## ទិញ្ញាសាធី ១

- I គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $A = (\sqrt{3} 1) + i(\sqrt{3} + 1)$  និង  $B = \frac{x + iy}{1 + i}$  ដែល x; y ជាចំនួន ពិត ។
  - ១ សរសេរ  $A^2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
  - ២ សរសរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រក x និង y ដោយដឹងថា  $2\overline{B} A^2 = 0$  ( $\overline{B}$  ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)
- II គណនាលីមីតខាងក្រោម

9 
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$$
 b  $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2}{x + 1}$ 

III ១ កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2 (x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 2}$$
 ចំពោះគ្រប់  $x$  ដែល  $x \neq -2; x \neq 1$  ។

២ គណនាអាំងតេក្រាល 
$$I = \int_{-4}^{0} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2 (x + 2)} dx$$
 ។

- IV រកចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ M(1,0) ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍  $y = g(x) = px^3 + qx^2 + \frac{2}{3}$  ។
- V អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ  $y = f(x) = x 1 + 2e^{-x}$  ហើយមានក្រាប(C) ។
  - ១ រក  $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $(L_1)$ នៃក្រាប(C)។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់  $x=\ln 2$  ។
  - ២ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ $(L_2)$  ប៉ះ(C) ត្រង់ A(0,1)
  - ៣ សង់បន្ទាត់  $(L_1)$ ,  $(L_2)$  និង (C) នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ ។ គេឲ្យ  $\ln 2 = 0.7$
  - ៤ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូត $(L_1)$ និងក្រាប(C) បន្ទាត់ឈរ x=0 និង x=1 ។

- នៅក្នុងតម្រយអរតូនរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}
  ight)$  គេមានចំណុច VI A(1,2,4) ,B(2,-1,3) និង C(-2,3,-2) ។
  - រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) ដែលមានផ្ទិត A និងកាំ  $r=rac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$  ។ 9 រកសមីការទូទៅនៃប្លង់(P)ដែលមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overline{AC}$  ហើយកាត់តាម ចំណុច B ។ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ បន្ទាត់(D)ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overline{AB}$  ។
  - រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A ។ រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់(D) ។ ២ រកចម្ងាយពីចំណុច D(3,-3,-3) ទៅប្លង់(P) ។
  - រកក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡក្រាមនិងក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\overline{\mathit{BA}}$ m និង BC ។

## អត្រាអំណែ

 សរសេរ A<sup>2</sup> ជាទម្រង់ពីជគណិត I

ឃើងមាន 
$$A = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$A^2 = \left[ (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) \right]^2$$

$$= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) + i^2(\sqrt{3} + 1)^2$$

$$= (3 - 2\sqrt{3} + 1) + 2i(3 - 1) - (3 + 2\sqrt{3} + 1)$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} + 4i - 4 - 2\sqrt{3}$$

$$= -4\sqrt{3} + 4i$$

 $A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$ ដូចនេះ

សរសេរ A<sup>2</sup> ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឃើងមាន 
$$A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
ដូចនេះ  $A^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ 

សរសរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

ឃើងមាន 
$$B = \frac{x+iy}{1+i}$$

$$= \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{x-xi+yi+y}{1-i^2}$$

$$= \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i$$

$$B = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i$$
• រក x និង y ដោយដឹងថា  $2\overline{L}$ 

• រក 
$$x$$
 និង  $y$  ដោយដឹងថា  $2\overline{B} - A^2 = 0$ 

$$B = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i \text{ isn: } \overline{B} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}i$$

$$A^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

យើងបាន 
$$2\overline{B} - A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}i - \left(-4\sqrt{3} + 4i\right) = 0$$

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}i = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = -4\sqrt{3} \\ \frac{x-y}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -8\sqrt{3} \\ x-y = 8 \end{cases}$$
 (1)

យក(1) បុក(2) នោះ 
$$2x = -8\sqrt{3} + 8$$

$$x = -4\sqrt{3} + 4$$

យក(1) ដក(2) នោះ 
$$2y = -8\sqrt{3} - 8$$

$$y = -4\sqrt{3} - 4$$

ដូចនេះ 
$$x = -4\sqrt{3} + 4$$
 និង  $y = -4\sqrt{3} - 4$ 

គណនាលីមីតខាងក្រោម II

9 
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{\sin x}{x(x+1)} + \frac{e^x - 1}{x(x+1)} \right]_{1}^{1}$$

ដូចនេះ 
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{\ln x \left( 1 + \frac{2}{\ln x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \right]$$

$$= 0 \qquad (iim: \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

ដូចនេះ 
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2}{x + 1} = 0$$

កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c III

មេរីងមាន 
$$\frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 2}$$

$$= \frac{a(x - 1)(x + 2) + b(x + 2) + c(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

$$= \frac{a(x^2 + 2x - x - 2) + bx + 2b + c(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

$$= \frac{ax^2 + ax - 2a + bx + 2b + cx^2 - 2cx + c}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

$$= \frac{(a + c)x^2 + (a + b - 2c)x^2 + (-2a + 2b + c)}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=1 & (1) \\ a+b-2c=-2 & (2) \\ -2a+2b+c=-2 & (3) \end{cases}$$

 $\operatorname{Wh}(1) \Rightarrow a = 1 - c$  ជំនួសក្នុង(2)និង(3)

IV រកចំនួនពិត p និង q

ឃើងមាន 
$$g(x) = px^3 + qx^2 + \frac{2}{3}$$
  
 $g'(x) = 3px^2 + 2qx$   
 $g'(x) = 6px + 2q$ 

ដើម្បីឱ្យM(1,0)ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង g កាលណា

$$\int_{0}^{\infty} g'(1) = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} g(1) = 0$$

ដោយ 
$$g(1) = p + q + \frac{2}{3}$$
 និង  $g'(1) = 6p + 2q$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} p+q+\frac{2}{3}=0 & (1) \\ 6p+2q=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)$$
  $\Rightarrow p = -q - \frac{2}{3}$  ជំនួសក្នុង $(2)$ 

$$\Rightarrow 6\left(-q - \frac{2}{3}\right) + 2q = 0$$

$$-6q - 4 + 2q = 0$$

$$-4q = 4$$

$$q = -1$$
 ជំនួសក្នុង $(1)$ 

$$\Rightarrow p = -(-1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ  $p=rac{1}{3}$  និង q=-1

V 9 • In 
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( x - 1 + 2e^{-x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-x} \left( \frac{x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 2 \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-x} \left( xe^{x} - e^{x} + 2 \right)$$

$$= +\infty \qquad (iim: \lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0; \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( x - 1 + 2e^{-x} \right)$$

$$= +\infty \qquad (ព្រោះ \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0)$$
ដូចនេះ 
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត(L<sub>1</sub>)នៃក្រាប(C)

យើងមាន 
$$f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$$

ដោយ 
$$\lim_{x\to +\infty} 2e^{-x} = 0$$

នោះ បន្ទាត់ y=x-1 ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង  $+\infty$ 

ដូចនេះ បន្ទាត់ y = x - 1 ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ x = ln 2

យើងមាន 
$$f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 - 2e^{-x}$$
  
 $f'(x) = 0$   $y$   $1 - 2e^{-x} = 0$ 

$$f(x) = 0 \qquad \underbrace{\mathbf{q}} \quad 1 - 2e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$-x = \ln \frac{1}{2}$$

$$x = -\ln(2)^{-1}$$

$$x = \ln 2$$

សិក្សាសញ្ញា  $f^{'}$ 

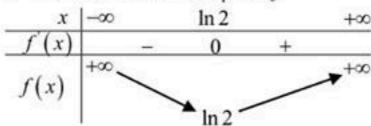
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \ln 2 & +\infty \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

តាមតារាងសញ្ញា f'ប្តូរសញ្ញាពី(-) ទៅ(+) ត្រង់  $x = \ln 2$ 

នោះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់  $x = \ln 2$  ដែល  $f(\ln 2) = \ln 2$ 

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់  $x=\ln 2$ 

២ • សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f



## រកសមីការបន្ទាត់(L<sub>2</sub>)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង 
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

ដោយបន្ទាត់ $(L_2)$  ប៉ះខ្សែកោង(C) ត្រង់ A(0,1)

នោះ 
$$x_0 = 0$$
 និង  $y_0 = 1$ 

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -1$$

យើងបាន
$$(L_2)$$
:  $y = -1(x-0)+1$ 

$$=-r+1$$

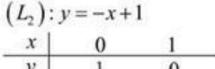
ដូចនេះ

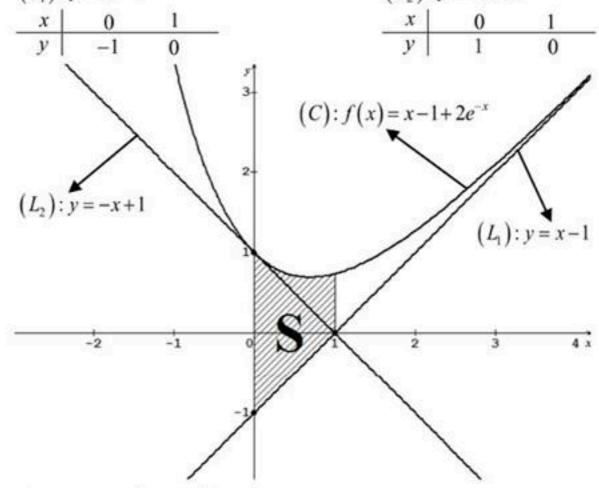
សមីការបន្ទាត់ 
$$(L_2)$$
:  $y = -x+1$ 

សង់បន្ទាត់ $(L_1)$ , $(L_2)$  និង(C) នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ

$$(L_1): y = x - 1$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$





គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់

S ជាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់

ឃើងបាន 
$$S = \int_0^1 [f(x) - y] dx$$
  
=  $\int_0^1 [(x - 1 + 2e^{-x}) - (x - 1)] dx$ 

$$= \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$= \left(-2e^{-x}\right)_0^1$$

$$= \left(-2e^{-1}\right) - \left(-2e^{0}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{e}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់  $S=2-rac{2}{e}$  (ឯកតាផ្ទៃ)

VI ១ • រកសមីការស្លង់ដានៃស្វ៊ែ(S)

សមីការស្វ៊ែមានរាង $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ ស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិត A(1,2,4)

ដោយ  $\overrightarrow{BC} = (-4, 4, -5)$ 

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(-4\right)^2 + \left(4\right)^2 + \left(-5\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{57}$$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិត A(1,2,4) និងកាំ  $r = \frac{\sqrt{57}}{2}$  គឺ

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{57}{4}$$

ដូចនេះ សមីការស៊្វែ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{57}{4}$ 

រកសមីការទូទៅនៃប្លង់(P)

$$\overrightarrow{AC} = (-3, 1, -6)$$

យើងបាន សមីការប្លង់(P)កាត់តាមចំណុច B(2,-1,3) ហើយមានវ៉ិចទ័រនរ

ម៉ាល់ 
$$\overrightarrow{AC} = (-3,1,-6)$$
 គឺ 
$$(P): -3(x-2)+1(y+1)-6(z-3)=0$$

$$-3x + 6 + y + 1 - 6z + 18 = 0$$

$$-3x + y - 6z + 25 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់(P): -3x + y - 6z + 25 = 0

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(D)

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់(D) កាត់តាមចំណុច C(-2,3,-2) ហើយមានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស  $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1)$  គឺ

$$(D): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -3t + 3 \end{cases} & (t \in \mathbb{R}) \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

២ • រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A ។

ឃើងបាន 
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (3-4)^2}$$

$$= \sqrt{1+9+1}$$

$$= \sqrt{11}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A គឺ  $\sqrt{11}$  (ឯកតាប្រវែង)

រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់(D)

ដោយ 
$$C \in (D)$$

តាមរូបមន្ត 
$$d(B,(D)) = \frac{\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}$$
ប្រើឯមាន  $\overrightarrow{BA} = (-1,3,1)$  និង  $\overrightarrow{BC} = (-4,4,-5)$ 

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-15-4)\vec{i} - (5+4)\vec{j} + (-4+12)\vec{k}$$

$$= -19\vec{i} - 9\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\Rightarrow d(B,(D)) = \frac{\sqrt{(-19)^2 + (-9)^2 + (8)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{361 + 81 + 64}}{\sqrt{(-13)^2 + (13)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{506}}{\sqrt{11}}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពី B ទៅ(D) គឺ  $d(B,(D)) = \sqrt{\frac{506}{11}}$  (ឯកតាប្រវែង)

• រកចម្ងាយពីចំណុច D(3,-3,-3) ទៅប្លង់(P)

តាមរូបមន្ត 
$$d(D,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
 ដោយប្តង់ $(P): -3x + y - 6z + 25 = 0$  និង  $D(3, -3, -3)$ 

$$\Rightarrow d(D,(P)) = \frac{\left|-3(3) + (-3) - 6(-3) + 25\right|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-6)^2}}$$

$$= \frac{\left|-9 - 3 + 18 + 25\right|}{\sqrt{9 + 1 + 36}}$$

$$= \frac{31}{\sqrt{46}}$$

$$= \frac{31\sqrt{46}}{46}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពី D ទៅ(P) គឺ  $d(D,(P)) = \frac{31\sqrt{46}}{46}$  (ឯកតាប្រវែង)

៣ តាង *S* ជាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម និង *S*់ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

• រកក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡក្រាម

យើងបាន 
$$S = \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right|$$

ដោយ 
$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (-19, -9, 8)$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(-19)^2 + (-9)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{506}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម  $S=\sqrt{506}$  (ឯកតាផ្ទៃ)

• រកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{506}}{2}$$

ដូចនេះ ក្រឡាថ្ងៃត្រីកោណ  $S' = \frac{\sqrt{506}}{2}$  (ឯកតាថ្ងៃ)