stesso numero con la parte immaginaria invertita:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \quad (2.1)$$

la moltiplicazione di un numero complesso con il suo complesso coniugato dà luogo a un numero reale che è il quadrato della parte reale sommato al quadrato della parte immaginaria

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + ixy - ixy = x^2 + y^2 \quad (2.2)$$

addizione/sottrazione si aggiungono e si sottraggono separatamente: parte reale con parte reale e parte immaginaria con parte immaginaria

moltiplicazione si moltiplicano come nella moltiplicazione di binomi, ricordando però che $i^2 = -1$:

$$a = x_1 + iy_1, \quad b = x_2 + iy_2 \quad a \times b = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2.3)$$

2 Introduzione ai numeri complessi

divisione le divisioni sono definite negli termini delle moltiplicazioni, moltiplicando entrambi i fattori per il complesso coniugato del denominatore:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (2.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad (2.5)$$

$$\frac{(x_1 + iy_1) \times (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \times (x_2 - iy_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(y_1x_2 + x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (2.7)$$

2.2 Le scomposizioni in serie

- come si calcolano al computer i valori di e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, ecc.?
- si calcolano in forma approssimata *scomponendoli in serie*:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (2.8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.9)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2.10)$$

se si usano i numeri complessi, si ottiene la formula di Eulero:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad (2.11)$$

(ossia sommando le scomposizioni in serie di $\cos(x)$ e $i\sin(x)$ e si ottiene la scomposizione in serie di e^x)

dato che $i = 0 + i$, $i^2 = -1$, $i^3 = 0 - i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ecc.

quindi: e^x va all'infinito, ma e^{ix} oscilla tra $+1$ e -1

dato che anche i^n oscilla invece di andare all'infinito

2.3 Altre proprietà dei numeri complessi

- parte reale:

$$z = x + iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad (2.12)$$

2.4 Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40])

- parte immaginaria:

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \text{Im}(z) &= y\end{aligned}\tag{2.13}$$

attenzione! la “parte immaginaria” di un numero complesso è costituita da un numero *reale*, il quale viene a sua volta moltiplicato per l’operatore immaginario i

- modulo: la “distanza dal centro”, ossia la somma del quadrato della parte reale con il quadrato della parte immaginaria sotto radice:

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \text{abs}(z) &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}\tag{2.14}$$

nel caso di fenomeni periodici, *modulo* e *magnitudine* sono sinonimi

- argomento: l’angolo costituito dal numero complesso rispetto all’asse reale

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \arg(z) = \angle z &= \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}\tag{2.15}$$

nel caso di fenomeni periodici, *argomento* e *fase* sono sinonimi

2.3.1 Esercizi

- rifare la dft con e invece che con \sin/\cos
- verificare la giustezza della fase

2.4 Fasori complessi (cf.[Steiglitz, 1974, 2.4 p.40])

- Abbiamo visto che un oscillatore cosinusoidale può essere rappresentato come segue:

$$F(k) = A \cos(\omega k + \phi) \quad \text{dove } k \text{ è un intero}\tag{2.16}$$

(fare il plot di $F(k)$ per valori non-negativi di k)

- secondo la formula di Eulero,

$$F(k) = \text{Re}\left(Ae^{i(\omega k + \phi)}\right)\tag{2.17}$$

2 Introduzione ai numeri complessi

- mentre un oscillatore sinusoidale $F(k) = A \sin(\omega k + \phi)$ corrisponde a

$$F(k) = \text{Im} \left(A e^{i(\omega k + \phi)} \right) \quad (2.18)$$

- quindi $A e^{i(\omega k + \phi)}$ è un *fasore complesso*
- interpretazione grafica:
 - un punto che si muove su un cerchio sul piano complesso: A è il raggio del cerchio. k sono i punti crescenti sul cerchio
 - parte reale: coseno campionato
 - parte immaginaria: seno campionato
 - ϕ è il punto di partenza (la fase)
- se $\phi = 0$ e $\omega = 0$, il fasore rimane fermo al punto di partenza e $F(k) = A$ (costante reale)
- alla fine del giro il fasore ricomincia perché:

$$e^{i(\omega k + \phi)} = e^{i(\omega k + \phi + 2\pi)} \quad (2.19)$$

2.5 Rivisitando nyquist e foldover con i fasori complessi

- cosa succede se $\omega = \pi$?
- e se $\omega > \pi$?
- mettiamo conto che $\omega = \pi + x$:

$$e^{i\omega k} = e^{i(\pi+x)k} \quad (2.20)$$

dato che $e^{i(2\pi k)} = 1$ possiamo aggiungere o togliere 2π al nostro fasore a piacere:

$$e^{i\omega k} = e^{i(\pi+x)k} = e^{i(-2\pi+\pi+x)k} = e^{i(-\pi+x)k} \quad (2.21)$$

quindi sembra che il fasore stia andando all'indietro (effetto stroboscopico)

3 I filtri FIR

3.1 Un filtro FIR semplice

3.1.1 Dominio continuo di tempo

Nei filtri FIR (*feed-forward*) l'output è la somma dell'input e una versione riscalata e ritardata dell'input:

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-\tau} \quad (3.1)$$

(aggiungere grafico)

Poniamo che x_t sia un segnale sinusoidale complesso:

$$x_t = e^{i\omega t}$$

$$y_t = e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega(t-\tau)} \quad (3.2)$$

(fare schemino sul cerchio unitario)

$$y_t = e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} = e^{i\omega t} [1 + a_1 e^{-i\omega\tau}] \quad (3.3)$$

Quindi l'uscita è sempre un fasore di frequenza ω moltiplicato per un'ampiezza che è funzione di ω (ma indipendente dal tempo!)

La funzione del filtro è dunque $[1 + a_1 e^{-i\omega\tau}]$ e la chiameremo $H(\omega)$

Per capire la risposta in frequenza e in fase dobbiamo capire che $H(\omega)$ è in realtà la magnitudine (valore assoluto di $H(\omega)$) moltiplicata per una funzione della fase:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} \quad (3.4)$$

dove $|H(\omega)| = |1 + a_1 e^{-i\omega\tau}|$; siccome per il teorema di Pitagora il modulo è il quadrato della parte reale + il quadrato della parte immaginaria sotto radice,

$$\operatorname{Re}(H(\omega)) = 1 + a_1 \cos(\omega\tau) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Im}(H(\omega)) = -a_1 \sin(\omega\tau) \quad (3.6)$$

$$\operatorname{Re}^2 = 1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a_1^2 \cos^2(\omega\tau) \quad (3.7)$$

$$\operatorname{Im}^2 = a_1^2 \sin^2(\omega\tau) \quad (3.8)$$

quindi

3 I filtri FIR

$$Re^2 + Im^2 = 1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a^2 [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)] \quad (3.9)$$

Dato che

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad (3.10)$$

per α qualsiasi,

$$1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a^2 [\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)] = 1 + 2a_1 \cos(\omega\tau) + a^2 \quad (3.11)$$

Le Figg. 3.1 e 3.2 nella pagina successiva mostrano la risposta in frequenza rispettiva-

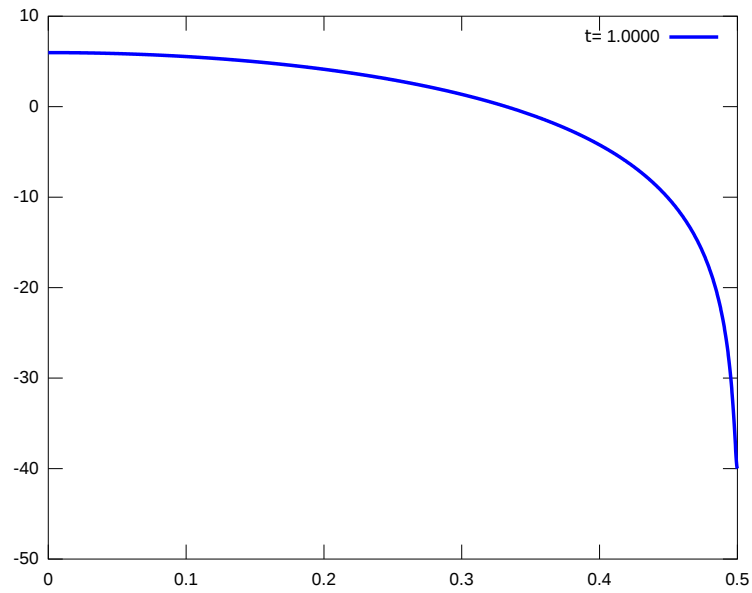


Figura 3.1: Filtro FIR con $\tau = 1/f_c$

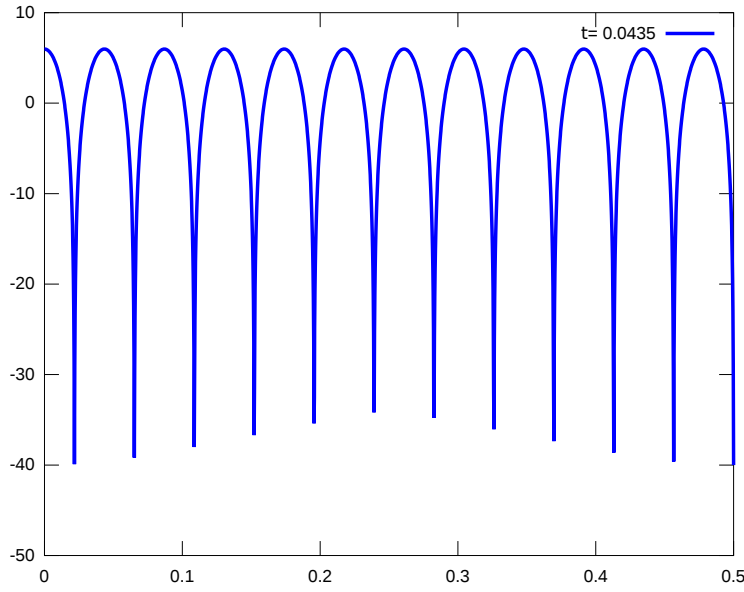
mente per $\tau = 1/f_c$ e per $\tau = 23/f_c$.

3.1.2 Esercizi

- fare il plot della risposta in frequenza con vari valori di ω e di τ

3.1.3 Passaggio dal tempo continuo al tempo discreto

Il ritardo τ viene ristretto ad un numero intero di campioni multiplo della periodo di campionamento T_s (restrizione)

Figura 3.2: Filtro FIR con $\tau = 23/f_c$

Dato che la frequenza di campionamento interesserà la definizione del nostro segnale (per le frequenze che servono per una applicazione piuttosto che un'altra), ma non il funzionamento del filtro, possiamo benissimo normalizzare la nostra frequenza di campionamento a 1, avendo così la frequenza di Nyquist a 0.5

Ora, se noi ritardiamo il nostro segnale di un campione (invece che del valore continuo tau) moltiplicheremo il nostro fasore in ingresso per $e^{-i\omega T}$ dove ωT è l'angolo in radianti per campione. Possiamo sempre ricavare il tempo nel dominio digitale moltiplicando per il periodo di campionamento T_s - possiamo quindi evitare di scrivere T_s , che diventa una sorta di costante di conversione: se la costante è 1 (frq di campionamento 1) possiamo evitare di scriverla ogni volta

La frequenza di campionamento diventa $\omega = 2\pi$ e la frequenza di nyquist è $\omega = \pi$ radianti per campione e il nostro fasore sarà sempre

$$x_t = e^{i\omega k T} \quad (3.12)$$

dove k è un numero intero di campioni e T è il periodo di campionamento

Ora rifacciamo il filtro dell'eq.3.1 della Sez. 3.1.1 a pagina 11 ritardando però non di tau ma di un solo campione:

$$y_k = x_k + a_1 x_{k-1} \quad (3.13)$$

applicando il fasore digitale, il filtro diventerà:

3 I filtri FIR

$$y_k = e^{i\omega kT} [1 + a_1 e^{-i\omega \times 1}] = e^{i\omega kT} [1 + a_1 e^{-i\omega}] \quad (3.14)$$

e la magnitudine (== risposta in frequenza) sarà:

$$|H(\omega)| = 1 + 2a_1 \cos(\omega) + a_1^2 \quad (3.15)$$

Ricapitolando, se l'input di un filtro FIR è il fasore $e^{i\omega kT}$

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} \quad (3.16)$$

(ritardo di un campione).

L'output è anche un fasore con frequenze inalterate

$$y_k = x_k [a_0 + a_1 e^{-i\omega}] \quad (3.17)$$

possiamo aggiungere quanti termini vogliamo in un filtro del genere:

$$y_k = x_k [a_0 + a_1 e^{-i\omega} + a_2 e^{-i2\omega} + a_3 e^{-i3\omega} + \dots + a_n e^{-in\omega}] \quad (3.18)$$

Invece di ripetere $e^{i\omega}$ ogni volta, possiamo operare una sostituzione: sostituiamo $z = e^{i\omega}$. Il ritardo di un campione diventa così z^{-1} , e il ritardo di k campioni diventa così z^{-k} . z^{-1} è trattabile sia come una variabile complessa che come un operatore, cioè una operazione applicata ad un certo oggetto (pensate p.es. ad un operatore che ruota un disegno di 90 gradi) = ρ : ρ^2 lo ruota di 180 gradi in senso antiorario, ρ^{-1} lo ruota in senso orario)

Possiamo anche usare la notazione X per rappresentare un *intero segnale* (un vettore di campioni); nota bene: x_k rappresenta il valore di un segnale al tempo k , X rappresenta l'intero segnale.

L'intero segnale ritardato di un campione è quindi notato $z^{-1}X$ quindi significa "applica l'operatore z^{-1} al segnale X "

L'equazione si riscrive:

$$Y = a_0 X + a_1 z^{-1} X = [a_0 + a_1 z^{-1}] X \quad (3.19)$$

(nota che anche l'ampiezza diventa un operatore: moltiplica *tutto il segnale* per la costante a_0 , e quest'operatore è commutativo).

Quindi $Y = H(z)X$ dove $H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}$.

3.1.4 Esercizi

1. Si descriva un filtro FIR con l'equazione che segue:

$$y_k = x_k + x_{k-1} + x_{k-2} + \dots + x_{k-19} \quad (3.20)$$

Si derivi una espressione algebrica semplice per la sua risposta in magnitudine. Si trovi quali siano le frequenze alle quali si trovano dei picchi e quelle alle quali si trovano dei buchi

4 Funzioni di variabile complessa

4.1 Il piano Z

La rappresentazione delle caratteristiche della funzione di trasferimento di un filtro sul piano z complesso permette di capirne meglio il funzionamento.

Riprendiamo il nostro filtro semplice

$$y_t = x_t - a_1 x_{t-1} \quad (4.1)$$

Se sostituiamo in 4.1 x_t con un fasore, l'effetto di questo filtro equivale alla moltiplicazione dell'ingresso per la funzione complessa

$$1 - a_1 e^{-i\omega} = 1 - a_1 z^{-1} \quad (4.2)$$

perché abbiamo introdotto la stenografia $z = e^{i\omega}$.

Abbiamo quindi una funzione di trasferimento complessa $\mathcal{H}(z)$ alla quale corrisponde la risposta in frequenza

$$H(\omega) = \mathcal{H}(e^{i\omega}) \quad (4.3)$$

In sostanza, la risposta in frequenza è la funzione di trasferimento della variabile complessa z *valutata sul cerchio unitario*. I valori di ω che ci interessano vanno da $\omega = 0$ alla frequenza di Nyquist $\omega = \pi$ radianti per campione. Si tratta quindi della metà superiore del cerchio nel piano z , come illustrato in Fig. 4.1

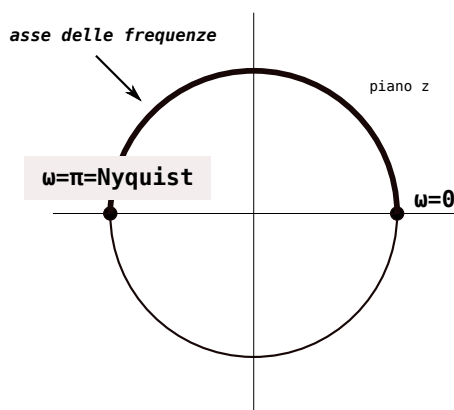


Figura 4.1: L'asse delle frequenze sul piano z .

4 Funzioni di variabile complessa

Ora guardiamo più attentamente la funzione di trasferimento del nostro esempio. Essa è

$$\mathcal{H}(z) = 1 - a_1 z^{-1} \quad (4.4)$$

Riscriviamola ora come rapporto di polinomi moltiplicando sopra e sotto per z :

$$\mathcal{H}(z) = 1 - a_1 z^{-1} = \frac{z}{z} - \frac{a_1}{z} = \frac{z - a_1}{z} \quad (4.5)$$

In questo modo appaiono chiaramente le radici dell'equazione: c'è uno zero nel numeratore a $z = a_1$ e uno zero nel denominatore a $z = 0$. Vale a dire: la funzione di trasferimento diventa zero a $z = a_1$ e infinita per $z = 0$. La magnitudine della risposta in frequenza è la magnitudine di $\mathcal{H}(z)$ calcolata sul cerchio unitario (cioè quando $z = e^{i\omega}$):

$$|H(\omega)| = \frac{|z - a_1|}{|z|} \quad (4.6)$$

$|z| = 1$ perché ci troviamo sul cerchio unitario (dato che $z = e^{i\omega}$). In effetti, nei filtri *feed-forward* (FIR) gli unici zeri al denominatore possono apparire solo all'origine, e non hanno quindi alcun effetto sulla risposta in frequenza. Possiamo quindi riscrivere l'Eq.4.6 così:

$$|H(\omega)| = |z - a_1| \text{ per } z = e^{i\omega} \quad (4.7)$$

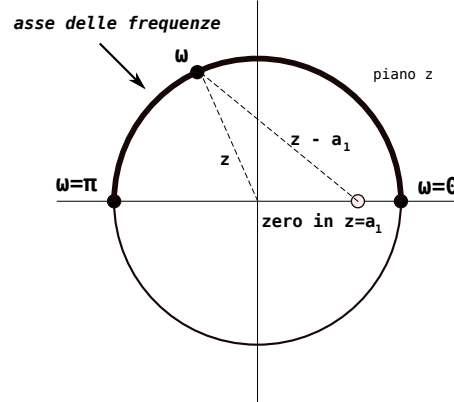


Figura 4.2: Valutazione della risposta in magnitudine per $z = e^{i\omega}$. Il fattore $|z - a_1|$ è la lunghezza del vettore dallo zero in a_1 sino al punto sul cerchio unitario corrispondente alla frequenza ω

Ecco il significato della figura 4.2: immaginiamo di camminare sul cerchio unitario da $\omega = 0$ sino a $\omega = \pi$. Quando ci troveremo vicino a $\omega = 0$, il modulo del vettore

$|z - a_1|$ sarà molto piccolo e quindi influirà molto sulla magnitudine della funzione di trasferimento (riducendola). Man mano che ci allontaneremo da $\omega = 0$ il modulo aumenterà e di conseguenza anche la magnitudine della funzione di trasferimento. Quindi è ovvio che la Fig. 4.2 a fronte ci sta mostrando la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto. Mentre per a_1 negativi si avrebbe un filtro passa-basso.

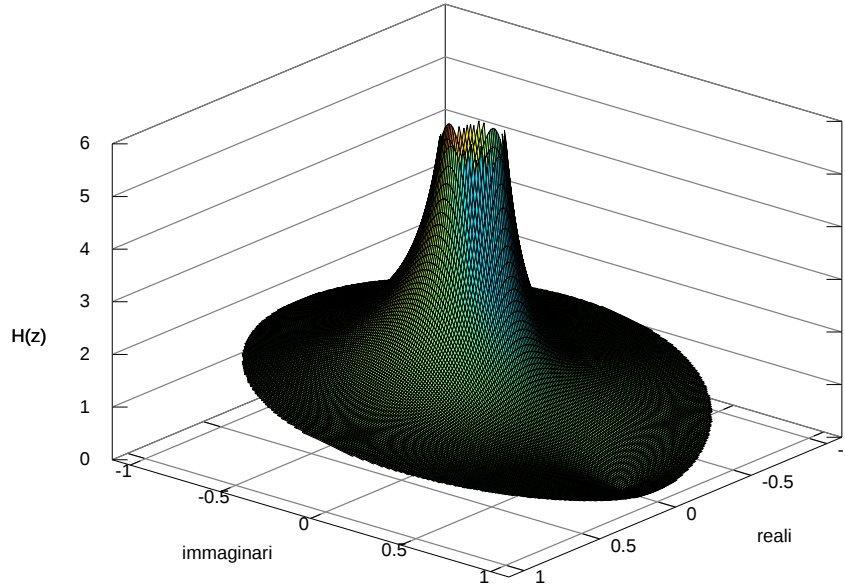


Figura 4.3: La funzione $|\mathcal{H}(z)|$ sul piano z

La figura 4.3 illustra la magnitudine della funzione z all'interno del cerchio unitario per $a_1 = 0.8$.

5 La risposta in fase dei filtri FIR

5.1 La risposta in fase

Riconsideriamo ancora una volta il filtro che abbiamo analizzato in Cap.3 Sez. 3.1 a pagina 11 (eq.3.1):

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-\tau} \quad (5.1)$$

la cui risposta in frequenza è una funzione della frequenza ω

$$H(\omega) = 1 + a_1 e^{-i\omega} \quad (5.2)$$

Questa risposta complessa in frequenza avrà quindi una magnitudine e un angolo per ciascun ω . Cioè l'eq.5.2 può essere riscritta come

$$1 + a_1 e^{-i\omega} = |H(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} \quad (5.3)$$

Se il segnale in ingresso fosse un fasore complesso $x = e^{i\omega t}$, il fasore in uscita y sarebbe il prodotto di questo ingresso moltiplicato questa funzione di trasferimento

$$y_t = |H(\omega)| e^{i(\omega t + \Theta(\omega))} \quad (5.4)$$

il che significa che l'uscita è una copia dell'ingresso ritardata in fase di un angolo $\Theta(\omega)$ e riscalata in ampiezza di $|H(\omega)|$.

Per capire quanto valga il ritardo di fase possiamo usare la funzione *arcotangente*. Riscrivendo l'eq.5.2 come $1 + a_1 \cos\omega - ia_1 \sin\omega$, avremo

$$\begin{aligned} \Theta(\omega) &= \arctan \left[\frac{\text{Immag}H(\omega)}{\text{Reale}H(\omega)} \right] \\ &= \arctan \left[\frac{-a_1 \sin\omega}{1+a_1 \cos\omega} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quando $a_1 = 1$ l'espressione contenuta in eq.5.5 si semplifica. Riscrivendo la funzione di trasferimento di eq.5.2 con $a_1 = 1$:

$$H(\omega) = 1 + e^{-i\omega} = e^{-i\omega/2} \left[e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2} \right] \quad (5.6)$$

Ricordiamo che la formula di Eulero $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, e che quindi

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} &= 2\cos\alpha \\ e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2} &= 2\cos\omega/2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

5 La risposta in fase dei filtri FIR

allora l'eq.5.6 si semplifica in

$$H(\omega) = e^{-i\omega/2} 2\cos(\omega/2) \quad (5.8)$$

Confrontando l'eq.5.3 con la 5.8, $2\cos(\omega/2)$ è la magnitudine della risposta (reale) $|H(\omega)|$, mentre l'esponenziale complesso $e^{-i\omega/2}$ è la risposta in fase e rappresenta un ritardo di fase di un angolo $-\omega/2$. Quindi, se l'ingresso è il fasore $e^{i\omega t}$, l'uscita del filtro sarà il fasore

$$2\cos(\omega/2)e^{i\omega(t-1/2)} \quad (5.9)$$

il che equivale a dire che l'effetto del filtro sulla fase del segnale è quello di ritardarlo esattamente di un tempo equivalente alla metà della frequenza di campionamento, *indipendentemente dalla frequenza ω del fasore in ingresso*.

Questo è un caso speciale di una caratteristica importante dei filtri FIR: se i coefficienti di un filtro FIR sono simmetrici intorno al proprio centro (in questo caso i coefficienti sono $\{1, 1\}$), la risposta in fase è proporzionale ad ω , trattandosi quindi di un ritardo di tempo fisso per tutte le frequenze. Il filtro si dice quindi *a fase lineare*, ossia non introduce distorsioni nella risposta in fase.

La fig. 5.1 nella pagina successiva riporta la risposta in frequenza e la risposta in fase del filtro FIR

$$H(z) = 0.5 - 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2} \quad (5.10)$$

Come si può notare, un numero dispari di coefficienti genera una risposta in fase lineare. Lo script `octave` che genera questa figura è riportato qui:

```
%
% $Id: fase_3.m 28 2013-05-03 04:38:41Z nicb $
%
step = 0.01;
W = [0:step:pi-step];
Coefs = [0.5 0.8 0.5];
z=exp(i*W);
H = Coefs(1) + (Coefs(2)*z.^(-1)) + (Coefs(3)*z.^(-2));
ReH = real(H);
ImH = imag(H);
PHI = atan2(ImH, ReH);
Mag = abs(H);

figure(1, 'visible', 'off')
subplot(2,1,1);
plot(W, 20*log10(Mag), 'LineWidth', 4)
subplot(2,1,2);
plot(W, PHI, 'LineWidth', 4)
```

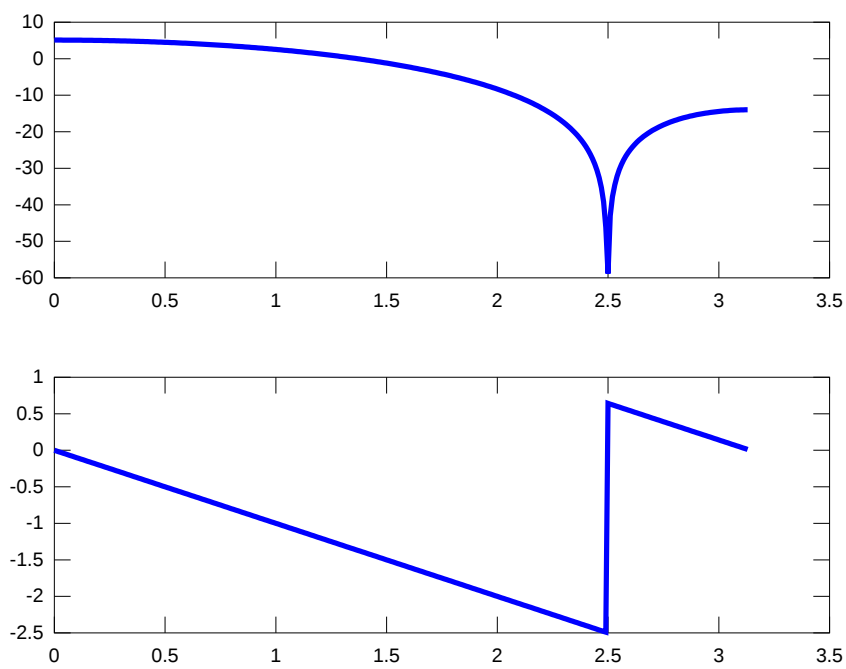


Figura 5.1: Risposta in frequenza e in fase del filtro la cui funzione di trasferimento è riportata in eq.5.10

6 I filtri comb inversi

6.1 Introduzione

I filtri comb inversi sono un caso particolare di filtri FIR. Essi permettono, ad esempio, di cancellare le componenti di un segnale armonico.

Si tratta come sempre di un filtro FIR come quello studiato in Sez.3.1. 3.1.1 a pagina 11 (eq.3.1). Sostituiamo al posto del ritardo arbitrario τ un numero intero di campioni L . Come coefficiente del filtro prenderemo R^L .

L'equazione diventerà quindi

$$y_t = x_t - R^L x_{t-L} \quad (6.1)$$

e la sua funzione di trasferimento si ricaverà così

$$\begin{aligned} Y &= 1 \times Xz^{-0} - R^L \times Xz^{-L} = X \begin{bmatrix} 1 - R^L z^{-L} \\ 1 - R^L z^{-L} \end{bmatrix} \\ H(z) &= \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ripassiamo un pò di algebra dei numeri complessi. Quali sono le radici dell'equazione seguente:

$$z^L = 1 \quad (6.3)$$

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che un polinomio di grado n ha n radici (n punti in cui la funzione è zero). Prendiamo ad es.

$$y = x^2 - 9 \quad (6.4)$$

Dobbiamo trovare i punti in cui $y = 0$. Allora:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

E' possibile quindi pensare qualsiasi funzione nei termini delle sue radici:

$$y = a_1(x - r_1)(x - r_2) \dots \quad (6.6)$$

P.es. nel caso dell'eq.6.5

$$x^2 - 9 = 1(x + 3)(x - 3) \quad (6.7)$$

Spesso è necessario ricorrere ai numeri complessi per risolvere le equazioni. P.es., quali sono le radici dell'eq.6.8?

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad (6.8)$$

Ricordando che

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6.9)$$

e sostituendo i fattori a , b , e c con quelli presenti nell'eq.6.8

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{-1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{\pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 \pm i0.866 \quad (6.10)$$

In linea generale, le equazioni di grado n con fattori complessi possiedono n radici in coppie complesse coniugate (per n pari) oppure 1 radice reale e $n - 1$ radici in coppie complesse coniugate (per n dispari).

Ecco dunque la risposta alla domanda: quali sono le radici dell'equazione $z^L = 1$? ce ne sono L , complesse-coniugate e equispaziate sul cerchio unitario. Questo è abbastanza ovvio quando si pensa a cosa significhi innalzare un numero complesso alla sua L -esima potenza. Significa elevare la sua magnitudine (== il suo modulo) all' L -esima potenza e moltiplicare il suo angolo per L . Qualsiasi punto con magnitudine 1 e angolo in una forma $k2\pi/L$ funzionerà per qualsiasi k intero. Le L radici dell'unità saranno quindi:

$$e^{ik2\pi/L} \text{ per } k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (6.11)$$

E nel caso dell'eq.6.2 le radici saranno:

$$z^L = R^L \quad (6.12)$$

e si troveranno agli stessi angoli, ma con raggio R^L anziché 1.

Facciamo un esempio con $L = 8$ (cioè: il segnale sarà composto dall'ingresso più l'ingresso ritardato di otto campioni) con $R = 0.999999$.

Ci aspetteremo quindi di trovare otto zeri, e per la precisione (dato che il segnale finale è reale) quattro coppie complesse coniugate. In effetti, il plot sul piano zeta rappresentato in Fig. 6.1 nella pagina successiva mostra proprio che gli otto zeri si dispongono in maniera simmetrica intorno all'asse reale (e anche simmetrica intorno all'asse immaginario).

Come si può notare, gli zeri appaiono a $R^L e^{i2\pi \times 0/L} = 1$, $R^L e^{i2\pi \times 1/L} = R^L e^{i2\pi/8} = R^L e^{i\pi/4} = 0.707 + i0.707$, $R^L e^{i2\pi \times 2/L} = R^L e^{i4\pi/8} = e^{i\pi/2} = i$, ecc. La Fig. 6.2 a fronte invece mostra che la fase è per lo più lineare, con gli shift di fase che accadono al passaggio dagli zeri della magnitudine.

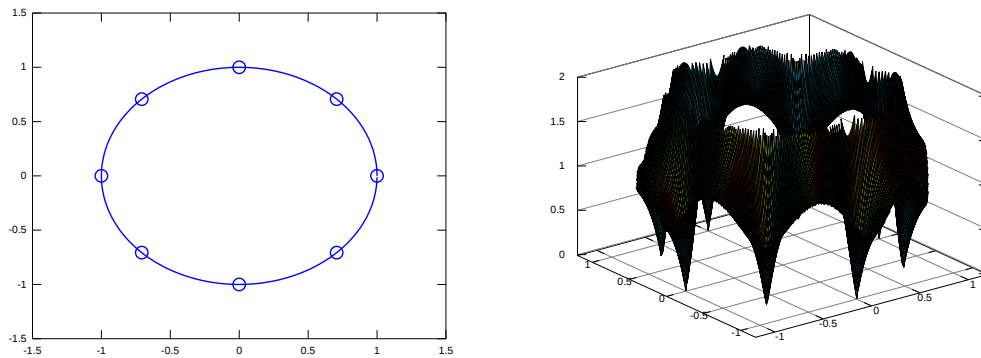


Figura 6.1: Disposizione degli zeri sul piano zeta per un filtro comb inverso di ordine 8

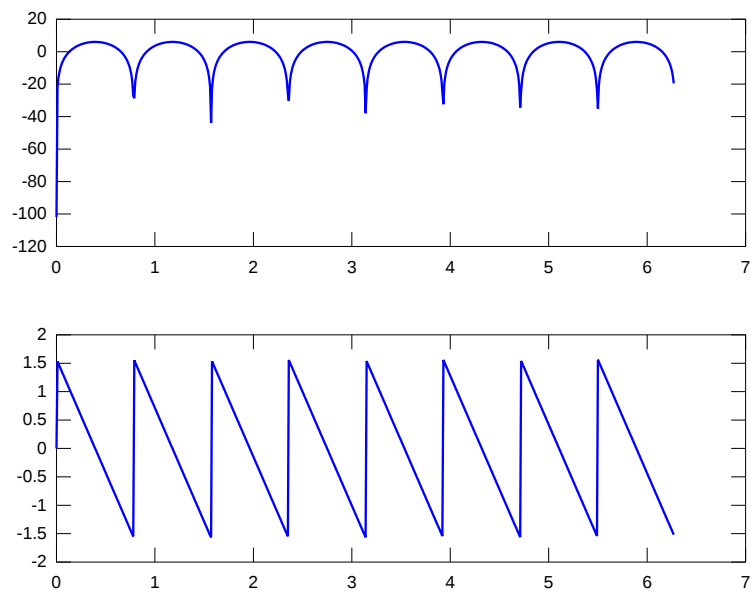


Figura 6.2: Risposta in frequenza e in fase di un filtro comb inverso di ordine 8

6 I filtri comb inversi

Lo script *octave* che produce questi plot è riportato qui di seguito:

```
%
% $Id: ICF2.m 29 2013-05-17 04:18:06Z nicb $
%
clear all;
close all;

% yt = xt - R^L*x(t-L)
% H(z) = [1-R^L*z^-L]

R = 0.999999; % profondit dei denti
L = 8; % ordine del filtro (L+1 termini, da 0 a L+1)
step = 0.01;
W = [0:step:2*pi-step];
z = exp(i*W);

H = 1-((R.^L)*(z.^(-L))); %fn di trasferimento ==> che diventa
figure(1, 'visible', 'off') % la risp in freq per via di z
subplot (2,1,1)
plot (W,20*log10(abs(H)), 'LineWidth', 2);
subplot(2,1,2)
plot (W,arg(H), 'LineWidth', 2);
%PRINT 1

figure(2, 'visible', 'off')
% L+1 coefficienti (include anche lo zero),
% dal pi alto al pi basso
coefs = zeros(1,L+1);
coefs(L+1) = 1; % coefficiente zero (ultimo)
coefs(1) = -R^L; % coefficiente L-esimo (primo)
zri = roots(coefs);
cerchio = exp(i*W);
hold on
plot(cerchio, 'LineWidth', 2)
plot(zri, 'o', 'markersize', 12);
hold off
%PRINT 2

figure(3, 'visible', 'off')
meshstep = 0.01;
reals = [-1.2:meshstep:1.2];
imags = reals;
zplane = zeros(length(reals), length(imags));
```

```

ringsize=0.2;
lowerring=R-ringsize;
upperring=R+ringsize;
for k=1:length(imags)
    for l=1:length(reals)
        zval = reals(l) + (i*imags(k));
        zvalmag = abs(zval);
        if zvalmag >= lowerring && zvalmag <= upperring
            zplane(l,k) = 1 - ((R.^(L)*zval^(-L)));
        else
            zplane(l,k) = NaN;
        end
    end
end
end
surfl(reals, imags, abs(zplane))
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2 -0.01 2]);
%PRINT 3

```

Attenzione: un errore comune è quello di invertire l'ordine dei coefficienti nel passare l'argomento alla funzione `roots()` di *matlab/octave*. L'ordine è dal coefficiente più alto a quello più basso (zero incluso).

7 La progettazione dei filtri FIR

7.1 Introduzione

Il problema sostanziale nel progettare i filtri è quello di trovare i giusti coefficienti per raggiungere la migliore approssimazione alla “risposta ideale” che si desidera ottenere. In linea generale, la “risposta ideale” non è ottenibile direttamente perché si tratta di una funzione discontinua (che non è realizzabile con un polinomio). Il problema è rappresentato in fig. 7.1.

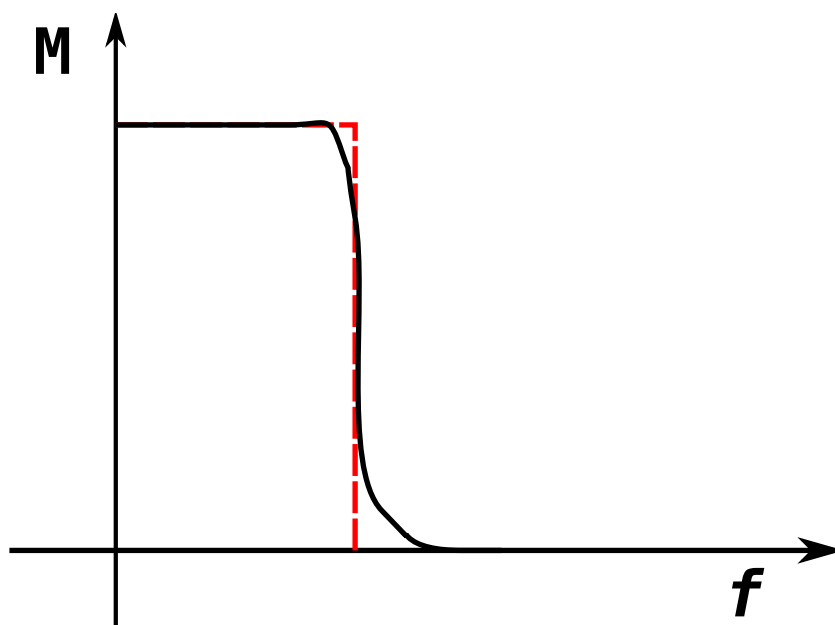


Figura 7.1: La risposta ideale di un filtro (in rosso) e la sua risposta reale

Ci sono varie soluzioni per ottenere questi coefficienti, e queste soluzioni si applicano meglio a certi tipi di filtri che ad altri. In alcuni casi è possibile (o necessario) trovare delle “forme chiuse” (vale a dire delle equazioni matematiche finite) per individuare i coefficienti, mentre in altri casi è possibile trovarli attraverso una “ottimizzazione iterativa” (vale a dire ottenendo prima una approssimazione mediocre per poi migliorarla a discrezione).

I coefficienti dei filtri FIR si trovano più facilmente attraverso quest’ultima tecnica (ottimizzazione iterativa).

7 La progettazione dei filtri FIR

Ricordiamo che la forma dei filtri FIR è specificata da un'equazione del tipo:

$$y_t = a_0x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + \cdots + a_{n-1}x_{t-(n-1)} \quad (7.1)$$

Il primo coefficiente è il coefficiente 0, quindi l'ultimo coefficiente di un filtro di lunghezza n è $n - 1$. La sua funzione di trasferimento è

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_{n-1}z^{-(n-1)} \quad (7.2)$$

Considerando che la risposta y_t deve essere una risposta reale, possiamo semplificare la nostra progettazione utilizzando un numero pari di coefficienti. Questi coefficienti distribuiranno gli zeri sul piano zeta in posizioni complesse-coniugate ed il risultato sarà quindi reale. Il problema è che abbiamo un coefficiente 0, e che quindi se usiamo filtri di lunghezza pari avremo una asimmetria intorno all'asse dei numeri reali. Dobbiamo quindi utilizzare una lunghezza *dispari* per ottenere un numero *pari* di coefficienti simmetrici (e un coefficiente direttamente sull'asse reale – che quindi sarà un numero reale).

Ad esempio, se usiamo un filtro di lunghezza 5, avremo la funzione di trasferimento

$$H(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4} \quad (7.3)$$

Il trucco standard è quello di mettere a fattore una potenza di z corrispondente al *ritardo medio* del nostro filtro. Nel caso dell'equazione 7.3 il ritardo medio sarà z^{-2} . L'equazione viene così riscritta

$$H(z) = z^{-2} [a_0z^2 + a_1z + a_2 + a_3z^{-1} + a_4z^{-2}] \quad (7.4)$$

La risposta in frequenza corrispondente viene ottenuta, come sempre, sostituendo $z = e^{i\omega}$.

$$H(\omega) = e^{-i2\omega} [a_0e^{i2\omega} + a_1e^{i\omega} + a_2 + a_3e^{-i\omega} + a_4e^{-i2\omega}] \quad (7.5)$$

Abbiamo visto che coefficienti simmetrici producono una risposta in fase lineare. Daremo quindi per scontato che $a_0 = a_4$ e $a_1 = a_3$. Ma

$$a_0(e^{i2\omega} + e^{-i2\omega}) = 2a_0\cos(2\omega) \quad (7.6)$$

e

$$a_1(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = 2a_1\cos(\omega) \quad (7.7)$$

Quindi:

$$H(\omega) = e^{-i2\omega} [a_2 + 2a_1\cos\omega + 2a_0\cos(2\omega)] \quad (7.8)$$

Come si può notare, la parte fra parentesi quadre è *reale*, e il fattore complesso che la moltiplica altro non è che un ritardo “complessivo” di due campioni. Questo fattore non influisce sulla magnitudine del filtro, perché il modulo di $e^{-i2\omega}$ è 1.

Per semplificare ulteriormente, possiamo utilizzare dei coefficienti c_i in ordine ascendente, riscrivendo così l'equazione 7.8 come:

$$\hat{H}(\omega) = e^{i2\omega} H(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos(2\omega) \quad (7.9)$$

dove $c_0 = a_2$, $c_1 = 2a_1$ e $c_2 = 2a_0$. Il ritardo lo abbiamo spostato a sinistra dell'equazione (dove in realtà è un anticipo piuttosto che un ritardo).

La nuova risposta in frequenza $\hat{H}(\omega)$ incorpora quindi il ritardo generale ed è esclusivamente reale. Per semplificarci la vita ulteriormente, diamo per scontato che la lunghezza del filtro sia sempre un intero dispari. È facile notare che la forma generale dell'eq.7.8 è

$$\hat{H}(\omega) = e^{im\omega} H(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos(2\omega) + \dots + c_m \cos(m\omega) \quad (7.10)$$

dove $m = 1/2(n - 1)$. Dal momento che contiamo sempre a partire da 0, ci saranno $m + 1 = 1/2(n + 1)$ coefficienti c . Dato che i coefficienti a sono simmetrici, $m + 1$ saranno i coefficienti con i quali avremo a che fare.

Ultima cosa: dato che a noi interessa soprattutto la magnitudine della risposta in frequenza, considereremo quindi la parte destra dell'equazione 7.10 senza il ritardo. Questa parte sarà costituita da valori reali sia positivi che negativi. Volendo, possiamo interpretare la magnitudine negativa come un shift di fase di π radianti.

Riassumendo: quando disegniamo un filtro FIR, diamo per scontato che questi filtri abbiano un numero dispari di termini (n) i cui coefficienti siano simmetrici intorno al termine centrale. La risposta in frequenza è quindi determinata dalla serie (solo di valori reali) dei coseni dell'eq.7.10 con $m = 1/2(n + 1)$ incognite c_i . Il problema della progettazione del filtro si riduce così alla scelta di questi coefficienti c_i in modo da soddisfare le specifiche date.

La chiave della soluzione è legata al fatto che la risposta in frequenza della serie dei coseni in eq.7.10 è una funzione *lineare* con coefficienti sconosciuti. Facciamo un esempio volutamente molto semplice per illustrare l'idea. Supponiamo di voler progettare un filtro di lunghezza 3 – nel quale dovremo scegliere appunto due soli coefficienti. Potremmo dare le specifiche seguenti:

1. nella parte *passband*, il confine superiore della funzione non deve superare il valore 1.05, ossia:

$$\hat{H}(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega \leq 1.05 \quad (7.11)$$

2. nella parte *passband*, il confine inferiore della funzione non deve essere meno di 0.95, ossia:

$$\hat{H}(\omega) = c_0 + c_1 \cos \omega \geq 0.95 \quad (7.12)$$

3. e così via.

Si mettono insieme tante “restrizioni” di questo tipo suddividendo la funzione in tanti punti e poi si cercano i coefficienti c_i che soddisfino simultaneamente tutti questi punti. Se, ad esempio, suddividiamo la parte *passband* in 500 punti e la parte *stopband* in altri 500 punti, avremo 1000 “restrizioni” da rispettare simultaneamente. La soluzione

7 La progettazione dei filtri FIR

sembra molto difficile, ma in realtà la matematica degli anni '40 ha trovato degli algoritmi (detti di *programmazione lineare*) per risolvere questo tipo di problemi. Questo tipo di problemi si chiama *minimax* perché vogliamo *massimizzare la distanza minima* per ogni “restrizione”.

A questo punto, tenendo conto del fatto che i coefficienti che si stanno cercando sono quelli di una serie di coseni, possiamo utilizzare una serie di Fourier di soli coseni con le ampiezze che soddisfino le restrizioni poste. I coefficienti della serie dovranno essere opportunamente “finestrati” per evitare il fenomeno del *ripple* nella parte *passband* e nella parte *band-reject*. La lunghezza del filtro sarà basata sulle restrizioni poste sulla larghezza di banda della transizione.

Bibliografia

- [Park, 2010] Park, T. (2010). *Introduction To Digital Signal Processing: Computer Musically Speaking*. World Scientific.
- [Parks and Burrus, 1987] Parks, T. W. and Burrus, C. (1987). *Digital filter design*. Topics in digital signal processing. Wiley.
- [Shenoi, 2005] Shenoi, B. (2005). *Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design*. Wiley.
- [Steiglitz, 1974] Steiglitz, K. (1974). *An introduction to discrete systems*. Wiley.
- [Steiglitz, 1996] Steiglitz, K. (1996). *A digital signal processing primer*. Addison–Wesley, Menlo Park, California.