Étapes de calcul et démonstrations du tome 1 « Mécanique » de Physique Théorique de L. Landau & E. Lifchitz

Sébastien Majerowicz

2023

Résumé

Ce document est une aide pour la compréhension du premier livre des célèbres cours de Landau & Lifschitz au travers de la démonstration des formules et de la résolution des exercices proposés.

Table des matières

Chapitre 1

Équations du mouvement

1.1 Coordonnées généralisées

Pour un point matériel, nous avons en coordonnées cartésiennes :
— le rayon vecteur tel que :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

— la vitesse telle que :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} \tag{1.2}$$

— l'accélération telle que :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{dt}^2} \tag{1.3}$$

Les coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours les plus adaptées. Un autre sytème de coordonnées peut être plus commode à utiliser. Il convient de choisir alors s grandeurs quelconques $\left\{q_i\right\}_1^s$ pour définir la position d'un système (s degrés de libertés), ce sont ses *coordonnées généralisées* et les dérivées $\left\{\dot{q}_i\right\}_1^s$, ses *vitesses généralisées.*

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées les *équations du mouvement.*

1.2 Le principe de moindre action

La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est celle du *principe de moindre action* (ou principe de Hamilton). Il introduit la *fonction de Lagrange* définie telle que :

$$L(\left\{q_i\right\}_1^s, \left\{\dot{q}_i\right\}_1^s, \mathrm{t}) = L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) \tag{1.4}$$

Entre les instants t_1 et t_2, le système se meut de telle manière que l'*action* :

$$S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) d\mathrm{t} \tag{1.5}$$

ait la plus petite valeur possible.

Partons d'un seul degré de liberté et définissons $q = q(\mathrm{t})$ telle que S soit minimale. Cela signifie que S a une valeur plus grande si :

$$q(\mathrm{t}) \rightarrow q(\mathrm{t}) + \delta q(\mathrm{t}) \tag{1.6}$$

avec $\delta q(\mathrm{t})$ est la variation de $q(\mathrm{t})$. Or en t_1 et t_2, toutes les fonctions $q(\mathrm{t})$ doivent avoir des valeurs identiques (les trajectoires diffèrent mais pas les conditions initiales, ni finales). Donc $\forall q(\mathrm{t})$, nous avons :

$$\delta q(\mathrm{t}_1) = \delta q(\mathrm{t}_2) = 0 \tag{1.7}$$

De plus $\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{dt}}$ dont $\dfrac{\mathrm{d}(q+\delta q)}{\mathrm{dt}} = \dot{q} + \delta\dot{q}$.

$$S(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t}) - S(q, \dot{q}, \mathrm{t}) = \delta S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t})\mathrm{dt} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t})d\mathrm{t} \tag{1.8}$$

Or par définition, nous avons :

$$\delta L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \mathrm{t}}\delta\mathrm{t} \tag{1.9}$$

Mais puisque $\delta\mathrm{t} = 0$, cela donne, au premier ordre (développement en série de Taylor) :

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, \mathrm{t}) \approx L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{1.10}$$

ou encore, le principe de moindre action peut s'écrire :

$$\delta S = \delta \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t})d\mathrm{t} = 0 \tag{1.11}$$

et, de facto :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) \mathrm{dt} = 0 \tag{1.12}$$

Ensuite, remarquons que :

$$\delta\dot{q} = \delta\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{dt}}\right) = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}} \tag{1.13}$$

L'équation (1.11) devient alors :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}}\delta\mathrm{t} = 0 \tag{1.14}$$

En se rappelant l'intégration par parties de Brook Taylor qui dit que :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{dx} = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{dx} \tag{1.15}$$

alors :

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{dt}}\delta\mathrm{t} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{dt} \tag{1.16}$$

L'équation (1.11) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{dt} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{dt} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} - \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q\mathrm{dt} \end{aligned} \tag{1.17}$$

or l'application de (1.7) dans (1.17) implique directement :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q \mathrm{dt} \tag{1.18}$$

Le principe de moindre action donne $\forall q$, $\delta S = 0$ et l'expression ci-dessus doit être valide quelque soit la valeur de δq. Cela a pour conséquence :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \tag{1.19}$$

ce qui donne les *équations de Lagrange* lorsqu'il y a s degrés de liberté :

$$\forall i \in (1, 2, \dots, s), \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \tag{1.20}$$

c'est-à-dire s équations différentielles du second ordre à s inconnues, $q_i(\mathrm{t})$.

Si (A) et (B) sont deux systèmes fermés suffisamment éloignés pour négliger leur interaction mutuelle alors :

$$\lim L = L_A + L_B \tag{1.21}$$

Il s'agit de l'additivité de la fonction de Lagrange. De la même manière, la multiplication par une constante de la fonction de Lagrange d'un système fermé n'influe pas les équations du mouvement.

Une dernière remarque en considérant la fonction de Lagrange L' telle que :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}f(q, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{1.22}$$

alors les intégrales (1.5) donnent :

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, \mathrm{t}) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \mathrm{t}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}f(q, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} dt \\ &= S + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}f(q, \mathrm{t}) = S + f(q(\mathrm{t}_2)) - f(q(\mathrm{t}_1)) \end{aligned} \tag{1.23}$$

et impliquent que le principe de moindre action $\delta S = 0$ coïncide avec $\delta S' = 0$. Ainsi, la fonction de Lagrange n'est déterminée qu'à la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps.

1.3 Le principe de relativité de Galilée

Il est nécessaire de choisir un système de référence pour étudier les phénomènes mécaniques et il est préférable de le choisir afin que les lois de la mécanique y soit les plus simples possibles. Et il est toujours possible de trouver un référentiel tel que l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme. En d'autres termes, la fonction de Lagrange d'un point matériel se mouvant librement dans un système galiléen en coordonnées cartésiennes :

— homogénité de l'espace : $L(\vec{r}, \vec{v}, \mathrm{t}) \Rightarrow L(\vec{v}, \mathrm{t})$
— uniformité du temps : $L(\vec{v}, \mathrm{t}) \Rightarrow L(\vec{v})$
— isotropie de l'espace : $L(\vec{v}) \Rightarrow L(\|\vec{v}\|)$

En résumé, nous avons :

$$L = L(\vec{v}^2) \tag{1.24}$$

ce qui implique que $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$. Et par application des équations de Lagrange (1.20), nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0 \tag{1.25}$$

et comme la fonction de Lagrange n'est fonction que de la vitesse, ou encore $\dfrac{\partial L(\vec{v}^2)}{\partial \vec{v}} \propto \vec{v}$ (voir 1.24), dans ce cas alors :

$$\vec{v} = \vec{Cte} \tag{1.26}$$

Dans un référentiel galiléen, tout mouvement libre s'effectue donc à une vitesse constante en grandeur et en direction. C'est la *loi de l'inertie*. Supposons deux référentiels galiléens (K) et (K') tels que $\vec{KK'} = \vec{V}\mathrm{t}$. Alors $\vec{r} = \vec{KK'} + \vec{r'}$, soit :

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{V}\mathrm{t} \tag{1.27}$$

En Mécanique classique, le temps est absolu, aussi :

$$\mathrm{t} = \mathrm{t}' \tag{1.28}$$

Les formules (1.27) et (1.28) sont les *transformations de Galilée*.

1.4 Fonction de Lagrange d'un point matériel libre

Considérons le mouvement libre d'un point matériel dans un système galiéen. Cela implique (1.24), soit $L = L(v^2)$. Avec un référentiel (K) qui se déplace par rapport à un autre référentiel (K') telle que $\vec{v'} = \vec{v} + \vec{\epsilon}$, nous avons :

$$\begin{aligned} L' = L(\vec{v'}^2) &= L(\vec{v}^2 + 2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) \\ &= L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}.\vec{\epsilon} \end{aligned} \tag{1.29}$$

en supprimant les ordres supérieurs à 2 en $\vec{\epsilon}$ dans le développement en série de Taylor de :

$$L(\vec{v}^2 + 2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) \approx L(\vec{v}^2 + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}.(2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2) + \frac{\partial L}{2\partial \vec{v}^4}.(2\vec{v}.\vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}^2)^2 + \dots \tag{1.30}$$

En reprenant la fonction de Lagrange qui peut se définir comme (1.22), nous pouvons posé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}.\vec{\epsilon} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \\ \Leftrightarrow 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}.\vec{\epsilon} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \\ \Leftrightarrow 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}\frac{\mathrm{d}(\vec{r}.\vec{\epsilon})}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{d}f(\vec{r},t)}{\mathrm{dt}} \end{aligned} \tag{1.31}$$

n'est vraie que si et seulement si $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} = \alpha$, avec α une constante. Or nous avons 1.24, qui implique :

$$L = L(\vec{v}^2) = \alpha \vec{v}^2 \tag{1.32}$$

Dans le cadre où le référentiel (K) se meut à une vitesse $\vec{V}$ par rapport à (K'), la fonction de Lagrange devient :

$$\begin{aligned} L' = \alpha\vec{v'}^2 &= \alpha.(\vec{v}+\vec{V})^2 \\ &= \alpha\vec{v}^2 + 2\alpha\vec{v}.\vec{V} + \alpha\vec{V}^2 \\ &= L + 2\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}.\vec{V} + \alpha\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dt}}\vec{V}^2 \\ &= L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(2\alpha\vec{r}.\vec{V} + \alpha\vec{V}^2\mathrm{t}\right) \end{aligned} \tag{1.33}$$

dont le second terme est une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction qui ne dépend que de la position et du temps. Ce second terme peut donc être omis, voir (1.22) et la fonction de Lagrange devient, en posant $\alpha = m/2$:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} \tag{1.34}$$

où m est appelée *masse* du point matériel. Par additivité de la fonction de Lagrange dans le cadre de particules sans interactions :

$$L = \sum_a \frac{m_a\vec{v_a}^2}{2} \tag{1.35}$$

Un point intéressant est que la masse ne peut être négative. En effet, dans un tel cas, l'action :

$$S = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{m\vec{v}^2}{2}\mathrm{dt} \tag{1.36}$$

ne peut alors pas avoir de minimum et le principe de moindre action ne peut pas être rempli !

De manière évidente, le carré de la vitesse s'écrit en fonction de la longueur l d'un arc tel que :

$$\vec{v}^2 = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{dt}^2} \tag{1.37}$$

Cela permet d'écrire la fonction de Lagrange :

— en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \end{aligned} \tag{1.38}$$

— en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) \end{aligned} \tag{1.39}$$

— en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right) \end{aligned} \tag{1.40}$$

1.5 Fonction de Lagrange d'un système de points matériels

Dans ce cas, un système est fermé s'il est composé de points matérielsréagissant les uns avec les autres mais isolés de tout corps extérieur. L'intéraction entre les points matériels peut être décrite en ajoutant à la fonction de Lagrange une fonction dépendante des seules coordonnées des particules. Ainsi, en reprenant (1.35) :

$$L = \sum_a \frac{m_a \vec{v_a}^{\,2}}{2} - U\left(\{\vec{r_i}\}_1^s\right) = T - U \tag{1.41}$$

avec T l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle du système.

En mécanique classique, les intéractions entre particules sont instantanées (uniformité du temps et relativité de Galilée). De la même manière, le changement de t en $-t$ ne change ne la fonction de Lagrange, ni les équations du mouvement, c'est la réversibilié de la mécanique classique.

En passant l'équation (1.20) des coordonnées généralisées en coordonnées cartésiennes, nous avons pour la particule a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \tag{1.42}$$

En introduisant la fonction de Lagrange de (1.41) :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{m_a}{2}\frac{\partial \vec{v}_a^2}{\partial \vec{v}_a} - \frac{\partial U}{\partial \vec{v}_a} = m_a \vec{v}_a \tag{1.43}$$

car l'énergie potentielle ne dépend que des coordonnées donc $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{v}_a} = 0$. Et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} &= \frac{m_a}{2}\frac{\partial \vec{v}_a^2}{\partial \vec{r}_a} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \\
&= \frac{m_a}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_a}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{dt}}\right)^2 - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \\
&= \frac{m_a}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial \vec{r}_a}\right)\right]^2 - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \\
&= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

car $\dfrac{\partial \vec{r}_a}{\partial \vec{r}_a} = 1$! Nous obtenons ainsi :

$$m_a \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \tag{1.45}$$

Il s'agit des *équations de Newton* et le vecteur :

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \tag{1.46}$$

est appelé la *force* agissant sur le point matériel a. L'énergie potentielle U ne dépendant que des coordonnées alors les accélérations, voir (1.45), ne dépendent également que des coordonnées. Si l'énergie potentielle est définie à une constante près telle que $U'(\vec{r}_a) = U(\vec{r}_a) + \alpha$ alors l'équation (1.45) ne change pas car $\dfrac{\partial U'}{\partial \vec{r}_a} = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$. Préférentiellement, α est choisie de telle manière à ce que l'énergie potentielle tende vers zéro quand la distance entre les points matériels augmentent.

Pour passer des coordonnées cartésiennes au coordonnées généralisées, il faut définir une transformation indépendante du temps telle que :

$$\begin{aligned} x_a &= f_a\left(\{\dot{q}_i\}_1^s\right) && (1.47)\\ \Rightarrow \dot{x}_a = \frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{dt}} &= \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial f_a(q_k)}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{dt}} && (1.48)\end{aligned}$$

en employant la différentiel totale.

En reportant cela dans l'équation (1.41), nous avons :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - U\\ &= \frac{1}{2}\sum_a m_a\left[\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial f_a(q_k)}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial g_a(q_k)}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial h_a(q_k)}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2\right] - U(q)\\ &= \frac{1}{2}\sum_a m_a\left[\sum_{i,j=1}^{s}\frac{\partial f_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial f_a(q_j)}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{s}\frac{\partial g_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial g_a(q_j)}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{s}\frac{\partial h_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial h_a(q_j)}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j\right] - U(q)\end{aligned}$$

Nous avons donc la fonction de Lagrange sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left[\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\right] - U(q) \tag{1.49}$$

avec :

$$a_{ij}(q) = \frac{\partial f_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial f_a(q_j)}{\partial q_j} + \frac{\partial g_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial g_a(q_j)}{\partial q_j} + \frac{\partial h_a(q_i)}{\partial q_i}\frac{\partial h_a(q_j)}{\partial q_j} \tag{1.50}$$

où les cœfficients a_{ij} ne dépendent que des coordonnées. Aussi dans un système de coordonnées généralisées, l'énergie cinétique est fonction quadratique des vitesses mais peut aussi dépendre des coordonées.

Considérons le système A non fermé et interagissant avec le système B animé d'un mouvement potentiellement fonction du temps. A se meut dans le champ créé par B et le système $A+B$ est fermé. La fonction de Lagrange s'écrit alors :

$$L_{A+B} = T_A(q_A,\dot{q}_A) + T_B(q_B,\dot{q}_B) - U(q_A,q_B) \tag{1.51}$$

L'énergie cinétique T_B n'est fonction que du temps et est donc le résultat de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction, voir (1.22). Par conséquent, elle peut être soustrait de la fonction de Lagrange totale. Nous avons donc :

$$L_{A+B} = T_A(q_A,\dot{q}_A) - U(q_A,q_B(\mathrm{t})) \tag{1.52}$$

avec U qui dépend explicitement des coordonnées et du temps.

Dans le cas particulier d'une unique particule dans un champ extérieur, la fonction de Lagrange est :

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r},\mathrm{t}) \tag{1.53}$$

et l'équation de Newton (1.45) devient :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial U(\vec{r},\mathrm{t})}{\partial \vec{r}} \tag{1.54}$$

Dans le cadre d'un champ uniforme (U ne dépend plus du temps), la force définie en (1.46) devient :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{\mathrm{d}U(\vec{r})}{\mathrm{d}\vec{r}} \\ \vec{F}.d\vec{r} &= -\mathrm{d}U(\vec{r}) \\ \vec{F}.\vec{r} &= -U(\vec{r}) \end{aligned} \tag{1.55}$$

Annexe A

Problèmes d'équations du mouvement

L'objectif est de trouver la fonction de Lagrange dans les cas suivants placés dans un champ de pesanteur constant g.

A.1 Problème du pendule double oscillant

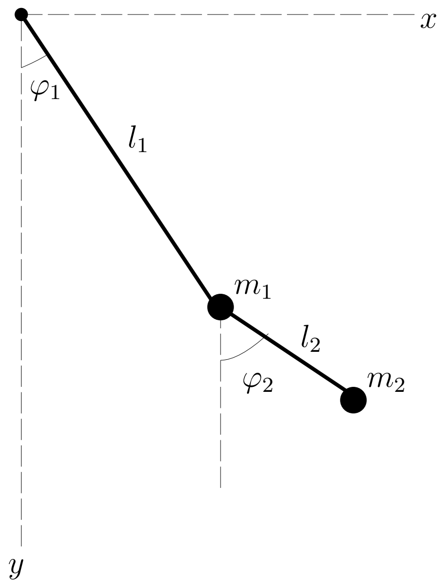

FIGURE A.1 – Pendule double oscillant

La fonction de Lagrange du système $L = L_1 + L_2$. Calculons d'abord $L_1 = T_1 - U_1$ avec :

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1}{2} \left(l_1 \dot{\varphi}_1\right)^2 \\ U_1 = -m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) \end{cases} \tag{A.1}$$

Pour L_2, partons des coordonnées cartésiennes de m_2, soit :

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) \\ y_2 = l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2) \end{cases} \tag{A.2}$$

or il est clair que :

$$\frac{\mathrm{d}f(u(\mathrm{t}))}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}f(u(\mathrm{t}))}{\mathrm{d}u(\mathrm{t})} \frac{\mathrm{d}u(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{A.3}$$

Cela implique donc :

$$\begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ \dot{y_2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} = -l_2 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{cases} \tag{A.4}$$

L'énergie cinétique T_2 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2}(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) \\ &= \frac{m_2}{2}(l_1^2 \cos^2(\varphi_1)\dot{\varphi_1}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + l_2^2 \cos^2(\varphi_2)\dot{\varphi_2}^2 \\ &+ l_1^2 \sin^2(\varphi_1)\dot{\varphi_1}^2 + 2l_1 l_2 \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + l_2^2 \sin^2(\varphi_2)\dot{\varphi_2}^2) \end{aligned}$$

or, nous savons que :

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases} \tag{A.5}$$

ce qui conclut pour l'énergie cinétique à :

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + l_2^2\dot{\varphi_2}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) \tag{A.6}$$

De manière évidente, l'énergie potentielle est :

$$U_2 = -m_2 g(l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)) \tag{A.7}$$

En rassemblant, la fonction de Lagrange du système mécanique total :

$$\begin{aligned} L &= T_1 + T_2 - U_1 - U_2 \\ &= \frac{m_1}{2}(l_1\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + l_2^2\dot{\varphi_2}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) \\ &+ m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g(l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi_2}^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \\ &+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g l_2 \cos(\varphi_2) \end{aligned} \tag{A.8}$$

A.2 Problème du pendule plan

En suivant la même méthodologie que dans l'exercice précédent, nous avons avec x l'abscisse de m_1 :

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2 \\ U_1 = 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

A.3 Problème du pendule plan sur un cercle

A.3.1 Cas fréquence constante

A.3.2 Cas oscillations horizontales

A.3.3 Cas oscillations verticales

A.4 Problème du pendule rotatif à trois masses

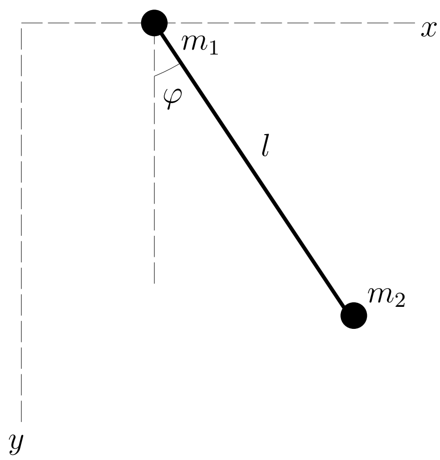

Figure A.2 – Pendule plan

Annexe B

Problèmes des lois du mouvement

B.1 Problème impulsion