Selbst-organisierende, adaptive Systeme (WS 16/17)

Übungsblatt 08 (Bearbeitung bis: 14.12.2016, 23:59 Uhr)

Abstimmungen und Sozialwahltheorie

Aufgabe 1 ***(Sozialwahltheorie)***

Die folgenden Aufgaben wiederholen und vertiefen die in der Vorlesung erworbenen Grundkenntnisse zu sozialer Wahl.

a) Betrachten wir zunächst ein konkretes Präferenzprofil und analysieren die Ausgänge verschiedener Wahlverfahren.

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

wobei die erste Zeile angibt, wie viele Wähler die Reihenfolge der jeweiligen Spalte gewählt haben.

Bestimmen Sie die Gewinner nach

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Brechen Sie Unentschieden jeweils über die alphabetische Ordnung auf. Sie können auch ein Programm in der Sprache Ihrer Wahl entwickeln, das die Berechnungen übernimmt und ausgibt. Gibt es einen Condorcet-Gewinner?

b) Das Resultat von Arrow „scheint zunächst geeignet, jeden Demokraten zur Verzweiflung zu bringen [1]“. Das Problem tritt bereits bei „einem Ehepaar vor 3 Alternativen“ auf.

Ein möglicher Weg, der Problematik durch Arrow aus dem Weg zu gehen, besteht darin, die gewählten Axiome abzuschwächen. Oftmals wird die Forderung nach *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* vernachlässigt. In dieser Übung wollen wir allerdings die Pareto-Effizienz abschwächen und durch ein anderes, schwächeres Kriterium ersetzen.[1]

Definition 1: Nicht-Auferlegung (NA)

W ist nicht-auferlegend falls zu jeder Präferenzrelation $\succ$ ein Präferenzprofil $[\succ]$ existiert, sodass $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$.

[1] und beziehen uns in dieser Aufgabe nur auf totale Ordnungen

Intuitiv bedeutet NA, dass W keine Ordnungen „systembedingt“ ausschließt, d.h., die Wähler können jedes Ranking auch tatsächlich erreichen. Ein triviales Gegenbeispiel wäre die degenerierte Wohlfahrtsfunktion W, die z.B. für $O = \{a, b, c\}$ *immer* $a \succ b \succ c$ liefert – egal was die Wähler stimmen.

Zeigen Sie zunächst, dass NA tatsächlich eine schwächere Forderung als PE ist. Dazu zeigen Sie zunächst, dass jede soziale Wohlfahrtsfunktion, die PE erfüllt, auch NA erfüllt und umgekehrt, dass eine soziale Wohlfahrtsfunktion gibt, die NA erfüllt, aber nicht PE.

c) Die Hoffnung auf ein besseres Resultat bleibt getrübt. Leider zeigte uns Wilson 1972 [3], dass selbst eine Wohlfahrtsfunktion, die nur Nicht-Auferlegung und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, diktatorisch, anti-diktatorisch oder *null* sein muss, also alle Ergebnisse gleich behandelt.[2]

Also trennen wir uns von der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, obwohl folgende Anekdote, die Sidney Morgenbesser zugeschrieben wird, die Sinnhaftigkeit dieser Forderung unterstreicht [2]:

> Nach dem Hauptgang entschließt sich Sidney Morgenbesser, ein Dessert zu bestellen. Die Kellnerin teilt ihm mit, dass er zwischen Apfelkuchen und Blaubeerkuchen wählen könne. Sidney bestellt den Apfelkuchen. Nach einer Weile kommt die Kellnerin zurück und sagt, dass es auch noch Kirschkuchen gäbe. Da sagt Morgenbesser: „In diesem Fall werde ich den Blaubeerkuchen nehmen.“

Zeigen Sie, dass Borda ein soziales Ranking liefert, dass zumindest Pareto-effizient und nicht-diktatorisch, dafür aber nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

d) Neben dem Verzicht auf eine der Bedingungen bleibt die Möglichkeit, die Auswahlmenge zu reduzieren und sich somit in das sogenannte „Ranking“-Setting zu begeben.

Dabei beziehen wir uns nun nur auf Präferenzprofile, die die Ergebnismenge in eine Zustimmungsmenge und eine Ablehnungsmenge partitionieren. Nehmen wir an, dass wir für jeden Agenten $i \in N$ eine „Approved“-Menge haben mit $I_i \subseteq O$ und bezeichnen wir $I_{i,1} = I_i$ und $I_{i,2} = O \setminus I_{i,1}$ und gelte folglich in der resultierenden, totalen Quasiordnung[3] $\forall o_1 \in I_{i,1}, o_2 \in I_{i,2} \setminus I_i : o_1 \succ o_2$ und $\forall o_1, o_2 \in I_{i,k} : o_1 \succeq o_2 \wedge o_2 \succeq o_1$.

„Approval-Voting“ ist in diesem Fall eine nicht-diktatorische SWF, die PE und UIA erfüllt. Es erstellt das Ranking durch Zählen der Auftreten eines Ergebnis o in Zustimmungsmengen I_i. Formal nennen wir den Score für ein Ergebnis o in einem Profil $[\succ]$: $s_{[\succ]}(o) = |\{i \mid o \in I_i, i \in N\}|$. Wir erhalten das vollständige Ranking $\succ_W$[4], in dem wir die Ergebnisse nach den Scores reihen: $o_1 \succ_W o_2 \leftrightarrow s(o_1) > s(o_2)$.

Zeigen Sie, dass Approval-Voting in diesem Setting tatsächlich PE, UIA und Nicht-Diktatur erfüllt.

Literatur

[1] K. Jacobs and D. Jungnickel. *Einführung in die Kombinatorik*. De Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter, 2004.

[2] Jörg Rothe, Dorothea Baumeister, Claudia Lindner, and Irene Rothe. Einführung in computational social choice, 2011.

[3] Robert Wilson. Social choice theory without the pareto principle. *Journal of Economic Theory*, 5(3):478–486, 1972.

[2] Genauer gesagt liefert W die universelle Relation, also $o \succ_W o'$ für alle $o, o' \in O$.

[3] Eine Quasiordnung benötigen wir hier nur, da z.B. für zwei Elemente $o, o' \in I_i$ gelten soll, dass $o \succeq o'$ *und* $o' \succeq o$ aber eben nicht $o = o'$ daraus folgen muss.

[4] Dies ist nun ein Ranking, keine Partition in 2 Teilmengen!