011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

再记2020科大樱花

——向新世界的建设者致敬！

枝展花妍又遇寒，殷殷遥望玉门难。
春风奋起千钧力，不度阳关终不还。

陈小平（中国科学技术大学）

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

（下）

回顾：一阶理论

- **一阶形式化理论** 任给一个应用领域(表达为一个一阶结构)M，将M的基础性知识表示为公式集Γ，满足：(1)M$\models$Γ；(2)通过推理Γ$\vdash p$可得M的其他知识p，使得$p\notin$Γ并且M$\models p$，则称Γ是M的一个一阶形式化理论。
- **例** 以初等数论M=(**N**，**F**，**P**)为应用领域，其中**N**是自然数集，**F**和**P**是**N**上运算集和关系集。若M的形式化理论为Γ，通过Γ$\vdash p$可解答初等数论问题。例如，素分解问题“c是不是两个素数的积？”可归结为推理问题：Γ$\vdash \exists x\exists y(\mathrm{P}(x)\wedge \mathrm{P}(y)\wedge(x\times y\,\mathbf{=}\,c))$，其中P($x$)表示$x$是素数，**=**(黑体)是自然数的相等关系。

回顾：带等词的一阶谓词演算K^+

❖ K^+构成(等词的应用谓词演算K^+/等词的一阶理论E)：

1. 语言$K^+(Y)$：带常谓词=的$K(Y)$;
2. 公理模式：(K1) ~ (K5);
3. 推理规则：(MP)、(UG);
4. 等词公设： E（E代表{(E1)、(E2)、 (E3)}）；
5. 形式推理/形式证明：等词公设与公理同样使用，其余同K。

◆记号 在K^+中从Γ推出p，记为$\Gamma\vdash_{K^+} p$。

❖ 注释 对任何Γ和p，$\Gamma\vdash_{K^+} p$当且仅当$\Gamma\cup E\vdash_{K} p$。

回顾：带等词的一阶谓词演算K^+

- **术语** 对$K^+(Y)$的任何一阶结构M，若(E1)、(E2)、(E3)都是M有效的，则称K^+是M有效的，称M是一个K^+模型，记为M$\models K^+$。
- **定理1** 任给$K^+(Y)$的一阶结构M=(**D**, **F**, **P**)，若$=^M$是**D**上的相等关系，则M$\models K^+$。
- **观察** 定理1的逆命题不成立。例如，一阶结构M=(**N**, ∅, {≈})是一个K^+模型；但在M中，$=^M$不是论域**N**上的相等关系。
- **观察** 等词公设要求K^+模型M中的$=^M$必须具有(E1)、(E2)、(E3)规定的性质，但不能“强迫”K^+模型必须将等词=解释为论域上的相等关系。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **观察** 等词公设E对$=^M$约束到什么程度？ $=^M$是论域**D**上的什么关系？

❖ **定理2(=等价性)** 若M=(**D**, **F**, **P**)是一个K^+模型，则$=^M$是**D**上的等价关系。

◆ **证明** 只需证明下列三条K^+内定理$\vdash_{K^+} p$（等价于E $\vdash_K p$），于是由K可靠性，得$=^M$是任何K^+模型M论域**D**上的等价关系：

1. $\vdash_{K^+} u = u$;
2. $\vdash_{K^+} u = v \to v = u$;
3. $\vdash_{K^+} u = v \to (v = w \to u = w)$.

3. 2 带等词的一阶谓词演算K^+

1. 这就是(E1)，显然有$\vdash_{K^+} u \doteq u$。

2. 显然不必涉及UG，由K演绎定理，只需证$\{u \doteq v\} \vdash_{K^+} v \doteq u$:

(1) $u \doteq v \to (u \doteq u \to v \doteq u)$	(E3)
(2) $u \doteq v$	前提
(3) $u \doteq u \to v \doteq u$	MP (1), (2)
(4) $u \doteq u$	(E1)
(5) $v \doteq u$	MP (3), (4)

3. 类似可证（习题）。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ 定理3(等项可替换性)

1. $\vdash_{K^+} u = v \rightarrow t(u) = t(v)$，其中项u是任意$K^+$项t(u)的一个子项，项t(v)是在项t(u)中将项u的某个出现替换为项v所得的项；

2. $\vdash_{K^+} u = v \rightarrow (p(u) \rightarrow p(v))$，其中$p(x)$是任意$K^+$公式，项u、v对$p(x)$中$x$自由。

◆证明 练习。

❖ 观察 等项可替换性定理是对等词公设E2和E3的推广。

❖ 观察 定理2、3表明，等词公设E刻画了数学中相等关系的两条基本性质——等价性和等项可替换性。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **观察** 能否将等词公设E扩展为E’，E’刻画数学中相等关系的所有性质，使得在E’的任何模型M中，$=^M$是数学中的相等关系？答案是否定的！

❖ **定义（正规模型）** 设E’$\subseteq K^+(Y)$，M=(**D**, **F**, **P**)是E’的一个K^+模型。若$=^M$是**D**上的相等关系，则称M为E’的正规K^+模型。

◆ **注释** M=(**D**, **F**, **P**)是E’的一个K^+模型，如果：(1)M是一个K^+模型；(2)M是E’的模型，即M$\models$E’。

3. 2 带等词的一阶谓词演算K$^+$

❖ **定理4（正规模型存在性）** 设任意E'⊆K$^+$(Y)有K$^+$模型，则E'有正规K$^+$模型。

◆ **证明** 设M=(**D**, **F**, **P**)是E'的一个K$^+$模型。构造M的关于等词**=**的商结构M$^=$=(**D**$^=$, **F**$^=$, **P**$^=$)，其中**D**$^=$的一个个体是**D**中关于**=**^{M}的一个等价类{[x] | x∈**D**}，[x] $=_{df}$ {y∈**D** | y **=**^{M} x}。在**=**^{M}下，所有与x等价的不同个体y∈**D**被压缩成同一个[x]∈**D**$^=$，与x不等价的个体y∈**D**被划分到其他等价类[x']∈**D**$^=$。于是，[x] **=**$^{M^=}$ [y]当且仅当x **=**^{M} y，故等词在M$^=$中的解释**=**$^{M^=}$是**D**$^=$上的相等关系。可证M$^=$是一个K$^+$模型，而它也是正规K$^+$模型。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **定理5（非正规模型存在性）** 设$E^* \subseteq K^+(Y)$是E的任何相容扩张：$E \subseteq E^*$且E^*相容，则E^*有非正规K^+模型。

◆ **证明** 自修。

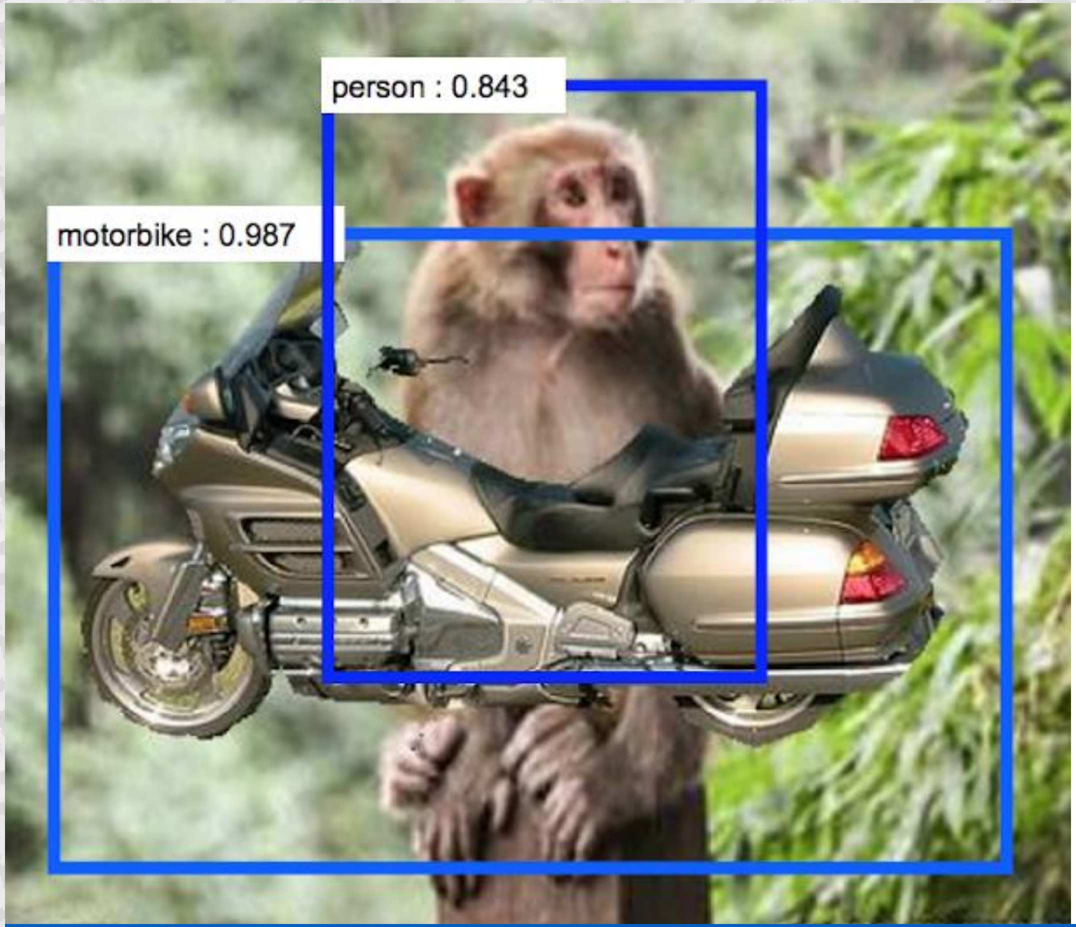
◆ **注释** 非正规模型存在性定理表明，在现有形式化方法中，无法完全把握等词的数学性质；也就是说，数学中的相等关系无法被完全形式化。

❖ **观察** 其他种类关系（各种非数学关系）能否被完全形式化？日常思维中使用的概念和属性（性质和关系）比数学概念和属性更复杂，更难以严格定义——人工智能基础理论的重大挑战。

案例研究：视觉感知中的物体检测

- **物体检测** 用算法自动检测视觉图像中是否存在特定的物体（如人、动物和其他常见物体）。
- **物体检测的传统方法** 让算法根据特定物体的描述（即物体的性质如颜色、外形等）分析图像，找出并标记其中的特定物体。现有实践中无法建立充分的物体描述并指导算法的有效检测。
- **物体检测流行方法** 基于深度学习技术，用人工采集并加人工标注的数据，训练深层神经网络，用训练好的网络进行检测。
- **当前进展** 深层网络在给定数据集上的识别率已超过人类；在不可控的真实数据上仍面临挑战。

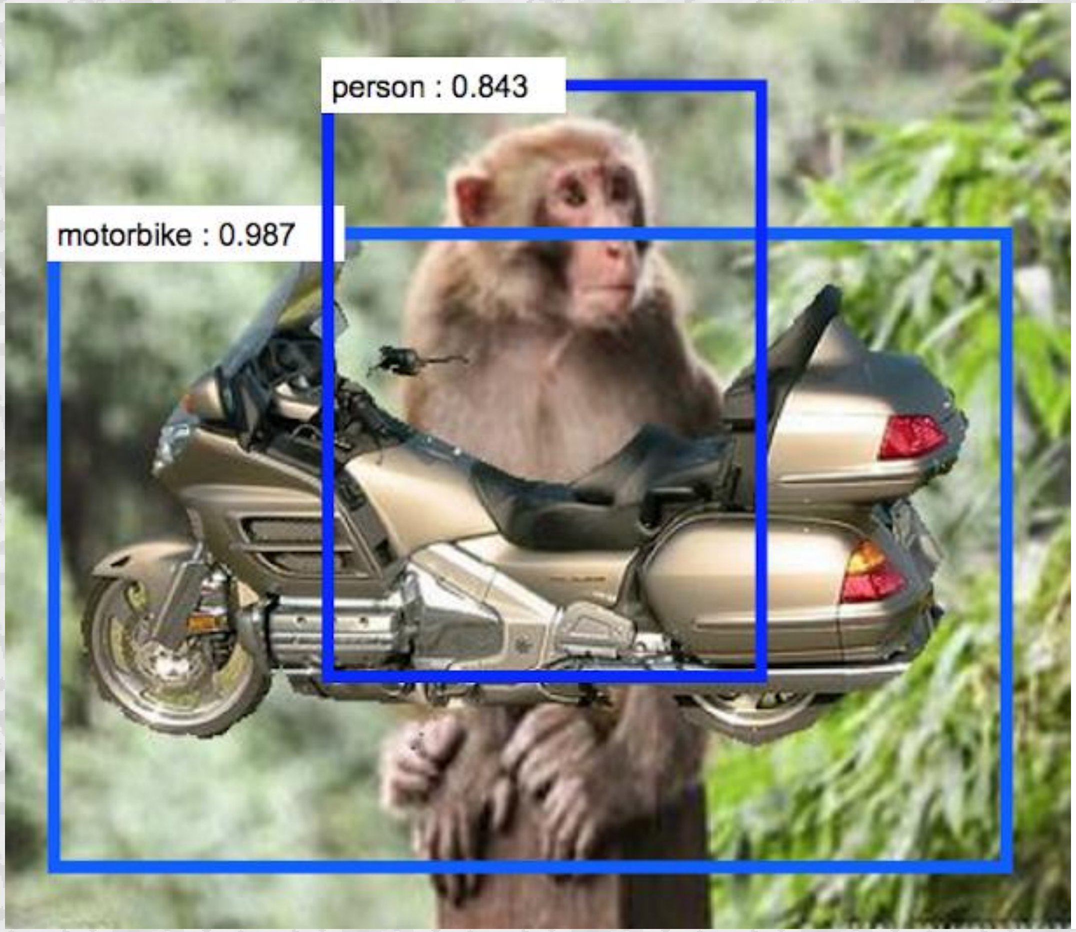
案例研究：视觉感知中的物体检测



- **实验设计** 用深层学习技术和标准数据集训练深层网络，然后用合成图片测试遮挡情况下的训练效果。
- **实验结果** 图片中猴子被误识别为人。原因可能是训练数据中人与摩托车高频共现，而猴子与摩托车极低频共现。
- **实验分析** 现有DL技术不满足Frege原则，无推理能力。

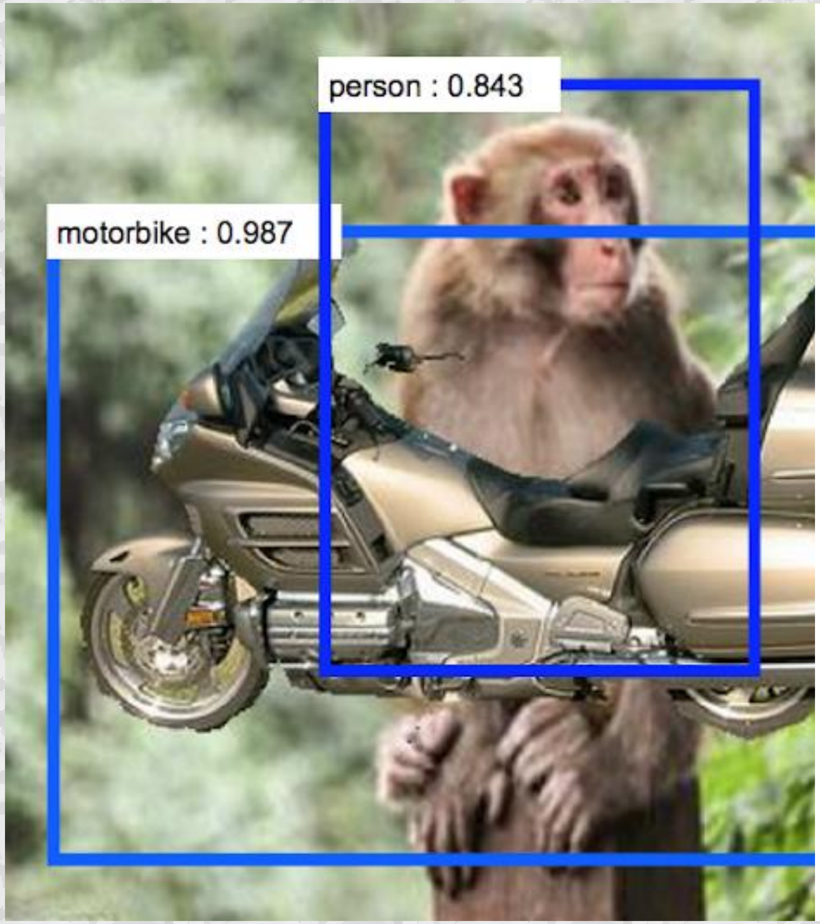
Alan L. Yuille & Chenxi Liu, "Limitations of Deep Learning for Vision, and How We Might Fix Them", The Gradient, 2018.

案例研究：视觉感知中的物体检测



- ❖ **Frege原则** 整体的语义由部件的语义复合而成。例如，命题公式的语义由命题变元的语义(个体变元指派)和联结词的语义(联结词的真值表)经复合而得出；一阶公式的语义……。
- ❖ **实验分析** 部件的“语义”(如“猴子”)可受部件间关联度的影响而发生根本改变。
- ❖ 有时这是需要的。

案例研究：视觉感知中的物体检测



❖ **物体识别中的推理** 依据识别结果：

1. 根据摩托车和人体的常识，推出摩托车与人身体的尺寸比例不对；
2. 由1推出图片是合成的，或者摩托车是合成的，或者“人”是合成的；
3. 由于摩托车脱离“人”是悬空的，根据物体状态的常识，推出摩托车是粘贴的；
4. 由3推出，对图片中对象进行物体检测应消除摩托车的遮挡。

◆ **观察** 结合推理可提高物体检测能力。

◆ **注释** 上述推理结论是一个观察行动。

3. 2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ 习题

3.4 p110：3。

3.5 试证明定理2的3：$\vdash_{K^+} u = v \to (v = w \to u = w)$.

❖ 思考题

3.3　Frege组合原则在一阶语义中的具体表现是什么？并举例说明你的看法。