Selbst-organisierende, adaptive Systeme (WS 16/17)

Übungsblatt 09 (Bearbeitung bis: 11.01.2017, 23:59 Uhr)

Bayes-Spiele und Mechanismus-Design

Aufgabe 1. ***(Mechanismus-Design)***

a) Betrachten Sie zunächst das "Wikinger"-Beispiel aus der Vorlesung. Nehmen Sie an, dass die Reihenfolge in Zahlen 3, 2 und 1 ausgedrückt werden kann, also schätzt z.B. ein Wikinger Carlsberg mit 3 Einheiten, Becks mit 2 und Astra mit 1 Einheit.

- In einem Profil $\mathbf{a}_{-w} = [\mathrm{a}, \mathrm{a}, -, \mathrm{b}, \mathrm{b}]$ bezeichneten wir b als beste Antwort von w. Bestätigen Sie rechnerisch, dass b den höchsten erwarteten Nutzen bringt.
- Geben Sie ein Equilibrium in reinen Strategien für $|N| \geq 5$ an.
- Gibt es eine dominante Strategie für w falls $|N| = 3$ gilt?
- Gehen Sie von der Population $N = \{w, h, n\}$ (die Typen sind also bereits fest instanziiert) mit genau einem Wikinger, einem Hanseaten und einem Nordlicht aus. Welches Aktionsprofil ist ein Nash-Equilibrium in reinen Strategien? Welche soziale Auswahlfunktion wird dadurch implementiert?

b) Betrachten Sie nun das "Vasen"-Beispiel, also eine Auktion, bei der Agenten einen Wert für einen Gegenstand nennen, der Höchstbietende den Zuschlag erhält und den Preis des Zweithöchsten bezahlt. Die Aktionen der Agenten A (Gebote) und die Abbildung von Aktionsprofilen zu Ergebnissen M sei wie in der Vorlesung.

- Zeichnen Sie das Bayes-Spiel für zwei Agenten, die jeweils den (privaten) Typ $\{\theta_1, \theta_2\}$ annehmen können, wobei θ_i bedeutet, dass die Vase für den Agenten i Einheiten wert ist (also eine Verteilung von mehreren Spielen). Geben Sie eine Normalformdarstellung an, bei der Sie als Wahrscheinlichkeiten für beide Agententypen $\mathbb{P}(\theta_1) = 0.4$ annehmen. Nennen Sie Equilibria in reinen Strategien.
- Angenommen, die Vase könnte in ganzzahligen Werten von 0 bis 10 geschätzt werden und es treten nur die Typen θ_8 mit $\mathbb{P}(\theta_8) = 0.1$, θ_2 mit $\mathbb{P}(\theta_2) = 0.4$ und θ_3 mit $\mathbb{P}(\theta_3) = 0.5$ auf. Wie vorhin bedeutet θ_i, dass einem Agenten die Vase i Einheiten wert ist. Sei nun eine Höchstgebot-Auktion (höchstes Gebot erhält den Zuschlag, zum höchsten Preis) zwischen 3 Spielern ($N = \{a, b, c\}$) gegeben. Was ist eine beste Antwort von Spieler a, falls er vom Typ θ_8 ist, auf ein Profil, in dem die anderen beiden Agenten wahrheitsgemäß abstimmen? Ist wahrheitsgemäßes Abstimmen also eine dominante Strategie für alle Agenten? [1] Zur Selbstkontrolle: Für die reine Strategie 3 ist der erwartete Nutzen 2.2166..., für Gebot 6 liegt er bei 1.62.

Aufgabe 2. ***(Equilibria unter Unsicherheit)***

Erinnern Sie sich zunächst an soziale Regeln in korrelierten Equilibria, insbesondere an das Straßenverkehrsspiel aus Vorlesung 8:

	go	wait
go	$-100, -100$	$10, 0$
wait	$0, 10$	$-10, -10$

[1] Hinweis: Um sich repetitiven Rechenaufwand zu sparen, schreiben sie sich ein einfaches Skript, dass für alle möglichen Aktionen $a_i \in \{0, \ldots 10\}$ den erwarteten Nutzen ausgibt.

a) Bestimmen Sie zunächst ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien und geben Sie den erwarteten Nutzen für die Spieler im gemischten Equilibrium an.

b) Definieren Sie nun eine Ampel, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit je einem Spieler grün zeigt. Bestimmen Sie den erwarteten Nutzen im Falle, dass sich beide Spieler an das Signal halten. Ist dies ein korreliertes Equilibrium? Wie hoch ist der erwartete Nutzen beider Spieler in diesem Fall?

Eine ähnliche Konstruktion kommt in Bayes-Spielen zum Einsatz. Bayes-Spiele erlauben uns, verschiedene Typen zu berücksichtigen und stellen eine abgeschwächte Form von *Implementierung* gegenüber dominanten Strategien im Mechanismus-Design dar.
In einem Bayes-Spiel $(N, A, \Theta, \mathbb{P}, u)$ sind die reinen Strategien Abbildungen $\alpha_i : \Theta_i \to A_i$.
Den erwarteten Nutzen für Agent i für ein Strategieprofil α bilden wir in Erwartung über den geteilten Typraum.

Definition 1: Erwarteter Nutzen in Bayes-Spielen

$\mathbb{E}u_i(\alpha) = \sum_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(\theta) \cdot u_i(\mathbf{a}, \theta)$,

wobei $u_i(\mathbf{a}, \theta)$ der Nutzen für das Aktionsprofil $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{a}_i = \alpha_i(\theta_i)$ für alle Agenten i ist.
Die besten Antworten eines Agenten i auf ein Strategieprofil α, also $BR_i(\alpha_{-i})$ sind somit analog zu Normalformspielen definiert:

Definition 2: Beste Antwort in Bayes-Spielen

$BR_i(\alpha_{-i}) = \arg\max_{\alpha_i} \mathbb{E}u_i(\alpha_i, \alpha_{-i})$

und folglich:

Definition 3: Bayes-Nash-Equilibrium

Ein Bayes-Nash-Equilibrium ist ein solches Strategieprofil α, in dem alle Agenten optimal antworten, also $\forall i \in N : \alpha_i \in BR_i(\alpha_{-i})$.

c) Veranschaulichen Sie sich diese Konzepte an folgendem Beispiel:

Zwei gegnerische Mannschaften treten in den (sportlichen) Wettstreit um einen wertvollen Preis. Jedes Team kann entweder „attackieren“ oder „nicht-attackieren“. Team 1 kann „schwach“ oder „stark“ sein mit den Wahrscheinlichkeiten p und $(1 - p)$. Team 2 ist jedoch immer „schwach“.

Ein Team gewinnt den Preis entweder durch eine Attacke auf einen nicht-attackierenden Gegner oder wenn ein starkes Team einen schwachen Gegner attackiert. Falls zwei gleich starke Teams aufeinander treffen, erhält niemand den Preis.

Der Nutzen daraus ergibt sich wie folgt:

- Der Preis selbst ist M wert.
- Jedes Team hat Kosten für eine Attacke: Sie betragen $s > 0$ für ein starkes Team und $w > 0$ für ein schwaches Team.
- Insgesamt gilt $M > w > s$.
- Keine Kosten entstehen, wenn der Gegner nicht attackiert.

Aus dieser Situation ergeben sich folgende Payoffs für die Situationen

Falls Team 1 „schwach“ ist mit Wahrscheinlichkeit p:

	Attacke	Nicht-Attacke
Attacke	$-w, -w$	$M, 0$
Nicht-Attacke	$0, M$	$0, 0$

Falls Team 1 „stark“ ist mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$:

	Attacke	Nicht-Attacke
Attacke	$M - s, -w$	$M, 0$
Nicht-Attacke	$0, M$	$0, 0$

Welche der folgenden Strategieprofile sind Bayes-Nash-Equilibria in reinen Strategien wenn $p = \frac{1}{2}$:

(a) (α_1, α_2) mit $\alpha_1 = \{\text{schwach} \to \text{Nicht-Attacke, stark} \to \text{Attacke}\}$ und $\alpha_2 = \text{Attacke}$.

(b) (α_1, α_2) mit $\alpha_1 = \{\text{schwach} \to \text{Nicht-Attacke, stark} \to \text{Attacke}\}$ und $\alpha_2 = \text{Nicht-Attacke}$.

(c) (α_1, α_2) mit $\alpha_1 = \{\text{schwach} \to \text{Attacke, stark} \to \text{Nicht-Attacke}\}$ und $\alpha_2 = \text{Attacke}$.

(d) (α_1, α_2) mit $\alpha_1 = \{\text{schwach} \to \text{Attacke, stark} \to \text{Nicht-Attacke}\}$ und $\alpha_2 = \text{Nicht-Attacke}$.