011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

3.7 哥德尔不完备性定理

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

❖ **一阶形式化理论** 任给一个应用领域M，将M的基础性知识表示为公设Γ，使得：1. M⊨Γ；2. 通过推理Γ⊢p可得M的其他知识p (p∉Γ并且M⊨ p)，则称Γ是M的一阶形式化理论。

❖ **推论（闭式的语义特征）** 任给闭式p和一阶结构M，M ⊨p和M ⊨ ¬p有且仅有一个成立。

◆ **注释** 在模型/M有效的意义下，闭式遵守矛盾律和排中律。

❖ **反思** 闭式语义特征表明，在一个一阶结构中有效的数学命题不可能相互矛盾。那么，为什么会出现第三次数学危机？

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ 例(罗素悖论) 考虑含个体常元**X**和唯一谓词符号$\in$的一阶语言$K_{\in}$及其一阶结构M=(D, ∅, P)，D是所有集合的集合；P={∈}，∈是D上的属于关系；$\in^M$是∈，$\mathbf{X}^M$是集合$X =_{df} \{x\in \mathbf{D} \mid \neg(x\in x)\}$，显然X是D的个体，故$K_{\in}$闭式$\mathbf{X}\in\mathbf{X}$解释为M上的命题X∈X。

◆问题：$M \models \mathbf{X}\in\mathbf{X}$和$M \models \neg(\mathbf{X}\in\mathbf{X})$之一成立？

1. 假设$M \models \mathbf{X}\in\mathbf{X}$，即对一切解释I有I(X∈X)=t，由X定义对一切I有I(¬(X∈X))=t，故依M有效的定义有$M \models \neg(\mathbf{X}\in\mathbf{X})$，矛盾；

2. 假设$M \models \neg(\mathbf{X}\in\mathbf{X})$，即对一切I有I(¬(X∈X))=t，由X定义对一切I有I(X∈X))=t，故依M有效的定义有$M \models \mathbf{X}\in\mathbf{X}$，矛盾。

3.7 哥德尔不完备性定理

- **观察** $M \models X \in X$和$M \models \neg(X \in X)$都成立则违反矛盾律，都不成立则违反排中律，二者都违反数学界共识——任何命题有真假。
- **悖论** 不明原因的逻辑矛盾；例如上述最大集合悖论，任何情况下都导致矛盾却找不到原因。
- **观察** 19世纪末发现的一批数学悖论提示，数学可能隐含着被普遍忽略的深层缺陷，数学知识体系可能存在着未被发现的不相容性。史称第三次数学危机。
- **注释** 第三次数学危机之后，引起危机的情况被排除。

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ **希尔伯特方案** 针对第三次数学危机，希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)提出一个解决方案，要点如下：

1. 数学分支形式化，使得一个数学分支不相容当且仅当它的形式化理论不相容；

2. 用有穷主义方法，证明各数学分支形式化理论的相容性。

◆ **注释** 1. 迄今介绍的形式化理论的要求不完全复合希尔伯特方案要点1的要求；2. 在希尔伯特方案中并未给出有穷主义方法的严格定义，与能行方法类似。

3.7 哥德尔不完备性定理

- **相容性** 任何公式集Γ是不相容的，如果存在闭式p使得$\Gamma\vdash p$并且$\Gamma\vdash\neg p$都成立；否则Γ是相容的。
- **完备性** 任何公式集Γ是完备的，如果Γ是相容的，并且对任何闭式p，$\Gamma\vdash p$或者$\Gamma\vdash\neg p$成立；否则Γ是不完备的。
- **记号** 1. 对任何公式集Γ，$Th(\Gamma) =_{df} \{p \mid p$是闭式且$\Gamma\vdash p\}$；直观上Γ代表一个数学分支的形式化理论，Th(Γ)是从Γ形式推出的所有闭式的集合。2. 对任何一阶结构M，$Th(M) =_{df} \{p \mid p$是闭式且$M \models p\}$；直观上M代表一个数学分支，Th(M)是该分支中的所有真命题的集合。

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ 定理1 若Γ完备且M $\models$ Γ，则Th(Γ) = Th(M)。

◆证明 略。

❖ 注释 若Γ是完备的，则依完备性的定义，Γ也是相容的，即Th(Γ)是相容的。于是依定理1，Th(M)也是相容的。

❖ 注释 根据定理1，Th(M)相容性证明被归结为Γ完备性证明。也就是说，定理1提供了一条满足希尔伯特方案要点1要求的具体途径，将一个数学分支的相容性证明归结为该分支的形式化理论的完备性证明。

3.7 哥德尔不完备性定理

- **哥德尔不完备性定理研究动机** 以初等数论片段做为希尔伯特方案的一个具体对象，为了证明该片段的相容性，尝试证明形式化理论K_N的完备性。
- **注释** 证明中将根据需要，将K_N等价地视为应用谓词演算或者包含等词公设和算术公设的公式集。
- **哥德尔不完备性定理大意** 若K_N是相容的，则它是不完备的。
- **注释** 根据定理1，证明K_N完备性是证明K_N所形式化的初等数论片段相容性的途径。哥德尔不完备性定理表明此路不通，故希尔伯特方案无法实现。

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ 哥德尔不完备性定理的证明规划

1. 假设K_N是相容的，构造一个K_N不可判定命题p，即一个满足$\vdash_{K_N} p$和$\vdash_{K_N} \neg p$都不成立的K_N闭式p，从而证明K_N是不完备的；

2. 构造p为"p在K_N中不可证"，并证明p是K_N不可判定的。

◆ 注释 p是一个命题。如果p在K_N中不可证则p为真；如果p在K_N中可证则p为假。

❖ 注释 p是一个断定自己K_N不可证的自指命题。而K_N不可证无法在$K_N(Y)$公式中直接表达。

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ 自指命题的构造

1. **数字化** K_N公式q(u)表示项u有性质q，即项u表示一个作为主语的个体，q表示一个作为谓语的性质。由于自指命题p是自己的主语，所以必须在K_N中将公式p表示为一个项。为此引入哥德尔编码，将K_N公式q(u)映射为一个自然数n (n=g(q(u)))，然后将n表示为K_N的数字$\underline{n}$，从而转化为K_N项。哥德尔编码还同时实现了公式序列到K_N数字的转化。因此，哥德尔编码实现了K_N公式和公式序列的数字化。

3.7 哥德尔不完备性定理

2. 递归化 经哥德尔编码，K_N公式和公式序列映射为自然数，故K_N形式证明可表示为自然数上的二元关系W，使得：

$(n_1, n_2) \in W$ *iff* n_1是一个K_N公式$q(u)$的哥德尔数 并且
n_2是一个K_N公式序列S的哥德尔数 并且
S是$q(u)$的一个K_N证明

因此，$(n_1, n_2) \in W$表示 n_1代表的公式有一个n_2代表的K_N证明。

于是，$\exists n_2: (n_1, n_2) \in W$ 表示n_1代表的公式在K_N中可证；

$\forall n_2: (n_1, n_2) \notin W$ 表示n_1代表的公式在K_N中不可证。

哥德尔证明了W是递归的，从而实现了K_N不可证的递归表示。

3.7 哥德尔不完备性定理

3. 反射 设二元公式w是递归关系W的K_N表示，于是有：

$$\text{如果}(n_1, n_2)\in W\text{则}\vdash_{K_N} w(\underline{n}_1, \underline{n}_2),$$

$$\text{如果}(n_1, n_2)\notin W\text{则}\vdash_{K_N} \neg w(\underline{n}_1, \underline{n}_2).$$

因此，借助于K_N可表示，命题“q(u)在K_N中不可证”被表达为：$\vdash_{K_N} \forall y \neg w(\underline{n}_1, y)$，其中$n_1=g(q(u))$。

◆**注释** 命题“q(u)在K_N中不可证”是一个关于K_N的元级陈述，本来不是一个K_N公式。利用数字化和递归化转化为递归表示，再利用K_N可表示反射为K_N中的表达，即内定理$\vdash_{K_N} \forall y \neg w(\underline{n}_1, y)$。

3. 7 哥德尔不完备性定理

4. 自指 假如自然数n_1恰好是$\forall y \neg w(\underline{n_1}, y)$的哥德尔数，则$K_N$公式$\forall y \neg w(\underline{n_1}, y)$就是待构造的自指命题$p$，但这是不可能的。于是修改W的定义如下：

$(n_1, n_2) \in W$ *iff* n_1是一个K_N公式$q(x)$的哥德尔数 并且

n_2是一个K_N公式序列S的哥德尔数 并且

S是$q(\underline{n_1})$的一个K_N证明

于是，$\forall n_2$: $(n_1, n_2) \notin W$的表示：公式$q(\underline{n_1})$在K_N中不可证。

哥德尔证明了W是递归的，因而是K_N可表示的。

3.7 哥德尔不完备性定理

$\forall n_2$: $(n_1, n_2) \notin W$表示：公式$q(\underline{n_1})$在K_N中不可证。

设K_N公式$w(x, y)$是递归关系W的K_N表示，令$p(x)$代表K_N公式$\forall y \neg w(x, y)$，并假设它的哥德尔数为m，于是$p(\underline{m})$代表K_N公式$\forall y \neg w(\underline{m}, y)$，所表达的命题是$\forall y$: $(m, y) \notin W$，其含义是：公式$\forall y \neg w(\underline{m}, y)$在$K_N$中不可证。也就是说，$p(\underline{m})$的含义是

"$p(\underline{m})$在K_N中不可证."

至此完成自指命题的构造。

3.7 哥德尔不完备性定理

❖ **定义(ω相容)** Γ是ω相容的，如果对任何包含自由变元x的K_N公式$p(x)$，下列两条件不同时成立：

1. 对所有自然数n，$\Gamma \vdash p(\underline{n})$；
2. $\Gamma \vdash \neg\forall x\, p(x)$。

❖ **命题2** 若Γ是ω相容的，则Γ是相容的。

◆ **证明** 练习。

❖ **定理(哥德尔第一不完备性定理)** 若K_N是ω相容的，则K_N是不完备的。

3.7 哥德尔不完备性定理

◆**证明** 假设K_N是ω相容的，用反证法证明K_N是不完备的，也就是$\vdash_{K_N} p(\underline{m})$和$\vdash_{K_N} \neg p(\underline{m})$都不成立。

1. 设$\vdash_{K_N} p(\underline{m})$，即$\vdash_{K_N} \forall y \neg w(\underline{m}, y)$，依K4和MP，对任何自然数n有$\vdash_{K_N} \neg w(\underline{m}, \underline{n})$。另一方面，设$p(\underline{m})$的一个$K_N$证明的哥德尔数为n，则$(m, n) \in W$，由于W的$K_N$表示为$w$，故有$\vdash_{K_N} w(\underline{m}, \underline{n})$。于是$K_N$是不相容的，依命题2 K_N也不是ω相容的，矛盾。

所以，$\vdash_{K_N} p(\underline{m})$不成立。

3.7 哥德尔不完备性定理

2. 设$\vdash_{K_N}\neg p(\underline{m})$，即$\vdash_{K_N}\neg\forall y\neg w(\underline{m}, y)$---(I)。

另一方面，由1知$\vdash_{K_N} p(\underline{m})$不成立，即$p(\underline{m})$在$K_N$中不可证，故依W和$p(\underline{m})$定义，对一切自然数n有(m, n)$\notin$W---(II)。由W的$K_N$可表示性和(II)得：对一切自然数n，$\vdash_{K_N}\neg w(\underline{m}, \underline{n})$---(III)。

根据(I)和(III)知，K_N不是ω相容的，矛盾。所以$\vdash_{K_N}\neg p(\underline{m})$不成立。

综合1和2知，$p(\underline{m})$是一个K_N不可判定命题，即K_N是不完备的。证毕。