

SOAS - Übungsblatt 8, Aufgabe 1

Philip Müller und Georg Kraus

16.12.2016

Universität Augsburg

Aufgabe 1a

Aufgabenstellung

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Mehrheitswahl

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- **Mehrheitswahl**
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Mehrheitswahl: Stimmen für a

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 250 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Mehrheitswahl: Stimmen für b

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 16 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 250 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Mehrheitswahl: Stimmen für c

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 16 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 11 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Mehrheitswahl: Stimmen für d

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 16 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 11 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 18 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Mehrheitswahl: Stimmen für e

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 16 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 11 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 18 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 22 |

Mehrheitswahl: Sieger

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 16 |
| c | c | d | b | c | b | - c: 11 |
| d | e | a | d | b | d | - d: 18 |
| e | a | e | a | a | a | - e: 22 |

Mehrheit mit Elimination: Schritt 1

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Mehrheit mit Elimination: Schritt 2

| | | | | | |
|----|----|---|---|----|----|
| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
| a | b | b | e | d | e |
| b | d | d | b | e | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Mehrheit mit Elimination: Schritt 3

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | b | e | e | e |
| b | e | a | b | b | b |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Mehrheit mit Elimination

| | | | | | |
|----|----|---|---|----|----|
| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
| a | e | a | e | e | e |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl

- **Mehrheit mit Elimination**

- Borda

- Paarweise Elimination mit einer
gewählten Reihenfolge

Mehrheit mit Elimination: Sieger

| | | | | | |
|----|----|---|---|----|----|
| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
| e | e | e | e | e | e |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|---|----|----|---|---|----|----|
| 4 | a | b | c | c | d | e |
| 3 | b | d | b | e | e | c |
| 2 | c | c | d | b | c | b |
| 1 | d | e | a | d | b | d |
| 0 | e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- **Borda**
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

Borda: Stimmen für a

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|--------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 250 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Borda: Stimmen für b

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|--------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 250 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Borda: Stimmen für c

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|--------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 244 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 250 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Borda: Stimmen für d

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|--------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 244 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 189 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 250 |

Borda: Stimmen für e

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|--------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 244 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 189 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 182 |

Borda: Sieger

| P | 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|---|----|----|---|---|----|----|-----------------|
| 4 | a | b | c | c | d | e | - a: 135 |
| 3 | b | d | b | e | e | c | - b: 250 |
| 2 | c | c | d | b | c | b | - c: 244 |
| 1 | d | e | a | d | b | d | - d: 189 |
| 0 | e | a | e | a | a | a | - e: 182 |

Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- **Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge**
⇒ **Ablaufplan: a,b,c,d,e**

Paarweise Elimination: a gegen b

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|----|----|---|---|----|----|--------------|
| a | b | c | c | d | e | - a: 33 |
| b | d | b | e | e | c | - b: 67 |
| c | c | d | b | c | b | fake |
| d | e | a | d | b | d | fake |
| e | a | e | a | a | a | fake |

Paarweise Elimination: b gegen c

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 | Stimmen für: |
|-------|----|---|---|----|----|--------------|
| b | b | c | c | d | e | - b: 49 |
| c | d | b | e | e | c | - c: 51 |
| d | c | d | b | c | b | fake |
| e | e | e | d | b | d | fake |
| <hr/> | | | | | | fake |

Paarweise Elimination: c gegen d

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| c | d | c | c | d | e |
| d | c | d | e | e | c |
| e | e | e | d | c | d |

Stimmen für:

- c: 66

- d: 34

fake

fake

fake

Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| c | c | c | c | e | e |
| e | e | e | e | c | c |

Stimmen für:

- c: 60

- e: 40

fake

fake

fake

Paarweise Elimination: Sieger

| | | | | | |
|----|----|---|---|----|----|
| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
| c | c | c | c | c | c |

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- **Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge**

| Abstimmungsverfahren | Sieger |
|--------------------------|--------|
| Mehrheitswahl | a |
| Mehrheit mit Elimination | e |
| Borda | b |
| Paarweise Elimination | c |

Condorcet-Gewinner?

$o \in O$ heißt Condorcet-Gewinner, falls:

$$\forall o' \in O \setminus \{o\}: |\{i: i \in \mathbb{N}, o' \prec_i o\}| = \#(o' \prec o) \geq \#(o \prec o')$$

”Die Anzahl an Leuten, die o' schlechter findet als o muss größer sein, als die Anzahl der Leute die o' besser findet als o . Und das für jedes o' in O mit Ausnahme von o selbst.”

Gibt es hier einen Condorcet-Gewinner?

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

fake

fake

Behauptung:

c ist Condorcet-Gewinner!

fake

fake

Condorcet: c gegen a

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Stimmen für:

- c: 67

- a: 33

fake

fake

fake

Condorcet: c gegen b

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Stimmen für:

- c: 51

- b: 49

fake

fake

fake

Condorcet: c gegen d

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Stimmen für:

- c: 66

- d: 34

fake

fake

fake

Condorcet: c gegen e

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Stimmen für:

- c: 60

- e: 40

fake

fake

fake

Zusammenfassung

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|----|----|---|---|----|----|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

Stimmenverteilung bei paarweisem Vergleich

- (c,a): (67,33)

- (c,b): (51,49)

- (c,d): (66,34)

- (c,e): (60,40)

fake

Aufgabe 1b

Definition: Nicht-Auferlegung (NA)

W ist nicht-auferlegend, falls für jede Präferenzrelation $[\succ]$ ein Präferenzprofil \succ existiert, sodass $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$ gilt.

Aus (PE) folgt (NA)

- Sei W pareto-effiziente Wohlfahrtsfunktion. Zu zeigen: Für alle $\succ \in O$ existiert ein $[\succ]$, sodass $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$.
- Sei also $\succ \in O$ beliebig.
Wähle $[\succ] = (\succ_1, \dots, \succ_n) = (\succ, \dots, \succ)$.
- Aufgrund der Pareto-Optimalität von W , muss dann auch $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$ gelten.

Aus (NA) folgt nicht (PE)

Betrachte dazu eine Getränkekarte:

Zur Auswahl stehen Apfelsaft (A), Bier (B), Cognac (C) und Diesel (Bier mit Cola - D)

Drei Freunde, Xaver (X), Yvonne (Y) und Zacharias (Z), müssen sich auf ein Getränk einigen.

Als Wohlfahrtsfunktion W betrachten wir paarweise Elimination in der Reihenfolge A, B, C, D .

Aus (NA) folgt nicht (PE): W erfüllt (NA) ...

... denn jede globale Präferenzrelation kann durch W bei passender Wahl von X , Y und Z erreicht werden.

Soll z.B. die globale Wohlfahrt $D \succ C \succ B \succ A$ sein, so wird dies durch folgendes Präferenzprofil erreicht:

$$X : D \succ C \succ B \succ A$$

$$Y : D \succ C \succ B \succ A$$

$$Z : D \succ C \succ B \succ A$$

Aus (NA) folgt nicht (PE): W erfüllt (PE) nicht ...

... denn paarweise Elimination ist nach der Vorlesung nicht pareto-effizient.

Betrachte zum Beispiel folgendes Präferenzprofil:

$$X : B \succ D \succ C \succ A$$

$$Y : A \succ B \succ D \succ C$$

$$Z : C \succ A \succ B \succ D$$

Nach der sozialen Wohlfahrtsfunktion W gewinnt D .

D wird jedoch von B pareto-dominiert!

Also erfüllt W nicht die Bedingung (PE).

Aufgabe 1c

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4

Aufgabe 1d

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 4