

Präsentation Blatt 2

AUFGABE 2

Aufgabe 2a

2

04.11.2016

Allgemeine Formel für Entropie:

$$H^X = - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log_2(\mathbb{P}^X(x))$$

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

$$\mathbb{P}^X(x) = 1 \quad \mathbb{P}^X(x') = 0, \quad x \neq x'$$

$$H^X = -[(1 * \log_2 1) + (0 * \log_2 0)] = 0$$

Aufgabe 2b

3

04.11.2016

Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\Omega = \{Kopf, Zahl\} \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{Kopf\}, \{Zahl\}, \{Kopf, Zahl\}\}$$

$$\mathbb{P} = \{\emptyset \rightarrow 0, \Omega \rightarrow 1, \{Kopf\} \rightarrow h, \{Zahl\} \rightarrow 1 - h\}$$

Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$Kopf \rightarrow 42, X_{Zahl} \rightarrow 1337$$

$$h=0: H^X = 0$$

$$h=\frac{1}{2}: H^X = 1$$

$$h=1: H^X = 0$$

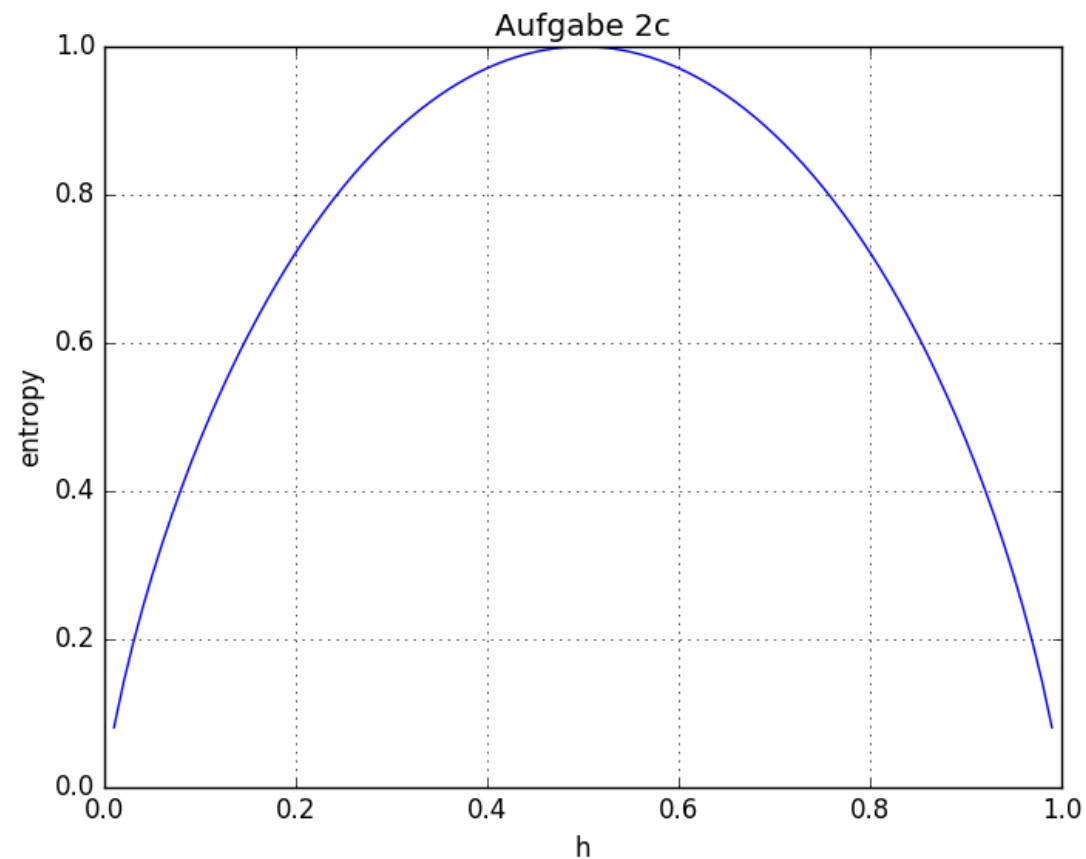
Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Aufgabe 2c

4

04.11.2016

Visualisierung für Werte von h im Intervall $[0,1]$



Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Aufgabe 2d (1)

5

04.11.2016

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

$$\begin{aligned} D(\mathbb{P}_1 || \mathbb{P}_2) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log \left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)} \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \left(-\log \left(\frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\mathbb{P}_1^X(x)} \right) \right) \\ &\geq -\log \left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\mathbb{P}_1^X(x)} \right) \\ &= -\log \left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \right) = -\log(1) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2d (2)

6

04.11.2016

Allgemein:

$$\begin{aligned} H^X &= - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log_2(\mathbb{P}^X(x)) = \\ &\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log_2\left(\frac{1}{\mathbb{P}^X(x)}\right) \\ &\leq \log_2\left(\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{\mathbb{P}^X(x)}{\mathbb{P}^X(x)}\right) = \log_2\left(\sum_{x \in X(\Omega)} 1\right) = \log_2(|\Omega|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H^X \leq \log_2(|\Omega|) \text{ („obere Schranke“)}$$

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)

Aufgabe 2d (2)

7

04.11.2016

ZZ: $H_{\mathbb{P}_1}^X \leq H_{\mathbb{P}_2}^X$, $\mathbb{P}_2^X(x) = \frac{1}{|X|}$ („Gleichverteilung“)

$$H_{\mathbb{P}_2}^X = - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \log_2 \left(\mathbb{P}_2^X(x) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{|X|} \log_2(|X|)$$

$$= \frac{1}{|X|} \log_2(|X|) * \sum_{x \in X(\Omega)} 1 = \frac{|X|}{|X|} \log_2(|X|) = \log_2(|X|)$$

$\Rightarrow H_{\mathbb{P}_2}^X$ ist die obere Schranke

\Rightarrow Maximale Entropie bei Gleichverteilung

$\Rightarrow H_{\mathbb{P}_1}^X \leq H_{\mathbb{P}_2}^X$ gilt für alle \mathbb{P}_1

Gruppe 3
(Martin Schörner,
Matthias Gröbner,
David Winter)