Hemtenta Logik

Simon Rosén
A961122-1830

1.a) Först kan man konstantera att det finns formler F som använder alla n variabler, och har ett udda antal valueringar som satisfierar den.

tex: $p \wedge q$, har en valuering som satisfierar den om $n=2$.

Det finns även formler som använder alla n variabler men som har ett jämnt antal satisfierbara valueringar.

tex: $p \vee \neg p$, satisfieras av 2 valueringar om $n=1$.

Vi vill visa att om en formel F satisfieras av ett udda antal valueringar så måste den innehålla alla n variabler.

Jag tänker göra ett motsägelsebevis, genom att visa att motsatsen:

"SATN(F) udda" → "F använder inte alla variabler"

är omöjlig.

Antag att SATN(F) är udda och använder alla n variabler. Det är lätt att se att om vi lägger till en fri variabel så kommer SATN(F) att fördubblas, Då F kommer satisfieras för samma värden på de tidigare variablerna och dessa kommer att inträffa två gånger nu, en gång för varje värde på den fria variabeln.

Detta är en motsägelse till att SATN(F) är udda.

Alltså måste det ursprungliga uttrycket stämma.

Hemtenta Logik

Simon Rosen
961122-1930

1.b) Jag börjar med att skriva om F till ett enklare uttryck

1. $A \vee C \to \neg A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \vee C) \vee \neg A \wedge B$, eftersom $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$

2. $\neg(A \vee C) \vee \neg A \wedge B \leftrightarrow \neg A \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B$, De morgan på $\neg(A \vee C)$

3. $\neg A \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \leftrightarrow \neg A \wedge (B \vee \neg C)$, Distributivitet $p \wedge q \vee p \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

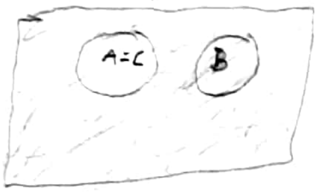
Alltså

$A \vee C \to \neg A \wedge B \leftrightarrow \neg A \wedge (B \vee \neg C)$

Alla dessa räkneregler är välkända så jag kommer inte bevisa dom här.

Det är svårt att ge specifika gränser eftersom att A, B och C kan ha gemensamma satisfierbara evalueringar.

Vi vet dock att $\neg A$ ska vara sant och $B \vee \neg C$ ska vara sant. Den undre gränsen uppstår om $B \vee \neg C$ överlappar helt med $\neg A$.



Alltså $SATN(F) \geq SATN(\neg A) = 2^n - \alpha$ där n är antalet variabler i F.

F kan också vara en tautologi (om tex $B = A$) så den enda rimliga övre gränsen är 2^n.

Svar: $2^n - \alpha \leq SATN(F) \leq 2^n$, där n är antalet variabler i F.

Hemtenta Logik Simon Rosen 19961122-1830

(2.) $\vdash \forall x \forall y (f(x)=f(y) \to x=y) \land \forall y \exists x (f(x)=y)$
$\to \forall y \exists x ((f(x)=y) \land \forall z (z \neq x \to f(z) \neq y))$

Samma sak som

$$\forall x \forall y (f(x)=f(y) \to x=y) \land \forall y \exists x (f(x)=y) \vdash \forall y \exists x ((f(x)=y) \land \forall z (z \neq x \to f(z) \neq y))$$

1	$\forall x \forall y (f(x)=f(y) \to x=y) \land \forall y \exists x (f(x)=y)$	premiss
2	$\forall x \forall y (f(x)=f(y) \to x=y)$	$\land_{e1}$ 1
3	$\forall y \exists x (f(x)=y)$	$\land_{e2}$ 1
4	$\exists x (f(x)=y_0)$	$\forall y e$ 3
5	$\forall x (f(x)=f(y_0) \to x=y_0)$	$\forall y e$ 2
6	$f(x_0)=f(y_0) \to x_0=y_0$	$\forall x e$ 5
7	x_1: $f(x_1)=y_0$	antagande
8	$f(x_1)=y_0$	copy 7
9	$f(x_1)=y_0$	$\exists x e$ 4, 7-8
10	z_0	
11	$\neg\neg(f(z_0)=y_0)$	antagande
12	$f(z_0)=y_0$	$\neg\neg e$ 11
13	$f(x_1)=y_0$	copy 9
14	$f(x_1)=f(x_1)$	$=_i$
15	$y_0=f(x_1)$	$=_e$ 13, 14
16	$f(z_0)=f(x_1)$	$=_e$ 12, 15
17	$z_0=x_1$	(använder rad 2)
18	$\neg\neg(f(z_0)=y_0) \to z_0=x_1$	$\to_i$ 11-17
19	$\neg(z_0=x_1)$	antagande
20	$\neg(\neg\neg(f(z_0)=y_0)$	MT 18, 19
21	$\neg(f(z_0)=y_0)$	$\neg\neg_e$ 20
22	$\neg(z_0=x_1) \to \neg(f(z_0)=f(y_0))$	$\to_i$ 19-21

Hemtenta Logik

Simon Rosén
199611 22-1830

② forts.

23	$\forall z(\neg(z=x_1)\rightarrow\neg(f(z)=f(y_0)))$	$\forall z_i$ 10–22
24	$f(x_1)=y_0 \wedge \forall z(\neg(z=x_1)\rightarrow\neg(f(z)=f(y_0)))$	$\wedge_i$ 9, 23
25	$\exists x(f(x)=y_0 \wedge \forall z(\neg(z=x)\rightarrow\neg f(z)=f(y_0)))$	$\exists x_i$ 24
26	y_0	
27	$\exists x(f(x)=y_0 \wedge \forall z(\neg(z=x)\rightarrow\neg(f(z)=f(y_0)))$	copy 25
28	$\forall y\,\exists x(f(x)=y \wedge \forall z(\neg(z=x)\rightarrow\neg(f(z)=f(y)))$	$\forall y_i$ 26–27

Är osäker om man får göra så som jag gjorde på rad 28.

Vidare använde jag beteckningen $\neg(a=b)$ för $a\neq b$.

Scanned with CamScanner

Hemtenta Logik

Simon Rosén
961122-1830

3. $F(x)$ i ord: Det finns ett y så att $2y = x$
eller så finns ett y så att $2y = x+1$

Jag vill göra ett induktionsbevis

basfall

$F(0) = \exists y((1+1)\cdot y = 0) \vee \exists y((1+1)\cdot y = 0+1)$

Denna är sann för $y = 0$.

$F(1) = \exists y((1+1)\cdot y = 1) \vee \exists y((1+1)\cdot y = 1+1)$

Denna är sann för $y = 1$

Så basfallen stämmer

Induktionssteg (stark induktion)

Antag att $F(x)$ är sann för alla $x \leq k$ $(x \in \mathbb{N})$

$F(k) = \exists y((1+1)\cdot y = k) \vee \exists y((1+1)\cdot y = k+1)$

Vill visa

$F(k+1) = \exists y((1+1)\cdot y = k+1) \vee \exists y((1+1)\cdot y = (k+1)+1)$

Om $\exists y((1+1)\cdot y = k+1)$ är sann i $F(k)$ så vet vi att $F(k+1)$ stämmer med eftersom att den förekommer i båda.

Annars måste $\exists y((1+1)\cdot y = k) \wedge \exists y((1+1)\cdot y = k+2)$ stämma.

Antag att $(1+1)\cdot y_0 = k$. Då följer

$$(1+1)\cdot(y_0+1) \overset{ax6}{=} \underbrace{(1+1)\cdot y_0}_{=k} + (1+1) = k + (1+1) = (k+1)+1$$

Alltså. Om det finns ett tal y_0 som uppfyller $(1+1)\cdot y_0 = k$ så finns det ett tal (y_0+1) som uppfyller $(1+1)\cdot(y_0+1) = k + (1+1)$. Enligt induktionsprincipen följer att $F(x)$ stämmer för alla x.