Guia 1 - Algoritmos y estructuras de datos

Santiago Manjarín - UBA Exactas

Agosto 2023

1.1 Repaso de lógica proposicional

Ejercicio 1: Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es verdadero y el de x e y es falso.

A. $(\neg x \vee b)$ **True**

B. $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$ **True**

C. $\neg(c \vee y)$ **False**

D. $\neg(y \vee c)$ **False**

E. $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$ **False**

F. $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$ **True**

G. $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$ **True**

H. $(\neg c \wedge \neg y)$ **False**

Ejercicio 2: Considere la siguiente oracion: "Si es mi cumpleanos o hay torta, entonces hay torta"

A. Escribir usando logica proposicional y realizar la tabla de verdad

En lógica proposicional sería:

$$(p \vee q) \rightarrow q$$

Esto siendo p: Es mi cumpleanos q: Hay torta

B. Asumiendo que la oracion es verdadera y hay una torta, que se puede concluir

Solamente se puede concluir con que hay torta. Importante ver que no es bimplicacion

C. Asumiendo qe la oracion es verdadera y no hay una torta, que se puede concluir?

Puedo concluir que tampoco es valida p, entonces no hay torta ni es mi cumpleanos. Esto lo se porque si (p o q) es valida, q tiene que ser valida. Si se que q es falsa, entonces p tambien tiene que serlo.

D. Suponiendo que la oracion es mentira (es falsa), se puede concluir algo?

En el unico caso que se hace falsa es cuando es mi cumpleanos y no hay torta.

Ejercicio 3: Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de formulas son equivalencias. Indicar en cada paso que regla se utilizo

A.
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

$$\neg p \rightarrow \neg q \vee \neg r$$

$$\neg p \rightarrow (q \wedge r)$$

"

B.
- $\neg(\neg p) \to (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

$$p \to p \vee q$$
$$\neg p \vee (p \vee q)$$
$$True$$

No se cumple

C.
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \wedge False)) \to \neg(\neg p \wedge q)$
- $p \wedge \neg q$

$$(p \wedge \neg p) \to \neg(p \to q)$$
$$False \to ...$$

Por relacion de fuerza, siempre $True$. No es hay equivalencia.

D.
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $\neg p \to q$

$$(p \vee (\neg p \wedge q))$$
$$\neg p \to (\neg p \wedge q)$$
$$\neg p \to q$$

E.
- $(p \to (q \wedge \neg(q \to r))$
- $(\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge (q \wedge \neg r))$

$$\neg p \vee (q \wedge \neg(\neg q \vee r))$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$$

Distributiva y De morgan

Ejercicio 4: Determinar si las siguientes formulas son tautologias, contradicciones o contingencias

A. $(p \vee \neg p)$ **Tautologia**

B. $(p \wedge \neg p)$ **Contradiccion**

C. $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$ **Tautologia** por Rel de fuerza

D. $((p \wedge q) \to p)$ **Tautologia** por Distributiva

E. $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$ **Tautologia**

F. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to q)))$ **Contingencia**

Ejercicio 5: Dadas las proposiciones logicas α y β se dice que α es mas fuerte que β si y solo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautologia. En este caso, tambien decimos que β es mas debil que α. Determinar la relacion de fuerza de los siguientes pares de formulas:

A. $True$, $False$

B. $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

C. p, $(p \wedge q)$

D. p, $(p \vee q)$

E. p, q

F. p, $(p \rightarrow q)$

Cual es la proposicion mas fuerte y cual es la mas debil de las que aparecen en este ejercicio?

A. $False \rightarrow True$

B. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

C. $(p \wedge q) \rightarrow p$

D. $p \rightarrow (p \vee q)$

E. p, q No hay relacion de fuerza

F. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

La mas fuerte es $False$, la mas debil es $True$

1.2 Trivaluada

Ejercicio 6: Asumiendo que el valor de verdad de b y c es verdadero, el de a es falso y el de x e y es indefinido, indicar cuales de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresion no se indefina nunca

A. $(\neg x \vee b)$

B. $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

C. $\neg(c \vee y)$

D. $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

E. $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

F. $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

G. $(\neg c \wedge \neg y)$

RTA:

A. Siempre indefine $\perp$

B. $((c \vee_L (y \wedge a)) \vee b)$

C. $\neg(c \vee_L y)$

D. Siempre indefine $\perp$

E. $((c \vee_L y) \wedge (a \vee b))$

F. $(((c \vee_L y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee_L (y \wedge a) \vee b))$

G. Siempre indefine $\perp$

Ejercicio 7: Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca estan indefinidas
- r se indefine sii q es verdadera

Proponer una formula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

A. Al menos una es verdadera.

$$p \vee_L q \vee_L r$$

B. Ninguna es verdadera

$$(\neg p \wedge_L \neg q) \wedge_L \neg r$$

C. Exactamente una de las tres es verdadera

Siendo $A \veebar B$ lo mismo a $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ (Aclaracion: doy por hecho que es $\veebar_L$, no lo pongo para que sea mas prolijo)

$$(q \wedge_L \neg p) \veebar (\neg q \wedge_L \neg p \wedge_L r) \veebar (\neg q \wedge_L \neg r \wedge_L p)$$

D. Solo p y q son verdaderas

$$(p \wedge_L q) \leftrightarrow (True \vee_L r)$$

E. No todas al mismo tiempo son verdaderas

$$p \rightarrow ((q \vee_L r) \vee_L \neg r)$$

F. r es verdadera

$$\neg p \wedge_L \neg q \wedge_L r$$

1.3 Cuantificadores

Ejercicio 8: Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Explicar cual es el error de traduccion a formulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cual sucede el problema y luego corregirlo:

A. *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*

$$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$$

En este caso cuando no i no esta entre 0 y 10, la formula da Falso y no tendria porque. Lo arreglamos asi:

$$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$$

B. *"Algun natural menor a 10 cumple P"*

$$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$$

Naturales no tienen 0. Ademas el $\rightarrow$ puede dar un falso positivo si i esta afuera del rango y cumple P

$$(\exists i : \mathbb{N})((i < 10) \wedge P(i))$$

C. *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q:*

$$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$$

El mismo problema con los naturales que antes. Ademas, si cumple $P \rightarrow Q$, pero si puede pasar que solo cumpla Q.

$$(\forall x : \mathbb{N})((x < 10) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x)))$$

D. *"No hay ningun natural menor a 10 que cumpla P y Q:"*

$$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$$

Al ser dos cuantificadores diferentes, podemos estar hablando de dos x diferentes

$$\neg((\exists x : \mathbb{N})(x < 10 \wedge P(x)) \wedge Q(x))$$

Ejercicio 9: Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- *"Existe un unico numero natural menor a 10 que cumple P"*

$$(\exists n : \mathbb{N})((n < 10) \wedge P(n))$$

- *"Existen dos numeros naturales menores a 10 que cumple P"*

$$(\exists a : \mathbb{N})((\exists b : \mathbb{N})(a, b < 10 \wedge a \neq b \wedge P(a) \wedge P(b)))$$

- *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*

$$(\forall n : \mathbb{N})(esPar(n) \rightarrow (P(n) \rightarrow \neg Q(n)))$$

- *"Si hay un numero natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplemn P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

$$(\exists a : \mathbb{N})(\forall b : \mathbb{N})((a < 10 \wedge \neg P(a)) \rightarrow (b < 10 \rightarrow \neg Q(b)))$$

$$\wedge$$

$$(\forall a_1, a_2 : \mathbb{N})(\forall b : \mathbb{N})(((b < 10 \rightarrow P(b)) \rightarrow ((a_1 \neq a_2) \wedge (a_1, a_2 < 10)) \rightarrow (Q(a_1) \wedge Q(a_2)))$$

Seguro esta muy mal esto

Ejercicio 10: Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relacion de fuerza entre las dos formulas

1. $P(3)$ y $k > 5 \wedge (\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < k) \rightarrow P(i))$
2. $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$ y $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$
3. $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$ y $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$
4. $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n)$ y $k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n)))$