Selbstorganisierende, adaptive Systeme

Übungsblatt 5

Ferdinand Dürlich,
Mikhail Kreymerman,
Stefan Büttner

Institut for Software & Systems Engineering
Universität Augsburg

Fr., 25.11.2016

Frame Title

Frame Subtitle

- Some item
- another item

block title

asdf

$$\mathbb{P}(a|s) = \prod_{i \in N} s_i(a_i)$$

Aufgabe 1
a)

Die iterative Elimination strikt dominanter Strategien kann unabhängig von der Reihenfolge der eliminierten Strategien ausgeführt werden. Daraus können sich algorithmische Vorteile ergeben. Allerdings gilt dies im Allgemeinen nicht für schwach dominierte Aktionen (also reine Strategien). Zeigen Sie anhand des folgenden Beispiels, dass die Reihenfolge der Elimination Auswirkungen auf den Ausgang eines Spiels haben kann.

Schwach dominante Aktion

Eine Aktion a_i ist eine *schwach dominante Aktion*, wenn für alle $\mathbf{a}_{-i} \in \mathscr{A}_{-i}$ und alle $a_i^{'} \in A_i$ gilt:

$$u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i) \geq u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i^{'})$$

Aufgabe 1
a)

Ein möglicher Weg

	l	r
t	2,1	0,0
m	2,1	1,1
b	0,0	1,1

→

	l	r
m	2,1	1,1
b	0,0	1,1

→

	r
m	1,1
b	1,1

→

	r
m	1,1

oder

	r
b	1,1

- Im dritten Zustand ist m schwach dominant gegenüber b und umgekehrt. Es kann also wahlweise m oder b eliminiert werden.
- Die iterative Elimination kann in diesem Beispiel, bei entsprechend gewählten Eliminationsschritten, zu allen Zuständen außer $\langle b, l\rangle$ und $\langle t, r\rangle$ führen.

	l	m	r
u	3,8	2,0	1,2
d	0,0	1,7	8,2

- Naiver Algorithmus zeigt, dass es sich beim Aktionsprofil (u, l) um ein Nash-Gleichgewicht handelt.

Dominanzlösbarkeit

Ein Spiel ist *dominanzlösbar*, falls die iterative Elimination exakt einen Ausgang (ein Aktionsprofil) liefert. Dieses ist zugleich das einzige Nash-Gleichgewicht.

Aufgabe 1
b)

	l	m	r
u	3,8	2,0	1,2
d	0,0	1,7	8,2

Iterative Elimination

Strikt dominierte Strategien werden eliminiert.

Reine Strategie

Spieler wählen genau eine Aktion.

- Es gibt keine strikt dominierte reine Strategie (= Aktion)
  $\Rightarrow$ Das Spiel ist für reine Strategien nicht dominanzlösbar

Aufgabe 1
b)

	l	m	r
u	$3,8$	$2,0$	$1,2$
d	$0,0$	$1,7$	$8,2$

Gemischte Strategie

Spieler ziehen die Aktion nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

- Durch Randomisierung erwarteten Nutzen maximieren

	$l \leftarrow \frac{1}{2}, m \leftarrow \frac{1}{2}$	r
u	$2.5, 4$	$1,2$
d	$0.5, 3.5$	$8,2$

- In der Matrix stehen Erwartungswerte
- Gemischte Strategie dominiert die reine Strategie r strikt.
  $\Rightarrow$ r kann eliminiert werden

Aufgabe 1
c)

	l	r
l	1, −1	−1, 1
r	−1, 1	1, −1

$s_1(l) = p, \; s_2(l) = q$

$\mathbb{E}u_1(l, s_2) = \mathbb{E}u_1(r, s_2)$ — Sp. 1 ist indifferent gegenüber Sp. 2

$$s_2(l)u_1(l,l) + s_2(r)u_1(l,r) = s_2(l)u_1(r,l) + s_2(r)u_1(r,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad q - (1-q) = -q + (1-q) \quad \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{E}u_2(s_1, l) = \mathbb{E}u_2(s_1, r)$ — Sp. 2 ist indifferent gegenüber Sp. 1

$$s_1(l)u_2(l,l) + s_1(r)u_2(l,r) = s_1(l)u_2(r,l) + s_1(r)u_2(r,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad -p + (1-p) = p - (1-p) \quad \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1
d)

	l	r
l	$x, 2$	$0, 0$
r	$0, 0$	$2, 2$

Nash-Gleichgewicht (s_1, s_2) mit $s_1(l) = p$, $s_2(l) = q$.
$\Rightarrow s_1(r) = 1 - p$, $s_2(r) = 1 - q$.
Gesucht $p(x), q(x)$.

$\mathbb{E}u_1(l, s_2) = \mathbb{E}u_1(r, s_2)$ — Sp. 1 ist indifferent gegenüber Sp. 2

$$s_2(l)u_1(l,l) + s_2(r)u_1(l,r) = s_2(l)u_1(r,l) + s_2(r)u_1(r,r) \Leftrightarrow \quad qx = (1-q)2$$
$$\Rightarrow \quad q = \frac{2}{x+2}$$

$\mathbb{E}u_2(s_1, l) = \mathbb{E}u_2(s_1, r)$ — Sp. 2 ist indifferent gegenüber Sp. 1

$$s_1(l)u_2(l,l) + s_1(r)u_2(l,r) = s_1(l)u_2(r,l) + s_1(r)u_2(r,r) \Leftrightarrow \quad 2p = 2(1-p)$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$