

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្តបន្ទាប់.....លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

## វិញ្ញាសាទី០១

ខាង

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $Z_1 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$  និង  $Z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$  ។
១. សរសេរ  $Z_1$  និង  $Z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
  ២. គណនា  $Z_3 = Z_1 \times Z_2$  និង  $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចសរសេរជាទម្រង់ពិជគណិត។
  ៣. គណនាតម្លៃ  $A = Z_4^{2017} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$  ។
- II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖
- ក)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$       ខ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$       គ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\sin 2x}$
- III. គេឲ្យអនុគមន៍  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$  ដែល  $(x \neq 0; x \neq 1)$  ។
- ក) កំណត់តម្លៃ  $a; b$  និង  $c$  ដើម្បីឲ្យ  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$  ។
  - ខ) គណនាអាំងតេក្រាល  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx$
- IV. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E): y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$  ។
- ក) កំណត់ចំនួនពិត  $a; b$  និង  $c$  ដើម្បីឲ្យ  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$  ។
  - ខ) បង្ហាញថា  $f$  ជាចម្លើយនៃ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $f - g$  ជាចម្លើយនៃ  $(E'): y'' + 2y' + y = 0$  ។
- V. គេឲ្យអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដែល  $g(x) = x - 1 + 2e^{-x}$  ហើយមានក្រាប  $(C)$  ។
១. រក  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត  $(L_1)$  នៃក្រាប  $(C)$  ។  
 បង្ហាញថា  $f$  មានអប្បបរមាត្រង់  $x = \ln 2$  ។
  ២. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $(L_2)$  នឹងក្រាប  $(C)$  ត្រង់  $A(0,1)$  ។
  ៣. សង់បន្ទាត់  $(L_1); (L_2)$  និងក្រាប  $(C)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។
  ៤. គណនាក្រឡាផ្ទៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយអាស៊ីមតូត  $(L_1)$  នឹងក្រាប  $(C)$  ជាមួយបន្ទាត់ឈរ  $x=0, x=1$  ។  
 គេឲ្យ៖  $\ln 2 = 0.7$
- VI. គេឲ្យអេលីប៊ែរមួយមានសមីការទូទៅ  $(E): 12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$  ។
១. ចូរបម្លែងសមីការអេលីប៊ែរ  $(E)$  នេះជាទម្រង់សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប៊ែរ។
  ២. រកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីប៊ែរនេះក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។
- VII. គេមានចំណុច  $A(0;1;-2), B(1;0;1), I(1;-1;0)$  និង  $I(1;2;-4)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- ក) កំណត់សមីការប្លង់  $(P)$  ដែលកាត់តាមចំណុច  $A, B$  និង  $C$  ។

- ខ) កំណត់ចម្ងាយពីចំណុច  $I$  ទៅប្លង់  $(P)$  ។
- គ) សរសេរសមីការស្វ៊ែរ  $(S)$  ដែលមានផ្ចិត  $I$  និងប៉ះប្លង់  $(P)$  ។
- ឃ) កំណត់ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ  $ABC$  ។ ទាញរកមាឌតេត្រាអែត  $IABC$  ។
- ង) កំណត់ចម្ងាយពីចំណុច  $I$  ទៅបន្ទាត់  $(D)$  ដែលសមីការនៃបន្ទាត់  $(D)$  គឺ:  
 $(D): x = 1 + 3t, y = -1 + 5t, z = 1 - 4t \quad (t \in \mathbb{R})$



**សូមសំណាងល្អ...!☺**

**မဏ္ဍလပြုချစ်.....**  
**လေစမလွှဲမဲ..... လေစနု.....**  
**လျှားပေကွဉ်လ.....**  
**မာတလေစာပေကွဉ်လ.....**

১৫৫

១. គណនា  $z_1 + z_2$  ;  $z_1 - z_2$  និង  $z_2 - z_3$     ២. គណនា  $z_1(z_2 - z_3)$  និង  $\frac{z_1}{z_2 - z_3}$  ។

११.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$ 
 १२.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin 4x - 1}{3x}$ 
 १३.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}$

$$\text{ୱ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \quad \text{ଝ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2017x} - e^{2013x}}{2x} \quad \text{ଗ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

D: “ឃុំមានពណ៌ខ្ពស់ៗគ្នា”

$$\text{გ. } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \text{დ. } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \quad \text{ე. } \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx \quad \text{ვ. } \int_2^6 \frac{3x}{x^2-3} dx$$

$$\text{ဇ. } \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{-x}}\right) dx \quad \text{ဇွ. } \int (1 - \cos^2 x) dx \quad \text{ဇွဲ. } \int \sin^4 x dx \quad \text{ဇွဲ့. } \int \sin^3 x dx$$

១. សរសេរ  $f(x)$  ជាទម្រង់  $f(x) = Ax^2 + B + \frac{C}{x^2}$  រួចកំណត់ចំនួនពិត  $A ; B$  និង  $C$  ។

៣. គណនា  $\int_1^2 f(x)dx$  ។

ढ.  $xy' = 2 - 4x^3$       ॢ.  $y' = \sin x + \cos x$       ढ.  $5x - 4y' = 3$       ॣ.  $2x(x - y') = 5$

ខ. កំណត់ចម្លើយពិសេស  $f$  មួយនៃ  $(E)$  ដែលប៉ះនឹងបន្ទាត់  $(T): y = -2x + 1$  ក្នុង  $O$  ។

គ. តាង  $u(x) = 2e^x - e^{4x}$  ។ គណនា  $\int_{-1}^0 [u(x)]^2 dx$  ។

២. គេមានវ៉ិចទ័រ  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  ;  $\vec{v} = 3\vec{j} + \vec{k}$  និង  $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{k}$  ។

ក. គណនា  $\vec{u} + \vec{v}$  ;  $\vec{v} + \vec{w}$  និង  $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$  ។

ខ. គណនា  $\vec{u} \times \vec{v}$   $\vec{v} \times \vec{w}$  និង  $\vec{w} \times \vec{u}$  ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ និងក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ដែលមានជ្រុងជាប់  $\vec{u}; \vec{v}$  រួច  $\vec{u}; \vec{w}$  ។

ឃ. គណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានជ្រុងជាប់  $\vec{u}; \vec{v}$  និង  $\vec{w}$  ។

VIII.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  ដោយ  $y = f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$  ហើយមានខ្សែក្រាប  $(C)$  ។

១. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត  $(\Delta)$  នៃខ្សែកោង  $(C)$  កាលណា  $x \rightarrow +\infty$  ។

២. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  រួចបង្ហាញថា  $f'(x) \leq 0$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  ។ គណនា  $f'(0); f(0)$  ហើយសងតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

៣. បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ  $O$  ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង  $(C)$  ។

៤. គណនា  $f(3)$  ហើយសង់ក្រាប  $(C)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ។ (គេឲ្យ៖  $e^3 = 20$ )

៥. គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង  $(C)$  និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត  $(\Delta)$  លើចន្លោះ  $[-3; -2]$  ។



សូមសំណាងល្អ...! ☺

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

### វិញ្ញាសាទី០៣

#### ខណៈ

- I. ១. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $w$  ដែលមានម៉ូឌុល  $\sqrt{2}$  និងអាក្យម៉ង់  $\frac{7\pi}{4}$  ជាទម្រង់ពិជគណិត ។  
 ២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច  $\mathbb{C}$   $i\sqrt{2}z - \sqrt{2} = \sqrt{2}i + z$  ដោយឲ្យទម្រង់ជាពិជគណិត។
- II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖  
 ក.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3x + 1})$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{4x}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$
- III. ក្នុងចំណោមអំពូល១៥ ដែលក្នុងនោះមានអំពូលខូចគុណភាព ៥ ។ គេចាប់យកអំពូល៣ ដោយចៃដន្យ។  
 ចូរកម្រិតប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖  
 ក. “គ្មានអំពូលខូចគុណភាពមួយសោះ”      ខ. “មានអំពូលខូចគុណភាពតែមួយគត់”  
 គ. “យ៉ាងតិចអំពូលខូចគុណភាពមួយ”      ឃ. “យ៉ាងច្រើនអំពូលខូចគុណភាពមួយ”
- IV. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖  
 $I = \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} + \sin 2x + ex \right) dx$        $J = \int_1^4 \left( \frac{1+x^2}{x} \right)^2 dx$        $K = \int (1 - \cos x)^2 dx$
- V. ១. កំណត់ចំនួនពិត  $\lambda$  ដើម្បីឲ្យ  $h(x) = e^{\lambda x}$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E): y'' - y = 0$  ។  
 ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $\alpha ; \beta$  ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $\mu(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$  ។  
 ខ. កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃ  $(E)$  បើគេដឹងថាគ្រាបតំណាងរបស់វាកាត់តាមចំណុច  $\left( \ln 2 ; \frac{3}{4} \right)$  ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង  $\frac{5}{4}$  ។
- VI. ១. កំណត់សមីការអេលីបដែលមានកំពូល  $(0 ; -5)$  និង  $(0 ; 5)$  ហើយកំណុំ  $(0 ; 3)$  ។ រួចសង់អេលីបនេះ  
 ២. គេមាន  $A(0 ; 0 ; 3) ; (2 ; 0 ; 4) ; (-1 ; 1 ; 2)$  និង  $D(1 ; -4 ; 0)$   
 ក. កំណត់សមីការទូទៅនៃប្លង់  $ABC ; BCD ; ACD$  និង  $ABD$ ។  
 ខ. កំណត់សមីការឆ្លុះ និងប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែលជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់  $ABC$  នឹង  $BCD$  រួច  $ACD$  នឹង  $ABD$ ។
- VII. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$  មានខ្សែកោង  $(C)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$  ។  
 ក. រកសំណុំដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
 ខ. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ចុងៗដែនកំណត់ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃគ្រាប  $(C)$  ។  
 គ. គណនា  $f'(x)$  ។ បង្ហាញថា  $f$  មានចំណុចអប្បបរមាមួយ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  រួចសង់គ្រាប  $(C)$   
 ឃ. គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង  $(C)$  នឹងអ័ក្ស  $(x'ox)$  លើចន្លោះ  $3 \leq x \leq 4$  ។

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់.....លេខគុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

## វិញ្ញាសាទី០៤

ខាង

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$  និង  $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$  ។

១. សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២. សរសេរ  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ជាទម្រង់ពិជគណិត ។ រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣. គេតាង  $A = \frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5$  ។ រកតម្លៃនៃ  $A$  ។

II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 4x}{2x}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x \ln x}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{38x} - 1) \sin 53x}{x^2}$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - e^{-x})$

ង.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos x}{\sin^2 x}$

ច.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

ឆ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x - 1}$

ជ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល និងដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\int \tan 4x dx$     ខ.  $\int 2xe^{5x} dx$     គ.  $\int \sin^3 x dx$     ឃ.  $\int \cos^3 x dx$     ង.  $\int \left( \frac{x^2 + 2x - 2}{x} - \frac{1}{e^x} \right) dx$

ច.  $y = \ln(x^2 + e^x)$     ឆ.  $y = \frac{x - \ln x}{x}$     ជ.  $(2x + 3)^5$     ឈ.  $y = \frac{x + 2}{1 - x}$

IV. វិញ្ញាសានៃការបោះគ្រាប់ឡកឡាក់ពីរគ្រាប់មានពណ៌ខុសគ្នា ក្រហម និងខៀវព្រមគ្នា ។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ដោយគោរពតាមលក្ខខណ្ឌដូចតទៅ៖

១.  $A_1 =$  “ឡកឡាក់ពណ៌ក្រហមចេញលេខ ៤” ។

២.  $A_2 =$  “ឡកឡាក់ពណ៌ខៀវចេញលេខសេស” ។

៣.  $A_3 =$  “ឡកឡាក់ពណ៌ក្រហមចេញលេខ ៣ គ្រាប់ឡកឡាក់ខៀវចេញលេខ ៥” ។

៤.  $A_4 =$  “ឡកឡាក់ពណ៌ក្រហមចេញលេខ ១ គ្រាប់ឡកឡាក់ខៀវចេញលេខ ៧” ។

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ?

V. ក. គេឲ្យ  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$  កំណត់គ្រប់  $x \neq 1$ ;  $x \neq 2$  ។

១. តាង  $v(x) = x^2 - 3x + 2$  គណនា  $v'(x)$  ។

២. គណនា  $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$  ។

ខ. រកចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យ  $g(x) = \frac{2-x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$  ។ រួចគណនា  $I = \int g(x) dx$  ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$  ។

១. បង្ហាញថាអនុគមន៍  $h$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $h(x) = 2xe^{2x} + 1$  ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ  $(E)$  ។

២. គេសន្មត់  $y = z + h$  ។ បង្ហាញថា  $y$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$  លុះត្រាតែ  $z$  ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E')$ :  $z' - 2z = 0$  ។ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$  ។

៣. កំណត់ចម្លើយមួយនៃ  $(E)$  ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់តាមអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់  $0$  ។

**VII.១.** ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូល  $(1,2)$  និងកំណុំត្រង់ចំណុច  $(1,4)$  ។

ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  មានទិសដៅវិជ្ជមានគេឲ្យចំណុច  $A(1,2,3)$  និងវ៉ិចទ័រ  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  ។

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់  $D$  កាត់តាម  $A$  និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស  $\vec{u}$  ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់  $\alpha$  កាត់តាម  $A$  និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់  $\vec{u}$  ។

**VIII.** គេឲ្យ  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$  មានក្រាប  $C$  ។

១. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g$  ដែល  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$  (មិនបាច់រកលីមីតទេ) ។ ទាញរកសញ្ញានៃ  $g(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

២. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

៣. កំណត់លីមីតនៃ  $f(x) - \frac{x}{2} - 2$  កាលណា  $x$  ខិតទៅរក  $+\infty$  រួចសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោមនេះ។ បកស្រាយតាមន័យក្រាបភិចនូរូលទូទៅនេះ ។

៤. ឲ្យសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ  $T$  ទៅនឹង  $C$  ត្រង់ចំណុច  $A$  មានអាប់ស៊ីស  $1$  ។

៥. រកកូអរដោនេនៃចំណុច  $B$  នៅលើ  $C$  ដែលប៉ះទៅនឹង  $C$  ត្រង់ចំណុចនេះ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់  $d: y = \frac{x}{2} + 2$  ។ សង់ខ្សែកោង  $C$  ។

៦. គណនាផ្ទៃក្រឡា  $S(\beta)$  ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង  $C$  នឹងបន្ទាត់  $d$  លើផ្ទៃក្រឡា  $[1, \beta]$ ,  $1 < \beta$  ។ កំណត់  $\beta$  ដើម្បីឲ្យ  $S(\beta) = 100$  ។



**សូមសំណាងល្អ...! ☺**

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្តបន្ទាប់.....លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

**វិញ្ញាសាទី០៥**

**ខាង**

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  និង  $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$  ដែល  $w = \frac{z_1}{z_2}$  ។

១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$  ;  $z_2$  និង  $w$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ រួចសរសេរ  $w^4$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$  ដែល  $(\alpha \in \mathbb{R})$  ។ គណនា  $\alpha$  ដោយដឹងថា  $u = w^4$  ។

II. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{\sin x}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$

ង.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1-x)}{(5+2x)(2-x^2)}$       ច.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$       ឆ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$

III. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. គណនា  $I = \int_2^3 (4x^2 - 2x + 1) dx$

ខ.  $f(x) = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$  គណនា  $J = \int_2^3 f(x) dx$  ។

IV. គេឲ្យអនុគមន៍  $h(x)$  កំណត់ចំពោះ  $x \neq -1$  ដោយ  $h(x) = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$  ។

១. រកចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យ  $h(x) = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq -1$  ។

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(x+1)^2 y' = 4x-1$  ដោយដឹងថា  $y(0) = 2017$  ។

V. សិស្សម្នាក់ចង់ទិញសៀវភៅមួយក្បាលដែលមានតម្លៃ ៧០០រៀល ។ នៅក្នុងហោប៉ៅរបស់សិស្សម្នាក់នោះមានក្រដាសប្រាក់ ១០០០រៀល មួយសន្លឹក ៥០០រៀល ពីរសន្លឹក និង ២០០រៀល បួនសន្លឹក ។ សិស្សនោះលូកក្នុងហោប៉ៅដោយចៃដន្យកបានក្រដាសប្រាក់ពីរសន្លឹក ។

ក. A: “មានផលបូកស្មើនឹង ៧០០រៀល” ។

ខ. B: “មានផលបូកស្មើនឹង ៧០០រៀល យ៉ាងតិច” ។

VI. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូលមួយមានសមីការ  $P: x^2 - 4x + 4y + 8 = 0$  ។

១. រកកូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល  $P$  នេះ។

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល  $P$  នឹងបន្ទាត់ដេក  $y = -2$  ។

៣. ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូល  $P$  នេះក្នុងតម្រុយ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដែល  $f(x) = x + 1 - e^x$  មានក្រាប  $C$  ។

ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ។ កំណត់ដេរីវេ  $f'(x)$  ។ សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  ។

រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f(x)$  ។



- ខ. កំណត់សញ្ញានៃ  $f(x)$  រួចបង្ហាញថា  $e^x \geq x+1$  គ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  ។
- គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $L: y=x+1$  ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $C$  ខាង  $-\infty$  ។
- ឃ. សង់ក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $L$  ក្នុងតម្រុយ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។
- ង. ដោយប្រើខ្សែកោង  $C$  ចូរពិភាក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ  $m$  នៅចំនួនឫសនៃសមីការ  $x+1-e^x-m=0$  ។
- ច. គណនាផ្ទៃក្រឡា  $S$  ផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង  $C$  នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស  $0 \leq x \leq 1$  ។
- VIII.** នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  មានទិសដៅវិជ្ជមានគេឲ្យចំណុច  $A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, -2, 3)$
- ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\overline{AB} \times \overline{AC}$  រួចទាញបញ្ជាក់ថា  $A, B, C$  មិនបិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។
- ខ. សរសេរសមីការប្លង់  $P$  ដែលកាត់តាមចំណុច  $A, B, C$  ។
- គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់  $L$  ដែលកាត់តាមចំណុច  $D(1, -2, 0)$  ហើយកែងនឹងប្លង់  $P$  ។
- រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច  $M$  ប្រសព្វរវាងប្លង់  $P$  និងបន្ទាត់  $L$  ។



**សូមសំណាងល្អ...!☺**

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្តបន្ទាប់.....លេខគុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

## វិញ្ញាសាទី០៦

### ខាង

- I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$  និង  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$  ។  
 គណនា  $z_1 + z_2, (z_1 - z_2) \times z_3$  ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនូវចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 + z_2$  ។ រួចទាញរក  $(z_1 + z_2)^4$  ។
- II. គណនាលីមីត៖ ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$  ខ.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25}$  គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{x}$  ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2018x}{\sin 2017x}$   
 ង.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + \cos 2x - 2}{x \sin x}$  ច.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^{2x} - \cos 4x}{x \sin 2x}$  ឆ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \cos x + \frac{2}{\cos x} - 3 \right)$  ជ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin^2 4x}$
- III. ១. គណនាអាំងតេក្រាល ក.  $\int_2^3 (2x^2 + x - 3) dx$  ខ.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2 \cos^2 x) dx$  គ.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$  ឃ.  $\int \frac{x^2}{16 - x^2} dx$   
 ង.  $\int_0^1 \ln t dt$  ច.  $\int \sin x e^{\cos x} dx$  ឆ.  $\int \cos^4 x dx$  ជ.  $\int \cos^2 x \sin x dx$  ឈ.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$  (An:  $\frac{2}{15}$ )  
 ២. គេមាន  $f$  កំណត់ចំពោះ  $x \neq -2; x \neq -1$  ដោយ  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$  ។  
 រួចគណនា  $K = \int_0^1 f(x) dx$  ។
- IV. ក្នុងចំណោមមូលដ្ឋាន ១៥ ដែលចែកជាមូលដ្ឋានពណ៌បៃតងចំនួន៧ និងគេសរសេរលើមូលដ្ឋានទាំង៧ នេះតាមលេខរៀងពី ១ដល់៧ រួចមូលដ្ឋានខៀវចំនួន៥ និងគេសរសេរលើមូលដ្ឋានទាំង៥ នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៥ ចុងក្រោយមូលដ្ឋានក្រហមចំនួន ៣ និងគេសរសេរលើមូលដ្ឋានទាំង៣ នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៣។ គេចាប់យកមូលដ្ឋានមួយចេញពីចុងដោយចៃដន្យ។  
 រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖  
 A: មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង ។                      B: មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានលេខសេស ។  
 C: មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានលេខគូ ។                              D: មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានលេខជាចំនួនបឋម ។  
 E: មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង និងមានលេខជាចំនួនបឋម ។
- V. ១. គេមានសមីការ  $16x^2 + 9y^2 - 54y - 63 = 0$  ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូល, កំណុំទាំងពីរ របស់អេលីបនេះ ។ ខ. សង់អេលីបនេះ។  
 ២. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(2,3,4), B(3,5,6), C(4,6,7), D(3,4,5)$  ។ ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  និងរកតម្លៃ  $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{CD}|$  ។ រួចគណនាផលគុណ  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$  ។  
 ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ  $ABCD$  ជាប្រលេឡូក្រាម។
- VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E): y'' - 4y = 0$  ។  
 ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E)$  ដែល  $y(0) = 1$  និង  $y'(0) = 0$  ។
- VII. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  មួយកំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = (x-2)e^x + 1$  មានក្រាបតាង  $C$  ។  
 ក. រកតម្លៃអតិបរមានៃ  $f$  ។

- ខ. រកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $+\infty$  និង  $-\infty$  រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $C$  ។
- គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
- ឃ. រកចំណុច  $I$  របត់នៃក្រាប  $C$  ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ ( $\Delta$ ) ត្រង់  $I$  ។
- ង. ដោះស្រាយសមីការ  $f(x)=1$  ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ  $C$  ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតដែលរកបាននៅសំនួរ ខ។
- ច. គណនា  $f(-1)$  ។ សងក្រាប  $C$  អាស៊ីមតូត និងបន្ទាត់ប៉ះ ( $\Delta$ ) ។

គេឲ្យ៖  $e = 2.7$

**VIII.** គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  មួយកំណត់លើ  $]0, +\infty[$  ដែល  $f(x) = x \ln x - x + 1$  មានក្រាប ( $C$ ) ។

- ក. រកលីមីត  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។
- ខ. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  រួចសិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  ។ គណនាតម្លៃបរមានៃ  $f$  ។
- គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
- ឃ. គណនា  $f(2)$  ។ រក  $x$  បើ  $f(x)=1$  ។ គេឲ្យ៖ ( $\ln 2 = 0.7$ )
- ង. សង់ក្រាប ( $C$ ) តាងអនុគមន៍  $f$  ។



**សូមសំណាងល្អ...!☺**

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់.....លេខគុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

**វិញ្ញាសាទី០៧**

**ខណៈ**

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z=1+i$  ជាឫសនៃសមីការ  $z^3-3z^2+az+b=0:(E)$  ។  
 ក. កំណត់ចំនួនពិត  $a, b$  ។  
 ខ. រកឫសផ្សេងទៀតនៃសមីការ  $(E)$  ។  
 គ. សរសេរឫសនៃសមីការ  $(E)$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{\sin 2x + \sin x}$	ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 4x}$	គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$	ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x^2 + 4x}$
ង. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$	ច. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$	ឆ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x}$	ជ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

III. គេចង់បង្កើតលេខដែលមានបីខ្ទង់ ផ្សេងៗគ្នា ដោយយកចេញពី ១, ២, ៣, ៤ ។

ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖

- ក. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ ៣ ។  
 ខ. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ ២ ។  
 គ. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ ២ ឬ ជាពហុគុណនៃ ៣។

IV. ក. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx$

ខ. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត  $x \neq 1$  គេបាន  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$  ។

រួចទាញរក  $J = \int_2^3 f(x) dx$  ។

V. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$  និងតាង  $C$  ក្រាបរបស់  $f$  ។

1. អនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$  ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$  ។

ខ. ទាញតាមតម្លៃនៃ  $x$  សញ្ញានៃ  $g(x)$  ។

2. ក. រក  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។

ខ. អនុគមន៍  $f$  មានដេរីវេ  $f'$  ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  គេបាន  $f'(x)$  និង  $g(x)$  មានសញ្ញាដូចគ្នា។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  លើ  $\mathbb{R}$  ។

VI. ១. គេមានអនុគមន៍  $g(x) = x^2 - 2 \ln x$  កំណត់លើចន្លោះ  $I = (0, +\infty)$  ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $g$  (មិនចាំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ទេ) ។

ខ. ទាញថាចំពោះគ្រប់  $x > 0$  នោះគេបាន  $g(x) > 0$  ។

២. អនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $I$  ដោយ  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$  មានក្រាប  $C$  ។

ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។

ខ. a. បង្ហាញថា  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \in I$  ។

b. ទាញរកសញ្ញានៃ  $f'$  និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $I$  ។

គ. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $D$  មានសមីការ  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $C$

b. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង  $C$  និង  $D$  ។

c. កំណត់ទីតាំងជៀបនៃ  $C$  និង  $D$  ។

d. សង់  $C$  និង  $D$  នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (ឯកតាលើអ័ក្ស  $2cm$ )

៣. នៅលើចន្លោះ  $I$  គេឲ្យ  $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  ។

ក. រកព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍  $h$  លើចន្លោះ  $I$  ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់  $S$  ខ័ណ្ឌដោយក្រាប  $C$  បន្ទាត់  $D$  និងបន្ទាត់ឈរ  $x = \frac{1}{e}, x = e^2$  គិតជា  $cm^2$  ។

VII. (ថែម) គេឲ្យសមីការ  $(E_1): 2x^2 + y^2 = 8$  និង  $(E_2): y^2 = 6x$  ។

ក. ចូរបញ្ជាក់ដោយប្រាប់ឈ្មោះនៃប្រភេទខ្សែកោង ឬសមីការទាំងពីរខាងលើ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងទាំងពីរខាងលើ ។

គ. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងទាំងពីរខាងត្រង់ចំណុចប្រសព្វនោះ។

ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងទាំងពីរត្រង់ចំណុចប្រសព្វនោះកែងគ្នា។

VIII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ  $ABC$  ជាត្រីកោណសម្បង។

ខ. គណនាផលគុណ  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  រួចសរសេរសមីការប្លង់  $ABC$  ។

គ. រកចម្ងាយពីចំណុច  $D(0, 1, 1)$  ទៅប្លង់  $ABC$  ។

ឃ. រកសមីការស្វ៊ែរ  $S$  ដែលមានអង្កត់ធ្នឹត  $AC$  ។

ង. សរសេរសមីការប្លង់  $P$  ប៉ះស្វ៊ែរ  $S$  ត្រង់  $C$  ។



សូមសំណាងល្អ...! ☺

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ( ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត )  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

## វិញ្ញាសាទី០៨

ខាង

- I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $Z = \frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$  ។
- ក. សរសេរ  $Z$  ជាទម្រង់  $a+bi$  ដែល  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនពិត។
- ខ. គណនា  $Z^2$  និង  $Z^3$  រួចទាញរក  $Z^{15}$  ។
- គ. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $n$   $Z^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$  រួចគណនា  $Z^{20}$  ។
- II. គណនាលីមីតនៃអនុគម័យខាងក្រោម៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4020x} - e^{2013x}}{\sin 2040x - \sin 2039x}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - e^{5x}) \sin 2x}{8x^2}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 4x}}{1 - \sqrt{\cos 8x}}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 8x}$
- ង.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$       ច.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{2 - \sqrt{x+4}}$       ឆ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$       ជ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$
- ឈ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$       ញ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$       ដ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x \ln x}$       ប.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\sin 4x}{x} \right)$
- III. ១. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $D = [2, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{(2x-3)(x-1)^2}$  ។
- ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់  $x \in D$  នោះ  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2x-3}$  ។
- ខ. កំណត់លើចន្លោះ  $[2, +\infty)$  នូវព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍  $g$  និង  $h$  ដែល  $g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$  និង  $h(x) = \frac{1}{2x-3}$
- គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ  $I = \int_2^3 f(x) dx$  ។
២. គណនាអាំងតេក្រាល  $A = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 3) dx$
- IV. ក្នុងលំដាប់លេខៈ ១, ២, ៣, ៤, ៥, ៦, ៧, ៨, ៩, ១០ គេចាប់យកលេខចំនួន៦ចេញពីលំដាប់លេខនេះដោយចៃដន្យ។
- គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការដូចខាងក្រោម៖
- ក. ក្នុងចំនួនទាំង ៦ នោះមានចំនួនគូ ៣គត់។
- ខ. ក្នុងចំនួនទាំង ៦ នោះមានចំនួនសេសមួយយ៉ាងតិច ។
- គ. ក្នុងចំនួនទាំង ៦ នោះមានចំនួនសេសតែមួយគត់ ។
- ឃ. ក្នុងចំនួនទាំង ៦ នោះមានផលបូកស្មើនឹង ៦ ។
- V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $E: y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$  ។
- ក. រកចម្លើយ  $y_c$  របស់សមីការ  $E': y'' + 2y' + y = 0$  ។
- ខ. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $a, b, c$  ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍  $y_p = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយនៃ  $E$  ។
- គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍  $y = y_c + y_p$  ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $E$  ។
- VI. ១.  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = x \ln x + ax + b$  ។ រកចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍  $f$  មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ ០ ចំពោះ  $x = 1$  ។

២.  $g$  កំណត់ដោយ  $g(x) = x \ln x - x + 1$  មានខ្សែកោង  $C$  ។
- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $g$  ។ រួចគណនាលីមីតចុងៗដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $g$  ។
- ខ. គណនា  $g'(x)$  ។ សិក្សាសញ្ញានៃ  $g'(x)$  ។
- គ. សង់តារាងអថេរភាព  $g$  ។ រួចទាញរកសញ្ញា  $g(x)$  ។
- ឃ. សង់ក្រាប  $C$  និង  $C' : h(x) = \ln x$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ។
- ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្បងដែលខ័ណ្ឌដោយ  $C$  និង  $C'$  ។
- ច. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្បងដែលខ័ណ្ឌដោយ  $C$  និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសដែល  $0 < x \leq 1$  ។

**VII. គេឲ្យអនុគមន៍  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x$  មានខ្សែកោងតំណាង  $C$  ។**

- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។ គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។
- ខ. តាង  $f'$  ជាដេរីវេនៃ  $f$  ។ គណនា  $f'$  និងបង្ហាញថា  $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x}$  ។
- គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ  $T$  ដែលប៉ះទៅនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់ចំណុចដែលអាប់ស៊ីស  $x=1$  ។
- ឃ. ទាញរកសញ្ញានៃ  $f'(x)$  និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
- ង. សង់ក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $T$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។
- ច. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x \ln x + 5x$  ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍  $f$  ។
- ឆ. គណនាអាំងតេក្រាល  $J = \int_1^5 f(x) dx$  ។



**សូមសំណាងល្អ...! ☺**

រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
 សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
 វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ( ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត )  
 រយៈពេល១៥០នាទី  
 ពិន្ទុសរុប ១២៥

មណ្ឌលប្រឡង.....  
 លេខបន្ទប់.....លេខគុ.....  
 ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
 ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

## វិញ្ញាសាទី០៩

នាង

**I.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + 4}{5e^x - 6}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + \ln x}{x^2}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 7x - 7}{x^2 - 1}$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 2x}{x^2}$

ង.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 3x} - 1}{x^2}$

ច.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

ឆ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2}$

ជ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$

**II.** គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$  និង  $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$  ។

ក. គណនា  $z_1 + z_2$  ;  $z_1 - z_2$  ;  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  សរសេរជាទម្រង់  $a + bi$  ។

ខ. សរសេរ  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ រួចទាញរក  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. បង្ហាញថា  $z_1^{2016} + z_2^{2016}$  ជាចំនួនថេរ ។

**III.** ១. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $\int (x+1)^2 e^{2x+2} dx$

ខ.  $\int \cos x \ln e^{\tan x} dx$

គ.  $\int \frac{\ln x}{2017x} dx$

ឃ.  $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^{2017}} dx$

២. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \frac{6-x}{x^2-4}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq \pm 2$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq \pm 2$  ។

រួចទាញរក  $I = \int_1^6 f(x) dx$  ។

**IV.** លីដូមានស្បែកជើងកីឡា ៣សំរាប់ពណ៌ផ្សេងគ្នា ខាវកីឡា ៤ពណ៌ផ្សេងគ្នា និងអាវកីឡា ៥ពណ៌ផ្សេងគ្នា ។ តើលីដូអាចស្លៀកពាក់បានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ? តើបានប៉ុន្មានរបៀបបើគេដឹងថា ស្បែកជើងក្រហម ខាវក្រហម និងអាវក្រហម លីដូមិនអាចស្លៀកពាក់ក្នុងពេលតែមួយ ?

**V.** ១/ ដោះស្រាយសមីការ  $4y'' + y = 0 \quad (E)$  ។

២/ រកចម្លើយ  $g$  មួយនៃ  $(E)$  ដោយដឹងថា  $\int_0^\pi g(x) dx = 0$  និង  $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 3$  ។

**VI.** ១. គេឲ្យវ៉ិចទ័រ  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  ;  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  និង  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  ។

ក/ រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\vec{u} + \vec{v}$  និង  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\vec{w}$  អរតូកូណាល់នឹង  $\vec{u}$  ផង និង  $\vec{v}$  ផង ។

ខ/ រកវ៉ិចទ័រឯកតាដែលអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ  $\vec{u}$  និង  $\vec{v}$  ។

គ/ រកមាឌប្រឡើងពីប៉ែតដែលមានរឹមាត្រ  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  ;  $\vec{w}$  ។

២. គេមានសមីការ  $(E) \quad 36x^2 + 16y^2 = 4$  ។

ក/ បង្ហាញថា  $(E)$  ជាសមីការអេលីប ។ រួចទាញរក ផ្ចិត កំពូល និងកំណុំ នៃអេលីបនេះ ។

ខ/ សង់អេលីប  $(E)$  ។



**VII. គេឲ្យ**  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + 2 - \frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}$  មានក្រាប  $(C)$  ។

១. គណនាលីមីត  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ រួចសិក្សាទីតាំងផ្សេងៗរវាងក្រាប  $(C)$  ជាមួយនឹងបន្ទាត់  $(\Delta): y = x + 2$  ។

២.ក/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  ។

ខ/ គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

៣.ក/ ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  ចូរស្រាយបំភ្លឺថាកន្សោម  $f(x)$  អាចសរសេរជាពីរទម្រង់  $f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$  និង

$$f(x) = x + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 1} \quad \text{។}$$

ខ/ ទាញបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង  $(C)$  មានអាស៊ីមតូតពីរតាងដោយ  $(d_1)$  និង  $(d_2)$  ។

៤.គណនា  $f(x) + f(-x)$  រួចទាញថាចំណុច  $I(0; 2)$  ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប  $(C)$  ។

៥.គណនា  $f(1)$  និង  $f(2)$  រួចសង់ក្រាប  $(C)$  បន្ទាត់  $(\Delta); (d_1); (d_2)$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  តែមួយ។

$$\text{គេយក } e = 2.7; \frac{e-1}{e+1} = 0.5 \text{ និង } \frac{e^2-1}{e^2+1} = 0.8 \quad \text{។}$$



**សូមសំណាងល្អ...! ☺**

រៀបចំសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧  
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត)  
រយៈពេល១៥០នាទី

មណ្ឌលប្រឡង.....  
លេខបន្ទប់.....លេខគុ.....  
ឈ្មោះបេក្ខជន.....  
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ពិនុសរុប ១២៥

### វិញ្ញាសាទី១០

ប្រធាន៖

ខាង

- I. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 3x}{-5x^2}$
- II. (១០ ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  និង  $z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$  ។ ក/ សរសេរ  $w = z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងទម្រង់ពិជគណិត ។ ខ/ បង្ហាញថា  $w^4$  ជាចំនួនពិត។
- III. (១៥ ពិន្ទុ) ១. គណនា  $\int_1^4 (x^2 + 3x + 2) dx$  ។  
 ២. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \frac{3x+3}{9-x^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq \pm 3$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{2}{3-x} - \frac{1}{3+x}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq \pm 3$  ។  
 រួចទាញរក  $I = \int_0^6 f(x) dx$  ។
- IV. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងចង្កូមមានបីចំណុចអស់ ១២ដើម ក្នុងនោះមាន ៣ដើម ៣ជើម ៤ដើម និង៣ដើមខ្មៅ ៥ដើម ។ គេចាប់យកបីចំណុច ៣ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖  
 ក/ ចាប់បានសុទ្ធតែបីចំណុចក្រហម។ ខ/ ចាប់បានបីចំណុចខ្មៅមួយគត់។ គ/ ចាប់បានបីចំណុចមានពណ៌ខុសៗគ្នា។
- V. (២០ ពិន្ទុ) ១. កោនិច(C) មួយមានសមីការ  $144x^2 + 4y^2 = 36$  ។ តើកោនិច(C) ជាអ្វី?  
 រកប្រវែងរវាងកំពូលទាំងពីរ ប្រវែងរវាងកំណុំទាំងពីរ និងផ្ចិតនៃ(C) ។ រួចសង់ក្រាបតាង(C) ។  
 ២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាលមានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(1,1,1), B(1,3,-1)$  និង  $C(1,3,3)$  ។ បង្ហាញថា  $\triangle ABC$  ជាត្រីកោណកែងសមាបាត ។ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $\triangle ABC$  នេះ ។
- VI. (១៥ ពិន្ទុ) ក/ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E): y'' + y' - 2y = 0$  ។  
 ខ/ រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ(E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃ(E)ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់  $(T): y = -3x + 3$  ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស ០ ។
- VII. (៣៥ ពិន្ទុ) ១. គេមានអនុគមន៍  $g(x) = x^2 - 2 \ln x$  កំណត់លើចន្លោះ  $I = (0, +\infty)$  ។  
 ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $g$  (មិនចាំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ទេ) ។  
 ខ. ទាញថាចំពោះគ្រប់  $x > 0$  នោះគេបាន  $g(x) > 0$  ។  
 ២. អនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $I$  ដោយ  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$  មានក្រាប  $C$  ។  
 ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ ០ និង  $+\infty$  ។  
 ខ. a. បង្ហាញថា  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \in I$  ។  
 b. ទាញរកសញ្ញានៃ  $f'$  និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $I$  ។  
 គ. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $D$  មានសមីការ  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ  $C$   
 b. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង  $C$  និង  $D$  ។  
 c. កំណត់ទីតាំងធៀបនៃ  $C$  និង  $D$  ។

d. សង់  $C$  និង  $D$  នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

៣. នៅលើចន្លោះ  $I$  គេឲ្យ  $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  ។

ក. រកព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍  $h$  លើចន្លោះ  $I$  ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកន្លែង  $s$  ខ័ណ្ឌដោយក្រាប  $C$  បន្ទាត់  $D$  និងបន្ទាត់ឈរ  $x = \frac{1}{e}, x = e^2$  ។