杨金龙摄

011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

第二章 一阶逻辑

回　顾

❖ 逻辑研究什么？三个回答：

1. 经典逻辑的基础部分：演绎推理的正确形式

$$\Gamma \vdash p；\quad \Gamma \vDash p$$

2. 经典逻辑的递归论部分/计算机科学：能行过程/程序

$\Gamma \vdash p$等等能行计算的编程实现

3. AI逻辑：大规模问题的知识表示和自动推理

构建表达领域/常识知识的大型知识体并自动完成推理

2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ **例** 考虑下列推理：

所有人会死	x_1
苏格拉底的父亲是人	x_2
苏格拉底的父亲会死	x_3

◆ 问题1：上述推理是不是保真的？——是！

◆ 问题2：上述推理能不能在L中表达？——不能！证：在L中，上述推理表达为$\{x_1, x_2\} \vdash x_3$？因为$\{x_1, x_2\} \vDash x_3$不成立，所以$\{x_1, x_2\} \vdash x_3$不成立。因此，一个保真推理在L中无法表达。

2. 1 命题内部结构的逻辑表达

❖ **观察** 保真推理所依据的一些逻辑结构没有在命题语言中表达出来。因此，需要更细致的表达语言，能够表达下列语法范畴：

1. 个体，如苏格拉底，记为s；
2. 函数，如x的父亲，记为$g(x)$，苏格拉底的父亲$g(s)$；
3. 集合，如人，用一元谓词表示，记为$\mathrm{H}(x)$；
4. 性质，如x会死，用一元谓词表示，记为$\mathrm{D}(x)$；
5. 关系，如x和y是朋友，用多元谓词表示，记为$\mathrm{F}(x, y)$；
6. 量词，所有，记为$\forall$。

2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ **例(续)** 上述推理表达为：

$$\forall x(\mathrm{H}(x) \to \mathrm{D}(x))$$

$$\mathrm{H}(g(s))$$

$$\mathrm{D}(g(s))$$

◆ **观察** 直观上，从前提$\forall x(\mathrm{H}(x)\to\mathrm{D}(x))$可以推出$\mathrm{H}(x)\to\mathrm{D}(x)$；又推出$\mathrm{H}(g(s))\to\mathrm{D}(g(s))$，又推出$\mathrm{D}(g(s))$。

❖ **观察** 利用新语言的一阶逻辑的表达能力和推理能力真强于命题逻辑。

2.2 一阶谓词演算K的构成

2.2 一阶谓词演算的构成

I 一阶语言

I1 符号表

I1a 逻辑符号

- 个体变元 $x_1, x_2, \ldots\ldots$ (可数无穷多个)
- 基本联结词 $\neg, \rightarrow$
- 量词$\forall$

◆**注释** 逻辑符号代表逻辑概念，其含义不随应用领域而改变。

2.2 一阶谓词演算的构成

I1b 非逻辑符号

- 个体常元 $a_1, a_2, \ldots\ldots$ (可数无穷多个)
- 函数符号 $f_1^1, f_2^1, \ldots\ldots$ (一元函数符号，可数无穷多个)

  $f_1^2, f_2^2, \ldots\ldots$ (二元函数符号，可数无穷多个)

  ……
- 谓词符号 $P_1^0, P_2^0, \ldots\ldots$ (0元谓词符号，可数无穷多个)

  $P_1^1, P_2^1, \ldots\ldots$ (一元函数符号，可数无穷多个)

  ……

  (至少有一个谓词符号)

2.2 一阶谓词演算K的构成

I1c 辅助符号 (，)

◆注释 0元谓词符号即命题符号。例如

1. 苏格拉底是人。当需要显式表达主语苏格拉底和谓语是人时，表达为H(s)，其中H(x)为一元谓词“x是人”；当不需要显式表达苏格拉底和谓语时，表示为H，H为0元谓词。

2. 苏格拉底和他的父亲是朋友，需要显式表达其中个体和关系时，表达为F(s, g(s))；不需要显式表达时，则表达为F。

2.2 一阶谓词演算K的构成

I2 形成规划

I2a 项

1. 个体变元和个体常元是项；
2. 若g是n元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则$g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项；
3. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是项。

◆**注释** 个体是数学中“数”的推广；函数将被解释为个体到个体的映射；项将被解释为个体。例如，$g(x)$是从人到人的映射，所以$g(s)$也是一个人。

2. 2 一阶谓词演算K的构成

I2b 公式

1. 若P是n(≥0)元谓词符号， $t_1, t_2, \ldots, t_n$是项， 则P($t_1, t_2, \ldots, t_n$)是公式，称为原子公式；

2. 若p，q是公式，则$\neg p$和$p \rightarrow q$是公式，分别称为否定式和蕴涵式；

3. 若p是公式， x是个体变元，则$\forall x p$是公式，称为量化公式；

4. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式。

◆**注释** 谓词将被解释为个体到真值的映射；不含个体变元的公式将为解释为命题；含个体变元的公式将被解释为命题函数。

2.2 一阶谓词演算K的构成

❖ **例** 命题“并非雪是黑的等值于雪是白的∨雪是红的∨⋯∨雪是无色的”。在命题逻辑中表达为：

$$\neg x_1 \leftrightarrow (x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_k \vee \ldots)$$

在一阶逻辑中表达为：

$$\neg \mathrm{C}(\mathrm{snow}, \mathrm{black}) \leftrightarrow$$
$$(\mathrm{C}(\mathrm{snow}, \mathrm{white}) \vee \mathrm{C}(\mathrm{snow}, \mathrm{red}) \vee \ldots \vee \forall x \neg \mathrm{C}(\mathrm{snow}, x))$$

◆ 相关的领域知识中有公认的命题如“物体的颜色包括黑、白、红、……、无色”等，需要作为推理前提。

2.2 一阶谓词演算K的构成

II 推理设施

IIa 公理模式

(K1) $p\to(q\to p)$;

(K2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$;

(K3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$;

(K4) $\forall x p(x)\to p(t)$, 项t对$p(x)$中x自由;

(K5) $\forall x(p\to q)\to(p\to\forall x q)$, x不在p中自由出现.

◆ 注释 公理模式中p, q, r代表K公式。

2.2 一阶谓词演算K的构成

IIb 推理规则

(MP) 从p和$p\to q$推出q. (分离规则)

(UG) 从p推出$\forall x\, p$. (概括规则)

III 定义

$$p\vee q =_{df} \neg p\to q$$

$$p\wedge q =_{df} \neg(p\to\neg q)$$

$$p\leftrightarrow q =_{df} (p\to q)\wedge(q\to p)$$

$\exists x p =_{df} \neg\forall x\neg p$ //全称量词∀与存在量词∃对偶//

$=_{df}$左边的表达式代表右边的表达式或K公式。

2.2 一阶谓词演算K的构成

❖ 例（K子公式） 公式$\forall x(P(x, y)\to\forall yQ(y, z))$有5个子公式：

1. $\forall x(P(x, y)\to\forall yQ(y, z))$
2. $P(x, y)\to\forall yQ(y, z)$
3. $P(x, y)$
4. $\forall yQ(y, z)$
5. $Q(y, z)$

◆ 注释 x, y, z不是K子公式，因为它们不是K公式。

2.2 一阶谓词演算K的构成

❖ 个体变元的自由出现与约束出现

1. 公式$\forall xp$中x的所有出现都是约束出现，p称为$\forall x$的辖域；

2. 个体变元x在公式p中的一个出现x^*是约束出现，当且仅当存在p的一个子公式q，使得x^*在q中约束出现；

3. 个体变元x在公式p中的一个出现x^*是自由出现，当且仅当x^*不是约束出现。

❖ 例 公式$\forall x(P(x, y) \to \forall y\, Q(y, z))$中，$x$有两个约束出现，没有自由出现；$y$有两个约束出现，一个自由出现；$z$有一个自由出现。

2.2 一阶谓词演算K的构成

- **闭项** 不含个体变元的项称为闭项。例如s，$g(s)$。
- **闭公式/语句** 所有个体变元都没有自由出现的公式称为闭公式/语句。例如R(a)，$\forall y Q(y, g(s))$，$\forall x(P(x, a) \rightarrow \forall y Q(y, g(s)))$是闭公式；$\forall x(P(x, a) \rightarrow \forall y Q(y, z))$不是闭公式。
- **注释** 经过语义解释，一个闭公式表达一个命题；一个非闭公式表达一个命题函数，例如$\forall x(P(x, a) \rightarrow \forall y Q(y, z))$的真值与z所指的个体有关，这样的公式代表一个从个体到真值的映射。

2.2 一阶谓词演算K的构成

❖ 项 t 对 $p(x)$ 中 x 自由 如果K公式 $p(x)$ 中个体变元 x 有自由出现，用项 t 处处同时替换 x 在 $p(x)$ 中的每一个自由出现，所得结果记为 $p(t)$。若 t 中的个体变元在 $p(t)$ 中的出现都是自由的，则称项 t 对 $p(x)$ 中 x 自由。

❖ 例 令 $p(x) = \forall y P(x)$。则

1. 项 $t = y$ 对 $p(x)$ 中 x 不自由
2. 项 $t = x$ 对 $p(x)$ 中 x 自由
3. 项 $t = z$ 对 $p(x)$ 中 x 自由
4. 项 $t = g(a)$ 对 $p(x)$ 中 x 自由
5. 项 $t = g(x)$ 对 $p(x)$ 中 x 自由
6. 项 $t = g(y)$ 对 $p(x)$ 中 x 不自由
7. 项 $t = g(z)$ 对 $p(x)$ 中 x 自由

2. 2 一阶谓词演算K的构成

思考题

2.1 (K4)和(K4)中的约束条件有何意义？举例说明。

习题

2.1 p.66: 1; 2; 3.