Étapes de calcul et démonstrations du tome 1 «Mécanique» de Physique Théorique de L. Landau & E. Lifchitz

Sébastien Majerowicz

2023

Résumé

Ce document est une aide pour la compréhension du premier livre des célèbres cours de Landau & Lifschitz au travers de la démonstration des formules et de la résolution des exercices proposés.

Table des matières

Chapitre 1

Équations du mouvement

1.1 Coordonnées généralisées

Pour un point matériel, nous avons en coordonnées cartésiennes :

— le rayon vecteur tel que :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

— la vitesse telle que :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} \tag{1.2}$$

— l'accélération telle que :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{dt}^2} \tag{1.3}$$

Les coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours les plus adaptées. Un autre sytème de coordonnées peut être plus commode à utiliser. Il convient de choisir alors s grandeurs quelconques $\{q_i\}_1^s$ pour définir la position d'un système (s degrés de libertés), ce sont ses *coordonnées généralisées* et les drívées $\{\dot{q}_i\}_1^s$, ses *vitesses généralisées.*

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées les *équations du mouvement.*

1.2 Le principe de moindre action

La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est celle du *principe de moindre action* (ou principe de Hamilton). Il introduit la *fonction de Lagrange* définie telle que :

$$L(\{q_i\}_1^s, \{\dot{q}_i\}_1^s, \mathrm{t}) = L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) \tag{1.4}$$

Entre les instants t_1 et t_2, le système se meut de telle manière que l'*action* :

$$S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) d\mathrm{t} \tag{1.5}$$

ait la plus petite valeur possible.

Partons d'un seul degré de liberté et définissons $q = q(\mathrm{t})$ telle que S soit minimale. Cela signifie que S a une valeur plus grande si :

$$q(\mathrm{t}) \rightarrow q(\mathrm{t}) + \delta q(\mathrm{t}) \tag{1.6}$$

avec $\delta q(\mathrm{t})$ est la variation de $q(\mathrm{t})$. Or en t_1 et t_2, toutes les fonctions $q(\mathrm{t})$ doivent avoir des valeurs identiques (les trajectoires diffèrent mais pas les conditions initiales, ni finales). Donc $\forall q(\mathrm{t})$, nous avons :

$$\delta q(\mathrm{t}_1) = \delta q(\mathrm{t}_2) = 0 \tag{1.7}$$

De plus $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{dt}}$ dont $\frac{\mathrm{d}(q+\delta q)}{\mathrm{dt}} = \dot{q} + \delta\dot{q}$.

$$S(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t}) - S(q, \dot{q}, \mathrm{t}) = \delta S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t})\mathrm{dt} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t})d\mathrm{t} \tag{1.8}$$

Or par définition, nous avons :

$$\delta L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \mathrm{t}}\delta\mathrm{t} \tag{1.9}$$

Mais puisque $\delta\mathrm{t} = 0$, cela donne, au premier ordre (développement en série de Taylor) :

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t}) \approx L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{1.10}$$

ou encore, le principe de moindre action peut s'écrire :

$$\delta S = \delta \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t})d\mathrm{t} = 0 \tag{1.11}$$

et, de facto :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{dt} = 0 \tag{1.12}$$

Ensuite, remarquons que :

$$\delta\dot{q} = \delta\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{dt}}\right) = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}} \tag{1.13}$$

L'équation 1.11 devient alors :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}}\delta\mathrm{t} = 0 \tag{1.14}$$

En se rappelant l'intégration par parties de Brook Taylor qui dit que :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{dx} = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{dx} \tag{1.15}$$

alors :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}}\delta\mathrm{t} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{dt} \tag{1.16}$$

L'équation 1.11 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{dt} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{dt} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q\mathrm{dt} \end{aligned} \tag{1.17}$$

or l'application de 1.7 dans 1.17 implique directement :

$$\delta S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q \mathrm{dt} \tag{1.18}$$

Le principe de moindre action donne $\forall q$, $\delta S = 0$ et l'expression ci-dessus doit être valide quelque soit la valeur de δq. Cela a pour conséquence :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \tag{1.19}$$

ce qui donne les *équations de Lagrange* lorsqu'il y a s degrés de liberté :

$$\forall i \in (1, 2, \ldots, s) , \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \tag{1.20}$$

c'est-à-dire s équations différentielles du second ordre à s inconnues, $q_i(\mathrm{t})$.

Si (A) et (B) sont deux systèmes fermés suffisamment éloignés pour négliger leur interaction mutuelle alors :

$$\lim L = L_A + L_B \tag{1.21}$$

Il s'agit de l'additivité de la fonction de Lagrange. De la même manière, la multiplication par une constante de la fonction de Lagrange d'un système fermé n'influe pas les équations du mouvement.

Une dernière remarque en considérant la fonction de Lagrange L' telle que :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}f(q, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{1.22}$$

alors les intégrales 1.5 donnent :

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L'(q, \dot{q}, \mathrm{t}) d\mathrm{t} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) d\mathrm{t} + \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\mathrm{d}f(q, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} d\mathrm{t} \\ &= S + \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{d}f(q, \mathrm{t}) = S + f(q(\mathrm{t}_2)) - f(q(\mathrm{t}_1)) \end{aligned} \tag{1.23}$$

et impliquent que le principe de moindre action $\delta S = 0$ coïncide avec $\delta S' = 0$. Ainsi, la fonction de Lagrange n'est déterminée qu'à la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps.

1.3 Le principe de relativité de Galilée

Il est nécessaire de choisir un système de référence pour étudier les phénomènes mécaniques et il est préférable de le choisir afin que les lois de la mécanique y soit les plus simples possibles. Et il est toujours possible de trouver un référentiel tel que l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme. En d'autres termes, la fonction de Lagrange d'un point matériel se mouvant librement dans un système galiléen en coordonnées cartésiennes :

— homogénité de l'espace : $L(\vec{r}, \vec{v}, \mathrm{t}) \Rightarrow L(\vec{v}, \mathrm{t})$
— uniformité du temps : $L(\vec{v}, \mathrm{t}) \Rightarrow L(\vec{v})$
— isotropie de l'espace : $L(\vec{v}) \Rightarrow L(\|\vec{v}\|)$

En résumé, nous avons :

$$L = L(\vec{v}^2) \tag{1.24}$$

ce qui implique que $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$. Et par application des équations de Lagrange (1.20), nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0 \tag{1.25}$$

et comme la fonction de Lagrange n'est fonction que de la vitesse, ou encore $\dfrac{\partial L(\vec{v}^2)}{\partial \vec{v}} \propto \vec{v}$ (voir 1.24), dans ce cas alors :

$$\vec{v} = \vec{Cte} \tag{1.26}$$

Dans un référentiel galiléen, tout mouvement libre s'effectue donc à une vitesse constante en grandeur et en direction. C'est la *loi de l'inertie*. Supposons deux référentiels galiléens (K) et (K') tels que $\vec{KK'} = \vec{V}\mathrm{t}$. Alors $\vec{r} = \vec{KK'} + \vec{r'}$, soit :

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{V}\mathrm{t} \tag{1.27}$$

En Mécanique classique, le temps est absolu, aussi :

$$\mathrm{t} = \mathrm{t}' \tag{1.28}$$

Les formules (1.27) et (1.28) sont les *transformations de Galilée.*

1.4 Fonction de Lagrange d'un point matériel libre

Considérons le mouvement libre d'un point matériel dans un système galiéen. Cela implique 1.24, soit $L = L(v^2)$. Avec un référentiel (K) qui se déplace par rapport à un autre référentiel (K') telle que $\vec{v'} = \vec{v} + \vec{\epsilon}$, nous avons :

$$\begin{aligned} L' = L(\vec{v'}^2) &= L(\vec{v}^2 + 2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) \\ &= L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}.\vec{\epsilon} \end{aligned} \tag{1.29}$$

en supprimant les ordres supérieurs à 2 en $\vec{\epsilon}$ dans le développement en série de Taylor de :

$$L(\vec{v}^2 + 2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) \approx L(\vec{v}^2 + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}.(2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) + \frac{\partial L}{2\partial \vec{v}^4}.(2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2)^2 + \ldots \tag{1.30}$$

En reprenant la fonction de Lagrange qui peut se définir comme (1.22), nous pouvons posé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}.\vec{\epsilon} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \\ \Leftrightarrow 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}.\vec{\epsilon} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \\ \Leftrightarrow 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\frac{\mathrm{d}(\vec{r}.\vec{\epsilon})}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \end{aligned} \tag{1.31}$$

n'est vraie que si et seulement si $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} = \alpha$, avec α une constante. Or nous avons 1.24, qui implique :

$$L = L(\vec{v}^2) = \alpha \vec{v}^2 \tag{1.32}$$