02.11.2016

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Präsentation Blatt 2

AUFGABE 2

Aufgabe 2a

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Allgemeine Formel für Entropie:

$$H^X = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log_2\left(\mathbb{P}^X(x)\right)$$

$$\mathbb{P}^X(x) = 1 \quad \mathbb{P}^X(x') = 0, \ x \neq x'$$

$$H^X = -[(1 * \log_2 1) + (0 * \log_2 0)] = 0$$

Aufgabe 2b

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\Omega = \{Kopf, Zahl\}$ $\quad \mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{Kopf\}, \{Zahl\}, \{Kopf, Zahl\}\big\}$

$\mathbb{P} = \{\emptyset \to 0, \Omega \to 1, \{Kopf\} \to h, \{Zahl\} \to 1 - h\}$

Zufallsvariable X: $\Omega \to \mathbb{R}$

$\{Kopf\} \to 42, \{Zahl\} \to 1337$

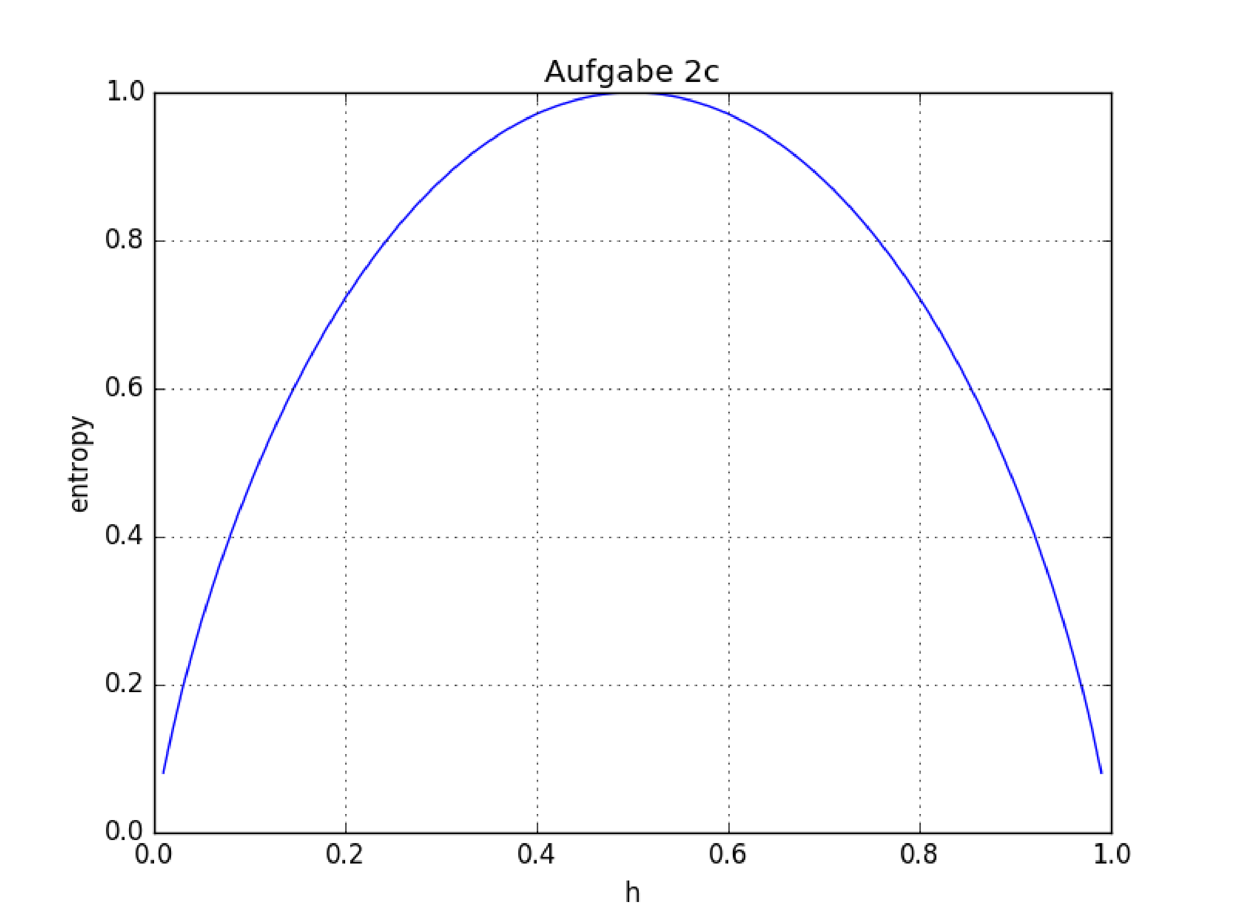
h=0: $H^X = 0$

h=$\frac{1}{2}$: $H^X = 1$

h=1: $H^X = 0$

Aufgabe 2c

Visualisierung für Werte von h im Interval [0,1]



Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Aufgabe 2d (1)

$$D(\mathbb{P}_1 || \mathbb{P}_2) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log\left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)}\right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \left(-\log\left(\frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\mathbb{P}_1^X(x)}\right)\right)$$

$$\geq -\log\left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\mathbb{P}_1^X(x)}\right)$$

$$= -\log\left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x)\right) = -\log(1) = 0$$

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Aufgabe 2d (2)

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Allgemein:

$H^X = -\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x)\log_2\left(\mathbb{P}^X(x)\right) =$

$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x)\log_2\left(\frac{1}{\mathbb{P}^X(x)}\right)$

$\leq \log_2\left(\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{\mathbb{P}^X(x)}{\mathbb{P}^X(x)}\right) = \log_2\left(\sum_{x\in X(\Omega)} 1\right) = \log_2(|\Omega|)$

=> $H^X \leq \log_2(|\Omega|)$ („obere Schranke“)

Aufgabe 2d (2)

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

ZZ: $H_{\mathbb{P}_1}^X \leq H_{\mathbb{P}_2}^X$, $\mathbb{P}_2^X(x) = \frac{1}{|\mathrm{X}|}$ („Gleichverteilung“)

$$H_{\mathbb{P}_2}^X = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \log_2\left(\mathbb{P}_2^X(x)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{|\mathrm{X}|} \log_2(|X|)$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{X}|} \log_2(|X|) * \sum_{x \in X(\Omega)} 1 = \frac{|X|}{|\mathrm{X}|} \log_2(|X|) = \log_2(|X|)$$

=>$H_{\mathbb{P}_2}^X$ ist die obere Schranke

=> Maximale Entropie bei Gleichverteilung

=> $H_{\mathbb{P}_1}^X \leq H_{\mathbb{P}_2}^X$ gilt für alle $\mathbb{P}_1$