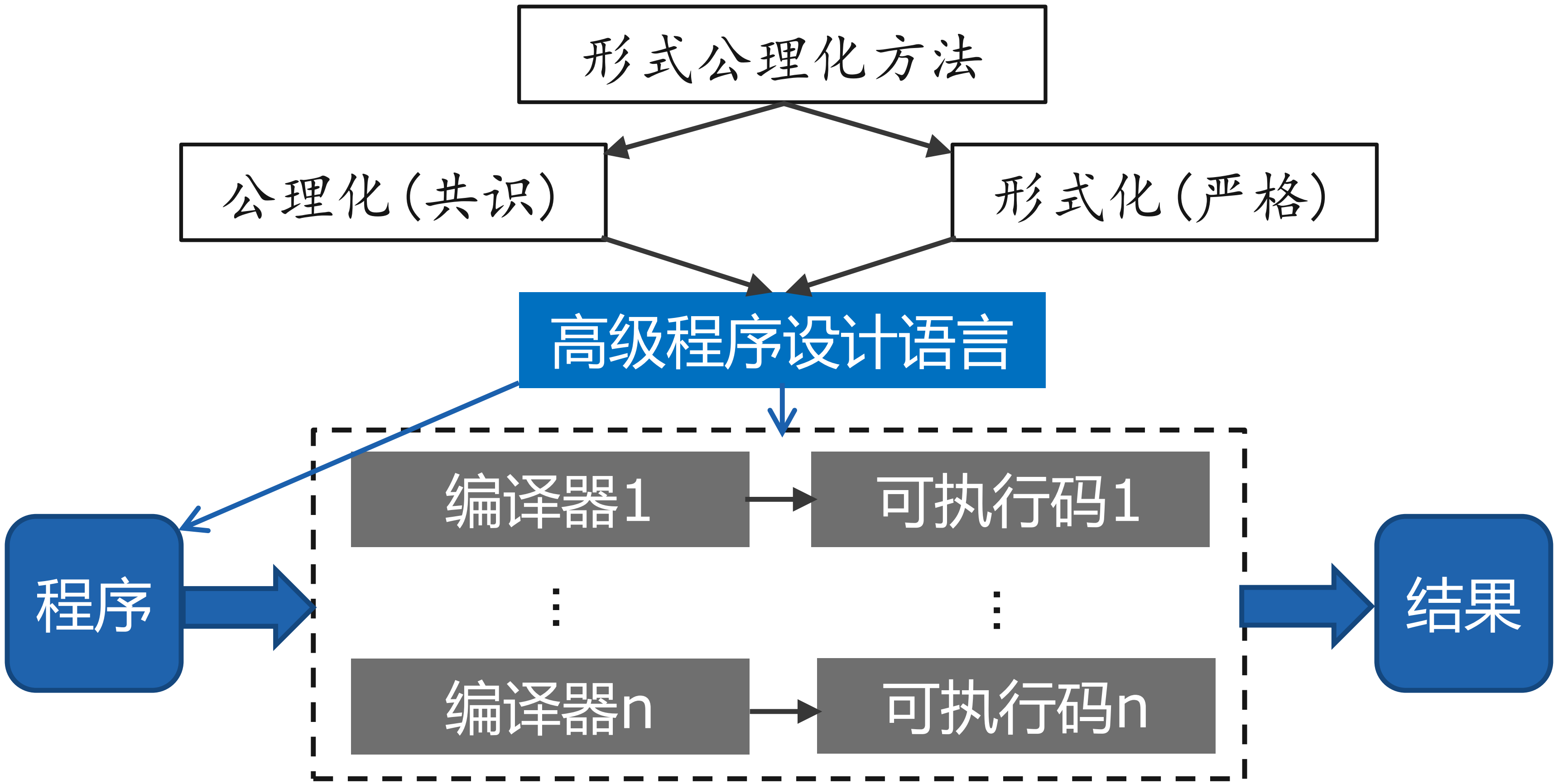
011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

1.5 公式集的逻辑结构

案例分析：程序设计与形式公理化方法



1.5 公式集的逻辑结构

❖ L(X)中公式之间的**逻辑关系**，由近到远排列为：

1. p与q互可推，$\{p\} \vDash q$且$\{q\} \vDash p$;
2. q从p可推且p从q不可推，$\{p\} \vDash q$且$\{q\} \nvDash p$;
3. p与q互不可推， $\{p\} \nvDash q$且$\{q\} \nvDash p$。

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **定义1（逻辑等值）** 若$\models p \leftrightarrow q$，则$p$与$q$称逻辑等值。

❖ **性质2** $\models p \leftrightarrow q$ 当且仅当 $\{p\} \models q$且$\{q\} \models p$。

证明（概要） 根据$\leftrightarrow$定义，$\models p \leftrightarrow q$当且仅当$\models (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$。由L的语义解释，后者成立当且仅当$\models (p \rightarrow q)$且$\models (q \rightarrow p)$，依语义演绎定理又等价于$\{p\} \models q$且$\{q\} \models p$。

◆ **注释** p与q逻辑等值代表p与q互可推。

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **推论3** 若$\models p\leftrightarrow q$，则对任何指派$v_0$，$v_0$是$p$的一个成真/成假指派，当且仅当$v_0$是$q$的一个成真/成假指派；反之亦然。

证明 由于$\models p\leftrightarrow q$当且仅当$\{p\}\models q$且$\{q\}\models p$，结论显然。

◆ **推论4** 设公式p与q的真值函数分别为f_p、f_q。则

$$\models p\leftrightarrow q \text{ 当且仅当 } f_p \equiv f_q \text{ (对任何解释I，I}(p) = \text{I}(q))\text{。}$$

❖ **观察（逻辑等值公式的语义不可分辨性）** 在命题逻辑语义学中，若$\models p\leftrightarrow q$，当且仅当$p$和$q$解释为同一个真值函数，即$p$和$q$在语义上完全相同。

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **性质5** 对任何L(X)公式p, q, r有

1. $\models p \leftrightarrow p$；（自反性）
2. $\models p \leftrightarrow q$ 当且仅当 $\models q \leftrightarrow p$；（对称性）
3. 如果$\models p \leftrightarrow q$并且$\models q \leftrightarrow r$，则$\models p \leftrightarrow r$。（传递性）

证明 真值表法验证。

❖ **观察** 逻辑等值关系$R_{\leftrightarrow}(p, q)$（$R_{\leftrightarrow}(p, q)$成立当且仅当$\models p \leftrightarrow q$）是集合L(X)上的一个等价关系。

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **L(X)划分** 根据性质5，逻辑等值关系$R_{\leftrightarrow}(p, q)$诱导L(X)中全体公式的一个划分；根据推论4，任意公式p, q属于$R_{\leftrightarrow}(p, q)$的同一个等价类，当且仅当它们具有相同的真值函数。

❖ **$L(X_n)$划分** $L(X_n)$上只有2^{2^n}个不同的真值函数(练习)，因此$L(X_n)$上有2^{2^n}个不同的$R_{\leftrightarrow}(p, q)$等价类，每个等价类有无穷多公式。

◆ **观察** 无限集$L(X_n)$只有有限多个语义不同的公式。

◆ **观察** L的语法描述比语义描述的粒度更细。

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **标准形式** 对L(X)上同一个$R_\leftrightarrow(p, q)$等价类中的所有公式，既然语义相同，能否用某种统一的标准形式加以表达？

❖ **定义6（范式）** L(X)的一个命题变元和一个命题变元的否定式p_{ij}称为文字；文字的析取式称为基本析取式；一些基本析取式的合取式称为合取范式。类似定义析取范式。

$$(p_{11}\vee\ldots\vee p_{1k_1}) \wedge \ldots \wedge (p_{m1}\vee\ldots\vee p_{mk_m})$$

$$(p_{11}\wedge\ldots\wedge p_{1k_1}) \vee \ldots \vee (p_{m1}\wedge\ldots\wedge p_{mk_m})$$

1.5 公式集的逻辑结构

❖ **定义7** 任给公式p，称公式q为p的一个合取/析取范式，如果q是一个合取/析取范式，并且$\models p\leftrightarrow q$。

❖ **例** 求公式$\neg x_1\rightarrow x_2$的合取范式和析取范式。

解 1. 析取范式：

$$(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge\neg x_2)\vee(\neg x_1\wedge x_2)$$

2. 合取范式：自修

[提示：求$\neg p$的析取范式q，再对$\neg q$用否定词分配律整理为合取范式。]

x_1	x_2	$\neg x_1\rightarrow x_2$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

1. 5 公式集的逻辑结构

习题

1.7 p49：1(1)；p53：1(3)。