

011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

3.3 形式算术 K_N

回顾：初等数论形式化

◆ Peano定义的形式化理论：

(P1) $N(0)$;

(P2) $\forall x(N(x) \rightarrow \exists y!(y = x' \wedge N(y)))$;

(P3) $\forall x((N(x) \rightarrow \neg(0 = x')))$;

(P4) $\forall x \forall y((x' = y' \rightarrow x = y))$;

(P5) $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(x')) \rightarrow \forall x p(x)$, 其中 p 是任意一阶公式。

其中, $\exists y!$ 代表“存在唯一的 y ”。

◆ 观察 以上尝试中使用了等词 $=$, 代表自然数上的相等关系, $=$ 尚未形式化。

$0 \in \mathbf{N}$.

若 $x \in \mathbf{N}$, 则 x 有且只有一个后继 $x' \in \mathbf{N}$.

对任意 $x \in \mathbf{N}$, $x' \neq 0$.

对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $x'_1 \neq x'_2$.

设 $M \subseteq \mathbf{N}$. 若 $0 \in M$, 且当 $x \in M$ 时也有 $x' \in M$, 则 $M = \mathbf{N}$.

回顾：初等数论形式化

❖ 等词公设E:

(E1) $u = u$;

(E2) $u_k = u \rightarrow g(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u, \dots, u_n)$;

(E3) $u_k = u \rightarrow (P(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) \rightarrow P(u_1, \dots, u, \dots, u_n))$.

❖ 等词公式E的效果 等词公设E严格刻画了数学中相等关系的两条基本性质——等价性和等项可替换性。

❖ 定理(非正规模型存在性) 设 $E^* \subseteq K^+(Y)$ 是E的任何相容扩张: $E \subseteq E^*$ 且 E^* 相容, 则 E^* 有非正规 K^+ 模型。

❖ 观察 综合以上结果, 初等数论形式化将立足于等词公设E。

3.3 形式算术 K_N

❖ 形式算术 K_N 初等数论一个片段的应用谓词演算/一阶形式化理论。

❖ K_N 构成

1. 一阶语言 $K_N(Y)$:

- 逻辑符号: 同 K^+ ;
- 非逻辑符号: 个体常元 0 , 一元后继函数符号 $'$, 二元函数符号 $+$ 、 \times , 二元常谓词符号 $=$;
- 项和公式的形成规则: 同 K^+ ;

3.3 形式算术 K_N

2. 公理模式: (K1) ~ (K5);

3. 推理规则: (MP)、(UG);

4. 公设:

- 等词公设

(E1) $u = u$;

(E2) $u_k = u \rightarrow g(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u, \dots, u_n)$;

(E3) $u_k = u \rightarrow (P(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) \rightarrow P(u_1, \dots, u, \dots, u_n))$.

3.3 形式算术 K_N

- 算术公设:

(N1) $\neg(u' = 0)$;

(N2) $u' = v' \rightarrow u = v$;

(N3) $u + 0 = u$

(N4) $u + v' = (u + v)'$

(N5) $u \times 0 = 0$

(N6) $u \times v' = (u \times v) + u$

(N7) $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(x')) \rightarrow \forall x p(x)$

(P3)

(P4)

加法递归定义

加法递归定义

乘法递归定义

乘法递归定义

(P5) 归纳公设

5. 形式推理/形式证明: 公设与公理同样使用, 其余同K;

6. 定义: 同K.

3.3 形式算术 K_N

❖ K_N 的标准模型N 预期 K_N 是初等数论一个片段的形式化, 使得该片段是一个正规 K_N 模型 $N=(N, F, P)$, 称为 K_N 的**标准模型**, 其中 N 是自然数集, F 包含自然数集上的后继函数 $+1$ 、加法函数 $+$ 和乘法函数 \times , P 包含自然数集上的相等关系 $=$, 满足:

0^N 是0; $'^N$ 是 $+1$; $+^N$ 是 $+$; \times^N 是 \times ; $=^N$ 是 $=$ 。

❖ 定理1 N 是 K_N 的一个模型。

◆ 证明 由于 N 是一个正规 K^+ 模型, 只需验证 K_N 的所有算术公设 p 在 N 上是有效的: $N \models p$ (自修)。

3.3 形式算术 K_N

❖ 简写记号 $K_N(Y)$ 中的下列符号简写称为 K_N 数字:

0 简写为 $\underline{0}$; $0'$ 简写为 $\underline{1}$; $0''$ 简写为 $\underline{2}$; ...; $0^{(n)}$ 简写为 \underline{n} 。

❖ 注释 数字是 K_N 的简写符号, 解释为 N 中的自然数。数字中可以出现自然数的加法和乘法运算, 代表 0 的后继函数'的多次连续复合运算, 例如数字 $\underline{1+3}$ 、 $\underline{2+2}$ 、 $\underline{3+1}$ 和 $\underline{4}$ 都代表 K_N 项 $0^{(n)}$ 。

❖ 定理2 $\vdash_{K_N} \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$ 。

◆ 证明 自修。

◆ 注释 $\underline{n+m}$ 是两个 K_N 数字的加法运算, 其中 $+$ 是 K_N 的加法函数符号; $\underline{n+m}$ 是一个 K_N 数字, 其中 $+$ 是自然数的加法运算。

3.3 形式算术 K_N

❖ 定理3 $\vdash_{K_N} \underline{n} \times \underline{m} = \underline{n \times m}$ 。

◆ 证明 自修。

❖ 注释 定理2、3表明，自然数的加法和乘法运算可以在 K_N 中通过推理实现。

❖ 定理4 $\vdash_{K_N} u + v = v + u$ 。

❖ 定理5 $\vdash_{K_N} u \times v = v \times u$ 。

◆ 注释 定理4、5表明， K_N 中的加法和乘法运算满足交换律。

3.3 形式算术 K_N

- ❖ 定理6 如果 $m=n$, 则 $\vdash_{K_N} \underline{m} = \underline{n}$; 如果 $m \neq n$, 则 $\vdash_{K_N} \neg(\underline{m} = \underline{n})$ 。
- ◆ 注释 以上定理表明, 自然数运算可以通过 K_N 中的形式证明实现。
- ❖ 注释 经过一系列 K_N 内定理的证明发现, 自然数加法和乘法运算的主要性质 (交换律、结合律、分配律、消去率...) 在 K_N 中全部满足。
- ❖ 观察 对比 K^+ 用等词公设形式化相等关系的主要性质, K_N 用等词公设和算术公设形式化了初等数论一个片段的主要性质。

3.3 形式算术 K_N

- ❖ 讨论 由于 K_N 形式化了初等数论片段 $N=(N, F, P)$ 的主要性质，这个片段中数学命题的证明可以在 K_N 中完成， K_N 形式证明的每一步骤都是形式化的，只使用 K_N 的公理、公设和推理规则；而这些命题在数学中的证明和猜想可能使用了直觉。
- ❖ 讨论 初等数论片段 $N=(N, F, P)$ 是 K_N 的模型，如果证明了 K_N 的相容性，即不存在 p 使得 $\vdash_{K_N} p$ 和 $\vdash_{K_N} \neg p$ 同时成立，是否就证明了初等数论片段 $N=(N, F, P)$ 的无矛盾性？