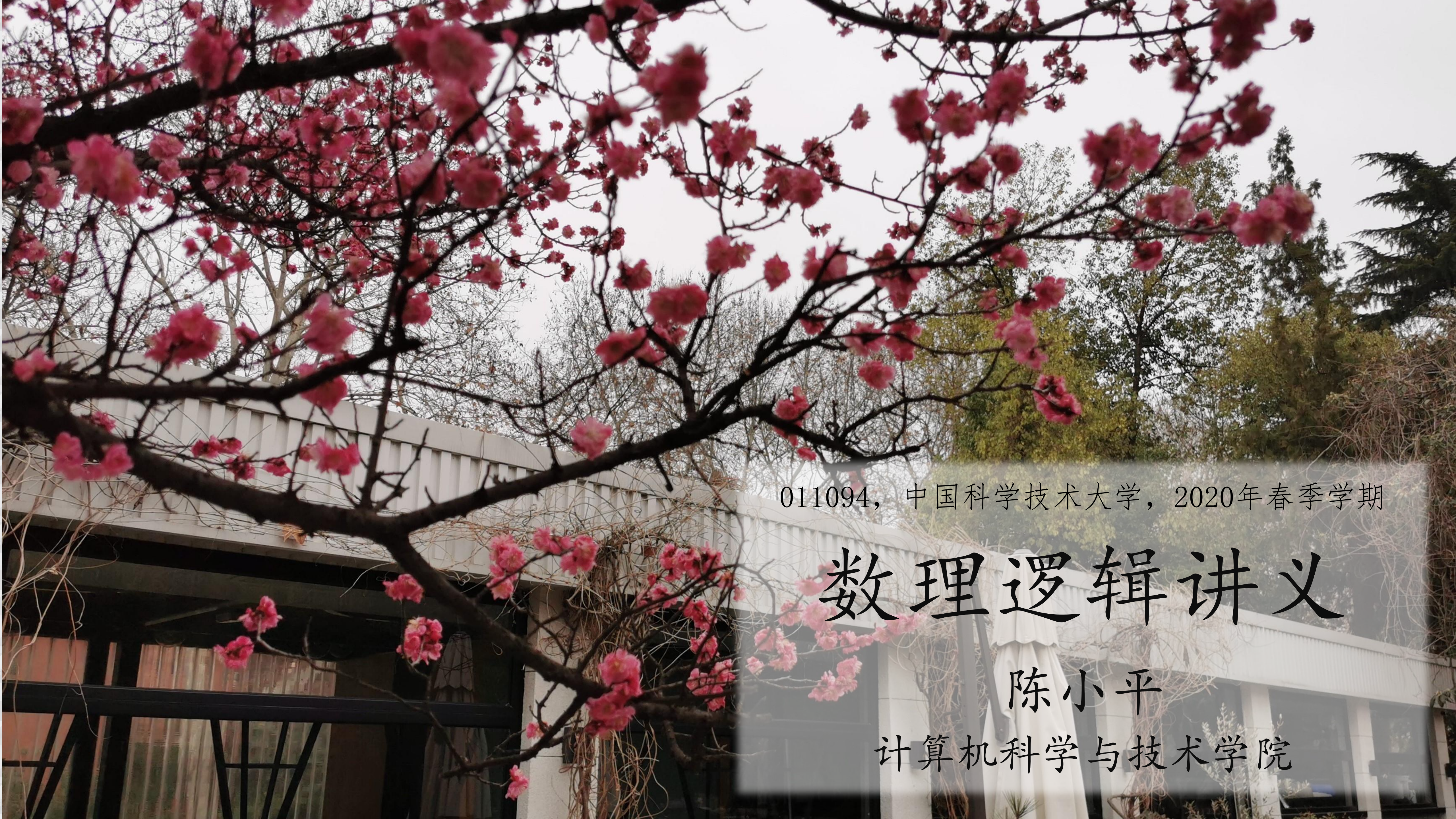

011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

1.4 命题演算L的语义

1.4 命题演算L的语义

- **形式语义** 在外延性原则之下，给L的所有语法对象赋予真值意义，包括：命题变元、联结词、公式、内定理、形式推理。
- **真值** 真值 t, f 分别代表抽象的“真”和“假”，其中真/假的含义没有具体规定(形式语义)，要求：(1)符合矛盾律和排中律，(2)在L的每一项应用中(命题变元代表具体命题)，真/假的含义保持不变(保真性的前提条件之一)。
- **注释** 外延性原则中的“外延”实际上落实到真值上，与外延的通常含义有差别。
- **观察** L语义学的设计使L语义学可适用于不同领域的应用。

1.4 命题演算L的语义

❖ **定义1（指派–命题变元的语义解释）** L(X)的一个指派是一个映射 $v_0: X \rightarrow \{t, f\}$。

◆ **注释** 命题符号被解释为真值。逻辑不考虑一个v_0“对不对”。

❖ **定义2（赋值–联结词的解释原则）** L(X)的一个赋值v是一个满足下列条件的映射：

1. $v(\neg)$是一个一元函数$\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$；
2. $v(\rightarrow)$是一个二元函数$\{t, f\} \times \{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$；

◆ **注释** 联结词被解释为真值函数。

1.4 命题演算L的语义

❖ **定义3（标准赋值）** 标准赋值是满足下列条件的赋值v:

1. $v(\neg) =_{df} f_\neg$,

   $f_\neg(x)$的定义如下

x	$f_\neg(x)$
t	f
f	t
x	$f_\neg(x)$

$\neg x$的真值

2. $v(\rightarrow) =_{df} f_\rightarrow$,

   $f_\rightarrow(x, y)$的定义如下

	t	f	y
t	t	f	
f	t	t	
x	$f_\rightarrow(x, y)$		

$x \rightarrow y$ 的真值

1.4 命题演算L的语义

❖ **定义4（命题语言的标准解释）** L(X)的一个(标准)解释$\mathrm{I}=(v_0, v)$是一个复合映射$\mathrm{I}: \mathrm{L(X)} \rightarrow \{t, f\}$，满足：

1. 对任何命题变元x，$\mathrm{I}(x) = v_0(x)$；

2. 对任何公式p，$\mathrm{I}(\neg p) = v(\neg)(\mathrm{I}(p)) = f_\neg(\mathrm{I}(p)) = t$ 如果$\mathrm{I}(p) = f \mid f$ 如果$\mathrm{I}(p) = t$；

3. 对任何公式p和q，$\mathrm{I}(p\rightarrow q) = v(\rightarrow)(\mathrm{I}(p), \mathrm{I}(q)) = f_\rightarrow(\mathrm{I}(p), \mathrm{I}(q)) = f$ 如果$\mathrm{I}(p)=t$ 并且$\mathrm{I}(q)=f \mid t$ 其他情况。

◆ **注释** 语义解释中v固定、v_0可变，公式的真值也随v_0可变。

1.4 命题演算L的语义

❖ **性质（语义解释的良定义性）** 对命题演算L的任何公式p和任何解释I=(v_0, v)，存在唯一的$u\in\{t, f\}$，使得I$(p)=u$。

证明 自修。

◆ **注释** 符合标准解释的命题逻辑称为标准命题逻辑；否则称为非标准命题逻辑。

❖ 标准命题逻辑的演算都是等价的（内定理集合相同）；非标准命题逻辑系统相互不等价，也不等价于标准命题逻辑系统。

1.4 命题演算L的语义

❖ 例1 设$v_0(x_1) = f$， $v_0(x_2) = t$， 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(\neg x_1 \to x_2) &= f_{\to}(\mathrm{I}(\neg x_1), \mathrm{I}(x_2)) \\
&= f_{\to}(v(\neg)(\mathrm{I}(x_1)), \mathrm{I}(x_2)) \\
&= f_{\to}(f_{\neg}(v_0(x_1)), v_0(x_2)) \\
&= f_{\to}(f_{\neg}(f), t) \\
&= f_{\to}(t, t) \\
&= t.
\end{aligned}
$$

1.4 命题演算L的语义

❖ 例1（续） 用真值表法计算公式$\neg x_1 \to x_2$在所有指派v_0下的真值：

x_1	x_2	$\neg x_1$	$\neg x_1 \to x_2$
t	t	f	t
t	f	f	t
f	t	t	t
f	f	t	f

❖ 公式的语义 L(X)公式在语义中被解释为真值函数。

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义联结词的语义解释

1. $x \wedge y$

	t	f	y
t	t	f	
f	f	f	
x	$x \wedge y$ 的真值		

2. $x \vee y$

	t	f
t	t	t
f	t	f

3. $x \leftrightarrow y$

	t	f
t	t	f
f	f	t

1.4 命题演算L的语义

❖ 蕴涵词的实质蕴涵解释

◆ $x \to y$ 的实质蕴涵解释：

	t	f	y
t	t	f	
f	t	t	
x	$x \to y$ 的真值		

◆ 为什么采用实质蕴涵解释？

1. 总体上合理；
2. 直观合理性因人而异；
3. 经典数学采取实质蕴涵解释。

1. 4 命题演算L的语义

习题

1.5 p.13: 1(2, 7, 8).

1.4 命题演算L的语义

❖ **对比** 命题逻辑中，一个公式在语法（演算L）中视为一个符合形成规则的表达式；而在语义(L的语义解释)中视为一个真值函数。

1.4 命题演算L的语义

❖ **定义5（成真/成假指派）** L(X)的一个指派v_0称为公式p的一个**成真指派**，如果在解释I=(v_0, v)下，I(p)=t；v_0称为公式p的一个**成假指派**，如果在解释I=(v_0, v)下，I(p)= f。

◆ **注释** 命题逻辑中的一个指派v_0: X→{t, f}在不同学科的含义：

- 在哲学中，代表一个“可能世界”；
- 在日常语言中，代表一种“可能情况”；
- 在计算机科学中，代表一个“可能**状态**”。

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义6（重言式，矛盾式，偶然式）

若一个公式p只有成真指派，则称为重言式；

若一个公式p只有成假指派，则称为矛盾式；

若一个公式p既有成真指派又有成假指派，则称为偶然式。

1.4 命题演算L的语义

❖ 例2

1. 重言式的例子

$p \to p$

	t	f	p
t	t	-	
f	-	t	
p	$p \to p$的真值		

2. 矛盾式的例子

$\neg(p \to p)$

$\neg p \wedge p$

	t	f
t	-	f
f	f	-

3. 偶然式的例子

$p \to \neg p$

$\neg p \to p$

p	$\neg p$	$\neg p \to p$
t	f	t
f	t	f

1.4 命题演算L的语义

❖ **定义6（重言式，矛盾式，偶然式）**

若一个公式p只有成真指派，则称为重言式；

若一个公式p只有成假指派，则称为矛盾式；

若一个公式p既有成真指派又有成假指派，则称为偶然式。

◆ **对比** 相对于所有指派，任何公式只能是上述三种公式之一；在任意给定的一个指派下，任何公式只有两种真值之一。

◆ **注释** 命题“公式p是重言式(矛盾式、偶然式)”符合矛盾律和排中律。

1.4 命题演算L的语义

- 借助于真值函数，直观概念“重言式”、“矛盾式”、“偶然式”在命题逻辑中得到严格定义。
- 你能想出不同的其他严格定义吗？
- 逻辑不关心一个公式的具体真值，但关心一个公式是不是重言式/矛盾式/偶然式。为什么？
- 逻辑最关心哪一类公式？它们在推理中有什么作用？

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义7（语义后承/逻辑推论）

任给L(X)公式p和公式集Γ，称p为Γ的一个语义后承/逻辑推论，记为$\Gamma \models p$，如果对L的任何一个语义解释I，只要Γ中的所有公式q满足$\mathrm{I}(q) = t$，则$\mathrm{I}(p) = t$。

1.4 命题演算L的语义

❖ 例3

1. $\{p, p\to q\} \models q$

p	q	$p\to q$	q
t	t	t	t
t	f	f	f
f	t	t	t
f	f	t	t

2. $\{\neg p\} \models p\to q$

p	q	$\neg p$	$p\to q$
t	t	f	t
t	f	f	f
f	t	t	t
f	f	t	t

3. $\{p\} \models p\vee q$

p	q	$\neg p\to p$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

1.4 命题演算L的语义

- **注释** 语义后承是直观概念“逻辑推论”在命题逻辑中的严格定义，反映了推理前提Γ与结论p之间的保真性：在任何一种可能情况(由一个指派v_0代表)下，只要前提都是真的（v_0是所有前提的成真指派），则在该可能情况下结论一定是真的（v_0是结论的成真指派）。因此，语义后承是保真性的严格定义。
- 你能否给出保真性的不同的严格定义？
- 形式公理化方法不仅要求公理/公设/推理规则是共识，而且要求完全的严格定义（形式化）。

1.4 命题演算L的语义

❖ **观察** 语义后承关系是否成立，与前提的实际真假无关。

1. $\{p, p\to q\}\vDash q$

p	q	$p\to q$	q
t	t	t	t
t	f	f	f
f	t	t	t
f	f	t	t

2. $\{\neg p\}\vDash p\to q$

p	q	$\neg p$	$p\to q$
t	t	f	t
t	f	f	f
f	t	t	t
f	f	t	t

3. $\{p\}\vDash p\vee q$

p	q	$\neg p\to p$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

1.4 命题演算L的语义

❖ 定理（语义后承的性质）

1. 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vDash p$，则$\Gamma' \vDash p$；（语义后承单调性）
2. 若$\Gamma \vDash p$ 且 $\Gamma \vDash p \to q$，则$\Gamma \vDash q$；（语义MP）
3. $\Gamma \vDash p \to q$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{p\} \vDash q$；（语义演绎定理）
4. p是重言式当且仅当$\varnothing \vDash p$。（p是内定理当且仅当$\varnothing \vdash p$）

◆ 记号 $\varnothing \vDash p$ 记为$\vDash p$。

◆ 语法推出$\vdash$ 和语义推出$\vDash$ 还有哪些对应的性质？它们之间到底是什么关系？

1.4 命题演算L的语义

习题

1.6 证明本节定理。

思考题

1.7 语义后承与重言式有何关系？下述论断是否成立？

任给L(X)公式p和公式集Γ，存在公式q，使得$\Gamma \models p$ 当且仅当$\models q$。