១ លីមីតនៃអនុគមន៍

រំលឹកតម្លៃដាច់ខាត

- $|x| = x$ បើ $x \geq 0$, $-x$ បើ $x < 0$
  តាង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន៖
- $|x| < a$ សមមូល $-a < x < a$
- បើ $|x| > a$ នោះ $x > a$ ឬ $x < -a$
- គ្មានចំនួនពិត x ណាដែល $|x| < -a$
- គ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $|x| > -a$

ហាមធ្វើអាជីវកម្មក្រោមរូបភាពគ្រប់រូបភាពលើឯកសារនេះ (ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

១.១ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

និយមន័យ ១.១

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងឆ្វេង បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < a - x < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងស្តាំ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < x - a < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $f(x) > B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $f(x) < -B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ។

លំហាត់ ១.១ ចូរឲ្យនិយមន័យ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ និង $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ។

ជាទូទៅ ១.១

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

១.២ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

និយមន័យ ១.២

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x > A$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x < -A$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ។

- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B>0$ មានចំនួន $A>0$ ដែល $x>A$ នាំឲ្យ $f(x)>B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B>0$ មានចំនួន $A>0$ ដែល $x>A$ នាំឲ្យ $f(x)<-B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B>0$ មានចំនួន $A>0$ ដែល $x<-A$ នាំឲ្យ $f(x)>B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B>0$ មានចំនួន $A>0$ ដែល $x<-A$ នាំឲ្យ $f(x)<-B$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

ជាទូទៅ ១.២
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

១.៣ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

ជាទូទៅ ១.៣ បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ ដែល $a,\ L,\ M$ ជាចំនួនពិត (a អាចជាអនន្ត)
- $\lim\limits_{x\to a} c=c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL$ ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=LM$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ បើ $M\neq 0$

១.៤ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

ជាទូទៅ ១.៤ បើ u ជាអនុគមន៍មានលីមីត M កាលណា x ខិតជិត a និង f ជាអនុគមន៍មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត M នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $f\circ u$ មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ។ មានន័យថា បើ $\lim\limits_{x\to a} u(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to M} f(x)=L$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f\circ u(x)=L$

១.៥ លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

ជាទូទៅ ១.៥

■ ករណីលីមីតត្រង់ចំនួនកំណត់ a
- បើមានអនុគមន៍ $f,\ g,\ h$ និងចំនួនពិត $\delta>0$ ដែល $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$ និង $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0<|x-a|<\delta$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ។

■ ករណីលីមីតត្រង់ $+\infty$
- បើមានអនុគមន៍ $f,\ g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ និង $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x>A$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

• បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ និង $f(x) \le g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x > A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ។

• បើមានអនុគមន៍ f, g, h និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = L$ និង $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x > A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ ។

■ ករណីលីមីតត្រង់ $-\infty$ យើងជំនួស $x > A$ ដោយ $x < A$ ។

១.៦ លីមីតរាងមិនកំណត់

ជាទូទៅ ១.៦ តាង $\lim_{x\to a} f(x) = L$ និង $\lim_{x\to a} g(x) = M$ ដែល a ជាចំនួនពិត ឬអនន្ត។ លីមីតរាងមិនកំណត់មានដូចខាងក្រោម៖

• បើ $L = M = 0$ នោះ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

• បើ $L = \pm\infty$ និង $M = \pm\infty$ នោះ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

• បើ $L = +\infty$ និង $M = -\infty$ នោះ $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

• បើ $L = 0$ និង $M = \pm\infty$ នោះ $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ មានរាងមិនកំណត់ $0 \times \infty$

១.៧ លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត

ជាទូទៅ ១.៧ បើ a ជាចំនួនពិតនៅស្ថិតក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឲ្យគេបាន

• $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ • $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ • $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$ • $\lim_{x\to a} \cot x = \cot a$

គេមានអនុគមន៍*អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល* e^x ដែល $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$

• $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
• $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ដែល $n > 0$ ។

គេមានអនុគមន៍*ឡូការីតនេពែ* (ឡូការីតគោល e) $\ln x$ ដែល $x > 0$ និង $n > 0$

• $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
• $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
• $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
• $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៣ បើ x ជារង្វាស់មុំគិតជា*រ៉ាដ្យង់*នោះគេបាន

• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ • $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៤

• $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ • $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

រំលឹក ១.១

- $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$
- $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

លំហាត់

ឧទាហរណ៍ ១.១ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 2x+1$ និង $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ ។ បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.01$ កំណត់តម្លៃមួយនៃ δ ដែល $0 < |x-1| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-3| < \varepsilon$ ។

ចម្លើយ

ដោយវិសមភាព

$$\begin{array}{lrcl} & |f(x)-4| & < & \varepsilon \\ \text{សមមូល} & |(2x+1)-3| & < & 0.01 \\ \text{សមមូល} & |2x-2| & < & 0.01 \\ \text{សមមូល} & 2|x-1| & < & 0.01 \\ \text{សមមូល} & |x-1| & < & 0.005 \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងអាចយក $\delta = 0.005$ ។ (យើងក៏អាចយក $\delta = 0.001$ ឬ $0 < \delta < 0.005$ ។)

១ គេឲ្យតម្លៃ $\varepsilon > 0$ ។ កំណត់តម្លៃ $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-L| < \varepsilon$

ក បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.001,\ a = 1,\ f(x) = 2x-1$ និង $L = 1$ ។

ខ បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.0001,\ a = -2,\ f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ និង $L = -1$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២ បង្ហាញថាលីមីត $\lim_{x\to 2}(1-2x) = -3$ ។

ចម្លើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-2| < \delta$ នាំឲ្យ

$|(1-2x)-(-3)|<\varepsilon$ ។ ដោយវិសមភាព

$$\begin{array}{lrcl} & |(1-2x)-(-3)| & < & \varepsilon \\ \text{សមមូល} & |4-2x| & < & \varepsilon \\ \text{សមមូល} & |2x-4| & < & \varepsilon \\ \text{សមមូល} & -\varepsilon < 2x-4 & < & \varepsilon \\ \text{សមមូល} & -\varepsilon/2 < x-2 & < & \varepsilon/2 \\ \text{សមមូល} & |x-2| & < & \varepsilon/2 \end{array}$$

ដើម្បីបាន $|(1-2x)-(-3)|<\varepsilon$ យើងអាចយក $\delta=\varepsilon/2$ (ឬ $0<\delta<\varepsilon/2$)។ យើងឃើញថា ចំពោះចំនួន $\varepsilon>0$ មាន $\delta=\varepsilon/2>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ នាំឲ្យ $|(1-2x)-(-3)|<\varepsilon$ ។ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 2}(1-2x)=-3$ ។

២ ចូរបង្ហាញលីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ

ក $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)=1$ ខ $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=+\infty$ គ $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$

ឧទាហរណ៍ ១.៣ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3}\frac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}} &= \frac{\lim\limits_{x\to -3}2(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to -3}(1-\sqrt{1-x})} && \text{លីមីតផលចែក} \\ &= \frac{2\lim\limits_{x\to -3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to -3}1-\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{1-x}} && \text{លីមីតគុណចំនួនថេរ និងផលដក} \\ &= \frac{2\times 10}{1-2}=-20 && \text{ជំនួសតម្លៃ} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}}=-20$ ។

៣ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^2+2$ គ $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x+x^2)$ ង $\lim\limits_{x\to -\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

ខ $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+2}{x+1}$ ឃ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2}{x^2+1}$ ច $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

ឧទាហរណ៍ ១.៤ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ដែលមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) && \text{គុណកន្សោមឆ្លាស់}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} && \text{សម្រួលកន្សោម } (x-1)\\
&= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} && \text{ជំនួសតម្លៃ}\\
&= 1/2
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៩ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x-14}$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x-14} &= \lim_{x\to2}\frac{x^2-2x-x+2}{x^3-2x^2+3x^2-6x+7x-14}\\
&= \lim_{x\to2}\frac{x(x-2)-(x-2)}{x^2(x-2)+3x(x-2)+7(x-2)}\\
&= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+3x+7)}\\
&= \lim_{x\to2}\frac{x+1}{x^2+3x+7}\\
&= \frac{(2)+1}{(2)^2+3(2)+7}=\frac{3}{17}
\end{aligned}$$

រំលឹក៖ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

៤ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=3x^3-4x-16$ និង $g(x)=3x^3-4x$ ។

ក គណនា $f(2)$ និង $g(2)$ ។ ខ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-16=-3\cdot2^3+4\cdot2$ ។

៥ គេមានពីរអនុគមន៍ពហុធា

$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ និង $g(x)=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$

ដែល $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ ។ បើ $f(a)=0$ បង្ហាញថា $c_0=-g(a)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$f(x)=c_1(x-a)+c_2(x^2-a^2)+c_3(x^3-a^3)+\cdots+c_n(x^n-a^n)$$

៦ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}$

ខ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+x}$

គ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+x^3}{2x+3x^2}$

ឃ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+3x}{2x-x^2}$

ង $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+5x+6}$

ច $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x-3}$

ឆ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

ជ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$

ឈ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

ញ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

ដ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

ឋ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

ឌ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$

ឍ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2+4x-3}{2x^2+x-1}$

ណ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+3x-2}$

ត $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2-4x-4}{-3x^2+7x+6}$

ថ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

ទ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1}$

ធ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^3-x^2+2x-8}$

ន $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3-2x+4}$

ប $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-1}$

ផ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-2x+1}$

ព $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{x^3-4x+3}$

ភ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-3x^3+2}{x^3-3x+2}$

ម $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^9-7x^6+6}{x^7-7x^5+6}$

យ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{2x^3-3x^2+1}$

រ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^5-5x^3+2}{2x^4-4x^2+2}$

ល $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^6-6x^3+3}{2x^5-5x^2+3}$

វ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+2x-1}{x^3+1}$

ស $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^7+x-2}{x^2-x-2}$

ហ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+2x^2-1}{x^3+2x^2-1}$

៧ គណនាលីមីតខាងក្រោម បើគេដឹងថា n,m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន៖

ក $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$

ខ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

គ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+(n-1)x-n}{x^2+x-2}$

ឃ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+(n-1)}{x^3-x^2-x+1}$

ង $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^n-nx^2+n-2}{x^3-3x+2}$

ច $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)^n}{x^2-x}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-2x^m+1}{2x^2+3x-5}$

ជ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2n}+2x+1}{x^{2m}+5x+4}$

ឈ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-(1-x)^n}{x}$

៨ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^n+ax+b$ ដែល $n\geq 2$ ជាចំនួនគត់ និង a,b ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a,b ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(1)=0$ និង $f'(1)=0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$ ។

៩ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^n+ax+b$ ដែល $n\geq 3$ ជាចំនួនគត់សេស និង a,b ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a,b ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(-1)=0$ និង $f'(-1)=0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^2}$ ។

១០ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^n+ax^2+bx+c$ ដែល $n\geq 3$ ជាចំនួនគត់ និង a,b,c ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a,b,c ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(1)=0, f'(1)=0$ និង $f''(1)=0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^3}$ ។

(ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

១១ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^n+ax^2+bx+c$ ដែល $n\geq 3$ ជាចំនួនគត់សេស និង a,b,c ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a,b,c ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(-1)=0, f'(-1)=0$ និង $f''(-1)=0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^3}$ ។

១២ គេមាន $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមខុសពីសូន្យ។ គណនាលីមីតខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ a,b,c៖

ក $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-2bx+c}{cx^2-2bx+a}$ ខ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+2bx+c}{a+2bx+cx^2}$ គ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+b}{bx^3+cx^2+bx+a}$

១៣ គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ និង $m,n,p,q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ដែល $m\neq n,\ p\neq q$ ។

ក $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^n-nx^m-m+n}{px^q-qx^p-p+q}$

ខ បើ $a+b+c=0$ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^m+bx^n+c}{ax^p+bx^q+c}$ តាមករណីដូចខាងក្រោម៖

i $ap+bq\neq 0$ ii $ap+bq=0$ និង $am+bn=0$

គ បើ $a-b+c=0$ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^{2m}+bx^{2n+1}+c}{ax^{2p}+bx^{2q+1}+c}$ តាមករណីដូចខាងក្រោម៖

i $2(ap-bq)\neq b$ ii $2(ap-bq)=b$ និង $2(am-bn)=b$

១៤ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

ខ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$

គ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$

ឃ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

ង $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

ច $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

ឆ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{1-x^2}$

ជ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$

ឈ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{1-x}$

ញ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

ដ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{2-\sqrt{x+2}}$

ឋ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$

ឌ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+2}+x}$

ឍ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x-2}$

ណ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2-x}$

ត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

ថ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

ទ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

ធ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$

ន $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

ប $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1+\sqrt[3]{x}}$

ផ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}{x^3+8}$

ព $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}+1}{2-x}$

ភ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

ម $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}+1}{x^3+27}$

យ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$

រ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}{1-x}$

ល $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+\sqrt{x}}}{x-1}$

វ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

ស $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2\sqrt{x}+1}{1-x}$

ហ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$

សម្គាល់៖ ហាមធ្វើអាជីវកម្មក្រោមរូបភាពណាមួយលើឯកសារនេះ(ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)

១៥ បើគេដឹងថា n,m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$

ខ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$

គ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[m]{x}}{x-1};\ n>m$

ឃ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$

ង $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[2n+1]{x}+1}{x+1}$

ច $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[m]{2-\sqrt[n]{x}}}{1-\sqrt[n]{2-\sqrt[m]{x}}}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[m]{2x-\sqrt[n]{x}}}{1-\sqrt[n]{2x-\sqrt[m]{x}}}$

ជ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt[m]{2-\sqrt[n]{x}}}{x-\sqrt[n]{2-\sqrt[m]{x}}}$

ឈ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt[m]{2x-\sqrt[n]{x}}}{x-\sqrt[n]{2x-\sqrt[m]{x}}}$

ឧទាហរណ៍ ១.៦ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{x^2-2x+3}$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+4}{x^2-2x+3} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+3/x+4/x^2)}{x^2(1-2/x+3/x^2)} && \text{ដឹកក្រៅធំជាងគេនៃ } x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+3/x+4/x^2}{1-2/x+3/x^2} && \text{សម្រួលកត្តា } x^2\\ &= \frac{2+0+0}{1-0+0}=2 && \text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\end{aligned}$$

១៦ គណនាលីមីតត្រង់អនន្តដូចខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x^2}{2x^2+x-1}$

ខ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}$

គ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+x^2}{1+2x}$

ឃ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x-1}{3x^2-5x+2}$

ង $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

ច $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+x+\sqrt{x}}$

ឆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-2x}{\sqrt{x^2+2x+2}+1}$

ជ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+3x^2-2}{2-x^2}$

ឈ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}+2\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^3+3}}$

ញ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+1}{2x-\sqrt{4x^2-x}}$

ដ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x-\sqrt{x^2-x}}$

ឋ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}+x}{1+\sqrt{4x^2+1}+2x}$

១៧ គណនាលីមីតត្រង់អនន្តដូចខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+1}$

ខ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+1)^2+2}-2x+3$

គ $\lim\limits_{x\to+\infty}2-3x+\sqrt{4x^2+4x+5}$

ឃ $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+x+1}$

ង $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-6x+7}$

ច $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{(x-1)(x-2)}-x^2$

ឆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}$

ជ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}+\sqrt{x^2+1}$

ឈ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

ញ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$

ឧទាហរណ៍ ១.៧ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x} &= \frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x} && \text{លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់}\\ &= (3/2)\times1=3/2 && \text{ជំនួសតម្លៃ}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$ ។

១៨ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$

ខ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

គ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

ឃ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$

ង $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-\tan x}{x}$

ច $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sin x-1}{\cos x+\sin x-1}$

ឆ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x}$

ជ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x}$

ឈ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-\sin x}{x}$

ញ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\sin^2 x}{x(x+1)}$

ដ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$

ឋ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1+\cos x}{x\sin x}$

ឌ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\cos x}{x^2}$

ឍ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-2x}}{\sin x}$

ណ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sin\pi x-1}{2x}$

ត $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}+\cos\pi x}{\sin\pi x}$

ថ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x+\sin x}{x\cos x}$

ទ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+\sin 2x}{x-\sin^2 x}$

ធ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x}{x\sin x-x}$

ន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

ប $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$

ផ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\tan x}{x}$

ព $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x}$

ភ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^2}$

ម $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

រ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$

ល $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$

វ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

ស $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

ហ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x+\sin 2x}{2x-\pi}$

ឡ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos 2x}{2x-\pi}$

អ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x+\sin x}{\tan 2x}$

១៩ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

ខ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\sin x}{\pi-4x}$

គ $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}}\dfrac{\cos\pi x+\sin\pi x}{4x-3}$

ឃ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x+\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

ង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x\sin x}$

ច $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x-2\cos^3 x}{\sin^2 x}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\cos 4x}{\sin^2 x}$

ជ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x-2}{x^2}$

ឈ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+3\cos x-4}{x^2}$

ញ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-4\cos x+3}{x^4}$

ដ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x+\cos x-2}{1-\cos x}$

ឋ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{2\sin x-1}$

ឌ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{3-4\tan x+\tan^2 x}{3-2\cot x-\cot^2 x}$

ឍ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cot x-\tan x}$

ណ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-2\sin^2 x}{\cot x-2\cos^2 x}$

ត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-2\cos^2 x}{\cot x-2\sin^2 x}$

ថ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

ទ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$

ធ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos 2x}{x\sin x}$

ន $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^2 x-\cos 2x}{\cos x+1}$

ប $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{x^2\sin x}$

ផ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

ព $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x+3\cos x}{\cos^2 x\sin 2x}$

ភ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+2}{\cos^2 x}$

ម $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos^2 x-4\cos x+1}{2\cos^2 x+\cos x-1}$

២០ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

ខ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cot 2x$

គ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\tan x$

ឃ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cot 2x$

ង $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 4x\tan 2x$

ច $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}-\dfrac{\tan x}{x^3}$

ជ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

ឈ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-1}{x}$

ញ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+1}$

ដ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}$

ឋ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$

ឌ $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\dfrac{1+\cos 2x+\sin 4x}{\sqrt{1+\sin x}}$

២១ ដោយប្រើ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ បង្ហាញថា៖

ក $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (តាង $n=\dfrac{1}{x}$)

ខ $\lim\limits_{x\to -\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ (តាង $m=-n$)

គ $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (តាង $n=\dfrac{1}{x}$)

ឃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (តាង $y=e^x-1$)

២២ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$

ខ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$

គ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$

ឃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

ង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

ច $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-e^{-x}}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$

ជ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$

ឈ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

ញ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{x}$

ដ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2}$

ឋ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

ឌ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ឍ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-2}$

ណ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x(x+1)}-1}{x}$

ត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{x+1}}{x}$

ថ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sqrt{x+1}-1}{x}$

ទ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+1}-e}{x(e^x-1)}$

ធ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{e^{2-x}-1}$

ន $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x^2-1}$

ប $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$

ផ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

ព $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1}{x}$

ភ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-\cos x}{x}$

ម $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2x}}{\sin(\pi x)}$

យ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x^2}-e^{2x}}{\sin(\pi x)}$

រ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1}{e^x\sin x}$

ល $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$

វ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$

ស $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-2^{x+2}+1}{x}$

ហ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^{x+1}+1}{2^x-2^{-x}}$

ឡ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xe^x-e}{x-1}$

២៣ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to \ln 2}\dfrac{e^{2x}-e^x-2}{e^x-2}$

ខ $\lim\limits_{x\to \ln 2}\dfrac{xe^x-2\ln 2}{e^x-2}$

គ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

ឃ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

ង $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$

ច $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\ln x-2\ln 2}{x-2}$

ឆ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^x-4}{x-2}$

ជ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{x^x}-16}{x-2}$

ឈ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\cos 2x-2^x\cos 3x}{\sin 5x}$

ឧទាហរណ៍ ១.៨ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}\\ &= e^{-1/2}=1/\sqrt{e}\end{aligned}$$

២៤ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$

ខ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

គ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$

ឃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

ង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}$, $a\neq 0$

ច $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x}$

ឆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{x^2}$

ជ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$

ឈ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{x}$

ញ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$

ដ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{x}$

ឋ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{x^2}$

ឌ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

ឍ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2)^{\cot x}$

ណ $\lim\limits_{x\to1^-}(1+\sin\pi x)^{\frac{x}{1-x}}$

ត $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$

ថ $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\cot x}$

ទ $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\tan x}$

ធ $\lim\limits_{x\to0}(x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}$

២៩ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$

ខ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

គ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

ឃ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$

ង $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$

ច $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln(\sin x)$

ឆ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\sin x)$

ជ $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{x}}$

ឈ $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}$

ញ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

ដ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)^{\frac{1}{x}}$

ឋ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)-\ln x$

ឌ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x+1))$

ឍ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\ln x)^{-1}$

ណ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)$

ត $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

ថ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1+\ln x}$

ទ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(x+1)}$

ធ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}$

ន $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(x+1)}$

ប $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}$

ផ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\sqrt{x+1}-1)}{\ln x}$

ព $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\ln x}{\ln(1-\sqrt{1-x})}$

ភ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

ម $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$

យ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$

រ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$

ឧទាហរណ៍ ១.៩ គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=L$ ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាតម្លៃ L ។

ចម្លើយ

$$L=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{8\left(\frac{x}{2}\right)^3}$$

តាង $u(x)=\dfrac{x}{2}$ ។ ដោយ $\lim\limits_{x\to0}u(x)=0$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{u-\sin u\cos u}{u^3}=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{u-\sin u+\sin u-\sin u\cos u}{u^3}\\&=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\left(\frac{u-\sin u}{u^3}+\frac{(1-\cos u)\sin u}{u^3}\right)=\frac{1}{4}\left(L+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $L=\dfrac{1}{6}$ ។

២៦ គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=L$ ដែល L ជាចំនួនកំណត់។

ក គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x-\sin 2x}{x^3}$ ជាអនុគមន៍នៃ L ។

ខ គណនាតម្លៃ L ។ ណែនាំ៖ $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right)\left(\dfrac{2\cos x}{2\cos x}\right)$ ។

គ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x^2-2}{x^4}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១០ គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}=L$ ដែល L ជាចំនួនកំណត់។ ចូរគណនាតម្លៃ L ។

ចម្លើយ

តាង $u(x)=\dfrac{x}{2}$ ។ ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned} L &= \lim_{u\to 0}\frac{1+2u-e^{2u}}{4u^2}=\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{1+u-e^u+u-ue^u+e^u+ue^u-e^{2u}}{u^2}\\ &= \frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\left(\frac{1+u-e^u}{u^2}-\frac{e^u-1}{u}+e^u\frac{1+u-e^u}{u^2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(L-1+L) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $L=-\dfrac{1}{2}$ ។

សម្គាល់៖ ហាមធ្វើអាជីវកម្មក្រោមរូបភាពគ្រប់រូបភាពលើឯកសារនេះ (ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

២៧ បើដឹងថា L ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ខ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}$ គ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+2x+x^2-2e^x}{x^3}$

២៨ បើដឹងថា L ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\cos x\sin x}{x^3}$

ខ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

គ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2(\cos x-1)}{x^4}$

ឃ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos 2x}{\tan x-\sin x\cos 2x}$

ង $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\sin x\sin 2x}{\tan x-\sin x}$

ច $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{2\sin 3x-3\sin 2x}$

ឆ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-\cos\sqrt{2}x}{x^4}$

ជ $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

ឈ $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

ញ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

ដ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)(1+x)+e^x(e^x-2)}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-2)}$

ឋ $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{2}x-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\sin\sqrt{3}x-\sqrt{3}\sin\sqrt{2}x}$

២៩ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos x+i\sin x$ ដែល x ជាចំនួនពិត និង $x\neq k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$។

ក គណនាផលបូក $S_n=z+z^2+z^3+\cdots+z^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ខ ទាញរកផលបូក

$$\begin{aligned} A_n &= \cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx \\ B_n &= \sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx \end{aligned}$$

គ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{B_n}{x}$ តាមពីរបៀបផ្សេងគ្នា រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ឃ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n-A_n}{x^2}$ តាមពីរបៀបផ្សេងគ្នា រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ណែនាំ៖ ប្រើលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ ។

៣០ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^2-k^2=2k+1$ ទាញរកផលបូក $S_n=1+2+3+\cdots+n$ ។

៣១ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2(1+2+3+\cdots+n)-n^2}{n}$ ។

៣២ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ ទាញរកផលបូក $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ ។

៣៣ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-n^3}{n^2}$ ។

៣៤ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ ទាញរកផលបូក $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ ។

៣៥ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-n^4}{n^3}$ ។

៣៦ បើ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\dfrac{1}{m+1}$

ខ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(m+1)(1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m)-n^{m+1}}{n^m}=\dfrac{m+1}{2}$