بررسی و انجام محاسبات عددی مربوطه به مقاله **"پژوهش بر روی نظریه تابش حرارتی جسم سیاه"** به عنوان تمرین

S.Mustafa

هدف

به عنوان یه تمرین و یادگیری پژوهش در فیزیک و مهم تر از همه استفاده از آنچه که در کلاس درس دانشگاه یا مطالعه کتاب و منابع مختلف یاد گرفته شده به دنبال این مقاله آمدیم تا با داشتن دانش در سطح کارشناسی فیزیک که آن هم در نصف دوره هستم به آن بپردازم تا تحلیل مقاله و نحوه مطالعه کردن آن را برای خود به چالش بکشم. صرفا به تحلیل داده ها و شبیه سازی و اعمال روش جدیدی که در توزیع تابش جسم سیاه که در مقاله ارائه شده با استفاده از برنامه نویسی پیش خواهیم رفت. همچنین از jupyter notebook هایی که در مخزن گیتهاب جمع آوری کردم هم استفاده کردم تا از تجربه کسانی که کار تحلیل جسم سیاه رو انجام دادن استفاده کنم.

۱ مروری بر تابش جسم سیاه و قانون پلانک

ابتدا به طراحی ساده نمودار منحنی طیف سنتی تابش جسم سیاه در شکل ۱ مقاله با تابع توزیع پلانک می پردازیم:

$$e_b(\lambda,T)=C_1\lambda^{-5}\left(e^{e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}-1\right)^{-1}\qquad\{C_1=2hc^2\quad,C_2=\frac{hc}{k}\}\tag{1}$$

طبق اشاره مقاله می توان نشان داد که بیشینه چگالی انرژی پلانک که به ازای طول موجی به شکل $\lambda_{max}=\frac{b}{T}$ روی می دهد که b همان $2897/8268\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$ است. [1] [2]

بیشینه $e_b(\lambda,T)$ وقتی است که مشتق اول تابع نسبت به طول موج صفر شود:

$$\frac{\partial e_b(\lambda,T)}{\partial\lambda}=0$$

با استفاده از Sympy در پایتون معادله رو ساده سازی میکنیم:

$$\frac{C_1\left(C_2e^{\frac{C_2}{T\lambda}}+5T\lambda\left(1-e^{fracC_2T\lambda}\right)\right)}{T\lambda^7\left(1-e^{\frac{C_2}{T\lambda}}\right)^2}=0\tag{2}$$

درنهایت

$$xe^x-5(e^x-1)=0,\quad x=\frac{C_2}{\lambda T}$$

$$5(e^x-1)=xe^x\tag{3}$$

[1] Example 1.1 ,Quantum Mechanics Concepts and Applications,Nouredine Zettili
[2] Exercises 2.4 of Quantum Mechanics, Walter Greiner

۱.۱ روشهای حل عددی

۱.۱.۱ روش Binary Search

با درنظر گرفتن معادله ۳ داریم:

$$\lambda_{max}T = \frac{C_۲}{x} \approx ۲۸۹۷/۸۱۸۶\ \mu m.K, \quad x \approx ۴/۹۶۵۱ \tag{۴}$$

۲.۱.۱ روش نیوتن ــ رافسون

برای اینکه تابع غیرجبری ۳ را با محاسبه عددی با روش نیوتن ــ رافسون حل کنیم، ابتدا معادله را به صورت تابعی به فرم استاندارد $f(x) = 0$ می‌نویسیم:

$$f(x) = ۵(e^x - ۱) - xe^x$$

که مشتق آن نسبت به x برابر است با:

$$f'(x) = ۵e^x - \left(e^x + xe^x\right) = (۴ - x)e^x$$

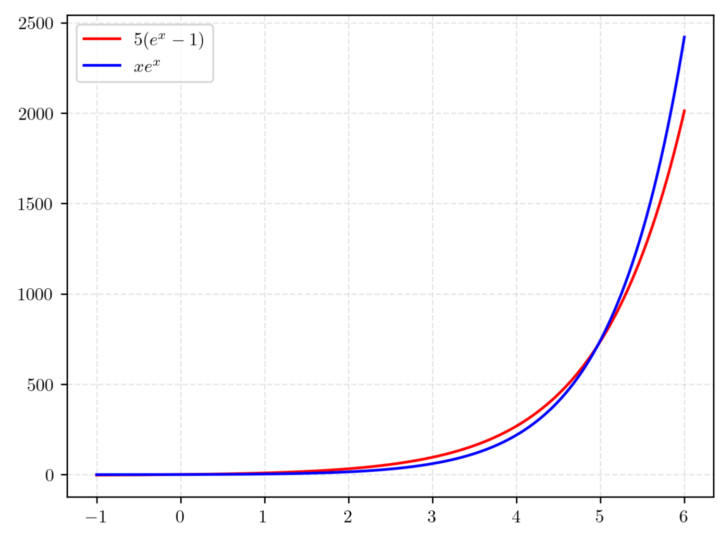
روش نیوتن—رافسون بر پایهٔ فرمول تکراری زیر عمل می‌کند:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

در هر گام، از مقدار تقریبی فعلی x_n و شیب تابع در همان نقطه استفاده می‌شود تا تخمین جدید $x_{n+۱}$ محاسبه گردد. این فرآیند تا زمانی که اختلاف بین دو تخمین پیاپی از یک آستانهٔ دقت ε کمتر شود، ادامه دارد.

در کتابخانهٔ SciPy، می‌توان این معادله را با تابع `optimize.newton()` حل کرد که در آن x. مقدار اولیهٔ حدس ریشه است. این تابع داخلی، فرمول نیوتن—رافسون را به کار می‌گیرد و پس از همگرایی، مقدار تقریبی ریشه را باز می‌گرداند. درنهایت داریم:

$$\lambda_{max}T = \frac{C_۲}{x} \approx ۲۸۹۷/۸۱۸۶\ \mu m.K, \quad x \approx ۴/۹۶۵۱۱۴ \tag{۵}$$

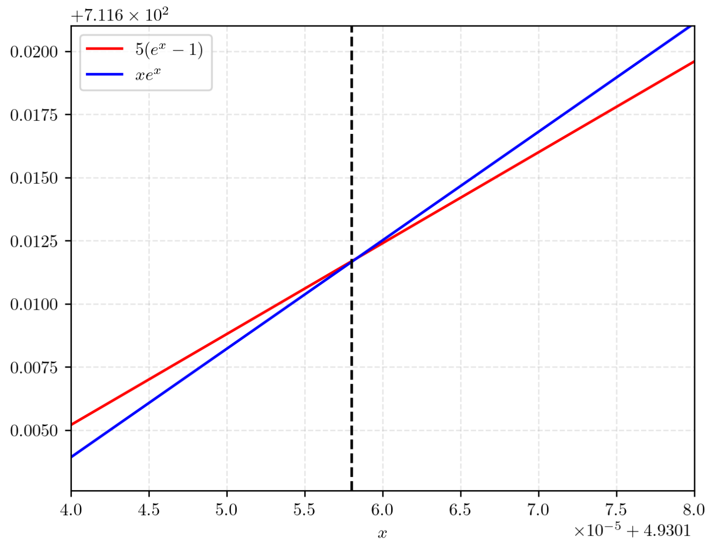


شکل ۱: ۲ منحنی معادله غیرجبری ۳

۳.۱.۱ روش تصویر (نمودار)

با استفاده از روش تصویری که شما با دیدن نمودار و کوچک کردن بازه به مقدار خود می رسید درنهایت داریم:

$$\lambda_{max}T = \frac{C_{۲}}{x} \approx ۲۹۱۸/۳۶۴۹ \; \mu m.K, \quad x \approx ۴/۹۳۰۱۵۸۰ \tag{۶}$$



شکل ۲: تقاطع ۲ منحنی

۴.۱.۱ روش تکرار (Fixed-Point Iteration)

برای حل معادله ۳ باید ابتدا آن را به فرم نقطهٔ ثابت بازنویسی کنیم. با تقسیم طرفین بر e^x داریم:

$$۵\left(۱ - e^{-x}\right) = x$$

که به صورت

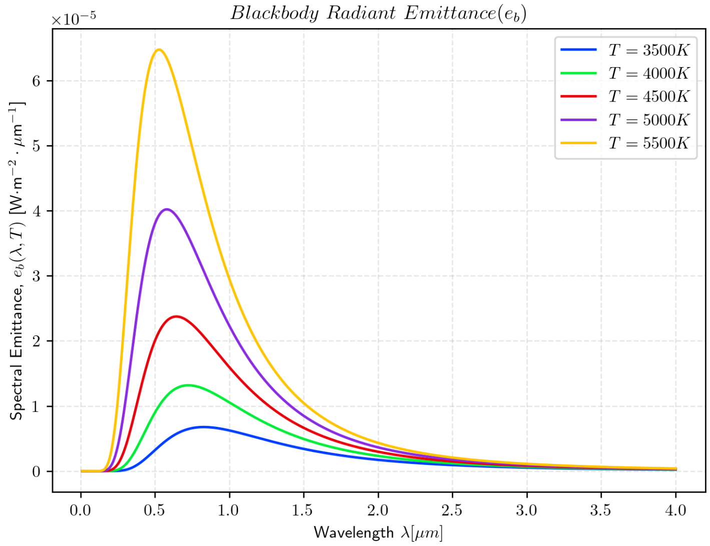
$$x = g(x) = ۵\left(۱ - e^{-x}\right)$$

در می‌آید. سپس با انتخاب یک حدس اولیه $x_۰$ و استفاده از رابطهٔ تکراری $x_{n+۱} = g(x_n)$ مقادیر جدید محاسبه می‌شود تا شرط همگرایی $|x_{n+۱} - x_n| < \varepsilon$ برقرار گردد. با این روش و انتخاب $x_۰ = ۶$، مقدار نهایی ریشه برابر است با

$$\lambda_{max}T = \frac{C_{۲}}{x} \approx ۲۸۹۷/۸۱۸۵ \; \mu m.K, \quad x \approx ۴/۹۶۵۱۱۴۲ \tag{۷}$$

۲.۱ رسم نمودار

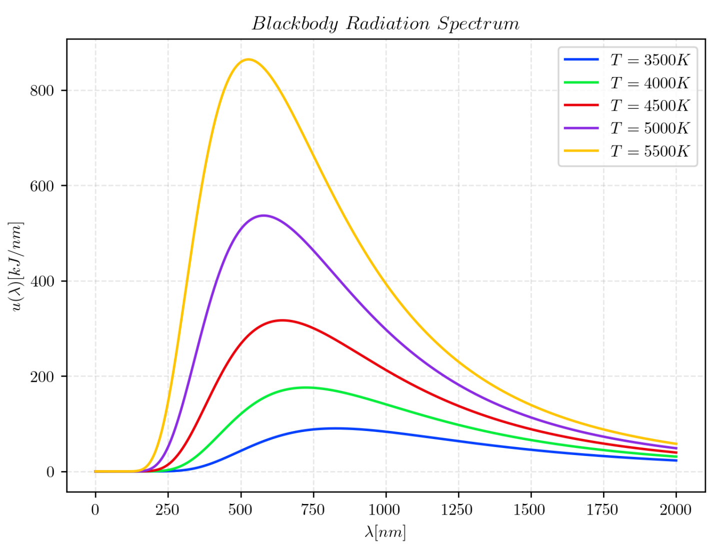
با توجه به notebook که ارائه شده نمودارها را ترسیم کردیم ابتدا رسم تابع ۱ انجام شده که نتیجه بدین صورت است:



شکل ۳: نمودار $e_b(\lambda, T)$

سپس طبق تصویر منحنی طیف سنتی تابش جسم سیاه که در مقاله بود و طول موجی بر حسب نانومتر داشت را برحسب تابع ۸ ترسیم کردیم:

$$u(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^{۵}\,(e^{\beta} - ۱)} \times ۱۰^{-۳} \quad (\alpha = ۸\pi hc, \quad \beta = \frac{hc}{\lambda kT}) \qquad (۸)$$



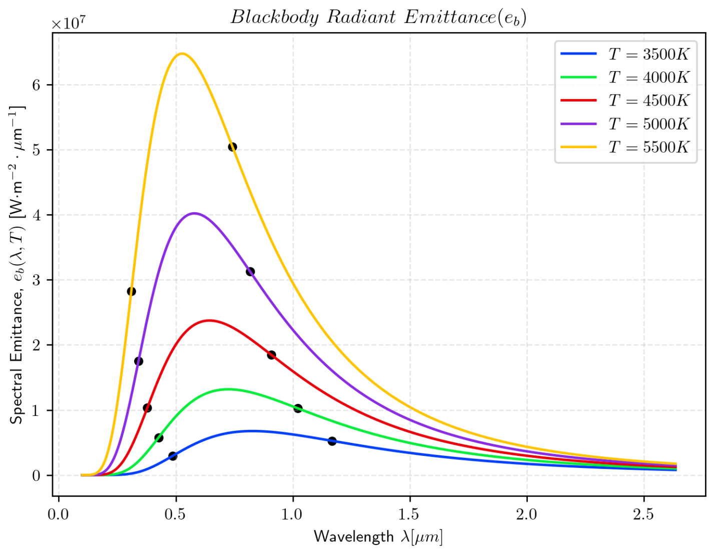
شکل ۴: نمودار $u(\lambda)$

۳.۱ اهمیت محاسبه نقاط انعطاف در مقاله

مقاله نقاط انعطاف (inflection points) منحنی قانون پلانک را محاسبه می‌کند تا شکل و تقارن منحنی تابش جسم سیاه را تحلیل کند. این نقاط، جایی که مشتق دوم شدت تابش صفر می‌شود (با ثابت‌های $\lambda_{li}T \approx ۴۰۸۲/۶۶\, \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$ و $\lambda_{ri}T \approx ۱۷۰۳/۸۲\, \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$)، برای تعریف عرض نسبی و عامل تقارن منحنی استفاده می‌شوند و مرزهایی را مشخص می‌کنند که منحنی از شیب تند به ملایم تغییر می‌کند. علاوه بر این، مقاله از این نقاط برای توسعه یک روش نوین ترمومتری مبتنی بر طول موج بهره می‌برد، که بر پایه نسبت $\lambda_{li}/\lambda_{ri}$ یا موقعیت آن‌ها نسبت به λ_m (طول موج ماکزیمم) استوار است و می‌تواند دقیق‌تر از روش‌های سنتی مانند قانون وین باشد.

این محاسبات با معادلات نرمالایزاسیون (مانند (۶)، (۷) و (۸) در مقاله) ترکیب می‌شوند تا دامنه طول موج‌های مؤثر (مثل λ_{min} تا λ_{max} برای η کوچک) را تعیین کنند، به ویژه در دماهای ۲۰۰ تا ۶۰۰۰ K. مقاله نشان می‌دهد که نقاط انعطاف می‌توانند مرزهایی عملی برای مدل‌سازی تابش فراهم کنند و این پایه‌ای برای نوآوری‌های کاربردی در سنجش حرارتی و تحلیل طیفی است.

نقاط عطف با استفاده از `nslove` بدست آمدند و از این برای دماهای مختلف میتوان استفاده کرد:



شکل ۵: نقاط عطف در دماهای مختلف

رابطه بین نقطه عطف چپ λ_{il} و نقطه عطف راست λ_{ir} با دمای T به صورت زیر استخراج شده:

$$\lambda_{il}T = ۴۰۸۲/۶۹۹۹\, \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \tag{۹}$$

$$\lambda_{ir}T = ۱۷۰۳/۸۲۲۹\, \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \tag{۱۰}$$