SOAS – Blatt 7 Aufgabe 2

Andreas Knote
Birgit Kühbacher
Christopher Stifter

WS 16/17
Selbst-organisierende, adaptive Systeme
Universität Augsburg

Kern und Koalitionen

„Ein Projekt wird mit Leistungspunkten bewertet. Studentinnen und Studenten können in 3-er Teams zusammenarbeiten und erhalten Punkte als Gruppe, die sie danach beliebig aufeinander verteilen können.

Je eine Person kann keine Punkte erwirtschaften, je 2 schaffen 4 LP und alle zusammen 6 LP.

Geben Sie wiederum die ***charakteristische Funktion*** *an und bestimmen* ***eine Auszahlung im Kern****.“*

$$v: 2^N \to \mathbb{R}$$

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2\} \to 4 \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \to 6 \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion gibt die **Payoffs für bestimmte Koalitionen** zwischen Spielern an.

In diesem Fall ist sie abhängig allein von der Koalitionsgröße.

Koalitionen im Kern

$$x \in Kern(v) \colon \forall\, S \subseteq N \colon \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

- Eine Auszahlung im Kern berücksichtigt individuelle und kollektive Rationalität.
- Der Kern kann leer sein oder mehrere Auszahlungen enthalten, in welchem Fall die Lösung des kooperativen Spiels nicht eindeutig ist.
- Eine Auszahlung im Kern führt zu einer stabilen Koalition.

$$x^a = (2,2,2)$$

$$|S| = 0: \sum_{i \in S} x_i^a = 0 \geq 0 = v(S)$$

$$|S| = 1: \sum_{i \in S} x_i^a = 2 \geq 0 = v(S)$$

$$|S| = 2: \sum_{i \in S} x_i^a = 4 \geq 4 = v(S)$$

$$|S| = 3: \sum_{i \in S} x_i^a = 6 \geq 6 = v(S)$$

Lösung ist eindeutig

Es muss gelten:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Weiterhin:

$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$\Leftrightarrow 6 - x_2 - x_3 + x_2 \geq 4$$
$$\Rightarrow x_3 \leq 2$$

Analog

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 + x_3 \geq 4 \;\Rightarrow x_2 = x_3 = 2$$
$$\Rightarrow x_1 = 2$$

*„Berechnen Sie den **Shapley-Wert** für das vorherige Beispiel."*

$$\phi(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

- Der Shapely-Wert ist die Auszahlungsfunktion, die zu einer fairen Verteilung führt.
- Sie muss jedoch nicht zwingend auch zu einer stabilen großen Koalition führen, da Individualgewinne in anderen Koalitionen höher sein können.

$$\phi_i(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$= \frac{1}{6}(0!\,(3-1)!\,\big(v(\emptyset \cup \{i\}) - v(\emptyset)\big) + \ \dots)$$

$$= \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot 4 + 4) = \frac{12}{6} = 2$$

Es gilt wg. Symmetrie der char. Funktion in i $\phi_1(V) = \phi_2(V) = \phi_3(V)$

$$\phi(V) = \big(\phi_1(V), \phi_1(V), \phi_1(V)\big) = (2{,}2{,}2)$$

Auszahlung aus a) also **fair (Shapley)** und **stabil (im Kern)**.

Aufgabe 2 c)

“Nehmen Sie an, 3 Agenten ($N = \{1,2,3\}$) können gemeinsam 100% Werbereichweite erreichen, je 2 schaffen 80% und einer alleine 0%.

Es sei ein bestimmter Betrag von x Euro bei 100% Reichweite erreichbar (der Wert der großen Koalition).

Auszuzahlen ist ein relativer Anteil von x, also Werte zwischen 0 und 1 für alle Agenten in N.

***Formalisieren Sie diese Situation** mittels der **charakteristischen Funktion** und geben sie **eine Auszahlung** (also einen Vektor x mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) **im Kern** an.“*

$$v\colon 2^N \to \mathbb{R}$$

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2\} \to 0.8x \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \to x \end{cases}$$

$$\phi_i(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\ (|N| - |S| - 1)!\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$= \frac{1}{6}\Big(1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (0.8x\ - 0)\Big) + 2 \cdot 1 \cdot (x - 0.8x))$$

$$= \frac{1}{3} x$$

Payoff der großen Koalition wird fair aufgeteilt, ist jedoch nicht stabil, denn x^{ϕ} liegt nicht im Kern:

$$x^{\phi} = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$$

$$S\ bel.mit\ |S| = 2\text{:} \qquad \sum x_i^{\phi} = \frac{2}{3} x < v(S) = 0.8x$$

Gibt es eine Auszahlung im Kern?

- $x_i = 1$ für ein beliebiges, festes i:
  - $S\ mit\ |S| = 2, i \notin S$: $\sum_{j \in S} x_j = 0 < v(S) = 0.8x$
- $x_{i,k} > 0,\ x_i + x_k = 1$, für beliebige, feste i, k:
  - $S\ mit\ |S| = 2, i \notin S$: $\sum_{j \in S} x_j = x_k < v(S) = 0.8x$
  - Oder $S\ mit\ |S| = 2, k \notin S$: $\sum_{j \in S} x_j = x_i < v(S) = 0.8x$

Das funktioniert so nicht!

Gedankenspiel

Gegeben $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, mit

$a + b + c = 1,$

$a + b >= 0.8\ (I),$

$b + c >= 0.8\ (II),$

$a + c >= 0.8\ (III).$

$$a = 1 - b - c$$
$$\Rightarrow 1 - c - b + b \geq 0.8 \Leftrightarrow c \leq 0.2$$

$$b = 1 - a - b \Rightarrow \mathrm{b} \leq 0.2$$
$$c = 1 - a - b \Rightarrow a \leq 0.2$$

Daraus folgt: $a + b + c <= 0.6$ 

„Nehmen Sie an, dass Koalitionen aus einem Kapitalisten (c) und zwei Arbeitern (w1 und w2) gebildet werden.

Um produktiv zu werden, muss eine ***Mischung aus Arbeitern und Kapitalisten*** *gewählt werden (nur Kapitalist oder nur Arbeiter ergibt Wert 0)."*

Charakteristische Funktion $v: 2^N \to \mathbb{R}$:

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 1\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2, c \notin S\} \to 0 \\ \{S \subset N \mid |S| = 2, c \in S\} \to 3 \\ \{S \subset N \mid |S| = 3\} \to 4 \end{cases}$$

Welche Auszahlungen liegen im Kern?

- $x_1 = (2,1,1)$ liegt im Kern
- $x_2 = (2.5,0.5,1)$ liegt im Kern
- $x_3 = (4,0,0)$ liegt im Kern

$$\phi_c(V) = \frac{1}{6}\Big($$

$$\begin{aligned} &0 && S = \emptyset \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (3 - 0) && S = \{w_1\}, \{w_2\} \\ &+ 2 \cdot 1(4 - 0) && S = \{w_1, w_2\} \end{aligned}$$

$$\Big) = \frac{14}{6}$$

$$\phi_{w_i}(V) = \frac{1}{6}\Big($$

$$\begin{aligned} &0 && S = \emptyset \\ &+ \ 1 \cdot 1 \cdot (0 - 0) && S = \{w_j\} \\ &+ \ 1 \cdot 1 \cdot (3 - 0) && S = \{c\} \\ &+ 2 \cdot 1(4 - 0) && S = \{w_j, c\} \end{aligned}$$

$$\Big) = \frac{5}{6}$$

„Bestimmen Sie die optimale Koalitionsstruktur […] mittels des DP-Algorithmus.“

$$N = \{1,2,3,4\}$$

$$v := \begin{cases} \{\emptyset\} \to 0 \\ \{1\} \to 5 \quad \{2\} \to 4 \quad \{3\} \to 6 \quad \{4\} \to 4 \\ \{1,2\} \to 7 \quad \{1,3\} \to 8 \quad \{1,4\} \to 9 \\ \{2,3\} \to 10 \quad \{2,4\} \to 9 \quad \{3,4\} \to 6 \\ \{1,2,3\} \to 14 \quad \{1,2,4\} \to 12 \quad \{2,3,4\} \to 15 \quad \{1,3,4\} \to 17 \\ \{1,2,3,4\} \to 18 \end{cases}$$

Koalitionen

<table>
<tr><th>C</th><th>v</th><th>f</th><th>t(c)</th><th>f(c)</th></tr>
<tr><td>{1}</td><td colspan="2">5</td><td>{1}</td><td>5</td></tr>
<tr><td>{2}</td><td colspan="2">4</td><td>{2}</td><td>4</td></tr>
<tr><td>{3}</td><td colspan="2">6</td><td>{3}</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="5">•••</td></tr>
<tr><td>{2,4}</td><td>9</td><td>8</td><td>{2,4}</td><td>9</td></tr>
<tr><td>{3,4}</td><td>6</td><td>10</td><td>{3},{4}</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="5">•••</td></tr>
<tr><td>{1,2,4}</td><td>12</td><td>$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$
$f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$
$f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$</td><td>{1},{2,4}</td><td>14</td></tr>
<tr><td>{1,3,4}</td><td>17</td><td>$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$
$f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$
$f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$</td><td>{1,3,4}</td><td>17</td></tr>
<tr><td colspan="5">•••</td></tr>
<tr><td>{1,2,3,4}</td><td>18</td><td>$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$
$f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$
$f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$
$f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$
$f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$
$f(\{1,3\},\{2,4\}) = 9 + 11 = 20$
$f(\{2,3\},\{1,4\}) = 10 + 9 = 19$</td><td>{2},{1,3,4}</td><td>21</td></tr>
</table>

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
•••				
$\{1,2,3,4\}$	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$ $f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$ $f(\{1,3\},\{2,4\}) = 9 + 11 = 20$ $f(\{2,3\},\{1,4\}) = 10 + 9 = 19$	$\{2\},\{1,3,4\}$	21

Betrachtete Koalition

Koalitionen

C	v	f	t(c)	f(c)
{1}	5		{1}	5
{2}	4		{2}	4
{3}	6		{3}	6
•••				
{2,4}	9	8	{2,4}	9
{3,4}	6	10	{3},{4}	10
•••				
{1,2,4}	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	{1},{2,4}	14
{1,3,4}	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	{1,3,4}	17
•••				
{1,2,3,4}	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$ $f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$ $f(\{1,3\},\{2,4\}) = 9 + 11 = 20$ $f(\{2,3\},\{1,4\}) = 10 + 9 = 19$	{2},{1,3,4}	21

Zielfunktionswert

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
•••				
$\{1,2,3,4\}$	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$ $f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$	$\{2\},\{1,3,4\}$	21

Vergleich mit vorherigen Koalitionen

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
•••				
$\{1,2,3,4\}$	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$ $f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$	$\{2\},\{1,3,4\}$	21

Vergleich mit vorherigen Koalitionen

Koalitionen

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
•••				
$\{1,2,3,4\}$	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$ $f(\{1,2\},\{3,4\}) = 9 + 10 = 19$	$\{2\},\{1,3,4\}$	21

Optimale Koalitionen und Wert

Dynamische Programmierung (Excel)

„Weisen Sie zudem nach, dass die Anzahl der Operationen in O(3n) liegt."

Koalitionen

C	v	f	t(c)	f(c)
{1}		5	{1}	5
{2}		4	{2}	4
{3}		6	{3}	6
		•••		
{2,4}	9	8	{2,4}	9
{3,4}	6	10	{3},{4}	10
		•••		
{1,2,4}	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	{1},{2,4}	14
{1,3,4}	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	{1,3,4}	17
		•••		
{1,2,3,4}	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$	{2},{1,3,4}	21

Je $\binom{n}{s}$ Koalitionen von Größe s

C	v	f	t(c)	f(c)
{1}		5	{1}	5
{2}		4	{2}	4
{3}		6	{3}	6
		…		
{2,4}	9	8	{2,4}	9
{3,4}	6	10	{3},{4}	10
		…		
{1,2,4}	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	{1},{2,4}	14
{1,3,4}	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	{1,3,4}	17
		…		
{1,2,3,4}	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$	{2},{1,3,4}	21

Je 2^{s-1} Zerlegungen sind zu vergleichen

Vergleiche

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
•••				
$\{1,2,3,4\}$	18	$f(\{1\},\{2,3,4\}) = 5 + 15 = 20$ $f(\{2\},\{1,3,4\}) = 4 + 17 = 21$ $f(\{3\},\{1,2,4\}) = 6 + 14 = 20$ $f(\{4\},\{1,2,3\}) = 15 + 4 = 19$	$\{2\},\{1,3,4\}$	21

$\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} (2^{s-1})$ Vergleiche insgesamt

Nebenrechnung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^k b^{n-k}\right)$$

Für $a = 2$ und $b = 1$ gilt:

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad (I)$$

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \left(2^{s-1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \left(2^{s}\right) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(2^{s}\right) - \frac{1}{2} \binom{n}{0} 2^0 \qquad (II)$$

(I) in (II) mit Parametersubstitution s für k ergibt:

$$\frac{1}{2} 3^n - \frac{1}{2} \binom{n}{0} 2^0 = \frac{1}{2} (3^n - 1)$$

C	v	f	t(c)	f(c)
$\{1\}$	5		$\{1\}$	5
$\{2\}$	4		$\{2\}$	4
$\{3\}$	6		$\{3\}$	6
•••				
$\{2,4\}$	9	8	$\{2,4\}$	9
$\{3,4\}$	6	10	$\{3\},\{4\}$	10
•••				
$\{1,2,4\}$	12	$f(\{1\}) + f(\{2,4\}) = 5 + 9 = 14$ $f(\{1,2\}) + f(\{4\}) = 9 + 4 = 13$ $f(\{1,4\}) + f(\{2\}) = 9 + 4 = 13$	$\{1\},\{2,4\}$	14
$\{1,3,4\}$	17	$f(\{1\}) + f(\{3,4\}) = 5 + 10 = 15$ $f(\{1,3\}) + f(\{4\}) = 11 + 4 = 15$ $f(\{1,4\}) + f(\{3\}) = 9 + 6 = 15$	$\{1,3,4\}$	17
				1

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \left(2^{s-1}\right) = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{O}(3^n)}$$