Selbstorganisierende, adaptive Systeme

Übungsblatt 5

Ferdinand Dürlich,
Mikhail Kreymerman,
Stefan Büttner

Institut for Software & Systems Engineering
Universität Augsburg

Fr., 25.11.2016

Aufgabe 1
a)

Die iterative Elimination strikt dominanter Strategien kann unabhängig von der Reihenfolge der eliminierten Strategien ausgeführt werden. Daraus können sich algorithmische Vorteile ergeben. Allerdings gilt dies im Allgemeinen nicht für schwach dominierte Aktionen (also reine Strategien). Zeigen Sie anhand des folgenden Beispiels, dass die Reihenfolge der Elimination Auswirkungen auf den Ausgang eines Spiels haben kann.

Schwach dominierte Aktion

Eine Aktion $a_i \in A_i$ heißt *schwach dominiert*, falls es eine Aktion $a_i^+ \in A_i$ gibt, so dass für alle $\mathbf{a}_{-i} \in \mathscr{A}_{-i}$ gilt:

$$u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i^+) \geq u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i)$$

Aufgabe 1

a)

Variante 1: t wird zuerst eliminiert

	l	r
t	2, 1	0, 0
m	2, 1	1, 1
b	0, 0	1, 1

→

	l	r
m	2, 1	1, 1
b	0, 0	1, 1

→

	r
m	1, 1
b	1, 1

→

	r
m	1, 1

oder

	r
b	1, 1

- Im dritten Zustand ist *m* schwach dominant gegenüber *b* und umgekehrt. Es kann also wahlweise *m* oder *b* eliminiert werden.

Aufgabe 1
a)

Variante 2: b wird zuerst eliminiert

	l	r
t	2,1	0,0
m	2,1	1,1
b	0,0	1,1

→

	l	r
t	2,1	0,0
m	2,1	1,1

→

	l
t	2,1
m	2,1

→

	l
m	2,1

oder

	l
b	2,1

- Die iterative Elimination kann in diesem Beispiel, bei entsprechend gewählten Eliminationsschritten, zu allen Zuständen außer $\langle b, l \rangle$ und $\langle t, r \rangle$ führen.

Aufgabe 1
b)

Dominanzlösbarkeit

Ein Spiel ist *dominanzlösbar*, falls die iterative Elimination exakt einen Ausgang (ein Aktionsprofil) liefert. Dieses ist zugleich das einzige Nash-Gleichgewicht.

Ist folgendes Spiel dominanzlösbar?

	l	m	r
u	3,8	2,0	1,2
d	0,0	1,7	8,2

b) Nash-Gleichgewicht mit naiven Algorithmus

	l	m	r
u	3,8	2,0	1,2
d	0,0	1,7	8,2

- Naiver Algorithmus zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten zeigt, dass es sich beim Aktionsprofil (u, l) um ein Nash-Gleichgewicht handelt.

Strikt dominierte Strategie

Eine Aktion $a_i \in A_i$ heißt *strikt dominiert*, falls es eine Aktion $a_i^+ \in A_i$ gibt, so dass für alle $\mathbf{a}_{-i} \in \mathscr{A}_{-i}$ gilt:

$$u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i^+) > u_i(\mathbf{a}_{-i}, a_i)$$

Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Aktionsprofil übrig, ist das die Lösung.

	l	m	r
u	3,8	2,0	1,2
d	0,0	1,7	8,2

Reine Strategie

Spieler wählen genau eine Aktion.

- Es gibt keine strikt dominierte reine Strategie (Aktion)
- Iterative Elimination geht nicht weiter und liefert keine eindeutige Lösung
  $\Rightarrow$ Das Spiel ist nur mit reinen Strategien nicht dominanzlösbar

Aufgabe 1

b) Iterative Elimination mit gemischten Strategien

- Lösung: durch geeignete Randomisierung strikt dominierende Strategien konstruieren

Gemischte Strategie

Spieler ziehen die Aktion nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Allgemeiner Beispiel:

	l	r
$t \leftarrow p$	$a, \ldots$	$d, \ldots$
$m \leftarrow (1-p)$	$b, \ldots$	$e, \ldots$
b	$c, \ldots$	$f, \ldots$

- p so wählen, dass $pa + (1-p)b > c$ und $pd + (1-p)e > f$, dann ist der erwartete Nutzen der reinen Strategie "die Aktion b zu wählen" kleiner, als der erwartete Nutzen der gemischten Strategie.
  $\Rightarrow$ Reine Strategie wird strikt von der gemischten Strategie dominiert.

Aufgabe 1

b) Iterative Elimination mit gemischten Strategien

Iterative Elimination mit gemischten Strategien

- Falls eine Mischung von 2 (oder mehr) Strategien (gemischte Strategie) die 3. Strategie strikt dominiert, eliminiere die 3. Strategie, denn strikt dominierte Strategien sind nicht rational, unabhängig davon, ob reine oder gemischte Strategien sie dominieren.
- Setze Iterative Elimination von strikt dominierten Strategien wie üblich fort, wenn möglich.

	l	m	r
u	3, 8	2, 0	1, 2
d	0, 0	1, 7	8, 2

- Spieler 2 kann bei Aktionen l und m den größten Nutzen erreichen. $\Rightarrow$ diese Aktionen bei der gemischten Strategie wählen, z.B. jede mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$

	l	m	r
u	$3,8$	$2,0$	$1,2$
d	$0,0$	$1,7$	$8,2$

- Matrix mit gemischter Strategie:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & l \leftarrow \frac{1}{2}, m \leftarrow \frac{1}{2} & r \\
\hline
u & \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 0 & 1,2 \\
d & \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 7 & 8,2 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|c|c|}
 & l \leftarrow \frac{1}{2}, m \leftarrow \frac{1}{2} & r \\
\hline
u & 2.5, 4 & 1, 2 \\
d & 0.5, 3.5 & 8, 2 \\
\hline
\end{array}$$

- In dieser Matrix stehen Erwartungswerte
- Gemischte Strategie dominiert die reine Strategie r strikt.
  $\Rightarrow$ r kann eliminiert werden

Aufgabe 1

b) Iterative Elimination mit gemischten Strategien

	l	m	r
u	3,8	2,0	~~1,2~~
d	0,0	1,7	~~8,2~~

→

	l	m
u	3,8	2,0
d	0,0	1,7

→

	l	m
u	3,8	2,0
d	~~0,0~~	~~1,7~~

→

	l	m
u	3,8	2,0

→

	l	m
u	3,8	~~2,0~~

→

	l
u	3,8

- Iterative Elimination liefert exakt einen Ausgang (ein Aktionsprofil).
  $\Rightarrow$ Das Spiel ist mit gemischten Strategien dominanzlösbar

Aufgabe 1

c)

	l	r
l	1, −1	−1, 1
r	−1, 1	1, −1

$s_1(l) = p, \; s_2(l) = q$

$\mathbb{E}u_1(l, s_2) = \mathbb{E}u_1(r, s_2)$ Sp. 1 ist indifferent gegenüber Sp. 2

$$s_2(l)u_1(l,l) + s_2(r)u_1(l,r) = s_2(l)u_1(r,l) + s_2(r)u_1(r,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad q - (1-q) = -q + (1-q) \quad \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{E}u_2(s_1, l) = \mathbb{E}u_2(s_1, r)$ Sp. 2 ist indifferent gegenüber Sp. 1

$$s_1(l)u_2(l,l) + s_1(r)u_2(l,r) = s_1(l)u_2(r,l) + s_1(r)u_2(r,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad -p + (1-p) = p - (1-p) \quad \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1

d)

	l	r
l	$x, 2$	$0, 0$
r	$0, 0$	$2, 2$

Nash-Gleichgewicht (s_1, s_2) mit $s_1(l) = p,\ s_2(l) = q$.
$\Rightarrow s_1(r) = 1 - p,\ s_2(r) = 1 - q$.
Gesucht $p(x), q(x)$.

$\mathbb{E}u_1(l, s_2) = \mathbb{E}u_1(r, s_2)$ Sp. 1 ist indifferent gegenüber Sp. 2

$$s_2(l)u_1(l,l) + s_2(r)u_1(l,r) = s_2(l)u_1(r,l) + s_2(r)u_1(r,r) \Leftrightarrow \quad qx = (1-q)2$$

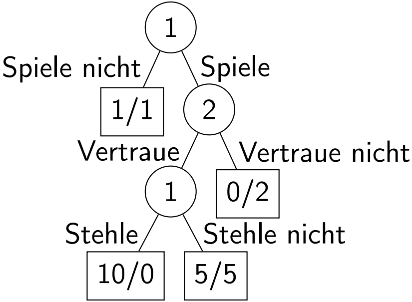
$$\Rightarrow \quad q = \frac{2}{x+2}$$

$\mathbb{E}u_2(s_1, l) = \mathbb{E}u_2(s_1, r)$ Sp. 2 ist indifferent gegenüber Sp. 1

$$s_1(l)u_2(l,l) + s_1(r)u_2(l,r) = s_1(l)u_2(r,l) + s_1(r)u_2(r,r) \Leftrightarrow \quad 2p = 2(1-p)$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

Geben Sie zunächst (möglicherweise mit Hilfe der induzierten Normalform) alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien an. Welche Gleichgewichte sind teilspielperfekt? Bestimmen Sie schlussendlich ein teilspielperfektes Gleichgewicht mittels Ruckwärtsinduktion.



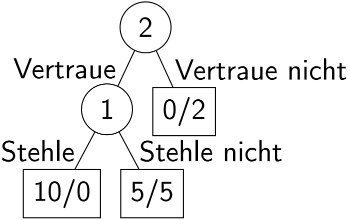
Induzierte Normalform

	Vertraue	Vertraue nicht
Spiele nicht, Stehle	1/1	1/1
Spiele nicht, Stehle nicht	1/1	1/1
Spiele, Stehle	10/0	0/2
Spiele, Stehle nicht	5/5	0/2

- Naiver Algorithmus zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten zeigt, dass Aktionsprofile $\langle(\textit{Spiele nicht}, \textit{Stehle}), \textit{Vertraue nicht}\rangle$ und $\langle(\textit{Spiele nicht}, \textit{Stehle nicht}), \textit{Vertraue nicht}\rangle$ Nash-Gleichgewichte sind.

Aufgabe 1
e)

Nash-Gleichgewicht $\langle(\textit{Spiele nicht}, \textit{Stehle nicht}), \textit{Vertraue nicht}\rangle$ ist nicht teilspielperfekt, da $\langle\textit{Stehle nicht}, \textit{Vertraue nicht}\rangle$ für Teilspielbaum ab Knoten 2 kein Nash-Gleichgewicht ist.

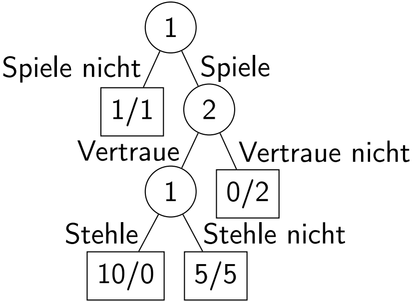


Induzierte Normalform

	Vertraue	Vertraue nicht
Stehle	10/0	0/2
Stehle nicht	5/5	0/2

Aufgabe 1
e)

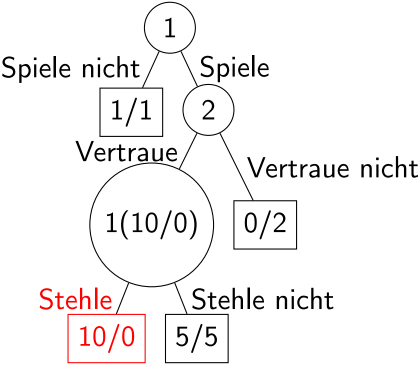
Rückwärtsinduktion



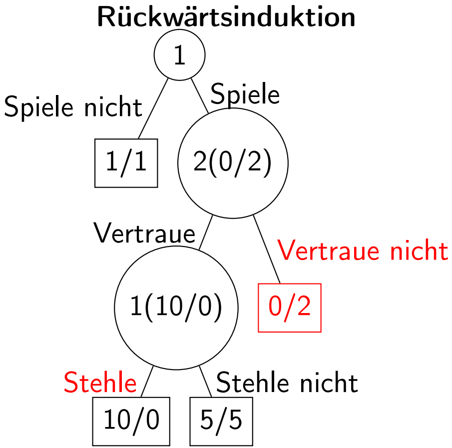
Aufgabe 1

e)

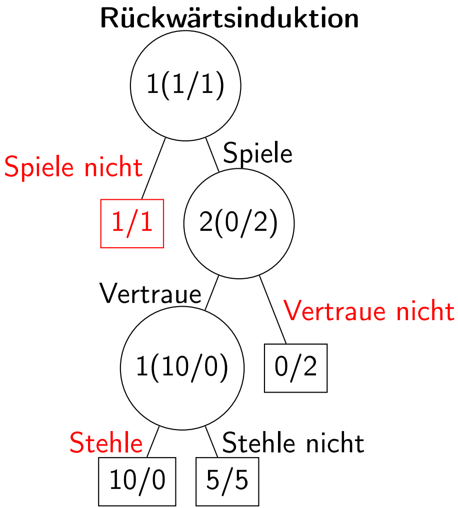
Rückwärtsinduktion



Aufgabe 1
e)


Rückwärtsinduktion
1
Spiele nicht
Spiele
1/1
2(0/2)
Vertraue
Vertraue nicht
1(10/0)
0/2
Stehle
Stehle nicht
10/0
5/5

Aufgabe 1
e)


Rückwärtsinduktion
1(1/1)
Spiele nicht
Spiele
1/1
2(0/2)
Vertraue
Vertraue nicht
1(10/0)
0/2
Stehle
Stehle nicht
10/0
5/5

- Das Ergebnis der Rückwärtsinduktion ist ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht.
  $\Rightarrow$ Nash-Gleichgewicht $\langle(\textit{Spiele nicht}, \textit{Stehle}), \textit{Vertraue nicht}\rangle$ ist teilspielperfekt.