

011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

第1章 命题逻辑

1.3 命题演算的简单性质

- ❖ 命题演算 L 中的推理不需要借助于直观意义，但通过研究 L 的性质，可以从整体上把握 L 的形式推理的特性，从而了解 L 能做什么、不能做什么。
- ◆ **术语** 如果 L 的一条性质得到了证明(注意，不是在 L 中的形式证明)，则该性质称为一条关于 L 的**定理**。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定理1 (单调性)

1. 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash p$, 则 $\Gamma' \vdash p$;
2. 若 $\vdash p$, 则对任何 Γ : $\Gamma \vdash p$ 。

证明 1. 设 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash p$, 则依定义, 存在 p 的一个从 Γ 的形式推理序列 $p_1, \dots, p_n (p_n = p)$, 其中任何或者是L公理, 或者是 Γ 中前提, 或者是由它前面的公式用MP规则推出的。显然, 此序列也是 p 的一个从 Γ' 的形式推理序列, 故 $\Gamma' \vdash p$ 。

2. 设 $\vdash p$, 即 $\emptyset \vdash p$, 由1得, 对任何 Γ : $\Gamma \vdash p$ 。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定理2 (紧致性) 若 $\Gamma \vdash p$, 则存在有穷集 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 且使 $\Gamma' \vdash p$ 。

证明 设 $\Gamma \vdash p$, 则存在 p 的一个从 Γ 的形式推理序列 p_1, \dots, p_n ($p_n = p$)。令 $\Gamma' = \{p_1, \dots, p_n\} \cap \Gamma$ 。显然, Γ' 是 Γ 的有穷子集并且 $\Gamma' \vdash p$ 。

◆ 观察 紧致性是自动推理的一个必要条件。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定义 (一致/相容) 若存在公式 p 使得 $\Gamma \vdash p$ 且 $\Gamma \vdash \neg p$, 则称公式集 Γ 是不一致的/不相容的; 否则, 称 Γ 是一致的/相容的。

❖ 定理3 (平凡性) 若 Γ 是不相容的, 则对任何 p 有 $\Gamma \vdash p$ 。

证明 设 Γ 是不相容的。依定义, 存在 q 使得 $\Gamma \vdash q$ 且 $\Gamma \vdash \neg q$ 。于是, 对任何 p , p 的一个从 Γ 的形式推理序列如下:

$$q_1, \dots, q, q_{n+1}, \dots, \neg q, q_{m+1}, \dots, q_{m+k}, p$$

其中 q_{m+1}, \dots, q_{m+k} 是1.2节例4否定前件律 $\vdash \neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的一个形式证明序列。因此, 对任何 p 有 $\Gamma \vdash p$ 。

1.3 命题演算的简单性质

- ◆观察 平凡性定理表明，对任何一个公式集 Γ ，如果 Γ 是不相容的，则作为推理前提， Γ 不仅无用，而且可能有害。
- ◆观察 通常逻辑不对前提集提出任何要求；但明确指出，不相容的前提集在逻辑上是有问题的。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定理4（演绎定理） $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 当且仅当 $\Gamma \vdash p \rightarrow q$ 。

证明 自修

❖ 推论（假设三段论HS） $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$ 。

证明 依演绎定理，只需证明 $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p\} \vdash r$ 。下面是 r 的一个从 $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p\}$ 的形式推理： $p, p \rightarrow q, q, q \rightarrow r, r$ 。

❖ 不同于公理模式，假设三段论的作用类似与MP，可视为一条派生推理规则。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 两种证明方法

1. 直接证明 只允许使用 (L1)、(L2)、(L3) 和 (MP)，而且必须写出全部证明根据，每一步只允许有一条证明根据。
 2. 简化证明 可以使用 (L1)、(L2)、(L3) 和 (MP)，以及所有已经证明的定理、推论等结果，仍然要求给出全部证明根据。
- ◆ 例如，演绎定理和假设三段论的证明都是简化证明。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定理5 (反证律) 如果 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$ 且 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q$, 则 $\Gamma \vdash p$ 。

证明 自修

❖ 定理6 (归谬律) 如果 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 且 $\Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q$, 则 $\Gamma \vdash \neg p$ 。

证明 自修

❖ 定理7 (双否律)

$$\{\neg\neg p\} \vdash p; \{p\} \vdash \neg\neg p; \vdash p \rightarrow \neg\neg p; \vdash \neg\neg p \rightarrow p;$$

证明 自修

1.3 命题演算的简单性质

❖ 例1(换位律) 简化证明 $\vdash (q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$.

证明 依演绎定理, 只需证 $\{q \rightarrow p\} \vdash \neg p \rightarrow \neg q$ 。

- | | |
|--|---------|
| 1. $q \rightarrow p$ | 前提 |
| 2. $\neg \neg q \rightarrow q$ | 双否律(已证) |
| 3. $\neg \neg q \rightarrow p$ | HS1, 2 |
| 4. $p \rightarrow \neg \neg p$ | 双否律 |
| 5. $\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p$ | HS3, 4 |
| 6. $(\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ | (L3) |
| 7. $\neg p \rightarrow \neg q$ | MP5, 6 |

1.3 命题演算的简单性质

- ❖ 子公式 公式 q 是公式 p 的一个子公式, 如果 q 在 p 中出现。
- ◆ 例如, x_1 是 $x_1, \neg x_1, x_1 \rightarrow x_2, \dots$ 的子公式; $\neg(x_1 \rightarrow x_2)$ 的子公式有: $x_1, x_2, x_1 \rightarrow x_2, \neg(x_1 \rightarrow x_2)$ 。
- ❖ 定理8 (可证等价替换规则) 设 q 是 p 的子公式, q' 是任意公式, 公式 p' 是在 p 中用 q' 替换 q 的结果。若 $\vdash q \rightarrow q'$ 且 $\vdash q' \rightarrow q$, 则 $\vdash p \rightarrow p'$ 且 $\vdash p' \rightarrow p$ 。
- ❖ 例2 依双否律, 对任何公式 q 有 $\vdash q \rightarrow \neg\neg q$ 且 $\vdash \neg\neg q \rightarrow q$, 故对任何包含子公式 q 的公式 p , 将 p 中的子公式 q 替换为 $\neg\neg q$ 得到公式 p' , 则有 $\vdash p \rightarrow p'$ 且 $\vdash p' \rightarrow p$ 。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **L扩展：定义联结词** 在L中可以定义其他常用联结词。

❖ **命题演算中的定义 (IV)**

$$p \vee q =_{df} \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q =_{df} \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q =_{df} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

其中， $=_{df}$ 左边的**表达式**代表右边的表达式或公式。

❖ 补充定义后，命题演算本身的构建即告完成。

❖ 实际应用中，根据应用需求选择合适的联结词。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定义联结词表达的逻辑特性

❖ 命题1 (\vee 语义的语法表达)

$$1^\circ \vdash p \rightarrow (p \vee q).$$

$$2^\circ \vdash q \rightarrow (p \vee q).$$

$$3^\circ \vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p).$$

$$4^\circ \vdash (p \vee p) \rightarrow p.$$

$$5^\circ \vdash \neg p \vee p. \text{ (排中律)}$$

❖ 命题2 (\wedge 语义的语法表达)

$$1^\circ \vdash (p \wedge q) \rightarrow p.$$

$$2^\circ \vdash (p \wedge q) \rightarrow q.$$

$$3^\circ \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p).$$

$$4^\circ \vdash p \rightarrow (p \wedge p).$$

$$5^\circ \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)).$$

$$6^\circ \vdash \neg(p \wedge \neg p). \text{ (矛盾律)}$$

1.3 命题演算的简单性质

❖ L的构成

I 命题语言：符号表、公式

II 推理设施：公理模式、推理规则

III 形式证明、形式推理

IV 定义联结词： $\wedge, \vee, \leftrightarrow$

❖ “实验”

同一律 $\vdash p \rightarrow p$

否定前件律 $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

.....

❖ L的性质

1. 单调性：增加前提不减少结论

2. 紧致性：有限前提充分性

3. 平凡性：前提集安全性警示

4. 演绎定理：推理机制的原理

5. 反证律：推理机制的原理

6. 归谬律：推理机制的原理

7. 双否律：推理机制的原理

8. 可证等价替换规则.....

1.3 命题演算的简单性质

❖ L的构成

- I 命题语言：符号表、公式
- II 推理设施：公理模式、推理规则
- III 形式证明、形式推理 (软件、硬件、算法……)
- IV 定义联结词： $\wedge, \vee, \leftrightarrow$

❖ “实验”

- 同一律 $\vdash p \rightarrow p$
- 否定前件律 $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- ……

❖ L的性质

1. 单调性：增加前提不减少结论
2. 紧致性：有限前提充分性
3. 平凡性：前提集安全性警示
4. 演绎定理：推理机制的原理
5. 反证律：推理机制的原理
6. 归谬律：推理机制的原理
7. 双否律：推理机制的原理
8. 可证等价替换规则……

系统性能和运行原理

1.3 命题演算的简单性质

思考题

1.4 演绎定理说明了什么？

1.5 直接证明 $\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ 最少需要多少步？

1.6 编程实现一个命题演算中形式推理 $\Gamma \vdash p$ 的程序。

习题

1.3 用直接证明和简化证明方法证明 p.22: 2(3); 3(1).

1.4 用直接证明和简化证明方法证明 p.25: 1; p.28: 1(3, 4).