CS 70离散数学与概率论
2024年秋季课程笔记注1

1 命题逻辑

为了流利地处理数学语句，你需要理解数学语言的基本框架。第一节课，我们将开始学习数学定理可能采用的逻辑形式，以及如何处理这些形式，使它们更容易证明。在接下来的几堂课中，我们将学习几种不同的证明方法。

我们的第一个基石是命题的概念，它只是一个陈述，它要么是真，要么是假。

这些陈述都是命题：

(1) $\sqrt{3}$是不合理的

。 （2）1 + 1 = 5。

（3）凯撒在10岁生日那天吃了两个鸡蛋。

这些陈述显然不是命题：

（4）2 + 2

(5) *x2+3x=5*。 [什么是x?]

这些陈述也不是命题（尽管有些书说它们是命题）。提案不应包括模糊的术语。

(6) 阿诺德·施瓦辛格经常吃花椰菜。 [什么是“经常?”]

(7) 亨利八世不受欢迎。 [什么是“不受欢迎?”]

命题可以结合在一起，形成更复杂的陈述。设P、Q和R是代表命题的变量（例如，P可以代表“3是奇数”）。将这些命题连接在一起的最简单的方法是使用连接词“and”、“or”和“not”。

(1) **接合处：***P*,*Q*（*“P和Q”*）*。仅当P和Q都为真时为真。*

(2) **分离：***P*,*Q*（*“P或Q”*）*。当P和Q中至少有一个为真时为真。*

(3) **否定：***P*（*“非P”*）*。当 P 为假时为 True。*

这些带有变量的语句称为命题形式。

一个被称为排除中间定律的基本原则说，对于任何命题P,要么P是真的，要么P是真的（但不是两者都正确）。因此，不管P的真值如何，P总是真。不管变量的真值如何，总是正确的命题形式称为重言式。′ ′ ′ ′

反之，像P,P这样的陈述，总是错误的，叫做矛盾。

*概念检查!*如果P代表命题“3是奇数”，Q代表“4是奇数”，R代表“4+5=49”，那么P、R、Q的值是多少?

描述命题形式的可能值的有用工具是真值表。真值表与函数表相同：列出变量所有可能的输入值，然后列出给定这些输入的输出。（顺序无关紧要。）

以下是连词和否定的真值表：

P	*Q*	*保Q*
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*F*

P	*?P*
T	*F*
F	*T*

*概念检查!*写下析取（OR）真值表。

最重要和最微妙的命题形式是隐含：

(4) **含义**：*P* =⇒*Q*（*“P*

意味着Q”）*。这与“如果P,则Q”相同。这里，P称为蕴涵假设，Q为结论。*

1

我们在日常生活中经常遇到暗示;下面是几个例子：

如果你站在雨中，你会淋湿的。

如果你通过这门课，你就会得到证书。

只有当P为真且Q为假时，蕴涵P=⇒Q才为假。例如，只有当你站在雨中而没有淋湿时，上面的第一句话才是错误的。只有当你通过课程但没有得到证书时，第二条陈述才是错误的。

1P有时也称为前项，Q有时也称为后项。

以下是 P =⇒ Q 的真值表（以及我们稍后将解释的额外列）：

P	*Q*	*P* =⇒ *Q*	*?P*（*Q*）
T	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*

注意，当P为假时，P =⇒ Q始终为真。这意味着许多在英语中听起来毫无意义的陈述在数学上都是正确的。示例包括如下语句：“猪会飞，马会识字”或“如果14是奇数，则1 + 2 = 18。”（这些是我们在日常生活中从未做过的陈述，但在数学中却是十分自然的。）当一个隐含是愚蠢的真实，因为假设是错误的，我们说它是空洞的真实。

另请注意，P =⇒ Q在逻辑上等同于，通过比较上述真值表的最后两列可以看出：对于P和Q的所有可能真值，P =⇒ Q和»P,Q取相同的值（即，它们具有相同的真值表）。我们将其写为（P =⇒ Q）≡（，P,Q）。

P=⇒*Q是数学定理最常用的形式*。以下是一些不同的表达方式：

(1) 如果P,则Q;

(2) *如果P,则为Q;*

(3) *仅当Q时为P;*

(4) *P对Q足够;*

(5) *Q是P所必需的;*

(6) *除非不是P,否则为Q。*

如果P=⇒Q和Q=⇒P都为真，则我们说“P当且仅当Q”（简称“P当Q”）。形式上，我们写P⇐⇒Q。注意，只有当P和Q具有相同的真值（均为真或均为假）时，P⇐⇒Q才为真。

例如，如果设P为“3为奇数”，Q为“4为奇数”，R为“6为偶数”，则以下全部为真：*P*=⇒*R*,*Q*=⇒*P*（*空转*），*R*=⇒*P*。因为P=⇒R且R=⇒P,我们也看到P⇐⇒R为真。

假定 P =⇒ Q,我们还可以定义

(a) **对照**：*Q* =⇒*P*

(b) **匡威**：*Q* =⇒*P*

“If you was the class, you a certificate”的反义词是“If you do not a certificate, you do not with the class”。反之就是“如果你拿到了证书，你就通过了课程。”反义词是否与原句所表达的意思相同?反过来呢?

让我们看一下真值表：

P	*Q*	*?P*	*?Q*	*P* =⇒*Q*	*Q* =⇒*P*	*Q* =⇒*P*	*P* × ⇒ *Q*
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

请注意，P =⇒ Q 及其对立值在其真值表中具有相同的真值，因此它们在逻辑上等同：（P =⇒ Q）≡（ Q =⇒ P）。许多学生混淆了反义词与反义词：请注意，P =⇒ Q 和Q =⇒ P 在逻辑上是等价的，但 P =⇒ Q 和Q =⇒ P 不是!

当两个命题形式在逻辑上相等时，我们可以认为它们是“意思相同的东西”。我们将在下一节课中看到这对于证明定理是多么有用。

2 量词

在实践中你会看到的数学陈述不会由像“3是奇数”这样的简单命题组成。相反，您会看到如下语句：

(1) 对于所有的自然数n,n2+n+41都是素数。

(2) 如果n是奇数，则n3也是奇数。

(3) 存在既是偶数又是奇数的整数k。

本质上，这些陈述断言了许多简单命题（甚至无穷多!）突然之间。例如，第一个语句是断言02 + 0 + 41是素数，12 + 1 + 41是素数，依此类推。最后一条陈述是说，当k的范围超过所有可能的整数时，我们将找到满足该陈述的k的至少一个值。

为什么以上三个例子被认为是命题，而之前我们声称“x2+3x=5”不是?原因在于，在这些例子中，存在一个我们正在研究的基础“宇宙”，并且这些陈述是在这个宇宙中量化的。

为了在数学上表达这些陈述，我们需要两个

量词：通用量词“it”（“for all”）和存在量词“z”（“there exists”）。示例：

(1) “有些哺乳动物产卵。”数学上，“some”的意思是“至少有一个”，所以这个说法是“存在哺乳动物x,所以x会产卵。”如果我们让我们的宇宙U成为哺乳动物，那么我们可以写：（x∈U）（x产卵）。（有时，当宇宙清晰时，我们略去U,而只是写成“x”（x产卵）。）

(2) “对于所有的自然数n,n2+n+41都是素数”，可以通过将我们的宇宙作为一组自然数来表示，表示为N：（zin∈N）（n2+n+41为素数）。

当用一个值替换变量时，我们将一个变量称为谓词或命题公式的语句，从而使该语句要么为真，要么为假。例如，语句“n2+n+41为素数”是一个具有变量n的谓词或命题公式。自然数 n 语句的值是 true 或 false,具体取决于 n 的值。也就是说，用一个值替换变量使谓词成为命题。特别地，对于n = 1,我们有“43是素数”，这是正确的。其中

对于n = 41,陈述“412 + 41 + 41为素数”为假，因为可以将412 + 41 + 41分解为41 × 43。

注意，在有限宇宙中，我们不用量词，可以分别用析取和合取来表示存在性和普遍性量化的命题。例如，如果我们的宇宙U是1,2,3,4,则（xU）P（x）在逻辑上等价于P（1）P（2）P（3）P（4），并且（xU）P（x）在逻辑上等价于P（1）P（2）P（3）P（4）。然而，在无限宇宙中，如自然数，这是不可能的。` { } ST ∈ 在

*概念检查!*使用量词表示以下两个语句：“对于所有的整数x,2x+1是奇数”和“在2和4之间存在一个整数”。

某些语句可以有多个量词。然而，正如我们将要看到的，量词不通勤。只要想一想英语语句，你就能看出这一点。考虑以下（而非血淋淋的）示例：

> “每次我在纽约乘地铁，总有人被刺伤。”
>
> “有个人，每次我在纽约乘地铁，都会有人被刺伤。”

第一条声明是说，每次我乘地铁有人被刺伤，但每次都可能是不同的人。第二种说法是说了一件非常可怕的事情：有些可怜的家伙乔不幸每次我上纽约地铁，都有人被刺伤。（可怜的乔一见到我就要逃命了。）

数学上，我们正在对两个宇宙进行量化： *T = {乘坐地铁时的时间}*，*P = {人}*。第一条陈述可以写成：（T∈T）（P∈P）（p在时间t被刺伤）.第二条陈述说：（P∈P）（t∈T）（p在时间t被刺伤）。

让我们看一个更数学的例子：

考虑

1. （zx∈Z）（zy∈Z）（x < y）
2. （s y∈Z）（zx∈Z）（x < y）

第一条陈述说，给定一个整数，我可以找到一个更大的整数。第二个陈述说的是非常不同的东西：有一个最大的整数!第一种说法是正确的，第二种说法不是。

3　关于否定的争论

命题P是错误的意味着什么?它意味着它的否定P是真的。有一些处理否定的规则是有帮助的，当我们看证明的时候，下节课会变得更加明显。

首先，我们来看看如何否定合取和析取：

$$\neq（P,Q）\equiv（,\ P,Q）$$

$$\neq（P,Q）\equiv（,\ P,Q）$$

这两个等价物被称为德摩根定律，并且它们是十分直观的：例如，如果P、Q不为真，那么P或Q必定为假（反之亦然）。

---

*概念检查!*通过写下适当的真值表来验证两个德摩根定律。

否定包含量词的命题实际上遵循类似的定律。让我们从简单的例子开始。假定宇宙为1,2,3,4,使P（x）表示命题公式“x2>10”。检查 xP（x）为 true 而xP（x）为false。观察（xP（x））和xP（x）都为真，因为P（1）为假。还要注意，xP（x）和（xP（x））都是假的，因为P（4）为真。每对陈述具有相同的真值并不是偶然的，因为等价

The is it an an it an it an it is is it an it an it is it

The it amp;

$$\neq（zonxP（x））\equiv\equiv x,P（x）$$

$$\equiv（xP（x））\equiv zx,P（x）$$

是适用于任何命题P在任意宇宙（包括无限域）上量化的定律。

思考英语句子有助于说服自己（非正式地）相信这些定律是正确的。例如，假设我们在宇宙Z（所有整数的集合）内工作，并且P（x）是命题“x是奇数”。我们知道语句（xP（x））是假的，因为不是每个整数都是奇数。因此，我们期望它的否定（xP（x））为真。但是你怎么说英语中的否定呢?如果不是每个整数都是奇数，那么一定存在某个非奇数（即偶数）的整数。方式

代 £

这会写成命题的形式吗?这很简单，只是：（x,P（x））。

为了看到一个更复杂的例子，可以修正一些宇宙和命题公式P（x,y）。假定我们有命题（x yP（x,y））£¬并且我们希望在量词中推入否定运算符。根据上述定律，我们可以做到：

$$´（signmentxyP（x, y））\equiv ¨´x¨´£$$

注意，我们把复杂的否定分解成一个更小、更简单的问题，因为否定本身通过量词传播。还要注意，当我们进行时，量词“翻转”。

让我们看一个更复杂的例子：

使用量词将句子“至少有三个不同的整数x满足P（x）”作为命题!一个方法就是

$$SXYZ（X\ S=y、Y、Y、Z、Z、Z、X、X、X、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、X、Y、Y、X、Y、Y、X、Y、X、$$

（这里所有的量词都在整数的宇宙Z上。）现在使用量词将句子“满足P（x）的至多三个不同的整数x”写成一个命题。一个方法就是

$$SXYZ（P（d）\Longrightarrow d=x,d=y,d=z）。$$

以下是执行此操作的等效方法：

$$zx\ z=y,y,y,v,v,z=x,x,y,z,y,z=z,v,z）=\Rightarrow,（P（x）\leq P（y）\leq P（v）\leq P（z）））。$$

[检查您是否理解上述两种备选方案。]最后，如果我们想表达“正好有三个不同的整数x满足P（x）”怎么办?现在这很简单：我们可以使用以上两个命题的联合。