NTRO DE MASA

Cada partícula está sometida al campo gravitatorio de fuerza W, llamado peso.
La dirección de esta fuerza, si se prolonga, pasa por el centro de la tierra.

Centro de masa de un sistema de partículas:

Expresión general:

La posición del centro de masa de un sistema de partículas viene dada por la expresión:

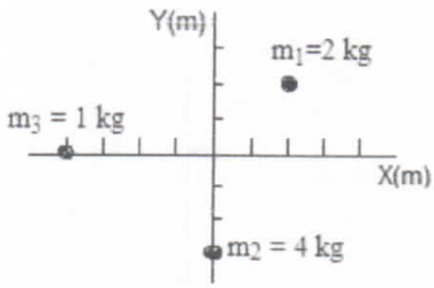
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Las coordenadas x_c, y_c, z_c del centro de masas son

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Problemas

1.- Determinar la posición del centro de masas del sistema de partículas de la figura



La posición de la masa $m_1 = 2\ kg$ es $\vec{r}_1 = 2\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

La posición de la masa $m_2 = 4\ kg$ es $\vec{r}_2 = -3\,\hat{\jmath}$

La posición de la masa $m_3 = 1\ kg$ es $\vec{r}_3 = -4\,\hat{\imath}$

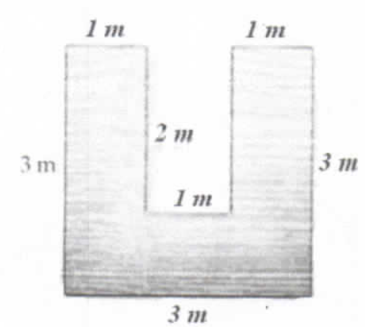
2.- Halle el centro de masa de tres partículas de masas iguales a $m_1 = m_2 = m_3 = 3kg$, si se sabe que sus posiciones son:

$$\vec{r}_1 = (2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 4\hat{k})\,m \quad \vec{r}_2 = (-2\,\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k})\,m \quad \vec{r}_3 = (3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 5\hat{k})\,m$$

Piezas con simetría. Otra forma de ahorrarse trabajo matemático consiste en fijarse si el objeto en cuestión posee algún tipo de simetría (ejes de simetría, planos de simetría, etc). Si es así el C.M. debe encontrarse en algún punto de dicho elemento de simetría.

Problema

3.- Se tiene un trozo de madera de masa m, que la masa tiene una distribución homogénea. Hallar su centro de masa de la configuración, ver figura.

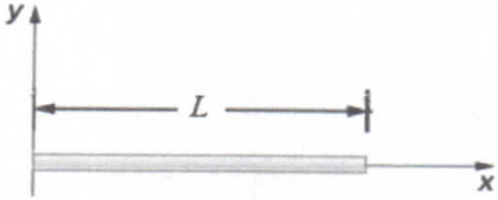


CENTRO DE MASA DISTRIBUCION CONTINUA

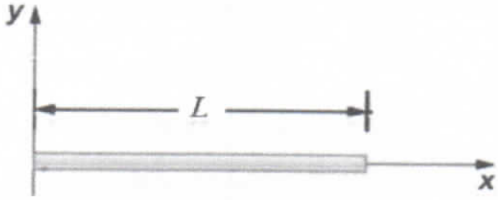
$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} \qquad y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm} \qquad z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.-

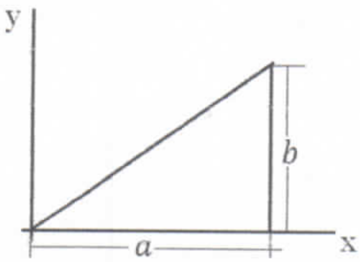
1.- Calcular el centro de masa de una barra donde su masa varía uniformemente con su longitud L.



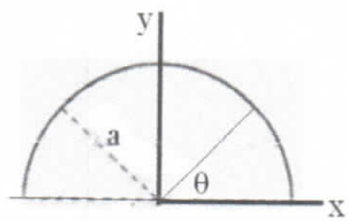
2.- Calcular el centro de masa de una barra de longitud L y varia su masa linealmente con x de acuerdo a la expresión $\lambda = \alpha x$; donde α es una constante.



3.- Calcular el centro de masa del triángulo rectángulo su masa varia uniformemente con su superficie (ver figura)



4.- Hallar el centro de masa de alambre que forma una semicircunferencia de radio a que tiene una distribución homogénea.



1.- $\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 2\hat{j})$ metros $\vec{r}_2 = (-3\hat{j})$ metros $\vec{r}_3 = (-4\hat{i})$ metros.

$m_1 = 2$ Kg , $m_2 = 4$ Kg , $m_3 = 1$ Kg

aplicando:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2(2\hat{i} + 2\hat{j}) + 4(-3\hat{j}) + 1(-4\hat{i})}{2 + 4 + 1}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\cancel{4\hat{i}} + 4\hat{j} - 12\hat{j} - \cancel{4\hat{i}}}{7}$$

$$\vec{r}_{CM} = -\frac{8}{7}\hat{j}$$

vector posición del centro de masa.

$$\underline{\underline{\vec{r}_{CM} = \left(0, -\frac{8}{7}, 0\right)}}$$

2.- $\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$m $\vec{r}_2 = (-2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$m $\vec{r}_3 = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$m

masas iguales $m_1 = m_2 = m_3 = 3$ Kg

aplicando: $\vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + 3(-2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + 3(3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})}{3 + 3 + 3}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\cancel{3}[(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + (-2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})]}{\cancel{9}_3}$$

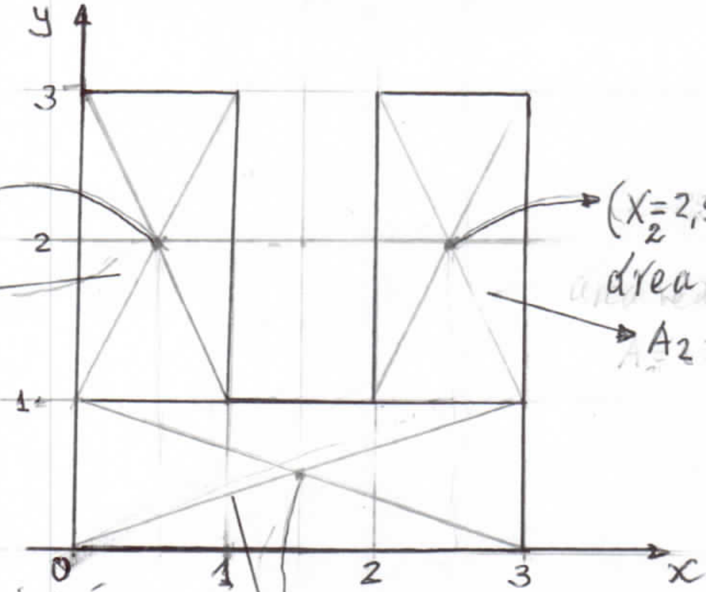
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\cancel{2\hat{i}} + \cancel{3\hat{j}} + 4\hat{k} - \cancel{2\hat{i}} - \cancel{3\hat{j}} + \cancel{5\hat{k}} + 3\hat{i} + 4\hat{j} - \cancel{5\hat{k}}}{3}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}{3} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$$

$r_{CM} = \hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$ también $\vec{r}_{CM} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

3.-

$(x_1=0{,}5\,;\,y_1=2)$
área rectángulo
$A_1 = 1\times 2 = 2\,m^2$



$(x_2=2{,}5\,;\,y_2=2)$
área rectángulo
$A_2 = 1\times 2 = 2\,m^2$

$(x_3=1{,}5\,;\,y_3=0{,}5)$
área del rectangulo $A_3 = 3\times 1 = 3\,m^2$

Se tiene los vectores posición

$\vec{r}_1 = (0{,}5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath})\,m$

$\vec{r}_2 = (2{,}5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath})\,m$

$\vec{r}_3 = (1{,}5\,\hat{\imath} + 0{,}5\,\hat{\jmath})\,m$

Se tiene la ecuación:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Se tiene lo siguiente densidad de la madera

$\rho = \frac{m}{V}$ despejando $m = \rho V$

y el volumen V será: e espesor de la madera y A área de la madera.

por lo tanto el volumen: $V = eA$

la masa: $\underline{m = \rho e A}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\sum \rho e A_i \vec{r}_i}{\sum \cancel{\rho e} A_i}$$

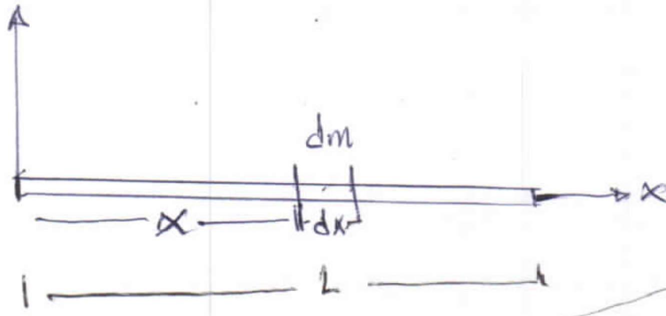
Se tendra:
y queda: $\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum A_i \vec{r}_i}{\sum A_i}}$ aplicando al problema:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 + A_3\vec{r}_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2(0{,}5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}) + 2(2{,}5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}) + 3(1{,}5\hat{\imath}+0{,}5\hat{\jmath})}{2+2+3} =$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4{,}5\hat{\imath} + 1{,}5\hat{\jmath}}{7} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{10{,}5\,\hat{\imath} + 9{,}5\,\hat{\jmath}}{7}$$

$\vec{r}_{CM} = \frac{10{,}5}{7}\hat{\imath} + \frac{9{,}5}{7}\hat{\jmath}$ también $x_{CM} = \frac{10{,}5}{7}\,m$ y $y_{CM} = \frac{9{,}5}{7}\,m$

1°



densidad lineal

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

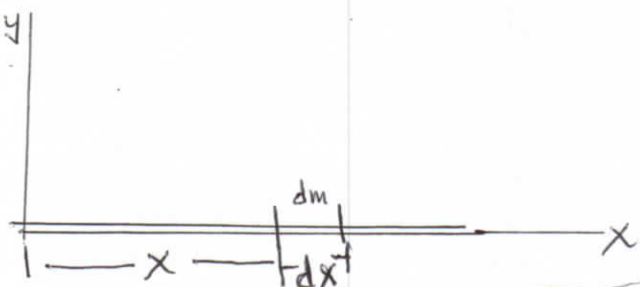
$$dm = \lambda\, dx$$

$$X_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad \text{donde } dm = \lambda\, dx$$

$$X_{CM} = \frac{\int x \lambda\, dx}{\int \lambda\, dx} = \frac{\cancel{\lambda} \int_0^L x\, dx}{\cancel{\lambda} \int dx} = \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^L}{x\Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{2}(L^2 - 0^2)}{L - 0} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{1}{2}L$$

$$X_{CM} = \frac{1}{2}L$$

2°



datos $\lambda = \alpha x$

densidad lineal $\lambda = \frac{dm}{dx}$

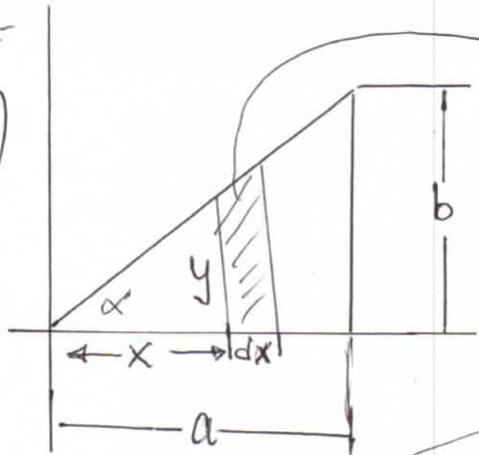
$$dm = \lambda\, dx$$

$$X_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \lambda\, dx}{\int \lambda\, dx} = \frac{\int x (\alpha x) dx}{\int \alpha x\, dx} = \frac{\cancel{\alpha} \int x^2 dx}{\cancel{\alpha} \int x\, dx} = \frac{\int_0^L x^2 dx}{\int_0^L x\, dx} =$$

$$\Rightarrow X_{CM} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^L}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^L} = \frac{\frac{L^3}{3}}{\frac{L^2}{2}} = \frac{2}{3}L$$

33

a)



$\rightarrow dA = y\,dx$

densidad superficial porque es placa

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \sigma\, dA$$

$$X_{CM} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\,\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int x\,\sigma\,y\,dx}{\int \sigma\,y\,dx}$$

$$X_{CM} = \frac{\cancel{\sigma}\int x\,y\,dx}{\cancel{\sigma}\int y\,dx} = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}$$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$; $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

Igualando:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

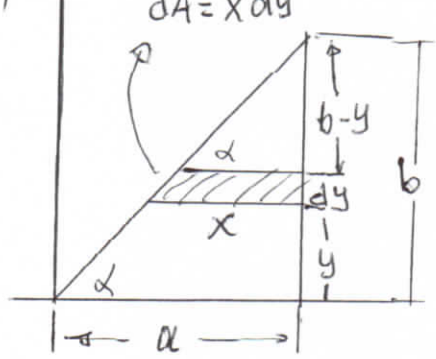
$$X_{CM} = \frac{\int x\left(\frac{b}{a}x\right)dx}{\int\left(\frac{b}{a}x\right)dx} = \frac{\cancel{\frac{b}{a}}\int_0^a x^2\,dx}{\cancel{\frac{b}{a}}\int_0^a x\,dx}$$

$$X_{CM} = \frac{\int_0^a x^2\,dx}{\int_0^a x\,dx} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2a^{\cancel{3}}}{3\cancel{a^2}} = \frac{2a}{3}$$

$$X_{CM} = \frac{2a}{3}$$

b)

dA = x dy



densidad superficial porque es placa

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \sigma\,dA$$

$$Y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\,\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int y\,\sigma\,x\,dy}{\int \sigma\,x\,dy}$$

$$Y_{CM} = \frac{\cancel{\sigma}\int y\,x\,dy}{\cancel{\sigma}\int x\,dy} = \frac{\int y\,x\,dy}{\int x\,dy} = \frac{\int y\left[\frac{a}{b}(b-y)\right]dy}{\int\frac{a}{b}(b-y)\,dy}$$

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ $\tan\alpha = \frac{b-y}{x}$

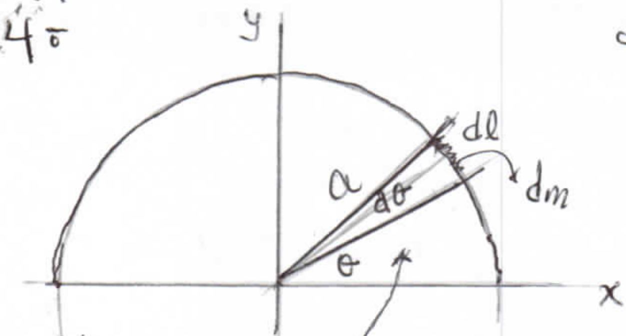
Igualando: despejando x

$$\frac{b}{a} = \frac{b-y}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{b}(b-y)$$

$$Y_{CM} = \frac{\cancel{\frac{a}{b}}\int y(b-y)\,dy}{\cancel{\frac{a}{b}}\int(b-y)\,dy} = \frac{\int_0^b y(b-y)\,dy}{\int_0^b(b-y)\,dy}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{3}b$$

4°

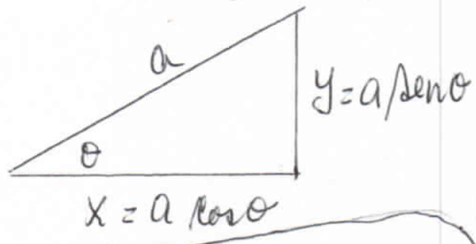


densidad lineal $\lambda = \dfrac{dm}{d\ell} \Rightarrow dm = \lambda\, d\ell$

longitud de arco $\ell = a\theta$

en forma diferencial. $\underline{d\ell = a\, d\theta}$

triángulo que configura



a) $$X_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \lambda\, d\ell}{\int \lambda\, d\ell}$$

$$X_{CM} = \frac{\cancel{\lambda}\int x\, a\, d\theta}{\cancel{\lambda}\int a\, d\theta} = \frac{\cancel{a}\int x\, d\theta}{\cancel{a}\int d\theta}$$

queda $$X_{CM} = \frac{\int x\, d\theta}{\int d\theta} = \frac{\int a\cos\theta\, d\theta}{\int d\theta} = \frac{a\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} d\theta} = \frac{a \operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi}}{\theta\Big|_0^{\pi}}$$

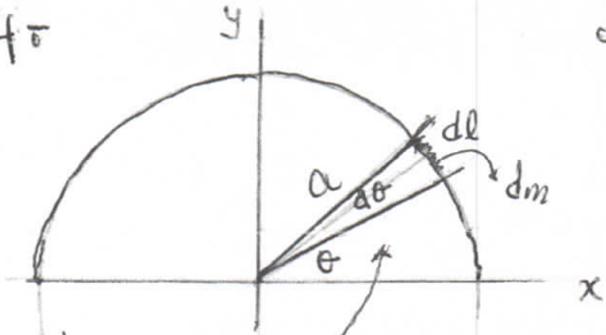
$$X_{CM} = \frac{a(\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}\pi}} - \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen} 0}})}{\pi - 0} \Rightarrow \underline{X_{CM} = 0}$$

b) $$Y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int y \lambda\, d\ell}{\int \lambda\, d\ell} = \frac{\cancel{\lambda}\int y\, d\ell}{\cancel{\lambda}\int d\ell} = \frac{\int y\, d\ell}{\int d\ell} = \frac{\int y\, a\, d\theta}{\int a\, d\theta} = \frac{\cancel{a}\int y\, d\theta}{\cancel{a}\int d\theta}$$

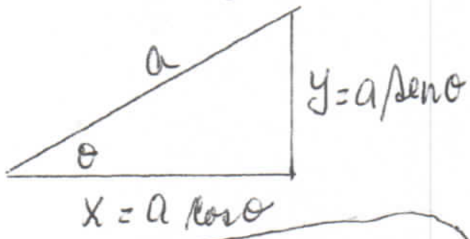
$$Y_{CM} = \frac{\int_0^{\pi} a \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} d\theta} = \frac{a\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} d\theta} = \frac{-a\cos\theta\Big|_0^{\pi}}{\theta\Big|_0^{\pi}} = \frac{-a(\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}} - \overset{1}{\cancel{\cos 0}})}{\pi - 0}$$

$$Y_{CM} = \frac{-a(-1-1)}{\pi} = \underline{\frac{2a}{\pi}}$$

4.



triángulo que configura



densidad lineal $\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda\, dl$

longitud de arco $l = a\theta$

en forma diferencial. $\underline{dl = a\,d\theta}$

a) $$X_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \lambda\, dl}{\int \lambda\, dl}$$

$$X_{CM} = \frac{\cancel{\lambda} \int x\, a\, d\theta}{\cancel{\lambda} \int a\, d\theta} = \frac{\cancel{a} \int x\, d\theta}{\cancel{a} \int d\theta}$$

queda $$X_{CM} = \frac{\int x\, d\theta}{\int d\theta} = \frac{\int a \cos\theta\, d\theta}{\int d\theta} = \frac{a \int_0^\pi \cos\theta\, d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{a \operatorname{sen}\theta \Big|_0^\pi}{\theta \Big|_0^\pi}$$

$$X_{CM} = \frac{a(\overset{0}{\operatorname{sen}\pi} - \overset{0}{\operatorname{sen}0})}{\pi - 0} \Rightarrow \underline{X_{CM} = 0}$$

b) $$Y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int y \lambda\, dl}{\int \lambda\, dl} = \frac{\cancel{\lambda} \int y\, dl}{\cancel{\lambda} \int dl} = \frac{\int y\, dl}{\int dl} = \frac{\int y\, a\, d\theta}{\int a\, d\theta} = \frac{\cancel{a} \int y\, d\theta}{\cancel{a} \int d\theta}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int_0^\pi a \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{a \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{-a \cos\theta \Big|_0^\pi}{\theta \Big|_0^\pi} = \frac{-a(\overset{-1}{\cos\pi} - \overset{1}{\cos 0})}{\pi - 0}$$

$$Y_{CM} = \frac{-a(-1-1)}{\pi} = \underline{\frac{2a}{\pi}}$$