Entropie:

$$H_X = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log(\mathbb{P}^X(x))$$

Aufgabe 2

a) geg: $\mathbb{P}^X(x) = 1$ für ein $x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{P}^X(x') = 0$ falls $x' \neq x$

ges: H_X

$$H_X = -\left(\mathbb{P}^X(x) \log_2(\mathbb{P}^X(x)) + \sum_{\substack{x' \in X(\Omega) \\ x' \neq x}} \mathbb{P}^X(x') \log_2(\mathbb{P}^X(x'))\right)$$

$$= -\left(1 \cdot \log_2(1) + \sum_{\substack{x' \in X(\Omega) \\ x' \neq x}} 0 \cdot \log_2(0)\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=} -(0+0) = 0$$

[Keine x' vorhanden, nur x. Deshalb tritt sicherlich nur x auf $\longrightarrow$ geringe Entropie]

b) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\Omega = \{K, Z\}$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{K\}, \{Z\}, \{K, Z\}\}$

$\mathbb{P} = \{\emptyset \to 0, \Omega \to 1, \{K\} \to h, \{Z\} \to 1-h\}$

Zufallsvariable:

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(K) = 0$

$X(Z) = 1$

Berechne H_X für $h=0$, $h=\frac{1}{2}$ und $h=1$:

$$H_X = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}^X(x) \log_2(\mathbb{P}^X(x))$$

$$= -\left(\mathbb{P}^X(0) \log_2(\mathbb{P}^X(0)) + \mathbb{P}^X(1) \log_2(\mathbb{P}^X(1))\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=} -\big(\mathbb{P}(X^{-1}(0)) \log_2(\mathbb{P}(X^{-1}(0))) +$$

$$+ \mathbb{P}(X^{-1}(1)) \log_2(\mathbb{P}(X^{-1}(1)))\big)$$

$$= -\left(\mathbb{P}(\{K\}) \log_2 \mathbb{P}^X(\{K\}) + \mathbb{P}(\{Z\}) \log_2(\mathbb{P}(\{Z\}))\right)$$

$$= \begin{cases} h=0: & -(0\cdot \log_2(0) + 1\cdot \log_2(1)) \overset{\text{def}}{=} 0 \\ h=\frac{1}{2}: & -\left(\frac{1}{2}\cdot \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ & = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1 \\ h=1: & -(1\cdot \log_2(1) + 0\cdot \log_2(0)) \overset{\text{def}}{=} 0 \end{cases}$$

Feststellung:

- Bei $h=0$ bzw $h=1$ ist die Entropie minimal, da es nur eine Möglichkeit für den Münzwurf gibt:
  - $\rightarrow h=0$, d.h. Kopf tritt nicht auf und Zahl tritt sicher auf.
  - $\rightarrow h=1$ analog

Shannon Entropy
$\rightarrow$ bits ?

- Bei $h=\frac{1}{2}$, also Gleichverteilung, ist die Entropie maximal. Da Kopf und Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, ist es ungewiss welches Ereignis tatsächlich eintreten wird.

d) Kullback-Leibler-Divergenz:

$$D(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log\left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)}\right)$$

1) zz: $D(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) \geq 0$

$$D(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log\left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)}\right)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \underbrace{\mathbb{P}_1^X(x)}_{\substack{\geq 0, \\ \text{da Wahrscheinlich-} \\ \text{keitsmaß}}} \underbrace{\left(-\log\left(\frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\mathbb{P}_1^X(x)}\right)\right)}_{\text{konvex (siehe Angabe)}}$$

$$\overset{\text{Jensensche Ungleichung}}{\geq} -\log\left(\sum_{x\in X(\Omega)} \cancel{\mathbb{P}_1^X(x)} \frac{\mathbb{P}_2^X(x)}{\cancel{\mathbb{P}_1^X(x)}}\right)$$

$$= -\log\left(\sum_{x\in X(\Omega)} \underbrace{\mathbb{P}_2^X(x)}_{\geq 0,\text{ da Wahrscheinlichkeitsmaß}}\right)$$

siehe Zusatz ~~$\geq -\log\left(\sum_{x\in X(\Omega)} 0\right)$~~

$$= -\log(0) \overset{\text{def}}{=} 0$$

2) ggg: Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_2$ mit $\mathbb{P}_2^X(x) = \frac{1}{|X|}$ $\forall x \in X(\Omega)$

(Gleichverteilung)

zz: $\mathbb{P}_2$ maximale Entropie, d.h. $H^X_{\mathbb{P}_2} \geq H^X_{\mathbb{P}_1}$ f.a. W-Maße $\mathbb{P}_1$

Hilfsrechnung:

$$D(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X \cancel{\circ}(x) \log\left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)}\right)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \left(\log(\mathbb{P}_1^X(x)) - \log(\mathbb{P}_2^X(x))\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log \mathbb{P}_1^X(x)}_{= -H^X_{\mathbb{P}_1}} - \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \underbrace{\log(\mathbb{P}_2^X(x))}_{= \log\left(\frac{1}{|X|}\right)}$$

$$= -H^X_{\mathbb{P}_1} - \log\left(\frac{1}{|X|}\right) \underbrace{\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x)}$$

$$= -H^X_{\mathbb{P}_1} - \log\left(\frac{1}{|X|}\right) \boxed{*}$$

$\mathbb{P}_1$ W-Maß, deshalb

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) =$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_1(X^{-1}(x))$$

$$= \mathbb{P}_1\left(\sum \bigcup_{x\in X(\Omega)} X^{-1}(x)\right)$$

$$= \mathbb{P}_1(\Omega) = 1$$

$H^X_{\mathbb{P}_2} \geq H^X_{\mathbb{P}_1}$

$\iff H^X_{\mathbb{P}_2} - H^X_{\mathbb{P}_1} \geq 0$

$\iff -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \log(\mathbb{P}_2^X(x)) + \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log(\mathbb{P}_1^X(x)) \geq 0$

$\iff \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log(\mathbb{P}_1^X(x)) - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \log(\mathbb{P}_2^X(x)) \geq 0$

$\iff -H^X_{\mathbb{P}_1} - \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{|X|} \log\left(\frac{1}{|X|}\right) \geq 0$

$\iff -H^X_{\mathbb{P}_1} - |X| \cdot \frac{1}{|X|} \log\left(\frac{1}{|X|}\right) \geq 0$

$\iff -H^X_{\mathbb{P}_1} - \log\left(\frac{1}{|X|}\right) \geq 0$

$\boxed{*}$

$\iff D(\mathbb{P}_1 \| \mathbb{P}_2) \geq 0$ ✓ (gilt laut 1))

SOAS, Blatt 02

Beweis zu 2d:

$\mathbb{P}_2$ Gleichverteilung, $\mathbb{P}_2^X(x) = \frac{1}{|X|}$

$$H^X_{\mathbb{P}_2} - H^X_{\mathbb{P}_1} = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_2^X(x) \log_2(\mathbb{P}_2^X(x)) + \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log(\mathbb{P}_1^X(x))$$

$$= -|X(\Omega)| \cdot \left(\frac{1}{|X(\Omega)|} \log_2\left(\frac{1}{|X(\Omega)|}\right)\right) + \quad -\text{"}-$$

$$= -\log_2\left(\frac{1}{|X(\Omega)|}\right) \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x)$$

$$= -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log_2\left(\frac{1}{|X(\Omega)|}\right) + \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log_2(\mathbb{P}_1^X(x))$$

$$= -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log_2(\mathbb{P}_2^X(x)) + \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log_2(\mathbb{P}_1^X(x))$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \left(\log_2(\mathbb{P}_1^X(x)) - \log_2(\mathbb{P}_2^X(x))\right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_1^X(x) \log_2\left(\frac{\mathbb{P}_1^X(x)}{\mathbb{P}_2^X(x)}\right)$$

$$= D(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) \geq 0.$$