CS 70离散数学与概率论

2024年秋季课程笔记注释0

集合与数学记法述评

集合是定义良好的对象的集合。这些对象称为集合的元素或成员，它们可以是任何对象，包括数字、字母、人物、城市，甚至是其他集合。按照惯例，集合通常用大写字母表示，可以通过列出其元素并用大括号将列表括起来来描述或定义。例如，我们可以将集合A描述为其成员为前五个素数的集合，或者我们可以显式地写成：*A = 2, 3, 5, 7, 11 .如果x是A的一个元素，那么我们写xA。*类似地，如果y不是A的元素，那么我们写y/A。如果两个集合A和B具有相同的元素，则称它们相等，写成A=B。元素的顺序和重复性并不重要，因此{红、白、蓝} = {蓝、白、红} = {红、白、白、蓝}。有时，更复杂的集合可以通过使用不同的符号来定义。例如，所有有理数的集合，用Q表示，可以写成：ba,b是整数，b=0。在英语中，这被理解为“分子为整数，分母为非零整数的所有分数的集合”。

基数

我们还可以讨论集合的大小，或者它的基数。如果A = 1, 2, 3, 4，则A的基数（用A表示）是4。集合的基数可能是0。存在唯一的这种集合，称为空集合，由符号 0/ 表示。一个集合也可以有无限数量的元素，例如所有整数、素数或奇数的集合。

子集与真子集

如果集合A的每个元素也在集合B中，那么我们说A是B的子集，写成A,B。等效地，我们可以写B, A,或者B是A的超集。真子集是严格包含在B中的集合A,写成A,B,意味着A排除B的至少一个元素。例如，考虑集合B = 1, 2, 3, 4, 5。则1,2,3既是B的一个子集，又是B的真子集，而1,2,3,4,5是B的一个子集，而不是B的真子集。以下是有关子集的一些基本属性：

- 由{}或0/表示的空集是任意非空集A的真子集：*{} A.*
- 空集合是每个集合B的子集：*{} » B.*
- 每个集合A都是其自身的子集：$A \neq A$。

交集和联合

集合A与集合B的交集，写成A,是包含A和B中所有元素的集合。两个集称为不相交的，如果A,B=0/。集合A与集合B的并集，写成A,是A或B或两者中所有元素的集合。例如，如果 A 是所有正偶数的集合，而B 是所有正奇数的集合，则 A B = 0/，且 A B = Z+，或正整数。以下是交集和联合的几个属性：

在

- *A,B = B,A*
- *A≤ 0/ = A*

- $A,B = B,A$
- $A \leq 0/ = 0/$

补体

如果A和B是两个集合，那么A在B中的相对补数，或B和A之间的集合差，写成B − A或B \ A,是B中的元素集，而不是A中的元素集： $B\backslash A=\{x \in B | x \in/ A\}$。 例如，如果B={1,2,3}且A={3,4,5}，则B\A={1,2}。再举个例子，如果R是实数的集合Q是有理数集，则RQ是无理数集。以下是一些重要的补码的属性：

- $A \backslash A = 0/$
- $A \backslash 0/ = A$
- 0/ \ A = 0/

显著集

在数学中，有些集合是如此普遍，以至于用特殊符号表示。其中包括：

- N表示所有自然数的集合：{0,1,2,3,...}。
- Z表示所有整数的集合：....., −2, −1, 0, 1, 2, ...}。
- Q表示所有有理数的集合：{ a | a, b∈Z, b ∈= 0 }。
- R表示所有实数的集合。
- C表示所有复数的集合。

产品和动力装置

两个集合A和B的笛卡尔积（也称为叉积），记作A、B,是所有对的集合，其第一分量是A的元素，其第二分量是B的元素。在集合记数法中，A×B={（a,b）|a∈A,b∈B}。例如，如果A={1,2,3}且B={u,v}，则A B =（1, u），（1, v），（2, u），（2, v），（3, u），（3, v）.N =（0, 0），（1, 0），（0, 1），（1, 1），（2, 0），... 是所有自然数对的集合。 给定集合S,由P（S）表示的S的幂集是S的所有子集的集合：{T | T » S}。例如，如果S = {1, 2, 3}，则S的幂集为：P (S) = {{}，{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1,3}，{2,3}，{1,2,3}。注意，如果|S| = k,则|P（S）| = 2k。[为什么?]

数学记法

总和和乘积

有一种简洁的记数法，用于写大量项目的和或乘积。 例如，要写1 + 2 + · · · · + n,不用说"dot dot dot"，我们写$\sum_{i=1}^{n} i$。 更一般地说，我们可以写出总和 $f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n)$ 为$\sum_{i=m}^{n} f(i)$。因此，例如，$\sum_{i=5}^{n} i^2 = 5^2 + 6^2 + \cdots + n^2$。类似地，为了写乘积f（m）f（m+1）⋯f（n），我们使用记号（$\prod_{i=m}^{n} f(i)$）。例如，$\prod_{i=1}^{n} i=1\cdot2\cdots n$是前n个正整数的乘积。

泛量词与存在量词

请考虑以下语句：对于所有的自然数n,n2+n+41都是素数。这里，n被量化为自然数集合N的任何元素。在记数法中，我们写（nN）（n2+n+41是素数）。这里我们使用了通用量词（“for all”）。这话是真的吗?若你们试着代替n的小值，你们会注意到n2+n+41确实是这些值的素数。但若你们们再仔细想想，你们们会发现n的较大值不是素数。你能找到一个吗?所以语句（nN）（n2+n+41是素数）是假的。

存在量词（“there exists”）用于以下语句：（x ∈ Z）（x < 2且x2 = 4）。语句说有一个小于2的整数x,但它的平方等于4。这是正确的陈述（取x = −2）。
我们还可以使用这两种量词编写语句：

1. （∈Z）（∈Z）（y > x）
2. （y∈Z）（zx∈Z）（y > x）

第一条陈述说，给定一个整数，我们可以找到一个更大的整数。第二个陈述说的是非常不同的东西：有一个最大的整数!第一种说法是正确的，第二种说法不是。