

# SOAS - Übungsblatt 8, Aufgabe 1

---

Philip Müller und Georg Kraus

16.12.2016

Universität Augsburg

## Aufgabe 1a

---

# Aufgabenstellung

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

# Mehrheitswahl

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- **Mehrheitswahl**
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

# Mehrheitswahl: Stimmen für a

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- a: 33

## Mehrheitswahl: Stimmen für b

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- a: 33

- b: 16

## Mehrheitswahl: Stimmen für c

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
a	b	c	c	d	e	- a: 33
b	d	b	e	e	c	- b: 16
c	c	d	b	c	b	- c: 11
d	e	a	d	b	d	
e	a	e	a	a	a	

## Mehrheitswahl: Stimmen für d

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
a	b	c	c	d	e	- a: 33
b	d	b	e	e	c	- b: 16
c	c	d	b	c	b	- c: 11
d	e	a	d	b	d	- d: 18
e	a	e	a	a	a	



## Mehrheitswahl: Stimmen für e

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
a	b	c	c	d	e	- a: 33
b	d	b	e	e	c	- b: 16
c	c	d	b	c	b	- c: 11
d	e	a	d	b	d	- d: 18
e	a	e	a	a	a	- e: 22

# Mehrheitswahl: Sieger

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
a	b	c	c	d	e	- a: 33
b	d	b	e	e	c	- b: 16
c	c	d	b	c	b	- c: 11
d	e	a	d	b	d	- d: 18
e	a	e	a	a	a	- e: 22

# Mehrheit mit Elimination: Schritt 1

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

## Mehrheit mit Elimination: Schritt 2

33	16	3	8	18	22
a	b	b	e	d	e
b	d	d	b	e	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

---

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

## Mehrheit mit Elimination: Schritt 3

33	16	3	8	18	22
----	----	---	---	----	----

a	b	b	e	e	e
---	---	---	---	---	---

b	e	a	b	b	b
---	---	---	---	---	---

e	a	e	a	a	a
---	---	---	---	---	---

---

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

# Mehrheit mit Elimination

33	16	3	8	18	22
a	e	a	e	e	e
e	a	e	a	a	a

---

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

# Mehrheit mit Elimination: Sieger

33	16	3	8	18	22
e	e	e	e	e	e

---

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- **Mehrheit mit Elimination**
- Borda
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

P	33	16	3	8	18	22
4	a	b	c	c	d	e
3	b	d	b	e	e	c
2	c	c	d	b	c	b
1	d	e	a	d	b	d
0	e	a	e	a	a	a

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- **Borda**
- Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge



## Borda: Stimmen für a

P	33	16	3	8	18	22
4	a	b	c	c	d	e
3	b	d	b	e	e	c
2	c	c	d	b	c	b
1	d	e	a	d	b	d
0	e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- a: 135

## Borda: Stimmen für b

P	33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
4	a	b	c	c	d	e	- a: 135
3	b	d	b	e	e	c	- b: 250
2	c	c	d	b	c	b	
1	d	e	a	d	b	d	
0	e	a	e	a	a	a	

## Borda: Stimmen für c

P	33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
4	a	b	c	c	d	e	- a: 135
3	b	d	b	e	e	c	- b: 250
2	c	c	d	b	c	b	- c: 244
1	d	e	a	d	b	d	
0	e	a	e	a	a	a	

## Borda: Stimmen für d

P	33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
4	a	b	c	c	d	e	- a: 135
3	b	d	b	e	e	c	- b: 250
2	c	c	d	b	c	b	- c: 244
1	d	e	a	d	b	d	- d: 189
0	e	a	e	a	a	a	

## Borda: Stimmen für e

P	33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
4	a	b	c	c	d	e	- a: 135
3	b	d	b	e	e	c	- b: 250
2	c	c	d	b	c	b	- c: 244
1	d	e	a	d	b	d	- d: 189
0	e	a	e	a	a	a	- e: 182

## Borda: Sieger

P	33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
4	a	b	c	c	d	e	- a: 135
3	b	d	b	e	e	c	- <b>b: 250</b>
2	c	c	d	b	c	b	- c: 244
1	d	e	a	d	b	d	- d: 189
0	e	a	e	a	a	a	- e: 182

# Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- **Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge**  
⇒ **Ablaufplan: a,b,c,d,e**

## Paarweise Elimination: a gegen b

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
a	b	c	c	d	e	- a: 33
b	d	b	e	e	c	- b: 67
c	c	d	b	c	b	
d	e	a	d	b	d	
e	a	e	a	a	a	



## Paarweise Elimination: b gegen c

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
b	b	c	c	d	e	- b: 49
c	d	b	e	e	c	- c: 51
d	c	d	b	c	b	
e	e	e	d	b	d	

---

## Paarweise Elimination: c gegen d

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
c	d	c	c	d	e	- c: 66
d	c	d	e	e	c	- d: 34
e	e	e	d	c	d	

---

## Paarweise Elimination mit einer gewählten Reihenfolge

33	16	3	8	18	22	Stimmen für:
c	c	c	c	e	e	- c: 60
e	e	e	e	c	c	- e: 40

---

## Paarweise Elimination: Sieger

33	16	3	8	18	22
c	c	c	c	c	c

---

Bestimmen Sie die Gewinner nach:

- Mehrheitswahl
- Mehrheit mit Elimination
- Borda
- **Paarweise Elimination mit einer  
gewählten Reihenfolge**

Abstimmungsverfahren	Sieger
Mehrheitswahl	a
Mehrheit mit Elimination	e
Borda	b
Paarweise Elimination	c

## Condorcet-Gewinner?

$o \in O$  heißt Condorcet-Gewinner, falls:

$$\forall o' \in O \setminus \{o\}: |\{i: i \in \mathbb{N}, o' \prec_i o\}| = \#(o' \prec o) \geq \#(o \prec o')$$

”Die Anzahl an Leuten, die  $o'$  schlechter findet als  $o$  muss größer sein, als die Anzahl der Leute die  $o'$  besser findet als  $o$ . Und das für jedes  $o'$  in  $O$  mit Ausnahme von  $o$  selbst.”

## Gibt es hier einen Condorcet-Gewinner?

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Behauptung:  
c ist Condorcet-Gewinner!

## Condorcet: c gegen a

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- c: 67

- a: 33



## Condorcet: c gegen b

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- c: 51

- b: 49

## Condorcet: c gegen d

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- c: 66

- d: 34

## Condorcet: c gegen e

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmen für:

- c: 60

- e: 40

33	16	3	8	18	22
a	b	c	c	d	e
b	d	b	e	e	c
c	c	d	b	c	b
d	e	a	d	b	d
e	a	e	a	a	a

Stimmenverteilung bei paarweisem Vergleich:

- (c,a): (67,33)

- (c,b): (51,49)

- (c,d): (66,34)

- (c,e): (60,40)

## Aufgabe 1b

---

## Definition: Nicht-Auferlegung (NA)

$W$  ist nicht-auferlegend, falls für jede Präferenzrelation  $[\succ]$  ein Präferenzprofil  $\succ$  existiert, sodass  $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$  gilt.

## Aus (PE) folgt (NA)

- Sei  $W$  pareto-effiziente Wohlfahrtsfunktion. Zu zeigen: Für alle  $\succ \in L(O)$  existiert ein  $[\succ]$ , sodass  $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$ .
- Sei also  $\succ \in L(O)$  beliebig.  
Wähle  $[\succ] = (\succ_1, \dots, \succ_n) = (\succ, \dots, \succ)$ .
- Aufgrund der Pareto-Optimalität von  $W$ , muss dann auch  $\succ_{W([\succ])} \equiv \succ$  gelten.

## Aus (NA) folgt nicht (PE)

Betrachte dazu eine Getränkekarte:

Zur Auswahl stehen Apfelsaft (A), Bier (B), Cognac (C) und Diesel (Bier mit Cola - D)

Drei Freunde, Xaver (X), Yvonne (Y) und Zacharias (Z), müssen sich auf ein Getränk einigen.

Als Wohlfahrtsfunktion  $W$  betrachten wir paarweise Elimination in der Reihenfolge  $A, B, C, D$ .



## Aus (NA) folgt nicht (PE): $W$ erfüllt (NA) ...

... denn jede globale Präferenzrelation kann durch  $W$  bei passender Wahl von  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  erreicht werden.

Soll z.B. die globale Wohlfahrt  $D \succ C \succ B \succ A$  sein, so wird dies durch folgendes Präferenzprofil erreicht:

$$X : D \succ C \succ B \succ A$$

$$Y : D \succ C \succ B \succ A$$

$$Z : D \succ C \succ B \succ A$$

## Aus (NA) folgt nicht (PE): $W$ erfüllt (PE) nicht ...

... denn paarweise Elimination ist nach der Vorlesung nicht pareto-effizient.

Betrachte zum Beispiel folgendes Präferenzprofil:

$$X : B \succ D \succ C \succ A$$

$$Y : A \succ B \succ D \succ C$$

$$Z : C \succ A \succ B \succ D$$

Nach der sozialen Wohlfahrtsfunktion  $W$  gewinnt  $D$ .

$D$  wird jedoch von  $B$  pareto-dominiert!

Also erfüllt  $W$  nicht die Bedingung (PE).

## Aufgabe 1c

---

Nach dem Hauptgang entschließt sich Sidney Morgenbesser, ein Dessert zu bestellen. Die Kellnerin teilt ihm mit, dass er zwischen Apfelkuchen und Blaubeerkuchen wählen könne. Sidney bestellt den Apfelkuchen. Nach einer Weile kommt die Kellnerin zurück und sagt, dass es auch noch Kirschkuchen gäbe. Da sagt Morgenbesser: „In diesem Fall werde ich den Blaubeerkuchen nehmen.“

Zeigen Sie, dass Borda ein soziales Ranking liefert, dass zumindest Pareto-effizient und nichtdiktatorisch, dafür aber nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

Zeige, dass für  $W := \text{Borda}$  und beliebige  $o_1, o_2 \in O, \forall i \ o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_W o_2$  gilt.

$s_{io}$ : Score für Ereignis  $o \in O$  von Agent  $i \in N$

$$\forall i \ o_1 \succ_i o_2$$

$$\Rightarrow \forall i \ s_{io_1} > s_{io_2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in N} s_{io_1} > \sum_{i \in N} s_{io_2}$$

$$\Rightarrow o_1 \succ_W o_2$$

Zeige, dass es für  $W := \text{Borda}$  kein  $i \in N$  mit  
 $\forall o_1, o_2 (o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_W o_2)$  gibt.

Widerspruchsbeweis:

Sei  $x \in N$  ein Diktator

$$o_1, o_2 \in O : \forall i \in N \setminus \{x\} : s_{io_2} - s_{io_1} = |O| - 1 \wedge o_1 \succ_W o_2$$

$$\Rightarrow s_{xo_1} > (|O| - 1) * (|N| - 1)$$

$\Rightarrow \text{Widerspruch}$

## nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen

Zeige, dass für  $W := \text{Borda}$

$\forall i(o_1 \succ'_i o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ''_i o_2) \Rightarrow (o_1 \succ_{W([\succ'])} o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ_{W([\succ''])} o_2)$   
nicht gilt.

$\succ': \forall k \in K : (s_{ko_1} = |O| - 1 \wedge s_{ko_2} = 0) \wedge \forall t \in N \setminus \{K\} : (s_{to_1} = 0 \wedge s_{to_2} = 1), K \subset N$

$\succ'': \forall k \in K : (s_{ko_1} = 1 \wedge s_{ko_2} = 0) \wedge \forall t \in N \setminus \{K\} : (s_{to_1} = 0 \wedge s_{to_2} = |O| - 1), K \subset N$

$\forall i(o_1 \succ'_i o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ''_i o_2)$

$\Rightarrow |K| * (|O| - 1) > |N| - |K| \Leftrightarrow |K| > (|N| - |K|) * (|O| - 1)$

z.B für  $|K| = |N - K|$  nicht erfüllt.



## Aufgabe 1d

---

Jeder Agent  $i \in N$  teilt die Ereignismenge in eine Zustimmungsmenge  $l_{i,1}$  und eine Ablehnungsmenge  $l_{i,2}$ .

$$\forall o_1 \in l_{i,1}, o_2 \in l_{i,2} : o_1 \succ o_2$$

$$\forall o_1, o_2 \in l_{i,k} : o_1 \succeq o_2 \wedge o_2 \succeq o_1$$

$$s_{[\succ]}(o) = |\{i \mid o \in l_{i,1}, i \in N\}|$$

$$o_1 \succ_W o_2 \leftrightarrow s(o_1) > s(o_2)$$

Zeigen Sie, dass Approval-Voting in diesem Setting tatsächlich Pareto-Effizienz, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und Nicht-Diktatur erfüllt.

Zeige, dass für  $W := \text{Approval-Voting}$  und beliebige  $o_1, o_2 \in O, \forall i \ o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_W o_2$  gilt.

$$\forall i \ o_1 \succ_i o_2$$

$$\Rightarrow \forall i \ o_1 \in I_{i,1} \wedge o_2 \in I_{i,2}$$

$$\Rightarrow s_{[\succ]}(o_1) = |N| > s_{[\succ]}(o_2) = 0$$

$$\Rightarrow o_1 \succ_W o_2$$

Zeige, dass für  $W := \text{Approval-Voting}$

$\forall i(o_1 \succ'_i o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ''_i o_2) \Rightarrow (o_1 \succ_{W([\succ'])} o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ_{W([\succ''])} o_2)$   
gilt.

$$\begin{aligned} & \forall i(o_1 \succ'_i o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ''_i o_2) \\ \Rightarrow & \forall i(o_1, o_2 \in I_{i,1} \vee (o_1 \in I_{i,1} \wedge o_2 \in I_{i,2}) \vee o_1, o_2 \in I_{i,2}) \\ \Rightarrow & s_{[\succ']} (o_1) > s_{[\succ']} (o_2) \Leftrightarrow s_{[\succ'']} (o_1) > s_{[\succ'']} (o_2) \\ \Rightarrow & o_1 \succ_{W([\succ'])} o_2 \Leftrightarrow o_1 \succ_{W([\succ''])} o_2 \end{aligned}$$

Zeige, dass es für  $W := \text{Approval-Voting}$  kein  $i \in N$  mit  $\forall o_1, o_2 (o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_W o_2)$  gibt.

Widerspruchsbeweis:

Sei  $x \in N$  ein Diktator

$$\begin{aligned} & o_1, o_2 \in O : \forall i \in N \setminus \{x\} : o_2 \in I_{i,1} \wedge o_2 \in I_{x,2} \wedge o_1 \succ_W o_2 \\ \Rightarrow & |\{i \mid o_1 \in I_{i,1}, i \in N\}| - |\{i \mid o_1 \in I_{i,1}, i \in N \setminus \{x\}\}| > |\{i \mid o_2 \in I_{i,2}, i \in N\}| \\ \Rightarrow & 1 \geq |N| \\ \Rightarrow & \text{Widerspruch} \end{aligned}$$