CS 70离散数学与概率论

2024年秋季课程笔记注3

1 数学归纳

引言。本文介绍了数学归纳法的证明技术。归纳法是一种强大的工具，用来确定一个语句对所有自然数都适用。当然，有无穷多个自然数——归纳法提供了用有限的方法来推理它们的方法。

让我们用一个例子来证明归纳法背后的直觉。假设我们希望证明以下陈述：

对于所有的自然数n,0 + 1 + 2 + 3 + · · · + n = n（n+1）/2 .更正式地说，使用通用量词根据注释1,我们可以将其写为：

$$zin\in N,\quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

你将如何证明这一点?可以开始检查它是否适用于n = 0、1、2等等。但有无限数量的n值需要检查!此外，仅检查 n 的前几个值不足以得出语句对所有n ∈ N 成立的结论，如下例所示：

---

*概念检查!*考虑下面的语句：n∈N,n2−n+41是一个素数。检查前几个自然数是否成立。（事实上，你可以一直检查到n = 40,却找不到反例!）现在检查n = 41的情况。

在数学归纳中，我们通过做一个有趣的观察避开了这个问题：假设

语句对某个值n=k成立，即，$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.（这称为诱导假说。）然后：

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \left(\sum_{i=0}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad (2)$$

即，声明也适用于n=k+1!换句话说，如果语句对某个k成立，那么它也必须对k+1成立。让我们把这个论点称为归纳步骤。归纳步骤是一种非常有力的工具：如果我们能够证明该语句对k成立，那么归纳步骤允许我们得出结论，它也适用于k+1;但是现在它对于k+1成立，归纳阶跃意味着它对于k+2成立;等等。事实上，我们

对于所有的n≥k,可以无限地重复这个论点。就这样吗?我们是否证明了等式（1）?差不多了!

问题在于，为了应用归纳阶跃，我们首先必须确定等式（1）对于k的某个初始值成立。由于我们的目标是证明所有自然数的陈述，显然的选择是k = 0。我们称这种选择k为基本情况。那么，如果基本情况成立，数学公理

归纳说归纳步骤允许我们得出结论，等式（1）确实适用于所有n ∈N。

现在让我们正式重写这个证据。

定理3.1。 $zonn \in N, \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

*证明。*我们对变量n进行归纳。

基础病例（n=0）：这里，我们有 $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0（0+1）}{2}$.因此，基本情况是正确的。

*诱导假设：*对于任意n=k≥0,假设$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k（k+1）}{2}$.总而言之，归纳的Hypoth-esis说，“假设我们已经证明了任意值n = k ≥ 0的陈述”。

*感应阶跃：*证明n=（k+1）的语句，即表明$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{（k+1）（k+2）}{2}$：

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \left(\sum_{i=0}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \qquad (3)$$

其中第二个等式来自归纳假说。根据数学归纳原理，权利要求如下。

□

---

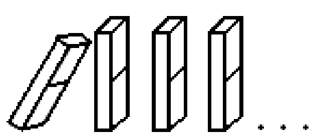
*概念检查!*归纳假设如何准确地帮助我们证明等式（3）中的第二个等式?

（提示：我们用它把$\sum_{i=0}^{k} i$替换成有用的东西。）

概述 到目前为止，我们学到了什么？设P（n）表示公式$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n（n+1）}{2}$，我们的目标是证明了∈N,P（n）.归纳原理认为，要证明这一点，需要三个简单的步骤：

1. **基本情况：**证明P（0）为真。
2. **诱导假设：**对于任意k≥0,假设P（k）为真。
3. **感应阶跃：**在归纳假设的假设下，证明P（k+1）为真。

让我们想象一下如何使用多米诺骨牌将这三个步骤组合在一起。令语句P（i）由多米诺骨牌序列表示，编号为0,1,2,...，n,使得P（0）对应于第0多米诺骨牌，P（1）对应于第1多米诺骨牌，依此类推。多米诺骨牌排成一行，所以如果第k个多米诺骨牌被打倒，那么它反过来会打倒第k+1个骨牌。敲击第k块骨牌相当于证明P（k）是真的。诱导步骤对应于多米诺骨牌的放置，以确保如果第k个多米诺骨牌掉落，它反过来会击倒k+第1个多米诺骨牌。基本情况（n = 0）击倒了第0个多米诺骨牌，引发连锁反应，击倒了所有多米诺骨牌!



最后，请说明如何选择适当的基本情况 — 在本例中，我们选择了k = 0,但一般而言，基本情况的选择自然取决于您希望证明的声明。

另一个归纳的证据。 让我们用归纳法再做一个证明。回想注释1,对于整数

我们说a除b,记为a|b,当且仅当存在满足b=aq的整数q。

定理3.2。*对于所有的n∈N,n3−n可被3整除。*

*证明。*我们按对n的归纳法进行。令P（n）表示n3−n可被3整除的陈述。

基础病例（n=0）：P（0）置位3 |（03 − 0）或3 | 0,即为真，因为任何非零整数除以0。

*诱导假设：*设对于n=k0,P（k）为真。也就是说，对于某个整数q,为3（k3 k），或等效的k3 k = 3q。

*感应阶跃：*我们证明了P（k + 1）为真，即3 |（（k + 1）3 −（k + 1））。为了显示这一点，我们将数学（k + 1）3 −（k + 1）展开如下：

$$
\begin{aligned}
(k+1)3-(k+1) &= k3+3k2+3k+1-(k+1) \\
&= (k3-k)+3k2+3k \\
&= 3q+3(k2+k)\text{，对于某些}q\in Z\text{（通过归纳假设）} \\
&= 3(q+k2+k)
\end{aligned}
$$

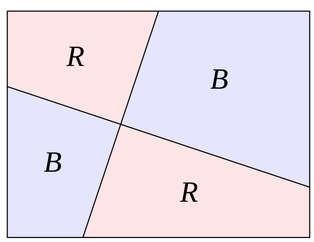
得到3|（（k+1）3 −（k+1））.因此，根据归纳原理，zyn∈N,3|（n3−n）。 □

---

*概念检查!*归纳假设如何准确地帮助我们证明上述推导中的第三个等式?

双色定理。我们现在考虑一个更高级的归纳证明，它建立了一个著名的四色定理的简化版本。四色定理指出，任何地图都可以用四种颜色着色，使得任何两个相邻的国家1具有不同的颜色。四色定理很难证明，自从1852年问题首次提出以来，就有人提出过几个伪造的证明。事实上，直到1976年，Appel和Haken才最终给出了这个定理的计算机辅助证明。（有关问题的有趣历史和最先进的证据，尽管仍然非常具有挑战性，请参见www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html。）

在本文中，我们考虑定理的一个更简单的版本，其中我们的“映射”由一个矩形给出，该矩形通过画直线被划分为多个区域，使得每条直线将该矩形划分为两个区域。我们是否能使用不超过两种颜色（比如红色和蓝色）对这样一张简化的地图进行着色，使得没有两个边界区域具有相同的颜色?为了说明，下面是一个双色贴图的示例：



定理3.3。*设P（n）表示“具有n条线的上述形式的任何映射是可双着色的”。证明了zn∈N P（n）.*

*证明。*我们对n进行归纳。

*基础情况（n = 0）：*显然，P（0）成立，因为如果我们有n = 0条线，我们可以使用单一颜色给整个贴图着色。

*诱导假设：*对于任意n=k≥0,假设P（k）。

1如果国家共享边界的任何非平凡部分，即超过一点，则国家被定义为相邻国家。

*感应阶跃：*我们证明了P（k+1）.具体来说，我们得到一个有k+1线的地图，并希望显示它可以是双色的。让我们看看如果我们删除一条线会发生什么。由于地图上只有k条线，归纳假设说我们可以给地图上双色。让我们提出以下意见：给定一个有效的着色，如果我们交换红色蓝色，我们仍然有一个有效的着色。考虑到这一点，让我们将删除的线放回原处，并使线一侧的颜色保持不变。在线的另一边，交换红色

?蓝色。如图1所示。我们宣称这是具有k+1条线的映射的有效双着色。

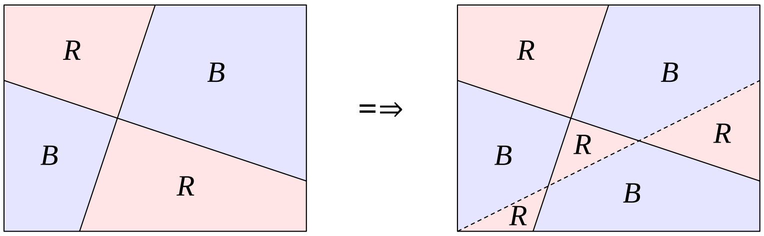


图1：（左）删除了第（k + 1）行的地图。（右）以虚线显示第（k + 1）条线的地图。

为什么这样做?考虑由共享边界分隔的任意两个区域。那么，两种情况之一必须成立：情形1是当共享边界是被移除和替换的线，即线k + 1时。但是通过构造，我们翻转了这条线一侧的颜色，这样被它分开的任意两个区域都有不同的颜色。情况2是当共享边界是前k条线之一时;这里，归纳假设保证由这个边界分开的两个区域具有不同的颜色。因此，在这两种情况下，由共享边框分隔的区域根据需要具有不同的颜色。

□

2　加强归纳假说

当使用归纳法时，选择正确的陈述来证明是非常重要的。例如，假设我们希望证明这样的命题：对于所有的n1,前n个奇数之和是一个完美的平≥方。这是通过归纳法进行的第一次证明。

证明尝试。我们对n进行归纳。

*基础情况（n=1）：*第一个奇数是1,它是一个正方形。

*诱导假设：*假设前k个奇数之和是完美的平方，例如m2。*感应阶跃：*第（k + 1）个奇数是2k + 1。因此，根据归纳假说，

k+1个奇数是m2+2k+1。但现在我们被困住了。为什么m2+2k+1应该是一个正方形?似乎我们的归纳假设太“弱”;它没有给我们足够的结构来说明关于（k+1）情况的任何有意义的事情。

因此，让我们退后一步，进行初步检查，以确保我们的声明没有明显错误：让我们计算前几种情况的值。或许在这个过程中，我们也可以揭开一些我们尚未发现的隐藏结构。

- *n = 1：*1 = 12是正方形。
- *n = 2：*1+3=4=22是正方形。
- *n = 3：*1+3+5=9=32是一个正方形。
- *n = 4：*1+3+5+7=16=42是一个正方形。

看来我们有好消息，甚至还有好消息：好消息是我们还没有找到我们索赔的反例。更好的消息是，出现了令人惊讶的模式：这些

前n个奇数之和不仅是一个正方形，而且正好等于n2!受这一发现的启发，让我们尝试一些违反直觉的东西：让我们设法证明以下更强有力的主张。

定理3.4。*对于所有n≥1,前n个奇数之和为n2。*

*证明。*我们对n进行归纳。

*基础情况（n=1）：*第一个奇数是1,等于12。

*诱导假设：*假设前k个奇数之和为k2。

*感应阶跃：*第（k + 1）个奇数是2k + 1。应用归纳假设，第一个假设的总和
*k+1个奇数是k2+（2k+1）=（k+1）2。*因此，根据归纳原理，这个定理成立。 □

所以让我们直截了当——
我们无法证明我们最初的观点，所以我们假设了一个更强有力的假设，并设法证明了这一点。为什么要这么做?原因是，我们最初的声明没有反映我们试图证明的根本事实的真实结构——
它太含糊了。因此，我们的归纳假设不足以证明我们期望的结果。相比之下，我们的第二个主张虽然先验性较强，但也具有较强的结构性;这反过来又使我们的归纳假设更加强烈——
我们可以使用以下事实：前k个奇数之和不仅是完美的平方，而且实际上等于k2。这个额外的结构正是我们完成证明所需要的。总之，我们已经演示了一个例子，其中虽然声明是正确的，但归纳假说的精确表述在失败和成功的证明之间产生了区别。

示例。 现在让我们试试第二个例子;这次，我们将让您做一些工作!假设我们
希望证明声明：对于所有n≥1,∑n1≤2。*i=1 i2*

概念检查! 归纳假设的“明显”选择如下：假设对于n=k,
∑k 1 ≤ 2。为什么这不足以证明n = k + 1的声明，即表明∑k 1 + 1 ≤ 2?
i=1 i2 *i=1 i2* （k+1）2
（提示：∑k1是否实际上等于2?
i=1 i2

现在，让我们再次做一些违背直觉的事情——
让我们证明以下更强有力的陈述，即，让我们加强我们的归纳假设。

定理3.5。*对于所有n* 1，n 1 2 1 .
≥ ∑2≤i —
i=1 n

*证明。*我们对n进行归纳。

*基础情况（n=1）：*我们有1 1 2 1，根据需要。
∑2 ≤−1
i=1 1

*诱导假设：*假定声明对n=k成立。*感应阶跃：*通过归纳
假说，我们得到了

k+1 1 k 1 1 1 1
∑i2 = ∑i2 + (k + 1) 2 ≤ 2 −
k + (k + 1) 2。
i=1 i=1

因此，为了证明我们的主张，足以证明

$$2-\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{2} \le 2-\frac{1}{k+1} \implies -\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{2} \le -\frac{1}{k+1}。\quad (4)$$

锻炼。证明方程（4）成立。（提示：将不等式的两边乘以（k + 1）。）

根据数学归纳原理，这一主张成立。 □

3 简单诱导与强诱导

到目前为止，我们一直使用归纳的概念，称为简单或弱归纳。还有另一种归纳的概念，我们现在讨论，叫做强归纳。后者类似于简单诱导，只是我们有一个略微不同的诱导假设：不仅假设P（k）为真（如简单归纳的情况），我们假设P（0）、P（1）、...、和P（k）都为真（即，Vk $P_{i=0}$（i）为真）。

强归纳和弱归纳的力量是否有区别，即强归纳能证明弱归纳不能的陈述吗?*不!*直观地，这可以从第1节回到我们的多米诺骨牌类比中看出。

在这幅图中，弱归纳说，如果第k个多米诺骨牌掉落，第（k+1）个多米诺骨牌也会掉落，而强归纳法则认为，如果第1个到k个多米诺骨牌掉落，那么第（k+1）个多米诺骨牌也会掉落。但这些场景是等效的：如果第一个多米诺骨牌落下，那么反复应用弱归纳，我们得出结论：第一张多米诺骨牌依次倾倒多米诺骨牌2到k,建立k+1的情况，就像强归纳的情况一样。话虽如此，强归纳法的确具有吸引人的优势——

它可以使证明更容易，因为我们可以假设一个更强的假设。我们该如何理解?想想螺丝刀和电动螺丝刀的类比——它们都完成相同的任务，但后者更易于使用!

让我们试试一个强归纳的简单例子2。 作为额外奖励，这是我们首次要求提供入职证明*多个基本情况。*

定理3.6.*对于任意n≥12的自然数，对某x,y∈N,n=4x+5y。证明。*我们对n进行归纳。

*基础情况（n = 12）：*我们有12=4·3+5·0.

*基础病例（n = 13）：*我们有13 = 4 · 2 + 5 · 1。

*基础情况（n = 14）：*我们有14=4·1+5·2.

*基础情况（n = 15）：*我们有15=4·0+5·3.

*诱导假设：*假设对于k≥15,所有12≤n≤k的声明成立。

*感应阶跃：*我们证明了n = k + 1 ≥ 16的声明。具体而言，请注意（k + 1）− 4 ≥ 12;因此，归纳假说暗示对于某些x′，y′∈N,（k+1）−4=4x′+5y′。设置 x = x′ + 1 和y = y′ 完成证明。 □

2这个问题也属于邮资邮票问题。邮票问题说，只要用4分和5分的邮票就可以支付每份12美分或更多的邮资。

*概念检查!*如果我们用弱归纳法代替强归纳法，为什么上面的证明会失败呢?

让我们尝试第二个更高级的示例。为此，回想一下，如果1和n是其唯一的除数，则n2是素数。≥

定理3.7. *每个自然数n > 1都可以写成一个或多个素数的乘积。*

*证明。*我们对n进行归纳。设P（n）是n可以写成素数的乘积的命题。我们将证明P（n）对所有n≥2为真。
*基础情况（n=2）：*我们从n=2开始。显然，P（2）成立，因为2是素数。

*诱导假设：*设对于所有2≤n≤k,P（n）为真。
*感应阶跃：*证明了n=k+1可以写成素数的乘积。我们有两种情况：要么k+1是素数，要么不是素数。对于第一种情况，如果k+1是一个素数，那么我们完成，因为k+1是一个素数（本身）的乘积。对于第二种情况，如果k+1不是素数，则根据定义k+1=xy,x,yZ+满足1<x,y<k+1。根据归纳假说，x和y可以写成素数的乘积（因为x,y k）。但这意味着k+1也可以写成素数的乘积。∈ ≤

*概念检查!*如果我们改用简单归纳法，为什么这个证明会失败呢?（提示：假设k+1=42。由于42 = 6 7,在归纳步骤中，我们希望使用P（6）和P（7）为真的事实。但是，弱归纳法不能给出这个结果——在这种情况下，弱归纳法允许我们假设P的哪个值是正确的?）

×

最后，对于那些希望更正式地理解为什么弱归纳和强归纳等效的人，请考虑以下内容。设Q（n）=P（0）P（1）P（n）。那么，对P的强诱导相当于对Q的弱诱导。试着说服自己相信这个说法。

4 递归、编程和归纳

归纳和递归之间有着密切的联系，我们在这里通过两个例子来探讨这个问题。

示例1：Fibonacci家兔。在13世纪，有一位著名的意大利数学家斐波那契3,他在1202年思考了下列难题：从一对兔子开始，一年后有多少只兔子，如果每个月每对兔子生出一对新兔子，从第二个月开始，新的一对兔子就能生产出来?这种人口增长模型可以通过递归地定义函数来建模;所得到的数字序列现在被称为斐波那契数。

为了对我们的兔子种群进行递归建模，令F（n）表示第n个月的兔子对数。根据上述规则，我们的初始条件如下：显然，F（0）= 0。在第1个月，引入一对家兔，这意味着F（1）=1。最后，由于新生兔子需要一个月才能生产，因此我们也得到F（2）=1。

3菲波那契也被称为比萨的列奥纳多。如果你在意大利的比萨，你可以去拜访他的坟墓;他的遗体被埋葬在Campo Santo。

在第三个月，乐趣开始了。例如，F（3）=
2,因为原始对繁殖产生新对。但是，对于n的一般值，F（n）如何呢?似乎很难给出F（n）的显式公式。然而，我们可以如下递归地定义F（n）。在第n−1个月，根据定义，我们有F（n−1）对。有多少
这些对中有多少是富有成效的?只有那些上个月已经活着的人，*F（n−2）*
他们的。因此，除了现有的F（n−1）对之外，在第n个月我们还有F（n−2）个新对。因此，我们有F（n）= F（n− 1）+ F（n− 2）。总结：

- *F（0）= 0。*
- *F（1）=1。*
- 对于n≥2,F（n）=F（n−1）+F（n−2）。

非常整洁，除了你可能想知道为什么我们最关心兔子的繁殖!事实证明，人口增长的简化模型阐明了一个基本原理：如果不加以控制，人口会随时间呈指数级增长。下面的练习给出了这个指数增长率的下限。（实际增长率较大，约为1.6n.）

---

*锻炼。*用归纳法证明Fibonacci数满足F（n）2（n−1）/2,所有n为3。请注意，您将需要两种基本情况：n = 3和n = 4。（为什么?）

≥≥

事实上，理解这种无节制的人口指数增长的意义是导致达尔文形成进化理论的关键步骤。引用达尔文："每一种有机物都以如此高的速度增长，如果不将其摧毁，地球很快就会被一对子代所覆盖。"

现在，我们在本节的标题中向您承诺过编程，所以这里是一个计算F（n）的简单递归程序：

```
函数F（n）
  如果 n=0,则返回 0 如果
  n=1,则返回 1
  else 返回 F（n-1）+ F（n-2）
```

---

*锻炼。*这个程序计算F（n）需要多长时间，即需要多少次调用F（n）?你应该能够通过归纳显示呼叫数量至少为F（n）本身!

上面的练习应该让您相信，这是一种非常低效的计算第n个斐波那契数的方法。以下是完成相同任务的更快的迭代算法（这应该是将尾部递归转换为迭代算法的熟悉示例）：

```
函数F2（n）
  如果 n=0,则返回 0 如果
  n=1,则返回 1 a = 1
  b = 0
  对 于 k  =  2 至 n
    do,temp = a
    a  =  a  +
    b  b  =  温
    度
  返回
```

锻炼。这个迭代算法计算F2（n）需要多长时间，即它的循环需要多少次迭代?你能用归纳法证明这个新函数F2（n）=F（n）吗?

示例2：二分搜索。接下来，我们使用归纳法来分析一种递归算法，即使您的祖母也非常熟悉——二分法搜索!让我们在字典中查找单词的上下文中讨论二分法搜索：为了找到单词W,我们打开词典到中间一页。如果那一页的第一个词在W之后，我们就递归到字典的前半部分（在中间一页之前）;否则，我们从字典的后半部分（从中间一页往前）重复。（当字典有偶数2m页时，我们定义中间页为第（m+1）页。）一旦我们把词典缩小到一页，我们就会采取强力搜索来找到该页上的W。在伪代码中，我们有：

```
1   // 前提条件：W是单词，D是
2   // 至少包含 1 页的字典。
3   // 后置条件：返回W的定义，
4   // 或返回 "W not found"。
5   findWord（W,D）{
6       // 基本情况
7       如果（D正好有一页）
8           用蛮力在D中寻找W。
9           如果找到，则返回其定义;否则，返回“W not found”。
10
11      // 递归大小写
12      设W′是D中间页上的第一个单词。
13      如果（W先于W′）
14          return findWord（D 的前半部分）
15      否则
16          return findWord（D 的后半部分）
17 }
```

让我们使用归纳法证明findWord（）是正确的，即如果W在字典D中，它返回W的定义。作为额外奖励，证明要求我们使用强归纳法而不是简单归纳法!

findWord（）的正确性证明。我们对D中的页数n进行强归纳。

*基础情况（n=1）：*如果 D 有一页，则第 8 行通过暴力搜索W。因此，如果存在W,则发现并返回W;否则，我们根据需要返回“W not found”。

*诱导假设：*假设findWord（）对所有1≤n≤k都是正确的。

*感应阶跃：*我们证明了findWord（）对于n=k+1是正确的。在第12行之后，我们知道W′;因此，我们可以确定W必须在D的前半部分还是后半部分。在第一种情况下，我们在上半场复出
在第二种情况下，我们在第16行中递归于D的后半部分。通过归纳假设，递归调用在前半部分或后半部分中正确地找到W,或者返回“W not found”，因为这两个半部分最多包含k个页面。由于我们返回递归调用的答案，因此我们得出结论：findWord（）在D中正确找到大小为n = k + 1的W。因此，通过归纳，findWord（）是正确的。□

---

*概念检查!*为什么我们在上面的证明中要求强归纳?

---

5 虚假证明

如果你的证明不正确，很容易证明是假的!让我们用一个著名的例子来说明。在上个世纪中叶，一个常用的口语表达是“that is a horp of a different color”，指的是与正常或普遍期望完全不同的事物。著名数学家乔治·波利亚（George Pólya）也是非专业人士数学的伟大阐释者，他给出了以下证明，证明没有一匹不同颜色的马!

定理3.8.*所有的马都是一样的颜色。*

*证明。*我们根据马匹数进行归纳，n。令P（n）表示权利要求的陈述。

基础情况（n=1）：P（1）当然是正确的，因为如果一个集合仅包含一匹马，则该集合中的所有马具有相同的颜色。

*诱导假设：*设P（n）对任意n≥1成立。

*感应阶跃：*给定一组n +1匹马h1、h2、...，hn+1,我们可以排除集合中的最后一匹马，并且仅将诱导假设应用于前n匹马h1, ...，hn,推断它们都具有相同的颜色。类似地，我们可以得出结论，最后n匹马h2,...，hn+1都具有相同的颜色。但现在“中间”的马h2,.....，hn（即，除第一个和最后一个之外的所有）属于这两个集合，因此它们具有与马h1和马hn+1相同的颜色。因此，所有n+1匹马的颜色相同。根据归纳原理，我们得出结论：所有的马都有相同的颜色。 □

显然，不是所有的马都是同一种颜色的!那么，我们哪里搞错了?为了应用数学归纳原理，归纳步骤必须显示以下语句：n ≥ 1,P（n）⇒ P（n + 1）。我们宣称，在上述证明中，这个陈述是错误的——特别地，存在n的选择，该选择产生这个陈述的反例。

---

*锻炼。*对于n的哪个值，P（n）⇒P（n+1）不成立?（提示：考虑“中间”马的证明中的关键属性。）

---

6 实践问题

1. 证明了$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$的任意自然数n。
2. 在实分析中，Bernoulli不等式是一个近似于1+x的幂的不等式。证明了当n是自然数且1+x>0时，$(1+x)^n\geq 1+nx$。
3. 一个常用的递归定义函数是阶乘函数，对于非负数n定义为$n! = n(n-1)(n-2)\ldots1$,基本情况为$0! \equiv 1$.让我们通过考虑以下涉及阶乘的定理来加强我们对递归和归纳之间联系的理解。

   定理：对于所有$n \in \mathbb{N}$, $n > 1 \Longrightarrow n! < n^n$.

   用归纳法证明这个定理。（提示：在归纳步骤中，写$(n+1)! = (n+1)n!$，并使用归纳假设。）

4. 派对上的名人是每个人都认识却不认识任何人的人。假设你参加了一个有n人的聚会。对于派对上的任何一对A和B,你可以问A他们是否认识B,并得到一个诚实的回答。给出一个递归算法，以确定派对中是否有名人，如果是，则最多问3n − 4个问题。（注意：就此问题而言，您只是拜访聚会询问问题。你想要确定的是，实际上参加聚会的n个人是否包括名人。）

   通过归纳法证明，如果有名人，你的算法总是能够正确识别出一个名人，问题数量最多为3n − 4。

5. 使用定理3.6的证明来设计一个算法，该算法在给定至少12c的任何邮资量时，输出构成该邮资的4c和5c邮票的数字。您的算法将使用的5c戳的最大数量是多少?