经典命题逻辑公理系统定理证明算法设计

杜国平

(南京大学哲学系，南京，210093；南京航空航天大学计算机系，南京，210016)

摘要：本文利用演绎定理的证明思路给出了一个由演绎证明构造公理证明的一般程序，并增加了一条简化命令，使该程序既严格又具有实际可操作性。

关键词：演绎证明　公理证明　程序

〔中图分类号〕B81　　〔文献标识码〕A　　〔文章编号〕1002-8862-(2004)增刊-0016-02

在经典命题逻辑常见的公理系统中，仅仅从公理和推理规则出发进行定理的形式证明一般没有能行的程序，对于初学者而言是比较困难的。但是，在经典命题逻辑公理系统中，演绎定理成立，而使用演绎定理来构造定理的形式证明是比较简单的。实际上，演绎定理的证明过程已经表明：有了一个使用演绎定理的形式证明（简称为演绎证明），就可以构造出仅仅从公理和推理规则出发的形式证明（简称为公理证明）。本文拟对由演绎证明构造公理证明的具体算法和技巧进行一些探讨。

为了说明的方便，我们取如下的简记：

公理模式：

(Ax1)：$A\to(B\to A)$

(Ax2)：$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

推理规则：

(MP)：由 A 和 $A\to B$ 可以推出 B。

演绎定理：

(DT)：如果$\Sigma\cup\{A\}\vdash B$，那么$\Sigma\vdash A\to B$。

因为任一证明序列都是有限长的，因此，演绎证明中需要引入的假设也是有限的。所以我们只考虑假设集Σ为有限集的情况，令$\Sigma=\{A_1,\cdots,A_m\}$。

假设有一个$\Sigma\cup\{A\}\vdash B$的演绎证明，该证明的公式序列为：$C_1,\cdots,C_n=B$。那么我们可按照下述程序构造出一个$\Sigma\vdash A\to B$的演绎证明。

[1] 如果 $A_0\to C_n$ 是公理或者 $A_0\to C_n\in\Sigma$，则执行如下子程序[1′]，即直接写入：

$A_0\to C_n$

[2] 如果 C_n 是公理或 $C_n\in\Sigma$，则执行如下子程序[2’]：

C_n

$C_n\to(A_0\to C_n)$

$A_0\to C_n$

[3] 如果 C_n 是 A_0，则执行如下子程序[3′]：

$A_0\to((B\to A_0)\to A_0)$

$(A_0\to((B\to A_0)\to A_0))\to((A_0\to(B\to A_0))\to(A_0\to A_0))$

$(A_0\to(B\to A_0))\to(A_0\to A_0)$

$A_0\to(B\to A_0)$

$A_0\to A_0$

[4] 如果 C_n 是由 C_i, C_j $(=C_i\to C_n)$ 经使用分离规则而得到，则对 C_j 执行如下子程序[4′]：

$(A_0\to(C_i\to C_n))\to((A_0\to C_i)\to(A_0\to C_n))$

$(A_0\to C_i)\to(A_0\to C_n)$

$A_0\to C_n$

[5] 对[4]中出现的 C_i, C_j 重复执行程序[1]～[5]。

[6] 若程序全部进入[1]～[3]，则执行完[1′]～[3′]，程序终止。

对$\Sigma\vdash A_0\to B$ 反复使用上述程序 m 次之后，就

基金项目：国家社科基金项目（02CZX008）；南京大学引进人才基金项目；南京大学笹川青年教育基金项目。

作者简介：杜国平（1965-），男，江苏盱眙人，哲学博士，南京大学哲学系副教授、逻辑学教研室主任，南京航空航天大学计算机系计算机应用技术专业 2003 级博士研究生。主要研究方向：符号逻辑。

可以得到一个 $\vdash A_m \to (A_{m-1} \to \cdots \to (A1 \to (A_0 \to B))\cdots)$ 的公理证明。

例 构造定理 $\vdash ((A\to B)\to C)\to(B\to C)$的公理证明。

首先，我们构造一个$(A\to B)\to C$，$B\vdash C$ 的演绎证明。

证明 1′：

1 $(A\to B)\to C$	假设
2 B	假设
3 $B\to(A\to B)$	(Ax1)
4 $A\to B$	2, 3 (MP)
5 C	1, 4 (MP)

其次，由$(A\to B)\to C$，$B\vdash C$ 的演绎证明构造$(A\to B)\to C\vdash B\to C$ 的演绎证明。

1、这可以通过回溯检查逐步完成。证明 1′的第 5 行为 C，进入程序[1]检查 $B\to C$，发现它既不是公理也不属于假设集$\{(A\to B)\to C\}$；进入程序[2]～[4]发现 C 由第 1, 4 行$(A\to B)\to C$ 和 $A\to B$ 分离而得。因此，执行子程序[4′]：

$(B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))$

$(B\to(A\to B))\to(B\to C)$

$B\to C$

2、进入程序[5]，对$(A\to B)\to C$ 和 $A\to B$ 执行程序[1]～[5]。

3、进入程序[1]，检查 $B\to((A\to B)\to C)$，发现它既不是公理也不属于假设集$\{(A\to B)\to C\}$；进入程序[2]～[4]发现$(A\to B)\to C$ 属于假设集$\{(A\to B)\to C\}$。因此，执行子程序[2′]：

$(A\to B)\to C$

$((A\to B)\to C)\to(B\to((A\to B)\to C))$

$B\to((A\to B)\to C)$

4、进入程序[1]，检查 $B\to(A\to B)$，发现它是公理。因此，执行子程序[1′]：

$B\to(A\to B)$

5、程序已经全部进入[1]～[3]，并且已经执行完子程序[1′]～[3′]，因此程序终止。

所以得到一个$(A\to B)\to C\vdash B\to C$ 的演绎证明。

证明 1″：

1 $(A\to B)\to C$	假设
2 $((A\to B)\to C)\to(B\to((A\to B)\to C))$	(Ax1)
3 $B\to((A\to B)\to C)$	1, 2 (MP)
4 $B\to(A\to B)$	(Ax1)
5 $(B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))$	(Ax2)
6 $(B\to(A\to B))\to(B\to C)$	3, 5 (MP)
7 $B\to C$	4, 6 (MP)

再次，使用上述步骤由$(A\to B)\to C\vdash B\to C$ 的演绎证明构造 $\vdash((A\to B)\to C)\to(B\to C)$的公理证明。

证明 1‴：

1 $((A\to B)\to C)\to(B\to((A\to B)\to C))$	(Ax1)
2 $(B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))$	(Ax2)
3 $((B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C)))\to(((A\to B)\to C)\to((B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))))$	(Ax1)
4 $((A\to B)\to C)\to((B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C)))$	2, 3 (MP)
5 $(((A\to B)\to C)\to((B\to((A\to B)\to C))\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))))\to((((A\to B)\to C)\to(B\to((A\to B)\to C)))\to(((A\to B)\to C)\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))))$	(Ax2)
6 $(((A\to B)\to C)\to(B\to((A\to B)\to C)))\to(((A\to B)\to C)\to((B\to(A\to B))\to(B\to C)))$	4, 5 (MP)
7 $((A\to B)\to C)\to((B\to(A\to B))\to(B\to C))$	1, 6 (MP)
8 $(((A\to B)\to C)\to((B\to(A\to B))\to(B\to C)))\to((((A\to B)\to C)\to(B\to(A\to B)))\to(((A\to B)\to C)\to(B\to C)))$	(Ax2)
9 $(((A\to B)\to C)\to(B\to(A\to B)))\to(((A\to B)\to C)\to(B\to C))$	7, 8 (MP)
10 $B\to(A\to B)$	(Ax1)
11 $(B\to(A\to B))\to(((A\to B)\to C)\to(B\to(A\to B)))$	(Ax1)
12 $((A\to B)\to C)\to(B\to(A\to B))$	10,11 (MP)
13 $((A\to B)\to C)\to(B\to C)$	9, 12 (MP)

构造程序的[2]~[6]也可以构成一个独立的公理证明构造程序，这是演绎定理的证明中显示出来的，但该程序很繁琐。程序[1]是一个简化程序，它的加入，可以使构造程序大为简化，尽管它多了一条程序命令。但是这样就增加了该程序的实际可操作性。（下转 25 页）

Encoded Generics [D]. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, 2003.

[2] Mao, Y., and Zhou, B. An analysis of the meaning of generics [J]. Social Sciences in China, Vol.XXIV, No.3, Autumn 2003. pp.126-133.

[3] 周北海：概称句本质与概念[J]. 《北京大学学报(哲社版)》2004(7).

[4] 周北海，毛翊. 一个关于常识推理的基础逻辑[J]. 《哲学研究》2003 年增刊. 1-10.

[5] Eckardt, R.. Normal objects, normal worlds and the meaning of generic sentences [J]. Journal of Semantics (16) 2000. pp. 237-278.

Several Logics for Generics Based on the Connection between Subject Sense and Predicate sense

Zhang Li-ying Zhou Bei-hai

(Department of Philosophy, Peking Univ., Beijing, 100871)

Abstract: By adding some different new conditions of the normal object selection function $\mathcal{N}$ in semantics, which express the connection between subject sense and predicate sense, this paper gives some different models about inferences of generic sentences, and based on the system G, by removing and adding axioms and rules, we give systems $\mathbf{G_0}$ - $\mathbf{G_4}$ corresponding the models.

Key words: generic sentence normal object selection function sense frame model

---

（上接 17 页）

参 考 文 献

[1] 宋文坚. 逻辑学[M]. 人民出版社,1998. P86-92.

[2] 陆钟万. 面向计算机科学的数理逻辑[M]. 科学出版社, 2002. 86-92.

[3] 周礼全. 逻辑百科辞典[M]. 四川教育出版社, 1994. P685.

[4] A,G.Hamilton. *Logic for Mathematicians*[M]. 清华大学出版社, 2003. 32-34.

[5] 张清宇 郭世铭 李小五. 哲学逻辑研究[M]. 社会科学文献出版社, 1997 年.

The Arithmetic Design for Theorem Proving in the Axiom System of Classical Propositional Logic

Du Guo-ping

(Nanjing University, Nanjing, 210093; Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

Abstract: The article uses the proving of deduction theorem to give general program of construction theorem proving, and adding a piece of simplification command. The program is gotten strict and exercisable.

Key words: deduction prove axiom prove program