SOAS – Blatt 7 Aufgabe 2

Andreas Knote
Birgit Kühbacher
Christopher Stifter

WS 16/17
Selbst-organisierende, adaptive Systeme
Universität Augsburg

Kern und Koalitionen

„Ein Projekt wird mit Leistungspunkten bewertet. Studentinnen und Studenten können in 3-er Teams zusammenarbeiten und erhalten Punkte als Gruppe, die sie danach beliebig aufeinander verteilen können.

Je eine Person kann keine Punkte erwirtschaften, je 2 schaffen 4 LP und alle zusammen 6 LP.

*Geben Sie wiederum die **charakteristische Funktion** an und bestimmen **eine Auszahlung im Kern**."*

$$v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \rightarrow 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \rightarrow 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2\} \rightarrow 4 \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \rightarrow 6 \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion gibt die **Payoffs für bestimmte Koalitionen** zwischen Spielern an.

In diesem Fall ist sie abhängig allein von der Koalitionsgröße.

Koalitionen im Kern

$$x \in Kern(v): \forall\, S \subseteq N: \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

- Eine Auszahlung im Kern berücksichtigt individuelle und kollektive Rationalität.
- Der Kern kann leer sein oder mehrere Auszahlungen enthalten, in welchem Fall die Lösung des kooperativen Spiels nicht eindeutig ist.
- Eine Auszahlung im Kern führt zu einer stabilen Koalition.

$$x^a = (2,2,2)$$

$$|S| = 0: \sum_{i \in S} x_i^a = 0 \geq 0 = v(S)$$

$$|S| = 1: \sum_{i \in S} x_i^a = 2 \geq 0 = v(S)$$

$$|S| = 2: \sum_{i \in S} x_i^a = 4 \geq 4 = v(S)$$

$$|S| = 3: \sum_{i \in S} x_i^a = 6 \geq 6 = v(S)$$

*„Berechnen Sie den **Shapley-Wert** für das vorherige Beispiel."*

$$\phi(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

- Der Shapely-Wert ist die Auszahlungsfunktion, die zu einer fairen Verteilung führt.
- Sie muss jedoch nicht zwingend auch zu einer stabilen großen Koalition führen, da Individualgewinne in anderen Koalitionen höher sein können.

$$\phi_i(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$= \frac{1}{6}(0!\,(3-1)!\left(v(\emptyset \cup \{i\}) - v(\emptyset)\right) + \ \ldots)$$

$$= \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot 4 + 4) = \frac{12}{6} = 2$$

Es gilt wg. Symmetrie der char. Funktion in i $\phi_1(V) = \phi_2(V) = \phi_3(V)$

$$\phi(V) = \left(\phi_1(V), \phi_1(V), \phi_1(V)\right) = (2{,}2{,}2)$$

Auszahlung aus a) also **fair (Shapley)** und **stabil (im Kern)**.

“Nehmen Sie an, 3 Agenten ($N = \{1, 2, 3\}$) können gemeinsam 100% Werbereichweite erreichen, je 2 schaffen 80% und einer alleine 0%.

Es sei ein bestimmter Betrag von x Euro bei 100% Reichweite erreichbar (der Wert der großen Koalition).

Auszuzahlen ist ein relativer Anteil von x, also Werte zwischen 0 und 1 für alle Agenten in N.

***Formalisieren Sie diese Situation** mittels der **charakteristischen Funktion** und geben sie **eine Auszahlung** (also einen Vektor x mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) **im Kern** an.“*

$$v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \rightarrow 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \rightarrow 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2\} \rightarrow 0.8x \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \rightarrow x \end{cases}$$

$$\phi_i(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$= \frac{1}{6}\Big(1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (0.8x\ - 0)\Big) + 2 \cdot 1 \cdot (x - 0.8x))$$

$$= \frac{1}{3}x$$

Payoff der großen Koalition wird fair aufgeteilt, ist jedoch nicht stabil, denn x^ϕ liegt nicht im Kern:

$$x^\phi = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$$

$$S\ bel.mit\ |S| = 2: \qquad \sum x_i^\phi = \frac{2}{3}x < v(S) = 0.8x$$

Gibt es eine Auszahlung im Kern?

- $x_i = 1$ für ein beliebiges, festes i:
  - $S\ mit\ |S| = 2, i \notin S$: $\quad \sum_{j \in S} x_j = 0 < v(S) = 0.8x$
- $x_{i,k} > 0,\ x_i + x_k = 1$, für beliebige, feste i, k:
  - $S\ mit\ |S| = 2, i \notin S$: $\quad \sum_{j \in S} x_j = x_k < v(S) = 0.8x$
  - Oder $S\ mit\ |S| = 2, k \notin S$: $\quad \sum_{j \in S} x_j = x_i < v(S) = 0.8x$

Gegeben $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, mit

$a + b + c = 1,$

$a + b >= 0.8\ (I),$

$b + c >= 0.8\ (II),$

$a + c >= 0.8\ (III).$

$$a = 1 - b - c$$
$$\Rightarrow 1 - c - b + b \geq 0.8 \Leftrightarrow c \leq 0.2$$

$$b = 1 - a - b \Rightarrow \mathrm{b} \leq 0.2$$
$$c = 1 - a - b \Rightarrow a \leq 0.2$$

Daraus folgt: $a + b + c <= 0.6$

„Nehmen Sie an, dass Koalitionen aus einem Kapitalisten (c) und zwei Arbeitern (w1 und w2) gebildet werden.

*Um produktiv zu werden, muss eine **Mischung aus Arbeitern und Kapitalisten** gewählt werden (nur Kapitalist oder nur Arbeiter ergibt Wert 0).“*

Charakteristische Funktion $v: 2^N \to \mathbb{R}$:

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2, c \notin S\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2, c \in S\} \to 3 \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \to 4 \end{cases}$$

Welche Auszahlungen liegen im Kern?

- $x_1 = (2,1,1)$ liegt im Kern
- $x_2 = (2.5,0.5,1)$ liegt im Kern
- $x_3 = (4,0,0)$ liegt im Kern

$$\phi_c(V) = \frac{1}{6}\Big($$

$$0 \qquad S = \emptyset$$

$$+\,2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (3-0) \qquad S = \{w_1\}, \{w_2\}$$

$$+\,2 \cdot 1 (4-0) \qquad S = \{w_1, w_2\}$$

$$\Big) = \frac{14}{6}$$

$$\phi_{w_i}(V) = \frac{1}{6}\Big($$

$$0 \qquad S = \emptyset$$

$$+\;1 \cdot 1 \cdot (0-0) \qquad S = \{w_j\}$$

$$+\;1 \cdot 1 \cdot (3-0) \qquad S = \{c\}$$

$$+\,2 \cdot 1 (4-0) \qquad S = \{w_j, c\}$$

$$\Big) = \frac{5}{6}$$

Shapley-Wert im Kern?

$$\phi(V) = \left(\frac{14}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$S = \{w_j, c\}$:

$$\sum_{j \in S} x_j = \frac{14}{6} + \frac{5}{6} = \frac{19}{6} \geq v(S) = 3$$

$S = \{w_1, w_2, c\}$:

$$\sum_{j \in S} x_j = \frac{14}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 4 \geq v(S) = 4$$