

SMYOZ elrendezések számának becslése - kombinatorikai alapok és gyakorlati módszer

Mini-tanulmány a SMYOZ kapcsán felmerült kombinatorikai kérdések és a SMYOZ-elrendezések számbecslésének összefoglalására.

1. Kiinduló feladatok: golyók és lyukak

A "hányféleképpen lehet golyókat lyukakba tenni" típusú kérdések közös lényege, hogy milyen korlátok mellett számoljuk az elhelyezéseket: (i) megkülönböztethetők-e a golyók, (ii) megkülönböztethetők-e a lyukak, (iii) lehet-e egy lyukban több golyó, illetve (iv) kötelező-e minden golyót elhelyezni.

1.1. Megkülönböztethetetlen golyók, 0/1 kapacitás

Ha a golyók megkülönböztethetetlenek, a lyukak megkülönböztethetők, és minden lyukba legfeljebb 1 golyó kerülhet, akkor az elhelyezés azt jelenti, hogy kiválasztjuk, melyik k lyuk lesz foglalt az n közül. Ez **binomiális együttható**, azaz $C(n,k)$.

Példa (77 alatt 20): $C(77, 20) = 1\,472\,474\,663\,905\,800\,940$

1.2. Megkülönböztethetetlen golyók, korlátlan kapacitás

Ha egy lyukban több golyó is lehet, akkor a nemnegatív egész megoldások számát kapjuk az $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ egyenletre. Ennek megoldásszáma: $C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$.

1.3. Megkülönböztethető golyók, 0/1 kapacitás

Ha a golyók is megkülönböztethetők, és minden lyukba legfeljebb 1 golyó kerülhet, akkor injektív hozzárendeléseket számolunk.

Ennek száma az ismétlés nélküli **variáció**: $P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)!$

Képlet: $P(n,k) = n! / (n-k)!$

Példa (67 helyre 10 megkülönböztethető golyó): $P(67,10) = 899\,923\,097\,135\,462\,400$

2. SMYOZ esetén szereplő konkrét számok

77 megkülönböztethető helyre 20 azonos golyó, 0/1, $C(77,20) = 1\,472\,474\,663\,905\,800\,940$

67 megkülönböztethető helyre 10 azonos golyó, 0/1, $C(67,10) = 247\,994\,680\,648$

67 megkülönböztethető helyre 10 különböző golyó, 0/1, $P(67,10) = 899\,923\,097\,135\,462\,400$

Megjegyzés (felső korlát jelleg)

A SMYOZ-ban a hajóelrendezés egyértelműen megszabja a további elemeket (színes vonalak, vízpontok), tehát a darabszám becslésénél elég a hajók konfigurációit számolni. Ha a 9x9 táblán egyszerűen csak 20 mezőt választanánk ki hajónak minden további alak- és szomszédsági korlát nélkül, akkor egy nyers felső korlát például $C(81,20)$. Mivel a 4 sarokmező eleve tiltott, akkor $C(77,20)$ adódik.

Számérték: $C(81,20) = 4\,694\,436\,188\,839\,116\,720$

3. Hogyan becsüljük a SMYOZ-elrendezések számát?

A pontos darabszám (hány hajó-elrendezés lehetséges) erős korlátok mellett tipikusan enumerációs feladat. Gyakorlatban azonban már egy jó nagyságrendi becslés is értékes, és ezt a generátor próbálkozási statisztikája kiválóan támogatja.

3.1. Átmenési arány (acceptance rate) módszer

Válassz egy "alap" konfigurációhalmazt, amiből mintát tudsz venni, és amelynek darabszáma ismert vagy jól becsülhető. Ezután mérd az átmenési arányt:

$p = (\text{SMYOZ-nak megfelelő elrendezések száma}) / (\text{vizsgált minta elrendezések száma})$

$$\text{SMYOZ_db} \approx p * \text{Alap_db}$$

3.2. Alap halmaz választási opciók

A) Nagyon laza felső korlát: hajómezők kiválasztása alak-korlát nélkül (pl. $C(81,20)$ vagy $C(77,20)$). Biztosan túlbecsül, de gyors intuíciót ad.

B) Értelmes alap: minden klasszikus flottát kielégítő, érintésmentes hajóelhelyezés. Ennek darabszáma backtrackinggel pontosan enumerálható, vagy véletlenített keresőfa-becsléssel (Knuth) jól közelíthető.

C) A generátor saját tere: ha a generátor nem egyenletesen mintáz a konfigurációk között, akkor a siker/próba arány torzított lehet. Ilyenkor vagy súlyozott becslés kell, vagy a mintavételt kell közel egyenletesre hangolni.

3.3. Minimális mérési terv a Generátorban

Mérjük külön:

- összes próbálkozás, érintésmentes flotta, SMYOZ-szabályokon átment flotta.
- Szabályonkénti bukási statisztika: melyik szabály miatt esik ki (darab, arány).
- Több ezer/millió minta után ellenőrizzük, stabilizálódik-e p .
- Ha több generálási útvonal van, mérjük külön mindegyikre (külön elfogultságok miatt).

Összefoglalás: a kombinatorikai képletek jó felső korlátokat adnak, de a SMYOZ-hoz a legjobb mérnöki út a "jó alap halmaz" + "átmenési arány" mérése. Mivel a hajóelrendezés determinisztikusan eredményez minden további elemet, a becslés fókusza tisztán a hajók konfigurációin marad.