CS 70离散数学与概率论
2024年秋季课程笔记注4

1 稳定匹配问题

在前两个注释中，我们讨论了几种证明技术。在本说明中，我们应用其中的一些技术来分析一个称为“稳定匹配问题”（Stable Matching Problem）的重要问题的解决方案。稳定匹配问题是算法领域的研究热点之一。

假设您运行雇用系统1,并且您的任务是匹配n个职务和n个候选人。每个工作都有一个n个候选人的有序偏好列表，每个候选人都有一个相似的n个工作列表。例如，考虑n = 3的情况，即近似公司的三个工作。Basis Co.和Control Corp.以及三位候选人2 Anita、Bridget和Christine,以及以下偏好列表（列表从最有利到最不有利依次排列）：

作业	候选人
近似公司	Anita Bridget Christine
基础公司	布里奇特·安妮塔·克里斯廷
控制公司	Anita Bridget Christine

候选人	作业		
阿尼塔	基础公司	近似公司	控制公司
布里奇特	近似公司	基础公司	控制公司
克里斯廷	近似公司	基础公司	控制公司

作为雇佣系统主管，你想要做的是将每份工作与候选人相匹配。例如，两个可能的匹配是{（Approximation Inc.，Anita），（Basis Co.，Bridget），（Control Corp.，Christine）}和{（Approximation Inc.，Bridget），（Basis Co.，Christine），（Control Corp.，Anita）}。但是，您不希望任何旧的匹配!为了使你的就业系统成功，你希望这种匹配能让“每个人都幸福”，因为没有人能够现实地希望通过转换工作而受益。你能有效地做到这一点吗?

事实证明，确实存在实现此目的的算法;而且，它非常简单，快速，应用广泛。它被称为Propose-and-Reject算法（又称Propose-and-Reject Algorithm,简称Propose-and-Reject Algorithm,简称Propose-and-Reject Algorithm,简称Gale-Shapley算法），我们现在介绍它。

2 Propose-and-Reject算法

我们认为该算法在“天”内进行，以便对离散时间有清晰的明确含义。

1如果您愿意，可以设想一个由 EECS 部门运行的用于学生实习的假设系统。

2为了在书面英语中表达清楚，我们将在应聘者中使用女性代词，在工作中使用中性代词。如果我们同时使用中性代词，那么在无生命的工作和活着的求职者之间可能会有混淆。

每天早晨：每个职位都向名单上尚未拒绝此职位的最受欢迎的应聘者提出建议（即提供邀请）。

每天下午：每位求职者收集她上午收到的所有录取通知书;对于其中她最喜欢的职位，她回答“也许”（她现在手头有它，或者手头有绳子），而对于其他职位，她说“不”（即她拒绝了）。（这只是我们虚拟建模的一种方式，即不存在“激增的聘用”，一旦聘用完成，工作就不能撤回聘用。）

每晚：每个被拒绝的职务都会从列表中删除拒绝其聘用的候选人。

每隔一天重复上述循环，直到没有报价被拒绝。届时，每个应聘者手头都有一份工作录用通知书（即在一串上）;在这一天，每个求职者接受他们提供的工作（即她手头的工作），算法终止。

让我们在上面的示例中运行该算法，以了解该算法。下表显示了在给定日期哪些职位向哪些候选人提供职位（以粗体显示的职位为“一串”）：

天数	候选人	优惠
1	阿尼塔	**近似公司，**控制公司
	布里奇特	**基础公司**
	·克里斯廷	—
2	阿尼塔	**近似公司**
	布里奇特	**基础公司**控制公司
	·克里斯廷	—
3	阿尼塔	**近似公司**
	布里奇特	**基础公司**
	·克里斯廷	**控制公司**

因此，该算法输出匹配：{（近似公司，Anita），（Basis Co.，Bridget），（Control Corp.，克里斯廷）}。

在进一步分析算法的属性之前，让我们花点时间来问一下当您遇到新概念时应该始终要问的第一个问题：为什么首先要研究稳定匹配?是什么让它及其解决方案如此有趣?为此，我们讨论Gale-Shapley算法对Residency Match程序的非常实际的影响。

3 派驻匹配

稳定匹配算法最著名的应用可能是住院医师匹配计划，该计划将医学院毕业生与教学医院的住院医师职位（实习）配对。毕业生和医院提交他们有序的偏好列表，计算机产生的稳定匹配将学生与住院医师课程进行匹配。

通往住院医师比赛项目的道路漫长而曲折。住院医师计划大约在一个世纪前首次引入。由于实习生为医院提供了廉价的劳动力来源，住院医师的职位数量很快就超过了医科毕业生的数量，导致了激烈的竞争。医院试图通过越来越早地提供住院医生服务来胜过彼此。到四十年代中期，医学院大三开始就开始提供住院医生，一些医院也在考虑

甚至更早的录取机会——
给大二学生3!美国医学会最终介入，禁止医学院在四年级之前公布学生的成绩单和推荐信。这引发了一个新问题，医院现在提供“短线”服务，以确保如果他们的服务被拒绝，他们仍然可以找到替代的实习生来填补空缺。医院之间的竞争又一次导致了一种不可接受的局面，学生们只有几个小时来决定是否接受录取。

最后，在20世纪50年代早期，这种不可持续的情况导致了被称为国家住院医师匹配计划（N.R.M.P.）的集中系统，在该计划中，医院对住院医师进行排序，住院医师对医院进行排序。N.R.M.P.随后在申请人和医院之间建立了配对，尽管起初这种配对并不稳定。直到1952年，N.R.M.P.才转换到“提议-拒绝”算法，从而实现了稳定的匹配。

最后，如果上述情况仍然无法使您确信此算法的价值，请考虑以下问题：2012年，Lloyd Shapley和Alvin Roth通过扩展Propose-and-Reject算法获得了诺贝尔经济科学奖。（故事的寓意是什么?使用适当的抽象进行仔细的建模是值得的。）

4 Propose-and-Reject算法的性质

关于提议和拒绝算法，我们希望展示两个属性：首先，它不会永远运行，即停止运行;第二，输出“良好”（即稳定）匹配。前者易于显示;我们现在就做吧。

引理4.1.*提议和拒绝算法总是停止。*

*证明。*参数很简单：在算法不停止的每一天，至少有一个作业必须从其列表中删除一些候选（否则将调用算法的停止条件）。由于每个列表具有n个元素，并且存在n个列表，这意味着算法必须在最多n2次迭代（天）中终止。

□

接下来，我们将展示该算法能够找到“良好”匹配。在此之前，让我们先弄清楚“好”是什么意思。

4.1 稳定性

好的匹配应该有哪些属性?或许我们希望最大化排名第一的选择数量?或者，我们可以最小化最后排名选项的数量。或者，最好是尽量减少选择的排序之和，这可以被认为是最大化平均幸福感。

在本讲座中，我们将集中讨论一个更基本的标准，它植根于自主的理念，即稳定性。如果一个工作和一个求职者都喜欢彼此合作，而不是现在的匹配，则匹配是不稳定的。我们称这对夫妻为流氓夫妇。因此，如果没有流氓夫妇，n个工作和n个应聘者的匹配是稳定的。现在让我们回顾一下前面的示例：

伯克利大学学生在夏天找实习机会，秋天去面试，这种挫折感的相似之处绝非巧合。

4为什么称之为“不稳定”?因为在这样的情况下，流氓候选人可能会违背他们的正式提议

流氓工作/雇主可以仅仅解雇他们正式雇用的人员来雇用他们优选的流氓候选人。一份工作突然空了，一个无辜的人被解雇了。这不是我们希望看到的。我们希望每个人都足够高兴，他们都想坚持他们最终接受的报价。

5定义用词的选择需要平衡考虑因素。 一方面，

数学英语必须是精确和明确的，因此对于计算机来说，什么具体的英语单词是无关紧要的

作业	候选人
近似公司	Anita Bridget Christine
基础公司	布里奇特·安妮塔·克里斯廷
控制公司	Anita Bridget Christine

候选人	作业		
阿尼塔	基础公司	近似公司	控制公司
布里奇特	近似公司	基础公司	控制公司
克里斯廷	近似公司	基础公司	控制公司

*概念检查!*考虑以上示例的以下匹配：{（近似公司，Christine），（Basis Co.，Bridget），（Control Corp.，Anita）}。为什么这种匹配是不稳定的?（提示：近似公司和Bridget是一对流氓——为什么?

下面是我们的示例的稳定匹配：{（Basis Co.，Anita），（Approximation Inc.，Bridget），（Control Corp.，克里斯汀）}。为什么（Approximation Inc.，安妮塔）不是流氓夫妇吗?毫无疑问，Aproximation Inc.宁愿和Anita一起工作，而不是现在的员工Bridget。然而，不幸的是，安妮塔宁愿和她现在的雇主（Basis Co.）在一起。与近似公司相比。还请注意，Control Corp.和Christine都与他们最不喜欢的选择配对。然而，这并不违反稳定性，因为他们更喜欢的选择中，没有一个愿意与他们合作，而不是与他们相配的人。

在讨论如何找到稳定匹配之前，让我们问一个更基本的问题：稳定匹配总是存在吗?答案肯定是肯定的，因为我们可以从任何匹配开始，似乎使它变得越来越稳定，如下所示：如果存在流氓对，请修改当前匹配，以便匹配此对。重复。这个过程肯定会导致稳定的匹配吗?不幸的是，这种推理是不合理的!为什么?虽然配对流氓夫妇可以减少一对流氓夫妇的数量，但它也可能产生新的流氓夫妇。因此，这个过程是否会终止是完全不清楚的!

让我们进一步说明上述推理的谬误，将它应用于一个密切相关的场景，称为室友问题。在这个问题中，我们有2n个人必须配对成为室友（不同之处在于，不同于我们对于不同类型非对称伴侣的稳定匹配的观点，一个人可以与任何其他2n-1个人配对，即，在类型中不存在不对称）_。现在，假设我们迭代匹配流氓夫妇的方法确实有效。由于这种方法没有利用不对称性，我们可以将它应用于室友问题。因此，通过上述（有缺陷的）推理，我们可以得出结论，对于室友，总是存在稳定的匹配。那么，阅读下面的反例，它给出了一个没有稳定匹配的室友问题的例子，你会不感到惊讶吗!

我们用来定义。但我们的定义将被人类使用，我们希望允许人们利用他们的直觉，等等。同时，我们希望定义不要过于繁琐。在这里，我们常常需要采取一种平衡行动，在过度触发人类微妙的直觉和简洁的措辞之间。在这种情况下，人类的直觉会建议潜在的流氓夫妇而不是流氓夫妇更准确，因为它们实际上并不匹配。然而，由于“潜力”不是我们想要更全面地建模的东西，所以我们只用更简洁的措辞。

室友			
A	B	C	D
B	C	A	D
C	A	B	D
D	—	—	—

我们宣称，在这种情况下，对于任何匹配总是存在流氓对。例如，匹配的{（A,B），（C,D）}包含流氓对B和C。{（B,C），（A,D）}怎么样?这种匹配是不稳定的，因为现在A和C是一对流氓夫妇。

---

*概念检查!*验证本例中是否没有稳定的匹配!

我们得出的结论是，在稳定匹配问题中，任何证明总是存在稳定匹配的证明，必须以一种本质的方式利用存在两种不同类型这一事实。在下一节中，我们给出一个这样的证明，并且是一个令人欣慰的证明：我们证明了存在一个稳定的匹配，因为建议和拒绝算法总是输出一个!

4.2 分析

我们现在证明了propose-and-reject算法总是输出稳定的匹配。为什么会是这种情况?考虑以下直观观察结果：

观察结果4.1.*每个作业以一种可能性作为其第一选择开始算法;然而，随着算法的进行，其最佳可用选项只能随着时间变差。相比之下，每个候选人的报价只能随着时间的推移而变得更好。*

因此，随着算法的进展，每项工作的选择会变差，而每个应聘者的选择会有所改善;在某种程度上，工作和候选人必须在中间“相遇”，直觉上这种匹配应该是稳定的。

让我们通过下面的引理，从观察4.1的正式陈述开始，把这个直觉形式化。

引理4.2（改进引理）。*如果工作J在第k天向应聘者C提出工作邀请，那么在接下来的每一天，C手上都有她至少和J一样喜欢的工作邀请。*

*证明。*我们在第i天进行诱导，i≥k。
*基本情况（i = k）：*在第k天，C（从J）接收至少一个提议。因此，在第k天结束时，她将收到一份来自J的聘书，或者一份她比J更喜欢的工作，因为她从她的聘书中选择了最好的。

*归纳假设：*设任意i≥k的断言成立。
*感应阶跃：*我们证明第i+1天的索赔。根据归纳假说，在第i天，C有报价她至少和J一样喜欢。（注意，J′ 可以是 J。）根据算法，J’在第i + 1天再次向C求职（因为此工作提议尚未被她拒绝，并且

6由于与机械系统中如何描述电缆连接器和紧固件有关的历史原因，以及语言学如何表示名词的语法类型，这类类型有时使用术语“性别”来指代。如果你查找稳定的匹配，你可能会在文献中看到对性别的引用。然而，这里重要的是我们需要匹配两种不同的东西。它不一定是工作和候选人。它可以包和网络端口、计算作业和服务器、线程和核心、学生和课堂插槽等。只要这两件事本质上是不同的。

不允许爆炸）。因此，在第i+1天结束时，C将有J'或来自她比J'更喜欢的工作的邀请;在这两种情况下，她至少和J一样喜欢这份工作。因此，声明适用于第i+1天，完成诱导步骤。

□

绕行：合理排序原则。让我们花点时间考虑引理4.2的另一个证明;在这个过程中，我们将揭开一个等同于归纳的基本原理。

*引理4.2的交替证明。*如同我们的原始证据一样，索赔在i=k日肯定成立。为了矛盾起见，现在假设i > k的第i天是第一个反例，其中C没有出价，或者来自一个串上低于J的某个J*的出价。第1天，她接到一份工作J'的邀请
至少和J一样喜欢J'。根据该算法，J'仍然向C提供 −
第i天。（即报价不会爆炸且无法撤回）因此C在第i天至少可以选择一项工作（J'）;因此，她的最佳选择必须至少和J'一样好，因此肯定比J*或什么都好。这与我们最初的假设相矛盾。

□

我们用什么证明技巧来证明这个引理?是矛盾吗?或是别的野兽?原来这也是归纳的证明!为什么?我们从建立i=k的基本情况开始。接下来，我们不证明对于所有i,P（i）=⇒ P（i + 1），我们证明该陈述的否定为
false,□“there existing i to £（P（i）=⇒ P（i + 1））”不成立;因此，根据被排斥者的法律
中间，对于所有i,它必须确实保持，P（i）=⇒ P（i + 1）。

---

*概念检查!*确保您理解为什么这两种证明是等同的。

现在让我们更加小心一点——
到底是什么让我们能够采取这种替代方法呢?答案在于自然数的一个非常特殊的属性，称为有序原则。这个原理表明，任何非空的自然数集合都包含“最小”元素。正式：

定义4.1（有序原则）。*如果 S ≠ N 且 S ^= 0/，则 S 具有最小元素。*

---

*概念检查!*考虑以下自然数子集：*S1 = {5, 2, 11, 7, 8}，S2 = {n ∈N：n是奇数}，S3={n ∈N：n是素数}*。这些集合中每一个都有一个最小的元素吗?

在我们的证明中，我们在哪里使用良序原理?在“Suppose...i>k的第i天是第一个反例。..特别地，如果自然数不遵守这个原则，那么第一反例的概念将无效。另请注意，归纳法依赖于以下原则：“对于所有i,P（i）= ⇒ P（i + 1）”的陈述只有在自然数上强加了明确定义的顺序时才有意义（即3在4之前，4在5之前，等等）。..）.自然数服从这个原理可能是你长期以来认为理所当然的事实;但确实存在不满足该性质的数组!在这个意义上，自然数确实是相当特殊的。

---

*概念检查!*整数是否满足有序原则?雷亚尔怎么样?非负实数怎么样?

回到我们分析Propose-and-Reject算法。回到我们的分析，我们现在证明当算法终止时，所有n个候选者都有工作机会。在阅读证据之前，看看你是否能说服自己这是真的。证明非常简短而优雅，并且严格地使用了改进引理。

引理4.3.*提议和拒绝算法总是以匹配结束。*

*证明。*我们以矛盾的方式前进。假设当算法终止时，存在未配对的作业J。它必须向名单上的所有n名候选人提出邀请，并遭到所有候选人的拒绝。通过改进引理，自从它的提议被拒绝之后，这n个候选人中的每一个都有一个更好的提议在手中，因为J向她提出了一个提议。因此，当算法终止时，n个候选者在不包括J的串上具有n个作业。所以至少要有n+1个工作。但这是一个矛盾，因为假设只有n个工作。

□

为了完成对提议和拒绝算法的分析，我们需要验证该算法产生的匹配是稳定的关键性质。

定理4.1.*该算法产生的匹配始终是稳定的。*

*证明。*我们给出了一个直接的证明，在算法的匹配输出中，没有作业可以牵涉到流氓对中。考虑最终匹配中的任意对（J,C），并假设J更喜欢某个候选C,而不是C。
我们会争辩说，与J相比，C,更喜欢她的工作，所以（J,C,）不能是一对流氓夫妇。 自C*起出现在J列表中的C之前，则J必须在向C发出报价之前向C*发出报价。因此，通过改进Lemma, C,至少和J一样喜欢她的最后一份工作，因此她更喜欢J。所以没有工作
J可以牵涉到流氓夫妇中，并且匹配是稳定的。 □

请注意，我们从工作的角度而不是从候选人的角度来证明稳定性。

5　优化

在第4.2节中，我们证明了提议和拒绝算法总是输出稳定的匹配。但这能给人留下深刻的印象吗?你的雇佣系统真的能成功输出足够好的匹配吗?为了提供最好的服务（并取代目前的方法），您最好在所获得的解决方案中争取一些最优的概念。

例如，考虑4个职位和4个候选人以及以下偏好列表的情况（为简单起见，我们在下面使用数字和字母来标记职位和候选人）：

作业	候选人			
1	A	B	C	D
2	A	D	C	B
3	A	C	B	D
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

候选人	作业			
A	1	3	2	4
B	4	3	2	1
C	2	3	1	4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

对于这些列表，正好有两个稳定的匹配项：*S={（1,A），（2,D），（3,C），（4,B）}且T={（1,A），（2,C），（3,D），（4,B）}*。存在两个稳定匹配的事实提出了问题：每位应聘者的最佳工作是什么?每份工作的最佳候选人是什么?例如，让我们考虑作业2。定义2的最佳伙伴的简单猜测是其第一选择，候选者A;不幸的是，A只是

不可能接受该工作，因为将该工作与A匹配是不稳定的，因为该工作在她的偏好列表中是如此低，并且其它工作也喜欢A。实际上，不存在其中2与A配对的稳定匹配。检查两个稳定匹配，我们发现作业2的最佳可能现实结果是与候选者D配对。这表明，如果我们不小心，“最佳伙伴”的概念可能有点模糊。

所以，让我们小心点;在以上讨论的启发下，让我们对最优性做一个更精确、更可信的定义。

定义4.2（工作的最佳候选人）。*对于给定的工作J,J的最佳候选者是J的偏好列表上排名最高的候选者，J可以在任何稳定匹配中与其配对。*

换言之，假设匹配是稳定的，最优的候选者是一个工作在匹配中能够做的最好的。

---

*概念检查!*在上例中，每个工作A、B、C和D的最佳候选人是谁?（提示：如上所述，作业2的最佳候选是D。）

从定义上来说，每项工作所能期望的最好目标就是与其最优秀的候选人配对。但是，所有的工作能否同时达到这种最佳效果呢?换句话说，是否有一个稳定的匹配使得每个工作都与其最优的候选人配对?如果存在这样的匹配，我们将称之为工作/雇主最优匹配。回到上例，S是工作/雇主的最佳匹配，因为A是1的最佳候选，D是2的最佳候选，C是3的最佳候选，B是4的最佳候选。

同样，我们可以为候选人定义一个最佳工作。

定义4.3（候选人的最佳工作）*对于给定的候选人C,C的最佳工作是C的偏好列表上排名最高的工作，C可以在任何稳定的匹配中与之配对。*

换言之，如果匹配是稳定的，那么最佳工作就是候选人可以在匹配中得到的最佳工作。

我们可以定义一个候选者最优匹配，即每个候选者与其最优工作配对的匹配。

---

*概念检查!*检查T是候选最优匹配。

我们也可以从相反的方向去定义一个职位的最差候选者，它是在某个稳定匹配中与它配对的最低等级的候选者。这自然导致了雇主劣性匹配的概念——你能定义它吗，以及候选人劣性匹配?

现在，我们来谈谈问题的核心：在“提议和拒绝”算法中，谁更好——工作/雇员还是候选人?

定理4.2.*Propose-and-Reject算法的匹配输出是作业/雇主最优的。*

*证明。*为了矛盾，假设匹配不是雇主最优的。然后，有一天，某个工作被其最优候选人拒绝;让k日成为第一个这样的日子。在这一天，假设J被C*（其最佳候选人）拒绝，转而接受J*的报价。根据定义
对于最优候选，必须存在一个稳定的匹配T,其中J和C*是成对的。假设

T看起来像这样：$\{\ldots,(J,C^*),\ldots(J,C'),\}$*我们认为（J,C）是T中的流氓偶，因此*
与稳定性相矛盾。

首先，很明显，在执行proposal-and-reject算法期间，她拒绝了J的提议，而选择了J的提议。此外，由于第k天是某项工作被其最佳候选人拒绝的第一天，因此在第k天之前，工作J*的聘用没有被其最佳候选人拒绝
候选人。由于J*在第k天向C*提出报价，这意味着J*至少喜欢C*
因此至少与C′（其稳定匹配T中的伙伴）一样多。因此，（J,C）
在T中形成一对流氓夫妇，所以T是不稳定的。 因此，我们有一个矛盾，意味着匹配
提议和拒绝算法的输出必须是雇主/工作7最优的。 □

我们用什么证明技巧来证明这个定理4.2?同样，它是归纳法证明，其结构是应用有序原则。

---

*概念检查!*在定理4.2的证明中，我们在哪里使用良序原理?

---

*锻炼。*你能把定理4.2的证明改写成正规的归纳证明吗?（提示：证明是通过对k的归纳来证明以下陈述：对于每个k,没有工作在第k天被其最优候选人拒绝。）

我们得出的结论是，通过遵循这个算法，雇主会过得很好。候选人呢?以下定理证实了可悲的事实：

定理4.3.*如果匹配是雇主/工作最优的，那么它也是候选人的劣势。*

*证明。*我们以矛盾的方式前进。设 T $=\{\ldots(J,C),\ldots\}$是雇主最优匹配（我们从定理4.2中知道该算法输出）。为了矛盾，假设存在一个稳定的匹配S=$\{\ldots,(J^*,C),\ldots,(J,C'),\ldots\}$这样工作J*在C的偏好列表上的排名低于作业J（即，*J不是她的次要工作*。我们将通过证明（J,C）是流氓来论证S不能是稳定的。夫妇在南方。根据假设，C更喜欢工作J而不是J*，因为J*在她的名单中较低。在S中，J更喜欢候选者C而不是其伙伴C′，因为C是雇主最优匹配T中的伙伴。矛盾。因此，雇主的最优匹配是候选劣势。 □

根据这些发现，提议和拒绝算法教会我们什么?制度结构在结果分配质量中起着重要作用，制度结构反映了现实世界权力及其历史。

---

*锻炼。*您会对提议和拒绝算法进行什么简单的修改，使其始终输出候选最佳匹配?

在结束发言时，让我们最后谈一谈国家住院医师匹配计划。直到最近，建议和拒绝算法都是在医院进行建议的情况下运行的，因此匹配

7我们实际证明的是，提议和拒绝算法返回的匹配对于“提议者”来说是最优的。在我们的案例中，雇主/工作是提供报价的人，因此这是雇主/工作的最佳选择。如果我们对候选人进行提议和拒绝，那么这将是候选人最优的。

一切都发生在计算机内部。没有一个中间报价实际上是提供给人类的，只有最终的稳定报价。

生产的是医院最佳的。九十年代，医学生们的角色颠倒了，于是他们向医院求婚。最近，对算法进行了其他改进，
使用N.R.M.P.。例如，匹配考虑了已婚学生在同一医院或附近医院担任职位的偏好。

6 进一步读数（可选）

尽管提议和拒绝算法早在10年前就开始使用，但Gale和Shapley在1962年的一篇著名论文中首次对它进行了恰当的分析，该论文至今仍是算法分析方面的伟大成就之一。完整参考文件为：

D.Gale和L.S.夏普利，“大学招生与婚姻的稳定性”，《美国数学月刊》第69期（1962年），第9-14页。

稳定匹配和相关变体仍然是EECS（和经济学）研究的一个活跃主题。尽管到现在已经有30年历史了，但以下这本非常可读的书涵盖了自Gale和Shapley算法以来许多有趣的发展：

D.Gusfield和R.W.欧文，稳定婚姻问题：*《结构和算法》，麻省理工学院出版社，1989年。*

9这种角色颠倒是可能的，因为算法已经在计算机中运行。鉴于医学生和医院之间在现实世界中的谈判能力存在差异，在外部世界中转换谁提供邀请要难得多。当您试图改变现实世界时，这是对改进排序的重要一课。非医院最佳自动匹配系统一开始就不会被采纳，然后内部最佳匹配系统将一直是理想化的幻想。