011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

1.6 命题演算的可靠性和完全性

1.6 命题演算的可靠性和完全性

❖ **元理论** 通过语法和语义关系研究命题逻辑的宏观性质。

❖ **主要结果** 命题演算的可靠性定理和完全性定理。

可靠性： $\Gamma \vdash p \Longrightarrow \Gamma \vDash p$

完全性： $\Gamma \vDash p \Longrightarrow \Gamma \vdash p$

结论： $\Gamma \vdash p \Longleftrightarrow \Gamma \vDash p$

$\vdash p \Longleftrightarrow \vDash p$

1.6 命题演算的可靠性和完全性

1.6.1 可靠性

❖ **引理** 若公式p是L公理，则$\models p$。

证明概要 对每一种公理模式，用真值表法验证。例如(L1):

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
t	t	t	t
t	f	t	t
f	t	f	t
f	f	t	t

1.6 命题演算的可靠性和完全性

❖ **定理(可靠性，语义一致性)** 对所有p和Γ，若$\Gamma\vdash p$，则$\Gamma\vDash p$。

证 设$\Gamma\vdash p$，则存在p的一个从Γ的推理$p_1, \cdots, p_n$=p。施归纳于n证明$\Gamma\vDash p_n$。

(1)归纳基础，n=1。上述推理序列仅由p构成，因此p是公理或前提。若是公理，由引理，结论成立；若是前提，由语义后承定义，结论成立。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

❖ **定理(可靠性，语义一致性)** 对所有p和Γ，若$\Gamma\vdash p$，则$\Gamma\models p$。

证 (2)归纳步骤，n>1，假设结论对$p_1, \cdots, p_{n-1}=p$成立，证明结论对$p_1, \cdots, p_n=p$成立。

有三种可能情况：$p_n=p$是公理、前提和MP推出的。前两种情况的证明同(1)。

考虑第三种情况：存在$p_i, p_j\,(i, j<n)$使得$p_j= p_i\rightarrow p_n$。依归纳假设有：①$\Gamma\models p_i$；②$\Gamma\models p_j$，也就是$\Gamma\models p_i\rightarrow p_n$。再依据语义MP，得$\Gamma\models p_n$。依归纳法原理，结论对一切n成立。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

❖ **推论(无矛盾性，语法一致性)** 不存在公式p使得$\vdash p$并且$\vdash \neg p$。

证(反证) 假设存在L公式p使得$\vdash p$并且$\vdash \neg p$。则依可靠性定理，有$\models p$并且$\models \neg p$。这是不可能的。

◆ **观察** 命题演算L自身不可能产生矛盾。

❖ 是否存在p和Γ，使得$\Gamma \vdash p$并且$\Gamma \vdash \neg p$?

1.6 命题演算的可靠性和完全性

思考题

1.8 是否存在L公式p和公式集Γ，使得 $\Gamma \vdash p$ 并且 $\Gamma \vdash \neg p$？

1.6 命题演算的可靠性和完全性

1.6.2 完全性

❖ **定义(相容集)** 对任何L公式集Γ，若存在公式p使得$\Gamma\vdash p$并且$\Gamma\vdash\neg p$，则称Γ为不相容的；否则称为相容的。

❖ **定义(极大相容集)** 若L公式集Γ相容，且对任何L公式q有$\Gamma\vdash q$或者$\Gamma\vdash\neg q$，则称Γ为极大相容集。

◆ **观察** 会不会有一个极大相容集Γ，使得存在Γ'满足：Γ⊆Γ'、Γ≠Γ'并且Γ'是相容的？

1.6 命题演算的可靠性和完全性

❖ **定理（语义完全性）** 对任何p和Γ，若$\Gamma \models p$，则$\Gamma \vdash p$。

证 若Γ不相容，则依平凡性定理，结论$\Gamma \vdash p$成立。以下假设Γ是相容的。用反证法，假设$\Gamma \vdash p$不成立，证明$\Gamma \models p$不成立。

证明思路：

1.假设$\Gamma \vdash p$不成立，将Γ扩张为一个极大相容集Γ^*，使得$\Gamma^* \vdash p$不成立；

2.由Γ^*构造一个语义解释I，使得$I(\Gamma)=t$并且$I(p)=f$，所以$\Gamma \models p$不成立。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

1（从Γ构造Γ^*） L中所有公式可排成序列$p=p_0, p_1,\cdots$，使得任一公式都在其中出现。在此基础上，构造一个公式集序列如下：

$$\Gamma_0 =_{df} \Gamma;$$

$$\Gamma_{n+1} =_{df} \begin{cases} \Gamma_n, & \text{如果}\Gamma_n \vdash p_n\text{成立；} \\ \Gamma_n \cup \{\neg p_n\}, & \text{如果}\Gamma_n \vdash p_n\text{不成立。} \end{cases}$$

令$\Gamma^*=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup....$。则$\Gamma^*\vdash\neg p$（由假设$\Gamma_0\vdash p$不成立得$\Gamma_1\vdash\neg p$得$\Gamma^*\vdash\neg p$）。下面证明$\Gamma^*$极大相容。为此先证$\Gamma_n$相容。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

施归纳于n。

(1) n=0时。由$\Gamma_0=\Gamma$，依假设Γ_0相容。

(2) n>0时，设Γ_n相容。若Γ_{n+1}不相容，则$\Gamma_{n+1}\neq\Gamma_n$。由Γ_{n+1}构造法得$\Gamma_n\vdash p_n$不成立，并且

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n\cup\{\neg p_n\} \qquad (1)$$

再由假设Γ_{n+1}不相容得存在公式q使得

$$\Gamma_{n+1}\vdash q \text{ 且 } \Gamma_{n+1}\vdash \neg q \qquad (2)$$

由(1)、(2)依反证律得$\Gamma_n\vdash p_n$，矛盾。所以Γ_{n+1}相容。

依归纳法原理，所有Γ_n相容。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

由于$\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$对所有n成立，易知$\Gamma^*=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup...$是一个相容集。

根据Γ_n的构造知，对一切公式p_n，有$\Gamma^* \vdash p_n$或者$\Gamma^* \vdash \neg p_n$，即Γ^*是一个极大相容集。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

2（从Γ^*构造语义解释I） 定义映射μ: L(X) →{t, f}使得对任何公式q有：

$$\mu(q) = \begin{cases} t, & \text{如果}\Gamma^* \vdash q; \\ f, & \text{如果}\Gamma^* \vdash \neg q; \end{cases}$$

易证$\mu(q)$是良定义的。下面证明它是一个语义解释。

(1) $\mu|_X$是X上的一个指派，即对任何x有$\mu(x)\in\{t, f\}$；

(2) $\mu(q)$是L(X)上的一个标准赋值。

依μ定义及Γ^*性质知$\mu(\Gamma)= t$并且$\mu(p)= f$，即$\Gamma \models p$不成立。

1.6 命题演算的可靠性和完全性

习题

1.8 证明$\mu(q)$是L(X)上的一个语义解释。