011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

记2020科大樱花
——致敬为家国大义挺身而出的勇士
和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；
花开岂待三千客，直教春风一片新。

2.6 K的可靠性和完全性

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(M有效)** 设p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若对一切V，p在I=(M, V, v)下有I(p)=t，则称p是M有效的，称M为p的一个模型，记为M$\models p$。

❖ **例(续)** 设$K_0(Y)$不含函数符号，只含个体常元c和谓词符号P。

1. 取一阶结构$M_N=(N, \varnothing, \{>\})$，其中$N$是自然数集，>是大于关系，$c^M$为0，$P^M$为>。则P($x$, c)和$\forall x$P(x, c)都不是M_N有效的。

2. 取一阶结构$M'_N=(N, \varnothing, \{\geq\})$，其中$N$是自然数集，≥是自然数集上的大于等于关系，$c^M$为0，$P^M$为≥。则P($x$, c)和$\forall x$P(x, c)都是M'_N有效的。

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

❖ 定理(语义性质)

1. $M \models p$当且仅当$M \models \forall x p$当且仅当$M \models \forall p$。

❖ 观察 假如以“M有效”作为一种“真”，则开公式如$P(x, c)$与其全称闭式如$\forall x P(x, c)$有相同的“真假”。

❖ 推论 任给闭式p和一阶结构M，$M \models p$和$M \models \neg p$有且仅有一个成立。

❖ 观察 假如以“M有效”作为一种“真”，则开公式如$P(x, c)$与其全称闭式如$\forall x P(x, c)$都有真假。

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

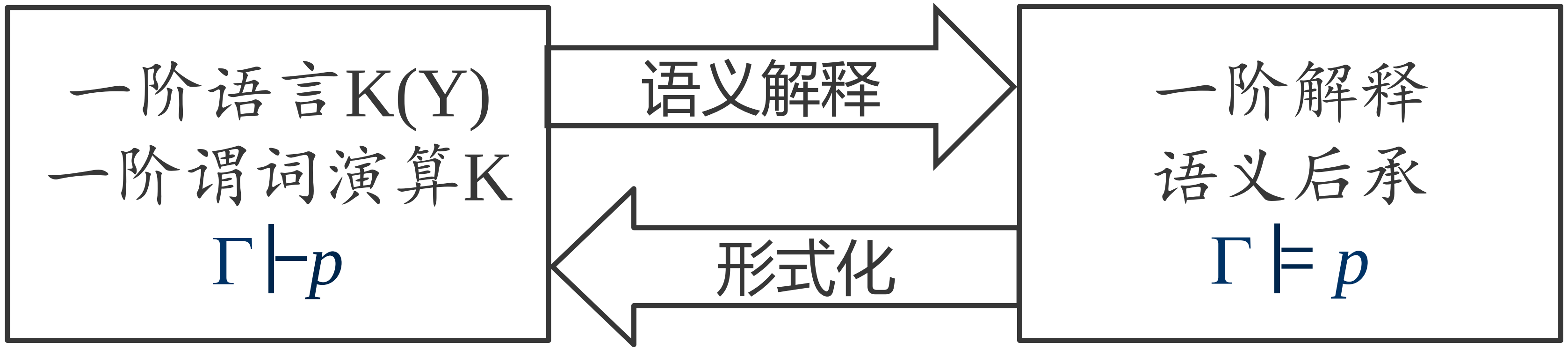
❖ **定义(语义后承)** 设$\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$。p称为Γ的语义后承，记为$\Gamma \models p$，如果对任何一阶结构M，只要$M \models \Gamma$，则有$M \models p$。

◆ **注释** 语义后承$\Gamma \models p$的直观含义是：如果Γ真，则p真；其中，"真"定义为"M有效"。

◆ **注释** 以"M有效"作为一种"真"，意味着对任意公式p，为了判断p的"真假"，要给出一个一阶结构M，并且针对这个M和M上的所有V，$I(p)=t$， $I=(M, V, v)$。

❖ **注释** 一个M=(**D**, **F**, **P**)代表一个具体的应用领域；因此，$\Gamma \models p$反映了Γ与p之间跨领域有效的逻辑推导关系。

2.6 讨论：一阶逻辑的语法部分和语义部分



$\Gamma \vdash p$ 当且仅当 $\Gamma \models p$？

2.6 K的可靠性定理

❖ **K的可靠性** 如果$\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma \models p$。

❖ **引理** K的公理都是逻辑有效的。

◆ **证明** 由K-L关系定理，易证引理对K1-K3成立。

考虑K4。要证当项u对$p(x)$中x自由时，有$\models \forall x\, p(x) \to p(u)$，即对任何一阶结构M=(**D**, **F**, **P**)，有M$\models \forall x p(x) \to p(u)$，又等价于对一切解释I=(M, V, v)，如果I($\forall x\, p(x)$)=t，则I($p(u)$)=t。对任意解释I，假设I($\forall x\, p(x)$)=t，则依定义，对一切d∈**D**有$\mathrm{I}_{x/d}(p(x))$=t。设I(u)=d'∈**D**，于是I($p(u)$)=$\mathrm{I}_{x/d'}(p(x))$=t，故I($\forall x\, p(x) \to p(u)$)=t。由I之任意性，引理成立。K5类似可证。引理得证。

2.6 K的可靠性定理

❖ **定理(可靠性)** 如果$\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma \models p$。

◆ **证明** 设$\Gamma \vdash p$，则存在推理$p_1, \ldots, p_n = p$。施归纳于n。

1. n=1时。有两种情况。第一，$p \in \Gamma$，依语义后承定义，结论成立；第二，p是公理，由引理结论成立。

2. n>1时。有四种情况。第一、二种同1。第三种，p_n由p_i和p_j (i, j<n)用MP得到，即$p_j = p_i \rightarrow p_n$。由归纳假设有$\Gamma \models p_i$和$\Gamma \models p_j$。由MP有效性，得$\Gamma \models p_n$。第四种，$p_n = \forall x\, p_i$，i<n。由归纳假设有$\Gamma \models p_i$。由UG有效性，得$\Gamma \models \forall x p_i$，即$\Gamma \models p_n$。

依归纳法原理，结论对一切n成立。

2.6 K的可靠性定理

❖ **推论**（K相容性） 对任何$p \in K(Y)$，$\vdash p$ 和$\vdash \neg p$不同时成立。

◆ **证明** 反证。假设$\vdash p$和$\vdash \neg p$同时成立。于是，根据可靠性定理，$\vDash p$和$\vDash \neg p$同时成立，即p和$\neg p$都是逻辑有效式。这是不可能的。

◆ **注释** 在一阶谓词演算K自身中不可能推出矛盾。

2.6 K的可靠性定理

❖ **推论** 对任何$\Gamma \subseteq K(Y)$，如果Γ有模型，则Γ是相容的。

◆ **证明** 反证。假设Γ不相容并且有模型M。于是，存在一个公式$p \in K(Y)$使得$\Gamma \vdash p$ 和$\Gamma \vdash \neg p$同时成立。根据可靠性定理，有$M \models p$和$M \models \neg p$同时成立。根据M有效的定义，这是不可能的。

◆ **注释** 对任何$\Gamma \subseteq K(Y)$，只要Γ有一个模型，则在K中，从Γ不可能推出矛盾。

2.6 K的完全性定理

❖ **定理(完全性)** 如果$\Gamma \models p$，则$\Gamma \vdash p$。

◆ **证明** 采用反证法：假设$\Gamma \vdash p$不成立，往证$\Gamma \models p$不成立。主要步骤：

1. 假设$\Gamma \vdash p$不成立，于是得$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$相容（否则，依反证律有$\Gamma \vdash \forall p$，于是$\Gamma \vdash p$，矛盾）；
2. 将$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$扩张成极大相容集$\Gamma^*$，由$\Gamma^*$构造$\Gamma \cup \{\neg \forall p\}$的一个模型M；
3. 所以，$M \models \neg \forall p$，即$M \models \forall p$不成立，于是$M \models p$不成立。

2.6 K的完全性定理

◆ 其中，步骤1和3已经完成证明；步骤2需细化。将步骤2推广为下述引理并证明之。

❖ **引理** 相容集有可数模型。

◆ **注释** 可数模型是论域**D**的基数可数的模型。

◆ **注释** 由步骤1已证明$\Gamma\cup\{\neg\forall p\}$相容；由引理，得$\Gamma\cup\{\neg\forall p\}$有可数模型M；再由步骤3，得M $\models \neg\forall p$，即M $\models \forall p$不成立，于是M $\models p$不成立。故引理成立则定理成立。

2.6 K的完全性定理

◆**引理证明** 设Γ为任意相容集。主要步骤：

I. 将Γ扩充成一个极大相容集Γ*，包含三步；

II. 利用Γ*构造Γ的一个(可数)模型M，包含三步。

具体证明过程：

第一步：扩展一阶语言K(Y)为K^+(Y)。取可数无穷多个新的个体常元B={b_0, b_1, …}使得B∩C=∅，其中C是K(Y)的个体常元集。K的项集T相应地扩展为T^+，公式集K(Y)扩展为K^+(Y)。显然，T^+中的项和K^+(Y)中的公式仅仅增加了B的个体常元。

2.6 K的完全性定理

第二步：扩充K(Y)中的相容集Γ为K^+(Y)中的相容集Γ'。

将K^+(Y)中恰好包含一个自由变元的公式(可数无穷多个)排成一个不重复的序列S: $p_0(x_{i_0})$, $p_1(x_{i_1})$, …，其中个体变元x_{i_0}, x_{i_1}, …可重复。从B中取一个不重复的序列b_{j_0}, b_{j_1}, …，使得b_{j_n}不在S的前n个公式中出现。令

$$r_n = p_n(b_{j_n}) \to \forall x_{i_n} p_n(x_{i_n}),\ n = 0, 1, \ldots$$

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{r_0, r_1, \ldots\}$$

可证Γ'相容（练习）。

2.6 K的完全性定理

第三步：扩充相容集Γ'为极大相容集Γ*。将$K^+(Y)$中所有闭公式(可数无穷多个)排成一个不重复的序列S*: $p^*_0, p^*_1, \ldots$，令

$$\Gamma_0 =_{df} \Gamma'$$

$$\Gamma_{n+1} =_{df} \begin{cases} \Gamma_n, \text{如果}\Gamma_n \vdash p^*_n \text{成立;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg p^*_n\}, \text{如果}\Gamma_n \vdash p^*_n \text{不成立;} \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\Gamma^* =_{df} \bigcup_{n=1,\ldots,\infty} \Gamma_n$$

可证Γ*是极大相容的（练习）。

2.6 K的完全性定理

第四步：构造$K^+(Y)$的一个一阶结构$M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$。令

$$\mathbf{D} = \{u \mid u \in T^+ \text{且} u \text{是闭项}\}$$

(1) 对$K^+(Y)$的每一个个体常元$d \in B \cup C$，令$\underset{\in B \cup C}{d}{}^M = \overset{\in \mathbf{D}}{d}$；

(2) 对$K^+(Y)$的每一个n元函数符号g，令g^M: $\mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$满足

$$\underset{\in \mathbf{F}}{g}{}^M(\underset{\in \mathbf{D}}{u_1, \ldots, u_n}) = \underset{\in \mathbf{D}}{g(u_1, \ldots, u_n)}$$

令所有g^M的集合为$\mathbf{F}$。易证对$K^+(Y)$的所有闭项u，有$\underset{\in B \cup C}{u}{}^M = \underset{\in \mathbf{D}}{u}$。

2.6 K的完全性定理

第四步：构造$K^+(Y)$的一个一阶结构$M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$。令

$$\mathbf{D} = \{u \mid u \in T^+ \text{且} u \text{是闭项}\}$$

(3) 对$K^+(Y)$的每一个n元谓词符号P，定义$\mathbf{D}^n$上的关系P^M如下：

对任何$u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{D}$，令

$$(u_1, \ldots, u_n) \in P^M \text{ 如果} \Gamma^* \vdash P(u_1, \ldots, u_n);$$

$$(u_1, \ldots, u_n) \notin P^M \text{ 如果} \Gamma^* \vdash \neg P(u_1, \ldots, u_n);$$

$\in \mathbf{D}$　　$\in \mathbf{P}$　　$\in K^+(Y)$

令所有P^M的集合为$\mathbf{P}$。

2.6 K的完全性定理

第五步： 证明对$K^+(Y)$的所有闭式q：

$$\Gamma^* \vdash q \text{ 当且仅当 } M \vDash q$$

证明 习题2.8。

❖ **定义(一阶解释-续)** 6. 对任何原子公式$P(t_1, \ldots, t_n)$,

$$I(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} t, \text{ 如果}(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in P^M \\ f, \text{ 如果}(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \notin P^M \end{cases};$$

❖ **推论** 任给闭式p和一阶结构M，$M \vDash p$和$M \vDash \neg p$中有且仅有一个成立。

2.6 K的完全性定理

第六步：证明M是Γ的一个模型。

设$p\in\Gamma\subseteq\Gamma^*$，则$\Gamma^*\vdash p$。于是$\Gamma^*\vdash\forall p$。由五得$M \models \forall p$，由上节结果得$M \models p$。根据$p$之任意性，得$M\models\Gamma$，即M是Γ的一个模型。

注意到$\mathbf{D} = \{u \mid u\in T^+$且u是闭项$\}$是一个可数集，所以M是Γ的一个可数模型。

引理得证。

2.6 K的完全性定理

❖ 习题

2.8 试证在本节引理中，对$K^+(Y)$的所有闭式q:

$$\Gamma^* \vdash q \text{ 当且仅当 } M \models q。$$