Übungsblatt 06
Aufgabe 2 (Extensive Spiele)

Tim Blome, Michael Koller, Ayleen Schinko

02. Dezember 2016

a) Zeigen Sie, dass es kein Normalformspiel gegen kann, in dem es kein pareto-optimalen Ausgang gibt.

Definition (Strategisches Spiel (Normalform))

Ein strategisches Spiel $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ besteht aus

- einer endlichen Menge $N = 1, \ldots, n$ an Spielern,
- einer Menge an Aktion A_i für jeden Spieler,
- einer Nutzenfunktion (utility) $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$ für jeden Spieler.

a) Zeigen Sie, dass es kein Normalformspiel gegen kann, in dem es kein pareto-optimalen Ausgang gibt.

Definition (pareto-optimal)

Ein Ausgang o^* ist pareto-optimal, wenn er von keinem anderen Ausgang pareto-dominiert wird.

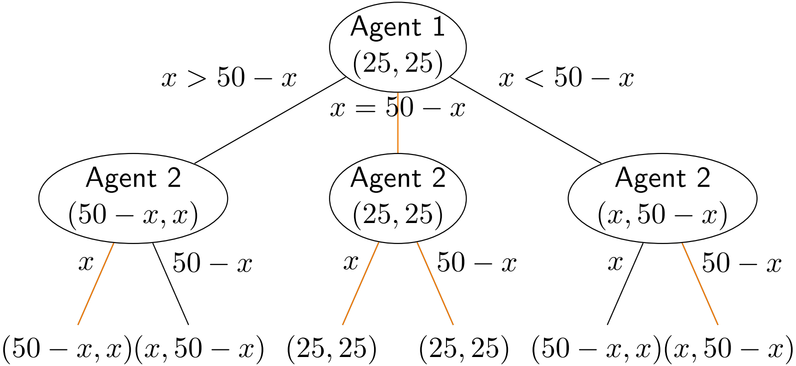
Wenn o und o' Ausgänge eines Spieles eines, sodass o für alle Spieler mindestens so gut ist wie o' und o von einem Spieler echt bevorzugt wird, dann pareto-dominiert o o'.

a) Zeigen Sie, dass es kein Normalformspiel gegen kann, in dem es kein pareto-optimalen Ausgang gibt.

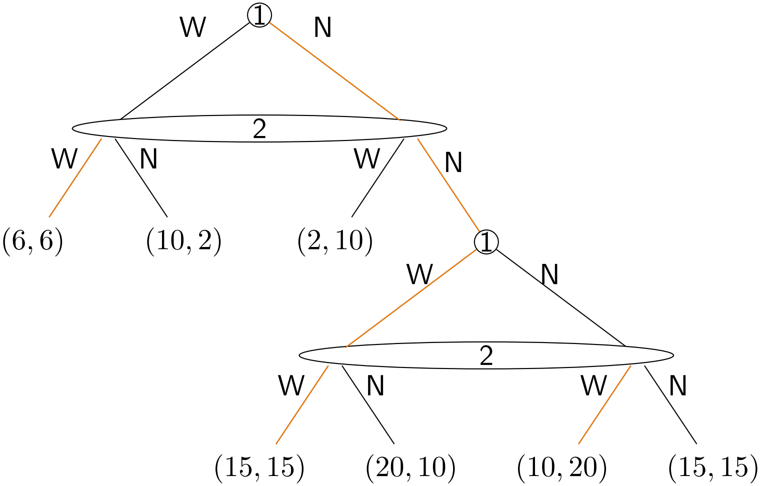
Wir gehen davon aus, dass für jeden Spieler die Aktionsmenge endlich und nicht leer ist.
Da für jeden Spieler die Nutzenfunktion einen Wert aus $\mathbb{R}$ liefert und die $\leq$-Ordnung eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$ bildet, kann für jede Komponente eines Ausgangs ein eindeutiger Vergleich in dieser Komponente zu jedem anderen Ausgang hergestellt werden.
Widerspruchsbeweis: Angenommen: Es gibt ein Normalformspiel, in dem es keinen pareto-optimalen Ausgang gibt.
So müssen alle Ausgänge einen Zyklus bilden oder eine unendliche besser werdend Kette.
Da auf den Ausgängen eine partielle Ordnung existiert, kann kein Zyklus in den Ausgangstupeln möglich sein. Die unendliche besser werdende Kette ist nicht möglich, da das Spiel endlich ist, weil alle Aktionsmenge der Spieler als endlich angenommen wurden.

Es muss also in der Tupelmenge der Ausgänge mindestens ein lokales Maximum existieren, dass nach Definition dann pareto-optimal ist.

b) Angenommen, zwei Spieler teilen 50 (gleichwertige) Münzen auf. Der Nutzen von Spielern ist die Menge von erhaltenen Münzen. Zuerst kann Spieler 1 die Münzen aufteilen, danach Spieler 2 den Anteil wählen. Bestimmen Sie ein Nash-Gleichgewicht mittels Rückwärtsinduktion.



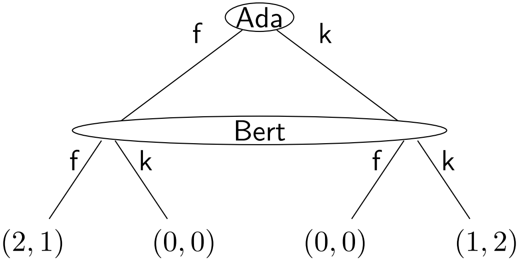
c) Nennen Sie ein teilspielperfektes Equilibrium dieses Spieles.



d) Begründen Sie, warum in einem extensiven Spiel mit perfekter Information ein durch Rückwärtsinduktion gefundener Ausgang ein Nash-Gleichgewicht sein muss.

In einem extensiven Spiel mit perfekter Information wird durch Rückwärtsinduktion in jedem Teilspiel ein teilspielperfektes Equilibrium gefunden. Keiner der Akteure könnte sich in einer Situation anders entscheiden um seine Situation zu verbessern. Das so enstehende teilspielperfekte Equilibrium für das gesamte Spiel ist also gleichzeitig auch ein Nash-Gleichgewicht.

e) 1) Stellen Sie Fußball/Komödie als UVEF-Spiel dar.



e) 2) Stellen Sie zweifaches Gefangendilemma als UVEF-Spiel dar.