011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

2.5 一阶逻辑的语义

回顾：命题逻辑的语义和一阶语言的结构

- **观察** 一阶演算是命题演算的扩展；因此，语义也应是扩展。
- **命题语言的语义解释（标准解释）** L(X)的一个标准解释$I = (v_0, v)$是一个复合映射I: L(X)→{t, f}，其中v_0: X→{t, f}是一个命题变元指派，v是标准赋值（联结词的语义解释）。
- **一阶语言K(Y)中公式的结构** 由下列语法范畴组合而成：
  1. 个体符号，个体变元x，个体常元a (如苏格拉底s)；
  2. 函数符号，$g(x)$表达如x的父亲，苏格拉底的父亲$g(s)$；
  3. 谓词符号，$P(x)$表达集合、性质，$P(x, y)$…表达关系；
  4. 量词符号，全称量词∀，存在量词∃。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶结构)** 设K(Y)为任意一阶语言。K(Y)的一个一阶结构是一个三元组M=(**D**, **F**, **P**)，其中**D**是一个非空集，称为M的论域，**D**的元素称为个体；**F**是**D**上函数的集合；**P**是**D**上关系的非空集；使得：

1. 对K(Y)中每一个个体常元a，**D**中有一个个体a^M；
2. 对K(Y)中每一个n(≥0)元函数符号g，**F**中有一个n元函数
$$g^M: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}$$
3. 对K(Y)中每一个n(≥0)元谓词符号P，**P**中有一个n元关系
$$P^M \subseteq \mathbf{D}^n$$

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **例(一阶结构)** 设一阶语言$K_0(Y)$不包含函数符号，只包含一个个体常元c和一个二元谓词符号P。取M=(N, ∅, {>})，其中N是自然数集合，>是自然数集合上的“大于”关系，并且：

1. 对$K_0(Y)$中的个体常元c，令c^M为自然数0；
2. 由于$K_0(Y)$没有函数符号，无需考虑函数符号的解释；
3. 对$K_0(Y)$的二元谓词符号P，令P^M为二元关系>。

则依定义，M=(N, ∅, {>})是一阶语言$K_0(Y)$的一个一阶结构。

◆ **观察** 一个一阶语言K(Y)可以有多个不同的一阶结构。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(个体变元指派)** 对任意一阶语言K(Y)及其任意一阶结构M=(**D**, **F**, **P**)，K(Y)的一个相对于M的个体变元指派是一个映射V: Y → **D**。

❖ **例(续)** 考虑一阶语言K_0(Y)和它的一个结构M=(N, ∅, {>})。考虑K_0(Y)公式P(x, c)。由于$c^M = 0$ (即c在M中解释为0)，P^M = > (P在M中解释为二元关系>)，所以公式P(x, c)在M中解释为$x > 0$。反之，数学公式$x > 0$在一阶逻辑中被形式化为P(x, c)。于是，如果一个个体变元指派V: Y → **D**给x的指派$V(x)$≥1，则公式P(x, c)在M和V下是真的；否则是假的。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释)** 任意一阶语言K(Y)的一个一阶解释是一个复合映射I=(M, V, v)，其中M=(**D, F, P**)是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，v是标准赋值，使得：

1. 对任何个体变元$x\in$Y，$\mathrm{I}(x)=V(x)$；
2. 对任何个体常元a，$\mathrm{I}(a)=a^{\mathrm{M}}$；
3. 对任何函数符号g，$\mathrm{I}(g)=g^{\mathrm{M}}$；
4. 对任何项$g(t_1, \ldots, t_n)$，$\mathrm{I}(\underbrace{g(t_1, \ldots, t_n)}_{\text{一个K(Y)项}})=\overbrace{g^{\mathrm{M}}}^{\text{F中函数}}(\underbrace{\mathrm{I}(t_1), \ldots, \mathrm{I}(t_n)}_{\text{D中n个个体}})$；

2.5 一阶逻辑的语义

❖ 定义(一阶解释-续)

5. 对任何谓词符号P，$I(P)=P^M$；
6. 对任何原子公式$P(t_1, \ldots, t_n)$，
$$I(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} t, & \text{如果}(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in P^M \\ f, & \text{否则}; \end{cases}$$
7. 对任何公式p，
$$I(\neg p) = \begin{cases} t, & \text{如果} I(p)=f; \\ f, & \text{如果} I(p)=t; \end{cases}$$
8. 对任何公式p, q，
$$I(p \to q) = \begin{cases} f, & \text{如果} I(p)=t \text{并且} I(q)=f; \\ t, & \text{否则}; \end{cases}$$

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释-续)**

9. 对任何公式p和个体变元x,

$$\mathrm{I}(\forall x p)=\begin{cases}\mathrm{t}, \text{ 如果对所有}d\in\mathbf{D}\text{有}\mathrm{I}_{x/d}(p)=\mathrm{t}; \\ \mathrm{f}, \text{ 否则};\end{cases}$$

其中I的变体$\mathrm{I}_{x/d}$由V的变体$V_{x/d}$构成：

$$\mathrm{I}_{x/d}=_{\mathrm{df}}(\mathrm{M}, V_{x/d}, v), \quad V_{x/d}(y)=_{\mathrm{df}}\begin{cases}d, \text{ 如果}y=x; \\ V(y), \text{ 如果}y\neq x。\end{cases}$$

❖ **观察** 一个全称量化公式$\forall x p$在一个一阶解释I下为真，如果公式p在I的所有变体解释$\mathrm{I}_{x/d}$下为真。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **观察** 给定一阶解释I=(M, V, v)，其中M=(**D**, **F**, **P**)是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，v是标准赋值。K(Y)各类语法对象在I=(M, V, v)下的语义解释：

1. 个体常元a解释为a^M，用M解释；
2. 函数符号g解释为g^M，用M解释；
3. 谓词符号P解释为P^M，用M解释；
4. 个体变元x解释为$V(x)$，用V解释；
5. 全称量词：$\forall x p$用I=(M, V, v)的所有变体解释$I_{x/d}(p)$；
6. 联结词用标准赋值v解释。

2. 5 一阶逻辑的语义

❖ **定理(一阶解释的良定义性)** 对任何一阶解释I和K(Y)公式p，存在唯一的$u\in\{\mathrm{t}, \mathrm{f}\}$，使得I($p$)=$u$。

◆ **证明** 自修。

◆ **注释** 任何一阶公式p在任何一阶解释I=(M, V, v)下，有唯一确定的真值。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ 例(续) 在一阶语言$K_0(Y)$和它的一个结构$M=(N, \varnothing, \{>\})$中，考虑$K_0(Y)$公式$\forall x P(x, c)$的解释。

◆ 已知$c^M = 0$ (c在M中解释为0)，$P^M = >$ (P在M中解释为二元关系>)，公式$P(x, c)$在M中解释为$x>0$。

◆ 于是，公式$\forall x P(x, c)$在M中解释为：对所有自然数d，$d>0$。

◆ 依一阶解释的定义，$\forall x P(x, c)$为真，当且仅当对所有自然数d，变体解释$I_{x/d}(P(x, c))=t$。

◆ 当$d=0$时，$I_{x/d}(P(x, c))=f$。所以在M中$\forall x P(x, c)$是假的。

2.5 一阶逻辑的语义

习题

2.5 p.84: 1.

2.5 讨论：解释与形式化

一阶语言
K(Y)

语义解释 →

← 形式化

一阶结构
M=(**D**, **F**, **P**)

D是非空集(论域)，**F**是**D**上函数集，**P**是**D**上关系非空集，隐含**映射**：

1. K(Y)中每一个个体常元a映射为**D**中一个个体a^M；
2. K(Y)中每一个n(≥0)元函数符号g映射为**F**中一个n元函数g^M: $\mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$；
3. K(Y)中每一个n(≥0)元谓词符号P映射为**P**中一个n元关系$P^M \subseteq \mathbf{D}^n$。

1. M中每一个个体a^M形式化为 K(Y)中一个个体常元$(a^M)^{-M} = a$；
2. M中每一个n元函数g^M: $D^n \to D$形式化为K(Y)一个n(≥0)元函数符号g；
3. M中每一个n元关系$P^M \subseteq D^n$形式化为K(Y)中一个n(≥0)元谓词符号P。

2.5 讨论：解释与形式化

一阶语言 K(Y) $\xrightarrow{\text{语义解释}}$ 一阶结构 $M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$

一阶结构 $M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ $\xrightarrow{\text{形式化}}$ 一阶语言 K(Y)

◆ 例1	$\mathrm{P}(x, c)$	$(x > 0)$
◆ 例2	$\forall x \mathrm{P}(x, c)$	$\forall x(x > 0)$
◆ 例3	$\exists x \mathrm{Q}(x, b, c)$	方程$x+2 = 0$的根

❖ **观察** 一阶结构只解释(形式化)非逻辑符号，可解释例1，不可解释例2和例3；例2和例3的解释需要用一阶解释I，但例1在I中的解释存疑(由一个任意的V决定P(x, c)的真假)。

2.5 一阶逻辑的语义

- **定义(可满足)** 设p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若存在一个一阶解释I=(M, V, v)使得I(p)=t，则称p是M可满足的，简称可满足的。

- **例(续)** 设一阶语言K_0(Y)不含函数符号，只含一个个体常元c和一个二元谓词符号P。设M=(N, ∅, {>})，N是自然数集合，>是自然数集合上的大于关系，c^M为自然数0，P^M为二元关系>。则
  1. P(x, c)是M可满足的；
  2. $\exists x$P(x, c)是M可满足的；
  3. $\forall x$P(x, c)不是M可满足的。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(M有效)** 设p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若对一切V，p在I=(M, V, v)下有I(p)=t，则称p是**M有效的**，称M为p的一个模型，记为M$\models p$。

❖ **例(续)** 设$K_0(Y)$不含函数符号，只含一个个体常元c和一个二元谓词符号P。取$K_0(Y)$的一阶结构$M_N=(N, \varnothing, \{>\})$，其中$N$是自然数集，>是大于关系，$c^M$为自然数0，$P^M$为二元关系>。则

1. $P(x, c)$是M_N可满足的，不是M_N有效的；
2. $\exists x P(x, c)$是M_N可满足的，也是M_N有效的；
3. $\forall x P(x, c)$不是M_N可满足的，也不是M_N有效的。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(逻辑有效)** 设p是K(Y)公式。若对一切一阶结构M，M $\models p$ 成立，则称p是逻辑有效的，记为$\models p$。

❖ **例** 考虑如下K(Y)公式：

1. $P(x, c)$、$\exists xP(x, c)$、$\forall xP(x, c)$都不是逻辑有效的；
2. $P(x, c)\rightarrow P(x, c)$、$\exists x(P(x, c)\rightarrow P(x, c))$、$\forall x(P(x, c)\rightarrow P(x, c))$、$\forall xP(x, c)\rightarrow\forall xP(x, c)$都是逻辑有效的。

◆ **证明**：习题2.6。

❖ **观察** K逻辑有效与L重言式有什么关联？提示：回顾K-L关系。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(语义后承)** 设$\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$。p称为Γ的语义后承，记为$\Gamma \models p$，如果对任何一阶结构M，只要$M \models \Gamma$，则有$M \models p$。

❖ **例** 对任意公式$P(x, c)$

$\{\forall x P(x, c)\} \models P(x, c)$成立，$\forall x P(x, c)\} \models \exists x P(x, c)$成立；

$\{\exists x P(x, c)\} \models \forall x P(x, c)$不成立。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **记号** 设$p(x_1, \ldots, x_n) \in K(Y_n)$，$K(Y_n)=\{x_1, \ldots, x_n\}$（即$p(x_1, \ldots, x_n)$不含$x_1, \ldots, x_n$以外的个体变元）。令表达式$\forall p(x_1, \ldots, x_n)$是K公式$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, p(x_1, \ldots, x_n)$的简写，称为$p(x_1, \ldots, x_n)$的全称闭式。

❖ **定理(语义性质)** 对任何一阶结构M，任何$p \in K(Y)$:

1. $M \models p$当且仅当$M \models \forall x p$当且仅当$M \models \forall p$；（UG有效性）
2. 若$M \models p$且$M \models p \rightarrow q$，则$M \models q$；（MP有效性）
3. 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \models p$，则$\Gamma' \models p$。（语义后承单调性）

◆ **证明** 习题2.7。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **命题** 任给闭式p和$I=(M, V, v)$。若$I(p)=t$ $(I(p)=f)$，则对任何$I'=(M, V', v)$有$I'(p)=t$ $(I'(p)=f)$。（闭式的真值与V无关）

◆ **证明** 自修。

◆ **注释** 在一阶语言中，闭式代表命题。

❖ **推论** 任给闭式p和一阶结构M，$M \models p$和$M \models \neg p$有且仅有一个成立。

◆ **证明** 自修。

◆ **注释** 在模型/M有效的意义下，闭式遵守矛盾律和排中律。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ 习题

2.6 试证明：

1. $\mathrm{P}(x, c)$、$\exists x\mathrm{P}(x, c)$、$\forall x\mathrm{P}(x, c)$都不是逻辑有效的；

2. $\mathrm{P}(x, c)\rightarrow\mathrm{P}(x, c)$、$\exists x(\mathrm{P}(x, c)\rightarrow\mathrm{P}(x, c))$、$\forall x(\mathrm{P}(x, c)\rightarrow\mathrm{P}(x, c))$、$\forall x\mathrm{P}(x, c)\rightarrow\forall x\mathrm{P}(x, c)$都是逻辑有效的。

2.7 试证明语义性质定理。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ 思考题

2.2 下列判断是否成立？若$\Gamma \models p$，则对一切解释I，

如果对所有$q\in\Gamma$有I(q)=t，则I(p)=t。

2.3 “真”在一阶逻辑中有哪几个层次？