Selbst-organisierende, adaptive Systeme (WS 16/17)

Übungsblatt 08 (Bearbeitung bis: 13.12.2015, 23:59 Uhr)

Koalitionen und Organisationen

Aufgabe 1. ***(Shapley-Wert)***

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Shapley-Wert, einer eindeutig bestimmten Auszahlungsfunktion in Koalitionsspielen.

a) (einfach) Überlegen Sie sich zwei Situationen, die Sie als Koalitionsspiel modellieren können.

b) Nehmen Sie an, eine Gruppe von Agenten besteht aus A, B, C und D. Alle Agenten stimmen über die Auszahlung von 100 Millionen ab, und müssen dafür eine Mehrheit von 51 erreichen. A hat 45 Stimmen zur Verfügung, B 25 und C und D jeweils 15. Der Wert einer Koalition besteht dann in der Menge des Geldes, die sie gemeinsam akquierieren kann. Modellieren Sie diese Situation als Koalitionsspiel und berechnen Sie die Shapley-Werte der beteiligten Agenten (bezogen auf die große Koalition $\{A, B, C, D\}$). Ist diese Koalition mit dem Shapley-Wert stabil oder gibt es eine Teilkoalition, die auch ohne andere Beteiligte auskommt und für alle daran beteiligten Agenten bessere Payoffs erzielen kann?

c) Zeigen Sie an diesem Spiel, dass die Berechnung über das Mitteln über alle Permutationen nötig ist, d.h., zeigen Sie, dass etwa $\phi_A(V) \neq \phi'_A(V)$ für eine „vereinfachte“ Berechnung über die Teilmengen: $\phi'_A(V) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$. Gelten manche der Fairness-Axiome auch für diese vereinfachte Berechnung?

d) Dieses Spiel ist ein sogenanntes *einfaches Spiel*, da der Wert der Koalition eine „alles-oder-nichts“-Eigenschaft hat, entweder schafft eine Koalition eine Mehrheit oder nicht. Nehmen Sie nun an, die Stimmenverteilung läge bei A und C jeweils mit 26 Stimmen und B und D mit 24 Stimmen und mindestens 50 Stimmen sind nötig, um 100 Millionen zu erhalten. Ist dieses Spiel noch superadditiv?

e) An dem Beispiel aus der ersten Teilaufgabe lassen sich auch *Existenz* und *Eindeutigkeit* des Kerns gut erläutern. Der Kern enthält Auszahlungsvektoren der großen Koalition, bei der Teilkoalitionen keinen größeren Wert als die Summe ihrer Auszahlungen erzielen können. Zeigen Sie, dass in diesem Spiel *keine* Auszahlung im Kern existieren kann. Leiten Sie dazu aus den Minimalkoalitionen, die erfolgreich abstimmen können, Anforderungen an den Auszahlungsvektor ab und zeigen Sie, dass diese nicht erfüllbar sind.

f) Zur Betrachtung der Eindeutigkeit verändern Sie nun den Abstimmungsmodus, sodass mindestens 80% der Stimmen nötig sind, um die 100 Millionen zu erhalten. Welche Minimalkoalitionen sind nun vorhanden? Welche Auszahlungsvektoren liegen im Kern? Beachten Sie, dass der Kern – im Gegensatz zu Shapley – *keine* Fairness berücksichtigt.

Aufgabe 2. ***(Kern/Koalitionen)***

Diese Aufgabe vertieft Konzepte zu Koalitionssituationen.

a) Ein Projekt wird mit Leistungspunkten bewertet. Studentinnen und Studenten können in 3-er Teams zusammenarbeiten und erhalten Punkte als Gruppe, die sie danach beliebig aufeinander verteilen können. Je eine Person kann keine Punkte erwirtschaften, je 2 schaffen 4 LP und alle zusammen 6 LP. Geben Sie wiederum die charakteristische Funktion an und bestimmen eine Auszahlung im Kern.

b) Berechnen Sie den Shapley-Wert für das vorherige Beispiel.

c) Nehmen Sie an, 3 Agenten ($N = \{1, 2, 3\}$) können gemeinsam 100% Werbereichweite erreichen, je 2 schaffen 80% und einer alleine 0%. Es sei ein bestimmter Betrag von x Euro bei 100% Reichweite erreichbar (der Wert der großen Koalition). Auszuzahlen ist ein relativer Anteil von x, also Werte zwischen 0 und 1 für alle Agenten in N. Formalisieren Sie diese Situation mittels der charakteristischen Funktion und geben eine Auszahlung (also einen Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 1.0$) im Kern an.

d) Nehmen Sie an, dass Koalitionen aus einem Kapitalisten (c) und zwei Arbeitern (w_1 und w_2) gebildet werden. Um produktiv zu werden, muss eine Mischung aus Arbeitern und Kapitalisten gewählt werden (nur Kapitalist oder nur Arbeiter ergibt Wert 0). Die charakteristische Funktion v erfüllt:

- $v(\{c, w_1\}) = v(\{c, w_2\}) = 3$
- $v(\{c, w_1, w_2\}) = 4$

Welche Auszahlungen liegen im Kern?

- $x_c = 2$, $x_{w_1} = 1$, $x_{w_2} = 1$
- $x_c = 2.5$, $x_{w_1} = 0.5$, $x_{w_2} = 1$
- $x_c = 4$, $x_{w_1} = 0$, $x_{w_2} = 0$

Was ist der Shapley-Wert für jeden Agenten? Liegt dieser auch im Kern?

e) Bestimmen Sie die optimale Koalitionsstruktur über $N = \{1, 2, 3, 4\}$ für

- $v(\{1\}) = 5$, $v(\{2\}) = 4$, $v(\{3\}) = 6$, $v(\{4\}) = 4$
- $v(\{1, 2\}) = 7$, $v(\{1, 3\}) = 8$, $v(\{1, 4\}) = 9$
- $v(\{2, 3\}) = 10$, $v(\{2, 4\}) = 9$, $v(\{3, 4\}) = 6$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 14$, $v(\{1, 2, 4\}) = 12$, $v(\{2, 3, 4\}) = 15$, $v(\{1, 3, 4\}) = 17$
- $v(\{1, 2, 3, 4\}) = 18$

mittels des DP-Algorithmus. Weisen Sie zudem nach, dass die Anzahl der Operationen in $O(3^n)$ liegt.