

011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

# 数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄



## 3.4 $K_N$ 可表示函数/关系

# 回顾： $K_N$ 的构成与简单性质

- ❖  $K_N$ 的构成：语言、公理模式、推理规则、公设、形式证明/推理、定义。
- ❖  $K_N$ 的标准模型 $N$  预期 $K_N$ 是初等数论一个片段的形式化，使得该片段是一个正规 $K_N$ 模型 $N=(N, F, P)$ ，称为 $K_N$ 的标准模型，其中 $N$ 是自然数集， $F$ 包含自然数集上的后继函数 $+1$ 、加法函数 $+$ 和乘法函数 $\times$ ， $P$ 包含自然数集上的相等关系 $=$ ，满足：  
 $0^N$ 是0； $'^N$ 是 $+1$ ； $+^N$ 是 $+$ ； $\times^N$ 是 $\times$ ； $=^N$ 是 $=$ 。
- ❖ 定理1  $N$ 是 $K_N$ 的一个正规模型。

# 回顾： $K_N$ 的构成与简单性质

- ❖ 定理2  $\vdash_{K_N} \underline{n} + \underline{m} = \underline{n + m}$ 。
- ❖ 定理3  $\vdash_{K_N} \underline{n} \times \underline{m} = \underline{n \times m}$ 。
- ❖ 定理6 如果  $m = n$ ，则  $\vdash_{K_N} \underline{m} = \underline{n}$ ；如果  $m \neq n$ ，则  $\vdash_{K_N} \neg(\underline{m} = \underline{n})$ 。
- ❖ 性质 自然数加法和乘法运算的主要性质（交换律、结合律、分配律、消去率...）在  $K_N$  中全部满足。
- ❖ 观察 以上结果都是关于  $K_N(Y)$  中的函数和关系的。但是，在  $K_N$  试图形式化的初等数论片段中，是否只有这些函数和关系？

## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

- ❖ 术语 一个 $k$ 元数论函数 $g: \mathbf{N}^k \rightarrow \mathbf{N}$ 简称为一个 $k$ 元函数, 一个 $k$ 元数论关系 $R \subseteq \mathbf{N}^k$ 简称为一个 $k$ 元关系, 其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集。
- ◆ 注释 数论函数和数论关系的定义不限定采用什么运算, 更不限于 $K_N(Y)$ 中的函数和关系。
- ❖ 观察  $K_N$ 相对于初等数论片段的表示能力如何? 即问: 对哪些数论函数 $g(x_1, \dots, x_k)$ , 存在表示 $g(x_1, \dots, x_n)$ 的 $K_N$ 公式 $p$ , 使得 $g(x_1, \dots, x_k) = n$ 成立或不成立当且仅当 $\vdash_{K_N} p$ 或 $\vdash_{K_N} \neg p$ 。对于数论关系也存在同样的问题。

## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 定义1 ( $K_N$ 可表示函数) 一个 $k$ 元函数 $g$ 是 $K_N$ 可表示的, 如果存在一个含 $k+1$ 个自由变元的 $K_N$ 公式 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ , 使得对任意对 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ 中 $x_{k+1}$ 自由的项 $u$ 及 $n_1, \dots, n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$ 有

1. 如果 $g(n_1, \dots, n_k) = n_{k+1}$  则  $\vdash_{K_N} p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1})$ ;
2. 如果 $g(n_1, \dots, n_k) \neq n_{k+1}$  则  $\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, \underline{n}_{k+1})$ ;
3.  $\vdash_{K_N} p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, u) \rightarrow u = g(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k)$ .

◆ 注释 公式 $p$ 称为数论函数 $g$ 的 $K_N$ 表示。

## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

- ◆ 注释 如果 $k$ 元函数 $g$ 是 $K_N$ 可表示的, 则数论函数 $g$ 的计算可以通过 $K_N$ 对公式 $p$ 的推理实现; 也就是说, 任何 $K_N$ 可表示函数的计算可归结为 $K_N$ 中的形式推理。
- ❖ 问题1 是否每一个 $K_N$ 公式都表示一个数论函数? 即: 是否对于每一个 $k+1$ 元 $K_N$ 公式 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ , 存在一个 $k$ 元函数 $g(n_1, \dots, n_k)$ , 使得 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ 是 $g(n_1, \dots, n_k)$ 的 $K_N$ 表示?
- ◆ 答 否。



## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 例1  $K_N$ 公式  $x_1 = x_1 \wedge \neg(x_2 = x_2)$  不表示任何数论函数。

◆ 反证：假设存在1元数论函数  $g(n_1) = n_2$ ，使得  $x_1 = x_1 \wedge \neg(x_2 = x_2)$  是数论函数  $g(n_1) = n_2$  的  $K_N$  表示。则根据定义1条件1，对任何  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ，有  $\vdash_{K_N} \underline{n_1} = \underline{n_1} \wedge \neg(\underline{n_2} = \underline{n_2})$ 。于是，由3.3节定理1，有  $N \models \underline{n_1} = \underline{n_1} \wedge \neg(\underline{n_2} = \underline{n_2})$ ，其中  $N$  是  $K_N$  的标准模型，这是不可能的。故  $x_1 = x_1 \wedge \neg(x_2 = x_2)$  不表示任何数论函数。



## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 问题2 同一个 $K_N$ 公式 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ 是否可以用来表示两个不同的数论函数?

◆ 答 否。

◆ 证明 反证: 设 $g_1$ 和 $g_2$ 是两个不同的 $k$ 元函数, 则存在自然数 $n_1, \dots, n_k$ 使得 $g_1(n_1, \dots, n_k) \neq g_2(n_1, \dots, n_k)$ 。设公式 $p(x_1, \dots, x_{k+1})$ 是 $g_1$ 和 $g_2$ 的 $K_N$ 表示, 依定义1条件1有 $\vdash_{K_N} p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, g_1(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k))$ , 依定义1条件2有 $\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, g_2(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k))$ , 因此 $K_N$ 是不相容的。但根据上节定理1,  $K_N$ 有模型 $N$ , 于是依 $K$ 可靠性定理推论,  $K_N$ 是相容的, 矛盾。

## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 问题3 是否每一个数论函数都是 $K_N$ 可表示的？

◆ 答 否。

◆ 证明 所有数论函数的集合是不可数的；所有 $K_N$ 公式的集合是可数的，并且每一个 $K_N$ 公式只能表示一个数论函数。因此，必然存在不是 $K_N$ 可表示的数论函数。

❖ 注释 “大部分”数论函数不是 $K_N$ 可表示的。但是，**可计算的数论函数都是 $K_N$ 可表示的。**

❖ 什么是“可计算函数”？



## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 例2 自然数上的和函数 $+$ 是 $K_N$ 可表示的。

◆ 解 可验证 $x_1 + x_2 = x_3$ 是自然数和函数的 $K_N$ 表示。

❖ 例3 自然数上的积函数 $\times$ 是 $K_N$ 可表示的。

◆ 解 可验证 $x_1 \times x_2 = x_3$ 是自然数积函数的 $K_N$ 表示。

❖ 例4 自然数上的投影函数是 $K_N$ 可表示的。

◆ 解 投影函数定义为 $p_i^k(n_1, \dots, n_k) = n_i, i=1, \dots, k$ 。

可验证 $x_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_k = x_k \wedge x_{k+1} = x_i$ 是投影函数的 $K_N$ 表示。

## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 定义2( $K_N$ 可表示关系) 一个 $k$ 元关系 $R$ 是 $K_N$ 可表示的, 如果存在含 $k$ 个自由变元的 $K_N$ 公式 $p(x_1, \dots, x_k)$ , 使得对任意 $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ 有

1. 如果 $(n_1, \dots, n_k) \in R$  则  $\vdash_{K_N} p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k)$ ;
2. 如果 $(n_1, \dots, n_k) \notin R$  则  $\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k)$ 。

◆ 注释 公式 $p$ 称为关系 $R$ 的 $K_N$ 表示。



## 3.4 $K_N$ 可表示函数和关系

❖ 定义3(关系的特征函数) 一个 $k$ 元关系 $R$ 的特征函数 $C_R$ 定义为

$$C_R(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} 1, & (n_1, \dots, n_k) \in R; \\ 0, & (n_1, \dots, n_k) \notin R. \end{cases}$$

其中 $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ 。

❖ 定理  $k$ 元关系 $R$ 是 $K_N$ 可表示的当且仅当它的特征函数 $C_R$ 是 $K_N$ 可表示的。

◆ 证明 自修。