011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无根；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

杨金龙摄

2.7 一阶逻辑的判定问题

2.7 一阶逻辑的判定问题

- **可判定** 一类问题是可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定二种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A在有限步骤内输出no。
- **半可判定** 称一类问题是半可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定两种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A可以不回答。

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **一阶逻辑中的若干可判定问题** 下列问题是可判定的：

1. 任给一个公式是不是K的公理？

◆**证明** 构造一个能行过程A，A将输入公式的逻辑结构依次与5种公理模式匹配；如果与任何一种公理模式匹配成功，则A输出yes，若都不匹配则A输出no。

K1：$p\to(q\to p)$的逻辑结构是由三个子公式p, q, p经过$\to$的两次复合而成。经过有限步骤可确定输入公式是否与K1匹配。

其他4种公理模式的匹配类似。

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **一阶逻辑中的若干可判定问题** 下列问题是可判定的：

2. 任给公式p, q, r，r是不是从p, q用MP规则推出的？

◆ **证明** 分析公式q的逻辑结构是不是$p\rightarrow r$，或者公式p的逻辑结构是不是$q\rightarrow r$，如果是则输出yes，否则输出no。

3. 任给公式p, q，q是不是从p用UG规则推出的？

4. 任给公式序列是否K的一个形式证明？

◆ **证明** 对公式序列$p_1, \cdots, p_n$中的每一个公式p_k，调用问题1、2、3的能行过程（判定程序）。

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **观察** 虽然K的每一条公理模式都包含无穷多条公理，每一条推理规则实际上也是一个推理模式模式，由于以上四个问题都是可判定的，仍然有理由认为：一阶谓词演算K是一阶逻辑的一个“有穷描述”。

2. 7 一阶逻辑的判定问题

❖ **一阶逻辑中的半可判定问题** 下列问题是半可判定的：

5. 任给公式p是不是K的内定理($\vdash p$是否成立)?

◆ **证明** 以适当次序，逐一枚举以p结尾的公式序列$p_1, \cdots, p_n=p$，对每次枚举的公式序列，调用问题4的判定程序，如果是一个p的证明，则输出yes并终止，否则枚举下一个公式序列。如果p是K的内定理，则必经有限次枚举，生成p的一个形式证明。

❖ **对比(命题演算的可判定性)** 存在一个能行方法A，对任何L公式p，当$\vdash p$成立时，A在有限时间内回答“是”；当$\vdash p$不成立时，A在有限时间内回答“否”。

2.7 一阶逻辑的判定问题

❖ **对比** 任给公式$p\in L(X)$，p是一个重言式当且仅当所有指派都是p的成真指派。

◆ **观察** 任给公式$p\in L(X)$，存在X_n使得$p\in L(X_n)$。因此，p是重言式当且仅当X_n上的所有2^n个指派都是p的成真指派。

❖ **对比(K的逻辑有效式)** 设$p\in K(Y)$。p是K的一个逻辑有效式，记为$\vDash p$，当且仅当对任何一阶结构M，有$M\vDash p$。

◆ **观察** 一般情况下，验证一个一阶公式是不是K的逻辑有效式涉及无穷多个一阶结构。

附：弗雷格（Friedrich L. G. Frege）

❖ 主要生平事迹

1848年生于德国维斯玛；

1873年获哥廷根大学博士学位；

1874年获耶拿大学无薪授课资格；

1879年发表《概念文字》，受聘副教授(有薪)；

1896年任荣誉教授。

附：弗雷格（Friedrich L. G. Frege）

❖ 《概念文字》建立了历史上第一个一阶逻辑形式公理系统。

◆ 公理举例：