011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

第1章 命题逻辑

导　言

- **演绎逻辑**从低到高分三层：命题逻辑、一阶逻辑、高阶逻辑。
- 一种形式逻辑通常包含三个方面/部分：

1. **形式逻辑的语法学(演算)**：不带直观含义的公理系统，系统内进行不依赖于任何应用领域具体内容的纯形式化推理。
2. **形式逻辑的语义学**：给演算赋予含义、使形式公理系统与现实世界相互关联的理论方法。
3. **形式逻辑的元理论**：研究形式公理系统的语法学与语义学之间关系的理论方法。

- **命题逻辑的构成**：命题演算、命题语义学、命题逻辑元理论。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ **命题** 命题是有真假的陈述句。

➢ **例1** （简单命题）

(1) 雪是白的。	(经验命题)
(2) 1+1=2。	(数学命题)
(3) 5000年前太阳从西边升起。	(时态命题)
(4) 他相信911事件是伪造的。	(模态命题)
(5) 你吃了吗？	(不是命题，可用命题逻辑处理)
(6) 别说话！	(不是命题，可用命题逻辑处理)

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

➢ **例1（简单命题）**

(7) 本命题是假的。

解：(7)不是命题，因为陈述句(7)没有真假。证明：

- 假设(7)是真的，那么它说的是对的，它说自己是假的，所以(7)是假的，矛盾；
- 假设(7)是假的，那么它说的是错的，它说自己是假的，所以(7)是真的，矛盾。

◆ **观察**：命题的界定以矛盾律、排中律为预设前提。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

- ❖ **逻辑常项** 常见的有四种：联结词、量词、时态词、模态词。
- ❖ **命题逻辑中的逻辑常项** 命题逻辑的逻辑常项只有联结词。
- ➢ 命题逻辑忽略命题中存在的其他逻辑常项；如例1中(3)、(4)。
- ❖ **命题的分类**
- ➢ 不含联结词的命题是简单命题/原子命题；
- ➢ 包含联结词的命题是复合命题。

◆**注意！** 逻辑常项是可能在命题中出现的符号；而在演绎推理中，不允许推出符号$\vdash$在命题中出现。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ 命题逻辑的5个常用联结词

符　号	名　称	读　法
$\neg$	否定词	$\neg p$ 读作非p
$\rightarrow$	蕴涵词	$p\rightarrow q$ 读作p蕴涵q
$\wedge$	合取词	$p\wedge q$ 读作p且q
$\vee$	析取词	$p\vee q$ 读作p或q
$\leftrightarrow$	等值词	$p\leftrightarrow q$ 读作p等值于q

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

➢ 例2（复合命题）

(8) 并非雪是白的。 (否定命题)

(9) 雪是白的并且1+1=2。 (合取命题)

(10) 雪是白的或者1+1=2。 (析取命题)

(11) 雪是白的蕴涵1+1=2。 (条件句命题)

(12) 雪是白的等值于1=1=2。 (等值句命题)

◆ **观察** 复合命题的构成遵守外延性原则。

◆ **观察** 在逻辑等严谨的理论体系中，原则必须坚持到底。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ 命题逻辑中联结词的含义

- 命题演算的构成和其中推理不需要借助于命题联结词的含义；
- 联结词的含义在命题语义学中严格定义；
- 联结词含义在命题语义学中的定义与联结词（否定、蕴涵、并且、或者、等值）在自然语言中的含义不完全一致。

◆ 对比：《几何原本》中的形式逻辑系统是实质公理系统(带有几何学直观含义)；命题演算是形式公理系统(不带直观含义)。

◆ 形式公理系统是人类抽象思维在20世纪达到的新高峰。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

思考题

1.1 试用复合命题表达自然语言条件句“如果…则…”。

习题

1.1 (Warson实验)设有四张纸牌，每张纸牌的一面有⊕，另一面有⊗。⊕和⊗的颜色可红可蓝。四张牌放在桌上：

红⊕　　蓝⊗　　红⊗　　蓝⊕

有人提出猜测：“如果朝上的一面是红⊕，则另一面是蓝⊗。”要求通过翻牌检验此猜测。问应该翻哪几张牌？你的检验法能否确定此猜测的真假？

1.2 命题演算

❖ 命题演算L是命题逻辑的一个形式公理系统；这个系统与经典命题逻辑中的其他形式公理系统是相互等价的。

❖ 命题演算L的构成

I 命题语言

Ia 符号表

- 命题符号/命题变元 $x_1, x_2, \ldots\ldots$ (可数无穷多个)
- 基本联结词 $\neg, \rightarrow$
- 辅助符号 (,)

1.2 命题演算

I 命题语言

Ib 公式

1. 任何命题符号是公式，称为**原子公式**；
2. 若p是公式，则$\neg p$是公式，称为**否定式**；
3. 若p, q是公式，则$p \rightarrow q$是公式，称为**蕴涵式**；
4. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式。

- 这四条规则称为**形成规则**。
- 其中p,q本身不是命题语言的公式。

◆**记号** 令X为全体命题符号的集合，L(X)为命题语言中全体公式的集合；令$X_n=\{x_1, \ldots, x_n\}$，$L(X_n)$为只出现命题符号$x_1, \ldots, x_n$的所有命题公式的集合。

1.2 命题演算

II 推理设施

IIa 公理模式

(L1) $p\to(q\to p)$；

(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$；

(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$.

每一条公理模式不是公理，代表无穷多条公理，其中p, q, r代表任意命题公式。

IIb 推理规则

(MP) 从p和$p\to q$推出q. (分离规则)

1.2 命题演算

❖ 命题演算L中的形式推理/证明

$p_n=p$表示=左右是同一个命题公式。

I 形式证明

定义1(形式证明) 任给公式p。p在L(X)中的一个证明是L(X)中的一个公式序列$p_1, \cdots, p_n$ ($p_n=p$)，满足对任何k ($1 \le k \le n$):

1. p_k是一条公理；或者
2. 存在p_i, p_j ($i, j<k$)使得$p_j=p_i \to p_k$。

例如，如果p_1是公理，$p_1 \to p_3$是公理，则p_3满足定义1条件2。

◆ 记号 若存在p的一个证明，称p可证，p是L内定理，记为$\vdash p$。

1.2 命题演算

❖ 例1 试证 $\vdash (x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_1)$.

证明 只需给出公式$(x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_1)$在L(X)中的一个证明$p_1, \cdots, p_n$。下面是一个证明：

	证明根据
1. $x_1 \to (x_2 \to x_1)$	(L1)
2. $(x_1 \to (x_2 \to x_1)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_1))$	(L2)
3. $(x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_1)$.	MP1, 2

证毕。

◆ **要求** 证明中必须写出所有步骤中的证明根据！

1.2 命题演算

❖ 命题演算L中的形式推理/证明

II 形式推理

定义2(形式推理) 任给公式p和公式集Γ。p的一个从Γ的形式推理是L(X)中的一个公式序列$p_1, \cdots, p_n$（$p_n = p$），满足对任何k ($1 \le k \le n$)：

1. p_k是一条公理；或者
2. $p_k \in \Gamma$；或者
3. 存在p_i, p_j ($i, j < k$)使得$p_j = p_i \to p_k$。

◆ **记号** 若存在p的一个从Γ的推理，称p从Γ可推，记为$\Gamma \vdash p$。

◆ **观察** 推理是带前提的证明；证明是无前提的推理。

1.2 命题演算

❖ 例2 试证 $\{x_1\} \vdash x_2 \rightarrow x_1$.

证明 只需给出公式$x_2 \rightarrow x_1$的一个从$\{x_1\}$的推理。下面是一个这样的推理：

	证明根据
1. x_1	前提
2. $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$	(L1)
3. $x_2 \rightarrow x_1$.	MP1, 2

证毕。

◆ **要求** 形式推理同样必须写出证明根据！

1.2 命题演算

❖ 例3(同一律) 试证 $\vdash p \to p$.

❖ 例4(否定前件率) 试证 $\vdash \neg p \to (p \to q)$.

——自修

1.2 命题演算

思考题

1.2 同一律的证明是否必须使用(L1)？证明你的结论。

1.3 你以前理解的严格证明与命题演算L中的形式证明有何异同？L中的形式证明/推理有什么必要性？

习题

1.2 p.22: 2(1, 2); 3(3, 4).