

MS2SC : BE Dynamique des Structures

1 Écriture du problème mécanique

Question 1 Intégration de la relation de comportement dans l'équation d'équilibre :

$$A \frac{\partial(E \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x} - \mu A \frac{\partial U}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1)$$

on obtient comme solution, en négligeant μ

$$U(x, t) = v(x)u(t) = A \exp(wx/c) \exp(wt) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

2 Résolution sur la base de modes propres

On a les matrices de raideur et de masse élémentaires :

$$Ke = \frac{ES}{2l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Me = \frac{\rho l_e S}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

On peut ainsi créer les matrices de raideur et de masse du problème par assemblage des matrices élémentaires de la façon suivante :

```
K = zeros (Ne+1);
for i=1:Ne
    for j=1:size(Ke,1)
        for k=1:size(Ke,1)
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
        end
    end
end
```

On crée aussi la matrice $K_v = \alpha M + \beta K$ et la matrice des forces en appliquant un créneau de valeur 30 sur le bout de la poutre seulement.

On calcule les valeurs propres du problème $[V \ D] = eig(M \setminus K)$. On trie les valeurs propres par ordre croissant : $[Omega, I] = sort(diag(D))$. Et on remet dans l'ordre $V \ W = V(:, I)$.

Dans le cadre d'une poutre à 200 éléments, les valeurs propres sont des multiples de la première. Dans ce cas précis, on a $f_{principale} = 629 \text{ Hz}$ ie. $T_{principale} = 1.6 \text{ ms}$. On retient cette valeur pour la suite, tout en se rappelant que les périodes propres des harmoniques sont plus faibles : $T_{ke \text{ harmonique}} = \frac{1}{k} T_{principale}$

On peut dorénavant choisir de travailler sur une seule partie des modes propres. On a choisit de prendre les 20 premiers modes propres en restreignant la matrice V à une matrice Q de taille : Nombre éléments x 20. On détermine ainsi les nouvelles matrices restreintes :

$$Kq = Q.' K Q$$

$$Mq = Q.' M Q$$

$$Uq = Q.' U$$

Afin de prendre en compte l'encastrement en zéro on va supprimer la première ligne et la première colonne.

3 Etude de différents schéma d'intégration

3.1 Création des différents chargements

On crée les différents types de chargement à appliquer au bout de la poutre :

— Creneau :

```
for i = 1:Nt/2 ;
    Fcren(:,i) = F;
end
```

— Echelon :

```
for i = 1:Nt ;
    Fech(:,i) = F;
end
```

— Rampe :

```
for i = 1:Nt ;
    Framp(:,i) = F/T*i;
end
```

— Sinus :

```
for i = 1:Nt ;
    Fsin(:,i) = sin(i);
end
```

3.2 Schéma d'intégration : Euler

Pour chacun on va faire un schéma d'intégration d'Euler à différents pas de temps :

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= u(t_n) + \Delta t \dot{u}(t_{n+1}) \\ \dot{u}(t_{n+1}) &= \dot{u}(t_n) + \Delta t \ddot{u}(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

Avec l'équation d'équilibre sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\ddot{u}(t_{n+1}) = M^{-1}(F(t_{n+1}) - Ku(t_{n+1})) \quad (6)$$

On va écrire les relations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u(t_{n+1}) \\ \dot{u}(t_{n+1}) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} u(t_n) \\ \dot{u}(t_n) \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F(t_{n+1})\Delta t \end{bmatrix} \quad (7)$$

with

$$A = \begin{bmatrix} Id & -\Delta t * Id \\ M^{-1}K\Delta t & Id \end{bmatrix}$$

Sous Matlab, nous avons codé la méthode d'Euler de la façon suivante :

```
tk = T/Nt;
U0 = zeros([2*(Ne) 1]);
A = \begin{bmatrix}
    eye(Ne) & -tk*eye(Ne) \\
    tk*M\backslash K & 1*eye(Ne)
\end{bmatrix}
U = zeros([2*(Ne) Nt]);
U(:,1) = 0;
for i = 2:Nt
    Fm = \begin{bmatrix} zeros(Ne,1) \\
    tk*M\backslash Fsin(:,i) \end{bmatrix}
```

```

U(:,i) = A \backslash U(:,i-1) + A\backslash Fm;
end
Ud = zeros([ (Ne) Nt]);
Uv = zeros([ (Ne) Nt]);
for j=1:Ne
    Ud(j,:) = U(j,:);
    Uv(j,:) = U(j+Ne,:);
end

```

Pour les différents cas de chargements déterminés plus tôt, nous avons tracé l'évolution du déplacement et de la vitesse pour chacun des pas de temps ce qui nous donne les courbes suivantes :

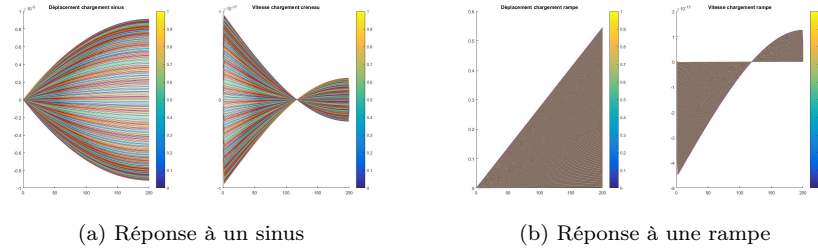


FIGURE 1 – Réponse du système aux différents pas de temps

3.3 Schéma d'intégration : Newmark

La famille de schémas dits de Newmark ont été développés en 1959 pour résoudre des problèmes de dynamique des structures.

Cette famille se base sur deux paramètres : β et γ via les équations suivantes :

$$\underline{\dot{u}}_{n+1} = \underline{\dot{u}}_n + h * ((1 - \gamma) * \underline{\ddot{u}}_n + \gamma * \underline{\ddot{u}}_{n+1}) \quad (8)$$

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + h * \underline{\dot{u}}_n + \frac{h^2}{2} * ((1 - 2\beta) \underline{\ddot{u}}_n + 2\beta \underline{\ddot{u}}_{n+1}) \quad (9)$$

On remarque qu'en décomposant β en β_1 et β_2 sur l'équation (9), on peut décrire les schémas d'Euler.

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + h * \underline{\dot{u}}_n + \frac{h^2}{2} * ((1 - 2\beta_1) \underline{\ddot{u}}_n + 2\beta_2 \underline{\ddot{u}}_{n+1}) \quad (10)$$

On a donc le schéma d'Euler implicite avec $\{\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 1, \gamma = 1\}$, et le schéma d'Euler explicite avec $\{\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 0, \gamma = 0\}$

Les schémas classiques issus de Newmark sont les suivants :

Nom de la méthode	γ	β	Propriétés
Différences Centrées	1/2	0	explicite et conditionnellement stable
Fox Goodwin	1/2	1/12	conditionnellement stable
Accélération linéaire	1/2	1/6	conditionnellement stable
Accélération Moyenne	1/2	1/4	inconditionnellement stable

TABLE 1 – Schémas classiques de Newmark

On va utiliser le schéma de Newmark codé de la façon suivante :

Définition de la matrice de masse généralisée :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \beta * h^2 * \mathbf{K}$$

Conditions initiales : \underline{u}_0

$$\ddot{\underline{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\underline{f}_0 - \mathbf{K} * \underline{u}_0)$$

Boucle sur les pas de temps

Etape de prédiction :

$$\dot{\underline{u}}_{n+1}^p = \dot{\underline{u}}_n + (1 - \gamma) * h * \ddot{\underline{u}}_n$$

$$\underline{u}_{n+1}^p = \underline{u}_n + h * \dot{\underline{u}}_n + \frac{h^2}{2} * (1 - 2\beta) * \ddot{\underline{u}}_n$$

Etape de correction :

$$\ddot{\underline{u}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\underline{f}_{n+1} - \mathbf{K} * \underline{u}_{n+1}^p)$$

Etape d'implémentation :

$$\dot{\underline{u}}_{n+1} = \dot{\underline{u}}_{n+1}^p + h * \gamma * \ddot{\underline{u}}_{n+1}$$

$$\underline{u}_{n+1}^p = \underline{u}_{n+1}^p + h^2 * \beta * \ddot{\underline{u}}_{n+1}$$

Fin Boucle

TABLE 2 – Algorithme de Newmark

On remarque lorsque l'incrément de temps est faible, la présence d'oscillations dans la réponse temporelle à un signal échelon(cf. Fig. 2). Ces oscillations sont logiques, elles correspondent à la traduction des fréquences propres de la structure. On se rappelle que la période propre la plus élevée de la structure est celle du mode principal et que celle-ci est plus élevée que l'incrément de temps choisi.

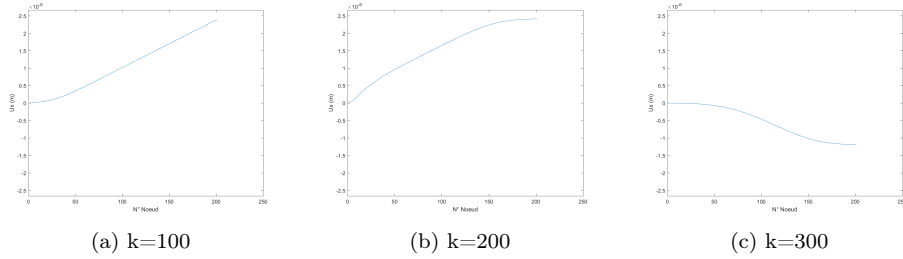


FIGURE 2 – Résolution pour un schéma Accélération Moyenne avec un échelon $F = 30N$ pour $dt = 10\mu s$

Néanmoins, lorsqu'on augmente l'incrément de temps, les oscillations disparaissent : l'incrément de temps est supérieur à toutes les périodes propres. On a donc aucune propagation possible et le résultat obtenu fait abstraction des oscillations dues à la discrétisation de la structure (cf. Fig. 3).

On remarque d'ailleurs les effets de l'hypothèse de Saint-Venant : On constate aux bords de la poutre un comportement non linéaire.

On remarque également autre chose : dans le cadre d'un schéma différences centrées, on a dans certains cas instabilité de la solution (par exemple dans le cas $dt = 1 ms$). Dans le cas où la structure n'est pas réduite, il faut utiliser un incrément de temps inférieur à la valeur critique correspondant à la période propre la plus faible (Dernier harmonique) ce qui nécessite un pas de temps inférieur à $0.1 \mu s$.

L'avantage de la réduction de modèle est que le pas de temps doit être inférieur à la plus petite période conservée. Dans le cas de 10 modes propres conservés, la plus petite période

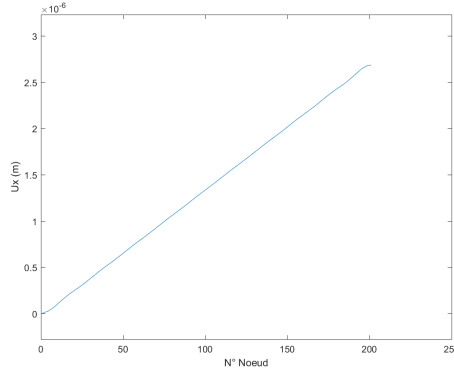


FIGURE 3 – Résolution pour un schéma Accélération Moyenne avec un échelon $F = 30N$ pour $dt = 1ms$

période conservée est de l'ordre de $100 \mu s$. On prend donc un pas de temps de $5 \mu s$ ce qui réduit le temps de calcul.

D'après [?], un pas de temps $0.05 * \text{Periode Propre}_{min}$ convient. Etudions maintenant pourquoi.

4 Analyse de l'algorithme de Newmark

On a vu dans la section précédente que la famille de schéma de Newmark ne convergeait pas toujours. Tentons de savoir pourquoi [1].

4.1 Consistance

Un schéma d'intégration est consistant si pour le vecteur $\mathbf{U} = [U_n \dot{U}_n]$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{h} = \dot{\mathbf{U}}_n \quad (11)$$

Dans le cas d'un schéma de Newmark, cette relation est vérifiée :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{h * \dot{u}_n + \frac{h^2}{2} * ((1 - 2\beta)\ddot{u}_n + 2\beta\ddot{u}_{n+1})}{h * ((1 - \gamma) * \ddot{u}_n + \gamma * \ddot{u}_{n+1})} \right] = \dot{\mathbf{U}}_n \quad (12)$$

Cela prouve la consistance des schémas de Newmark ce qui est une condition nécessaire de convergence de la solution numérique calculée vers la réponse exacte lorsque le pas de temps h tend vers 0.

4.2 Stabilité

L'étude de stabilité est détaillée dans le code Analyse_Spectrale.m fourni

Ecrivons sous forme matricielle l'algorithme de Newmark dans le cas d'un système non-amorti sans effort :

$$\begin{bmatrix} \gamma h \mathbf{K} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} = \begin{bmatrix} (\gamma - 1)h \mathbf{K} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} - (1/2 - \beta)h^2 \mathbf{K} & h \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{U}_n \quad (13)$$

On applique ce schéma à un seul mode de fréquence ω . On notera la fréquence adimensionnée $\Omega = h\omega$. On a :

$$\begin{bmatrix} \gamma \Omega^2 & 1 \\ h(1 + \beta \Omega^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ h\dot{u} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} (\gamma - 1)\Omega^2 & 1 \\ h(1 - (1/2 - \beta)\Omega^2) & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ h\dot{u} \end{bmatrix}_n \quad (14)$$

On analyse la réponse modale via une analyse des modes propres généralisés de ces deux matrices :

Considérons que la réponse modale puisse se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u \\ h\dot{u} \end{bmatrix}_{n+1} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ h\dot{u} \end{bmatrix}_n \quad (15)$$

On a le problème aux valeurs propres :

$$\left(\begin{bmatrix} (\gamma-1)\Omega^2 & 1 \\ h*(1-(1/2-\beta)\Omega^2) & h \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \gamma\Omega^2 & 1 \\ h(1+\beta\Omega^2) & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ h\dot{u} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Les valeurs propres λ sont solutions du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda(2 - (\gamma + \frac{1}{2})\xi^2) + 1 - (\frac{1}{2} - \gamma)\xi^2 = 0 \text{ avec } \xi^2 = \frac{\Omega^2}{1 + \beta\Omega^2} \quad (17)$$

La norme du facteur d'amplification $\rho = |\lambda|$ correspond au rayon spectral du schéma et permet de mesurer l'amplification sur un pas de temps. L'algorithme sera stable si $\rho \leq 1$ ce qui entraîne les propriétés classiques de stabilité des schémas de la famille de Newmark :

$$\begin{cases} 1/2 \leq \gamma \leq 2\beta & \text{Schéma inconditionnellement stable} \\ 1/2 \leq \gamma \text{ \& } \gamma \geq 2\beta & \text{Schéma stable si } h \leq h_c = \frac{1}{\omega\sqrt{\gamma/2-\beta}} \end{cases} \quad (18)$$

Ces propriétés de stabilité sont illustrées sur la Fig.4 dans un graphique représentant le paramètre β en fonction du paramètre γ . Parmi la famille des schémas de Newmark, le schéma de l'accélération moyenne définit le schéma d'intégration inconditionnellement stable de précision maximale. Dans le cas général, l'exigence que $\rho \leq 1$ a pour conséquence que $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Dans le cas où $\gamma > \frac{1}{2}$, on introduit ce que l'on appelle de l'amortissement numérique.

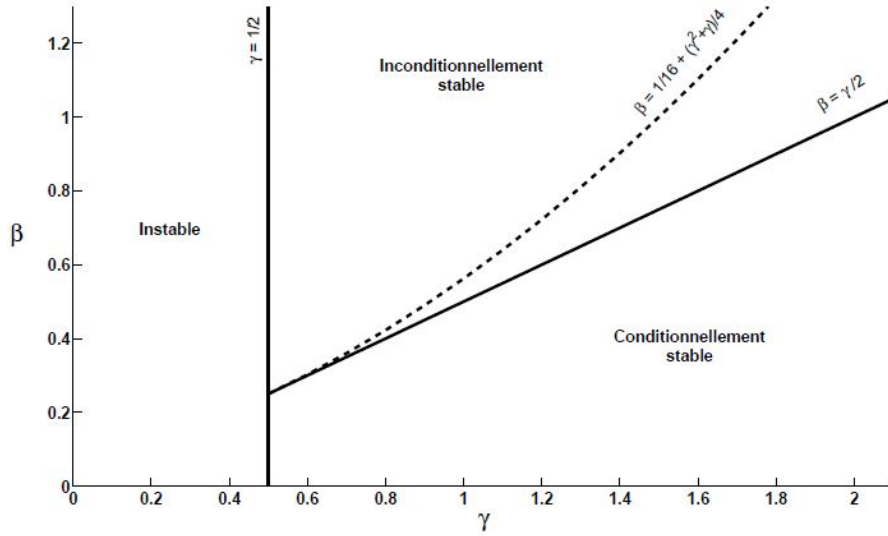


FIGURE 4 – Stabilité du schéma de Newmark

Regardons maintenant plus en détail le rayon spectral. On constate que celui-ci définit l'amortissement des modes (cf. 15) : à $\rho = 1$, on a conservation de la fréquence au cours du temps mais à $\rho < 1$, les contributions sont amorties. Il est donc intéressant d'étudier l'évolution de la valeur de ρ pour un schéma de Newmark donné.

Prenons les cas $\gamma = 0.5$, $\gamma = 0.8$. Les figures 5 montrent l'évolution de ρ en fonction de la fréquence adimensionnée $\Omega = \omega * h$ pour différents jeux β :

La valeur minimale $\rho_{\inf} = \lim_{\Omega \rightarrow \inf} \rho$ assure le meilleur filtrage des modes hautes fréquences. On remarque que la valeur minimale de β qui permet d'assurer l'inconditionnelle stabilité du schéma de Newmark est $\beta = 0.4$, mais le filtrage des modes hautes fréquences n'est plus assuré car $\rho_{\inf} = 1$. Pour des valeurs de β telle que $\frac{\gamma}{2} < \beta < \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2$, on observe une bifurcation du

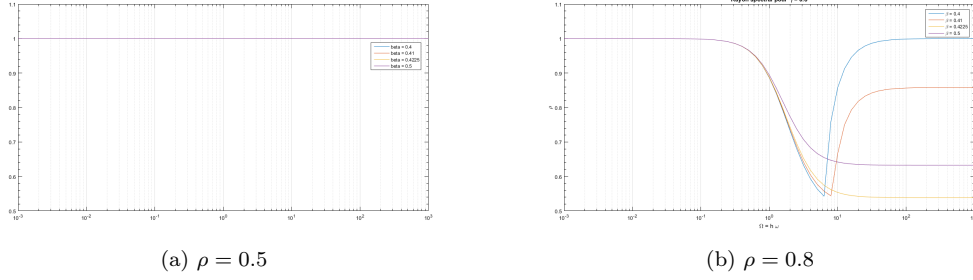


FIGURE 5 – Rayon spectral du schéma de Newmark

rayon spectral au-delà d'un certain Ω ce qui correspond au fait que les valeurs propres deviennent réelles. Ainsi il est préférable d'imposer sur le paramètre β un critère plus restrictif afin de s'assurer d'obtenir des valeurs complexes pour toutes les fréquences :

$$\beta < \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \quad (19)$$

Sous ces considérations, il apparaît que les paramètres du schéma de Newmark qui assurent une stabilité inconditionnelle et des valeurs propres conjuguées peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre α . Ce paramètre α permet de contrôler la dissipation numérique introduite.

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \beta = \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2, \quad \alpha < 0 \quad (20)$$

Cette méthode est codée sous la forme 'Newmark_alpha' : elle permet d'amortir les hautes fréquences. Malheureusement, elle détériore la précision du schéma car on a altération de l'ordre de convergence. Or, l'introduction de dissipation numérique dans les schémas de Newmark ne peut se faire sans altération de l'ordre de convergence. En effet, on obtient dans ce cas un schéma d'une précision au premier ordre par rapport au temps. Plusieurs méthodes existent pour s'affranchir de ce problème : les schémas HHT [2] ou WBZ [3] permettent d'obtenir une précision au second ordre en pondérant les forces internes entre deux pas de temps.

5 Conclusion de l'étude

Cette étude nous a permis de mettre en exergue les problématiques liées à la dynamique des structures, notamment la difficulté dans le choix de la stratégie de définition du pas de temps, ou du schéma d'intégration temporelle. On a ainsi observé ce que permettait la troncature des modes propres notamment en matière de réduction du temps de calcul. Néanmoins, on a pu constater la problématique de conditionnement de la matrice de masse due à la proximité des grands modes propres (qui sont finalement des harmoniques de la principale d'où la proximité). On a pu voir également les propriétés des schémas d'Euler et de Newmark avec notamment l'analyse du rayon spectral du schéma de Newmark et de l'impact sur la solution et sur la dissipation des hautes fréquences.

Références

- [1] Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures.
- [2] Hans M. Hilber, Thomas J. R. Hughes, and Robert L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, July 1977.
- [3] W. L. Wood, M. Bossak, and O. C. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(10) :1562–1566, October 1980.