2020春数理逻辑期中考试

edited by *captchaac*

一、判断题

1. L公式$(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$是永真式
2. 后件是永真式的蕴含式是永真式
3. 在命题演算中，有效（正确）的推理都可以转化为永真式
4. 项$f(a, x_1)$对公式$\forall x_1(R_1(b, x_1) \to R_2(x_1, x_2))$中的$x_2$自由
5. 任何命题公式都有唯一的合取范式和析取范式
6. 命题“所有自然数都是整数”不能在L中适当表达，但可以在K中适当表达
7. 若$\Gamma \vDash p$，则每一个Γ的模型都满足p

二、命题演算公式直接证明+简化证明

$$\vdash \neg\neg p \to p$$

三、谓词演算公式证明

$$\vDash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$$

四、写出前束**合取**范式

$$\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R_2^2(x_1, x_2)$$

五、命题逻辑的应用

甲乙丙丁四人参加离散数学考试后，ABC三人猜测考试结果

1. A说：丙第一，乙第二
2. B说：丙第二，丁第三
3. C说：甲第二，丁第四

结果每人都猜对了一半，假设无并列名次，问：甲乙丙丁的实际名次如何？

六、谓词逻辑的应用

判断下列推理是否有效，并解释。

所有羊都吃草；
所有死羊都不吃草；
所以，所有死羊都不是羊。

中国科学技术大学 2020 年春季学期数理逻辑期中考试参考答案

2020.5.1

一（21 分）判断题（在题号前的括号里打 ✓ 或 ×）

（ ）1. L 公式 $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$ 是永真式。

解：✓ 由以下真值表可知公式为永真式

(p	$\to$	q)	$\to$	((r	$\to$	p)	$\to$	(r	$\to$	q))
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

（ ）2. 后件是永真式的蕴含式是永真式。

解：✓（P41 命题 4）由蕴涵词的真值表可知

p	$\to$	q
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

对于 $L(X)$ 的任一赋值 v，

$$v(q) = 1 \Rightarrow v(p \to q) = 1$$

（ ）3. 在命题演算中，有效（正确）的推理都可以转化为永真式。

> 解：✓ 命题演算 L 的语法推论和语义推论是一致的，有
>
> $$\vdash p \Leftrightarrow \vDash p$$

( ) 4. 项 $f(a, x_1)$ 对公式 $\forall x_1 (R_1(b, x_1) \to R_2(x_1, x_2))$ 中的 x_2 自由。

> 解：× 用 $f(a, x_1)$ 代换公式中自由出现的 x_2 后，新公式中 $f(a, x_1)$ 中的 x_1 受 $\forall x_1$ 约束，因此项对公式中的 x_2 不是自由的。

( ) 5. 任何命题公式都有唯一的合取范式和析取范式。

> 解：× 显然错误，公式的合取范式或析取范式通常都不是唯一的。

( ) 6. 命题“所有自然数是整数”不能在 L 中适当表达，但可以在 K 中适当表达。

> 解：✓ 命题演算 L 以简单命题为最小的考察对象，无法对其进行进一步分解，谓词演算 K 深入分析“原子命题”的内部结构并引入量词运算，可以适当表达命题。设 K 中的 $R = R_1^1$，自然数集 $\mathbb{N}$ 是 K 的一个解释域，$\overline{R_1^1}$：属于整数集，现考察 K 中原子公式 p：
>
> $$\forall x\, R_1^1(x)$$
>
> 在解释域 $\mathbb{N}$ 中解释为“所有自然数是整数”。

( ) 7. 若 $\Gamma \vDash p$，则每一个 Γ 的模型都满足 p。

> 解：✓ 由（P92）谓词演算 K 中语义推论的定义立刻可知。

> 解：✓ ✓ ✓ × × ✓ ✓

二（20 分） 在命题演算 L 中，试分别用直接证明（根据定义直接证明）和简化证明的方法证明：$\vdash \neg\neg p \to p$。

解：直接证明

证明.

(1) $\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$ (L1)

(2) $(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p))$
$\to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p))$ (L2)

(3) $(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)

(5) $\neg\neg p \to \neg\neg p$ (3), (4), MP

(6) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)

(7) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)

(8) $((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$
$\to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ (L1)

(9) $\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ (7), (8), MP

(10) $(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$
$\to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p))$
$\to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ (L2)

(11) $(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p))$
$\to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ (9), (10), MP

(12) $\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (6), (11), MP

(13) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)

(14) $((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$
$\to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ (L1)

(15) $\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ (13), (14), MP

(16) $(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$
$\to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ (L2)

(17) $(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ (15), (16), MP

(18) $\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)$ (12), (17), MP

(19) $(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ (L2)

(20) $(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (18), (19), MP

(21) $\neg\neg p \to p$ (5), (20), MP

□

简化证明

证明. 由演绎定理，只用证 $\{\neg\neg p\} \vdash p$。
下面是 p 从 $\{\neg\neg p\}$ 的一个证明：

(1)	$\neg\neg p$	假定
(2)	$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$	(L1)
(3)	$\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$	(L3)
(5)	$\neg p \to \neg\neg\neg p$	(3), (4), MP
(6)	$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$	(L3)
(7)	$\neg\neg p \to p$	(5), (6), MP
(8)	p	(1), (7), MP

□

三（15 分） 在谓词演算中证明 $\vDash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$。

解：（练习 20 1-3°）

证明. 反证，假设 $\nvDash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$，则存在 K 的解释域 M 和 $\varphi \in \Phi_M$，使得

$$|\forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)|\,(\varphi) = 0$$

即有 $|\forall x\,(p \to q)|\,(\varphi) = 1$ 且 $|\forall x\,p \to \forall x\,q|\,(\varphi) = 0$，进而有 $|\forall x\,p|\,(\varphi) = 1$ 且 $|\forall x\,q|\,(\varphi) = 0$。

由 $|\forall x\,q|\,(\varphi) = 0$ 可知，存在 φ 的 x 变通 φ' 使得 $|q|\,(\varphi') = 0$，同时由 $|\forall x\,p|\,(\varphi) = 1$ 可知，有 $|p|\,(\varphi') = 1$。由 $|\forall x\,(p \to q)|\,(\varphi) = 1$ 可知，$|p \to q|\,(\varphi') = 1$，这与 $|p|\,(\varphi') = 1$ 且 $|q|\,(\varphi') = 0$ 矛盾！因此假设不成立，原语义推论得证。 □

本题也可通过谓词演算 K 的可靠性做出证明

证明. 先证明 $\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$，由演绎定理，只用证 $\{\forall x(p \to q), \forall x p\} \vdash \forall x q$，其中除了 x 外不使用其他 Gen 变元，且 x 是不在 $\forall x(p \to q)$ 或 $\forall x p$ 中自由出现的。下面是 $\forall x q$ 从 $\{\forall x(p \to q), \forall x p\}$ 的一个证明：

(1)	$\forall x p$	假定
(2)	$\forall x p \to p$	(K4)
(3)	p	(1), (2), MP
(4)	$\forall x(p \to q)$	假定
(5)	$\forall x(p \to q) \to (p \to q)$	K4
(6)	$p \to q$	(4), (5), MP
(7)	q	(3), (6), MP
(8)	$\forall x q$	(7), Gen

因此

$$\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$$

得证，由 K 的可靠性可知

$$\vDash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$$

□

四 （13 分） 求与下列公式等价的前束合取范式，并给出求解过程：

$$\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R_2^2(x_1, x_2)$$

解：适当改变公式中的约束变元得到以下等价的公式 p_1：

$$p_1 = \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 \forall x_2 R_2^2(x_3, x_2)$$

从 p_1 出发，反复利用 P77 命题 2-2° 和 2-3°，得到以下的等价公式：

$$p_2 = \forall x_3 \left(\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_2^2(x_3, x_2)\right)$$

$$p_3 = \forall x_3 \forall x_2 \left(\forall x_1\, R_1^2(x_1, x_2) \to R_2^2(x_3, x_2)\right)$$
$$p_4 = \forall x_3 \forall x_2 \exists x_1 \left(R_1^2(x_1, x_2) \to R_2^2(x_3, x_2)\right)$$
$$p_5 = \forall x_3 \forall x_2 \exists x_1 \left(\neg R_1^2(x_1, x_2) \vee R_2^2(x_3, x_2)\right)$$

p_5 即所求（注意到量词后的部分是只有一个析取支的合取范式）。

以下公式也是与原公式等价的前束合取范式：

$$p_6 = \forall x_2 \forall x_3 \exists x_1 \left(\neg R_1^2(x_1, x_2) \vee R_2^2(x_3, x_2)\right)$$
$$p_7 = \exists x_1 \forall x_3 \forall x_2 \left(\neg R_1^2(x_1, x_2) \vee R_2^2(x_3, x_2)\right)$$
$$p_8 = \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \left(\neg R_1^2(x_1, x_2) \vee R_2^2(x_3, x_2)\right)$$

同时从 p_4 出发，以 $R_1^2(x_1, x_2)$ 和 $R_2^2(x_3, x_2)$ 为原子命题变元，由命题演算公式中 $x_1 \to x_2$ 的等值主合取范式及代换定理可得原公式还等价于

$$p_9 = \forall x_3 \forall x_2 \exists x_1 \Big(\left(\neg R_1^2(x_1, x_2) \vee \neg R_2^2(x_3, x_2)\right) \wedge \left(R_1^2(x_1, x_2) \vee \neg R_2^2(x_3, x_2)\right) \wedge \left(R_1^2(x_1, x_2) \vee R_2^2(x_3, x_2)\right)\Big)$$

五（16 分） 甲、乙、丙、丁四人参加离散数学考试后，A、B、C 三人猜测考试结果。A 说：“丙第一，乙第二”，B 说：“丙第二，丁第三”，C 说：“甲第二，丁第四”。结果每人都猜对了一半，假设无并列名次，问甲、乙、丙、丁的实际名次如何？

解：用 x_i，$i = 1, 2, \cdots, 6$ 分别表示“甲第二”、“乙第二”、“丙第一”、“丙第二”、“丁第三”、“丁第四”，题设条件可形式化为

$$\left\{x_3 \nleftrightarrow x_2,\ x_4 \nleftrightarrow x_5,\ x_1 \nleftrightarrow x_6,\ \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_4),\ \neg(x_3 \wedge x_4),\ \neg(x_5 \wedge x_6)\right\}$$

解如下的真值方程组(1)~(8)

(1) $v_3 \nleftrightarrow v_2 = 1$

(2) $v_4 \nleftrightarrow v_5 = 1$

(3) $v_1 \nleftrightarrow v_6 = 1$

(4) $\neg(v_1 \wedge v_2) = 1$

(5) $\neg(v_1 \wedge v_4) = 1$

(6) $\neg(v_2 \wedge v_4) = 1$

(7) $\neg(v_3 \wedge v_4) = 1$

(8) $\neg(v_5 \wedge v_6) = 1$

试取 $v_2 = 1$，由(1)、(4)及(6)可知，$v_3 = 0, v_1 = 0, v_4 = 0$，分别代入(2)及(3)可知，$v_5 = 1, v_6 = 1$，代入(8)得

(9) $\neg(v_5 \wedge v_6) = 0$

(8)与(9)矛盾。改取 $v_2 = 0$，由(1)可知，$v_3 = 1$，代入(7)可知 $v_4 = 0$，代入(2)可知 $v_5 = 1$，代入(8)可知 $v_6 = 0$，代入(3)可知 $v_1 = 1$，分别代入(4)、(5)、(6)均成立。得到方程组(1)~(8)的一个解 $(1, 0, 1, 0 1, 0)$，这说明“甲是第二”、“乙不是第二”、“丙是第一”、“丙不是第二”、“丁是第三”、“丁不是第四”，即甲、乙、丙、丁的实际名次为丙第一、甲第二、丁第三、乙第四。

六（15 分） 下述推理是否有效？为什么？

所有羊都吃草；
所有死羊都不吃草；
所以，所有死羊都不是羊。

解：推理有效。在解释域

M：所有生物个体 $\overline{R_1^1}$：羊（的集合）
$\overline{R_2^1}$：死羊（的集合）
$\overline{R_3^1}$：吃草（生物的集合）

上，题述推理可以形式化为

$$\{\forall x\,(R_1^1(x) \to R_3^1(x)),\ \forall x\,(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x))\} \vdash \forall x\,(R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x))$$

以下公式从 $\{\forall x\,(R_1^1(x) \to R_3^1(x)),\ \forall x\,(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x))\}$ 可证

(1) $\forall x\,(R_1^1(x) \to R_3^1(x))$ 假定

(2)	$\forall x\left(R_1^1(x) \to R_3^1(x)\right) \to \left(R_1^1(x) \to R_3^1(x)\right)$	(K4)
(3)	$R_1^1(x) \to R_3^1(x)$	(1), (2), MP
(4)	$\left(R_1^1(x) \to R_3^1(x)\right) \to \left(\neg R_3^1(x) \to \neg R_1^1(x)\right)$	换位律
(5)	$\neg R_3^1(x) \to \neg R_1^1(x)$	(3), (4), MP
(6)	$\forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x)\right)$	假定
(7)	$\forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x)\right) \to \left(R_1^1(x) \to \neg R_3^1(x)\right)$	(K4)
(8)	$R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x)$	(6), (7), MP
(9)	$R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x)$	(5), (8), HS
(10)	$\forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x)\right)$	(9), Gen

证明中除了 x 没有使用其他 Gen 变元。由 K 的可靠性，有

$$\left\{\forall x\left(R_1^1(x) \to R_3^1(x)\right),\ \forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x)\right)\right\} \vDash \forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x)\right)$$

因此推理是有效的。