រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ចំនួនកុំផ្លិច

I. ចំនួននិម្មិត

- i ហៅថាឯកតានិម្មិត ដែល $i^2=-1$ ឬ $i=\sqrt{-1}$
- ផលគុណនៃចំនួនពិតខុសពីសូន្យនឹង i ជាចំនួននិម្មិត
- បើ $C>0$ នោះឫសការេនៃ $-C$ គឺ

$$\sqrt{-C}=\sqrt{C\cdot(-1)}=\sqrt{C}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{C}\cdot i$$

Ex. ចំនួន $-2i$, $3i$, $2\sqrt{3}i$ ជាចំនួននិម្មិត

II. ចំនួនកុំផ្លិច

- និយមន័យ៖ កន្សោមមានរាង $Z=a+bi$ ដែល $a,b\in IR$ ហៅថាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត ។
  - a ហៅថាផ្នែកពិត
  - b ហៅថាផ្នែកនិម្មិត
- សំគាល់៖ ចំនួនកុំផ្លិច $Z=a+bi$ និង $W=c+di$ ស្មើគ្នាលុះត្រាតែ $a=c$ (ផ្នែកពិត $=$ ផ្នែកពិត) និង $b=d$ (ផ្នែកនិម្មិត $=$ ផ្នែកនិម្មិត) ។

III. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ $Z=a+bi$ នោះ $\bar{Z}=a-bi$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z ។ លក្ខណៈចំនួនកុំផ្លិច Z និង W ៖

- $\bar{\bar{Z}}=Z$
- $\overline{Z\pm W}=\bar{Z}\pm\bar{W}$
- $\overline{Z\cdot W}=\bar{Z}\cdot\bar{W}$
- $\overline{(Z/W)}=\bar{Z}/\bar{W}, W\neq 0$

IV. ស្វ័យគុណនៃ i

- $i^2=-1$
- $i^3=-i$
- $i^4=1$
- $i^{4k}=1$
- $i^{4k+1}=i$
- $i^{4k+2}=-1$
- $i^{4k+3}=-i$, $k\in Z$

V. សមីការដឺក្រេទី ២

សមីការរាង $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$

មាន $\Delta=b^2-4ac$ ឬ $\Delta'=b'^2-ac, b'=\frac{b}{2}$

- បើ $\Delta>0$ ឬ $\Delta'>0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

- បើ $\Delta=0$ ឬ $\Delta'=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-b'}{a}$$

- បើ $\Delta<0$ ឬ $\Delta'<0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $x_1=\alpha+\beta i$, $x_2=\alpha-\beta i$ ។

VI. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

- គេមាន $Z=a+bi$ នោះម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច Z គឺ $r=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- ទ្រឹស្តីបទ: បើ Z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $|Z|^2=Z\cdot\bar{Z}$
- លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចពីរ W និង Z

i) $|WZ|=|W||Z|$ ii) $\left|\frac{W}{Z}\right|=\frac{|W|}{|Z|}$

iii) $|W+Z|\leq|W|+|Z|$

VII. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

- គេឲ្យ $Z=a+bi$ $r=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$ ហើយ α ($\cos\alpha=\frac{a}{r}$ និង $\sin\alpha=\frac{b}{r}$) ជាអាគុយម៉ង់នៃ Z គេបាន $Z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ។
- ទ្រឹស្តីបទ: គេមាន $Z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$ និង $Z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$ គេបាន
  - $Z_1Z_2=r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)]$
  - $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2)]$

VIII. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $Z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ នោះគេបាន

$$Z^n=\left[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right]^n$$
$$=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\quad\forall n\in Z$$

រូបមន្តដឺម័រ

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

IX. រឹសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ Z មានរឹសទី n គឺ

$$W_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

បើ $k=0;1;2;3;4;\ldots;n-1$ នោះ Z មានរឹសទី n គឺ $W_0;W_1;W_2;W_3;\ldots;W_{n-1}$ ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
លីមីតនៃអនុគមន៍

I. និយមន័យលីមីតត្រង់ចំនួនកំណត់

- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x\to a$ បើ $\forall\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$
- អនុ. f ខិតជិត $+\infty$ (ឬ $-\infty$)កាលណា $x\to a$ បើ $\forall M>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ (ឬ $f(x)<-M$) ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ (ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$)

II. និយមន័យលីមីតត្រង់អនន្ត

- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x\to+\infty$ បើ $\forall\varepsilon>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$
- អនុ. f មានលីមីត L កាលណា $x\to-\infty$ បើ $\forall\varepsilon>0$ មាន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

III. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L, \lim\limits_{x\to a} g(x)=M, \lim\limits_{x\to a} h(x)=N$

ហើយ L , M , N ជាចំនួនពិត គេបាន៖

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=M\pm L$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)-h(x)]=L+M-N$
- $\lim\limits_{x\to a} Kf(x)=KL$, K ជាចំនួនថេរ
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]=L\cdot M\cdot N$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}, M\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=L^n$, n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន

IV. លីមីតនៃអនុគមន៍សនិទាន

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$, $a\geq 0$, $n\in \mathbb{IN}$
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$, $a<0$, n ជាចំនួនគត់សេស
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}=L^{\frac{1}{n}}$

បើ $L\geq 0$ និង $n\in \mathbb{IN}, n\geq 2$

បើ $L<0$ និង $n>2$ ជាចំនួនគត់សេស

V. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ និង $\lim\limits_{x\to L} f(x)=f(L)$ នោះ៖

$\lim\limits_{x\to a} f[g(x)]=L$

VI. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$
- $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$
- $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$
- $\lim\limits_{x\to a}\cot x=\cot a$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

VII. លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}, n>0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0, n>0$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$

VIII. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

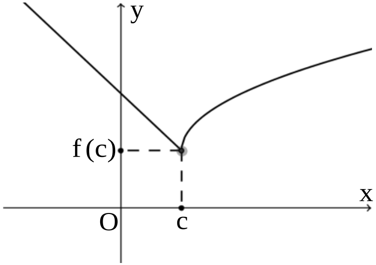
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x=0$

IX. លីមីតមានរាងមិនកំណត់

- $\dfrac{0}{0}$ ៖ត្រូវសរសេរភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតថ្មី ។
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ ៖ត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេទាំងភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួម ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។
- $+\infty-\infty$ ៖ត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ៕

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

I. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច



$y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$ លុះត្រាតែ ៖

- f កំណត់ចំពោះ $x=c$
- f មានលីមីតកាលណា $x\to c$
- $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

សំគាល់: អនុ. f មានលីមីតត្រង់ $x=c$ កាលណា

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)$$

II. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើអនុ. f និង g ជាប់ត្រង់ $x=c$ គេបាន ៖

- $f(x)+g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x=c$
- $f(x)-g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x=c$
- $f(x)\cdot g(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x=c$

- $Kf(x)$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x=c$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុ. ជាប់ត្រង់ $x=c$ ដែល $g(c)\neq 0$

III. ភាពជាប់លើចន្លោះ

- f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រា f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។
- f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រា f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមិត

$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។

IV. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើអនុ. g ជាប់ត្រង់ c និងអនុ. f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះ អនុ.បណ្ដាក់ $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

V. អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

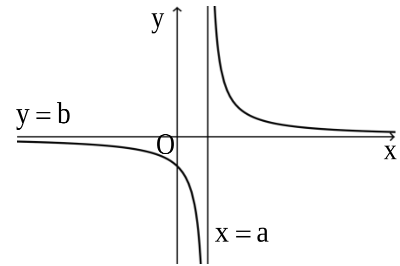
- បើ f ជាអនុ.មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to 0} f(x)=L$ នោះអនុ.បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ ត្រង់ $x=a$ កំណត់ $g(x)=\begin{cases} f(x) & , \ x\neq a \\ L & , \ x=a \end{cases}$

VI. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្ដាល

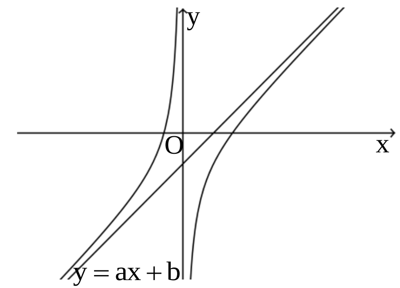
- បើអនុ. f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង K ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c)=K$ ។
- បើអនុ. f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $f(a)\cdot f(b)<0$ នោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c)=0$ ។

VII. អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍

- បើ $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x=a$ ជា អាស៊ីមតូតឈរ នៃអនុ. f
- បើ $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=b$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=b$ ជា អាស៊ីមតូតដេក នៃអនុ. f



- បើ $f(x)=ax+b+g(x)$ មាន $\lim_{x\to \pm\infty} g(x)=0$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=ax+b$ ជា អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃអនុ. f ។



រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

I. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ x_o

ដេរីវេត្រង់ x_o នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាលីមីតនៃផលធៀបកំណើនកាលណា Δx ខិតជិត 0 ។ គេសរសេរ ៖

$$y'_o = f'(x_o) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} ; h = x - x_o$$

II. ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់

f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 = a$ នោះ f ជាប់ត្រង់ $x_o = a$ ។

III. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$ នោះ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

ឬ $\frac{d}{dx}f[u(x)] = f'(x)\times u'(x)$ ។

IV. រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ

- $y=k \Rightarrow y'=0$; k : ថេរ
- $y=x \Rightarrow y'=1$; x : អថេរ
- $y=ax+b \Rightarrow y'=a$
- $y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$
- $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$
- $y=\frac{1}{x^n} \Rightarrow y'=\frac{-n}{x^{n+1}}$
- $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y=k\cdot u \Rightarrow y'=k\cdot u'$
- $y=u+v \Rightarrow y'=u'+v'$
- $y=u-v \Rightarrow y'=u'-v'$
- $y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+v'\cdot u$
- $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
- $y=\frac{c}{v} \Rightarrow y'=\frac{-cv'}{v^2}$; c : ថេរ
- $y=\frac{u}{c} \Rightarrow y'=\frac{u'}{c}$; c : ថេរ
- $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$
- $y=\frac{1}{u^n} \Rightarrow y'=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
- $y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u'}{u^2}$
- $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

V. ដេរីវេអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$
- $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$
- $y=\tan x \Rightarrow y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
- $y=\cot x \Rightarrow y'=-(1+\cot^2 x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$
- $y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$
- $y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$
- $y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)=\frac{u'}{\cos^2 u}$
- $y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)=\frac{-u'}{\sin^2 u}$

VI. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត

- $y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$
- $y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{\ln u}$
- $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$
- $y=e^u \Rightarrow y'=u'e^u$

VII. ដេរីវេលំដាប់ 2

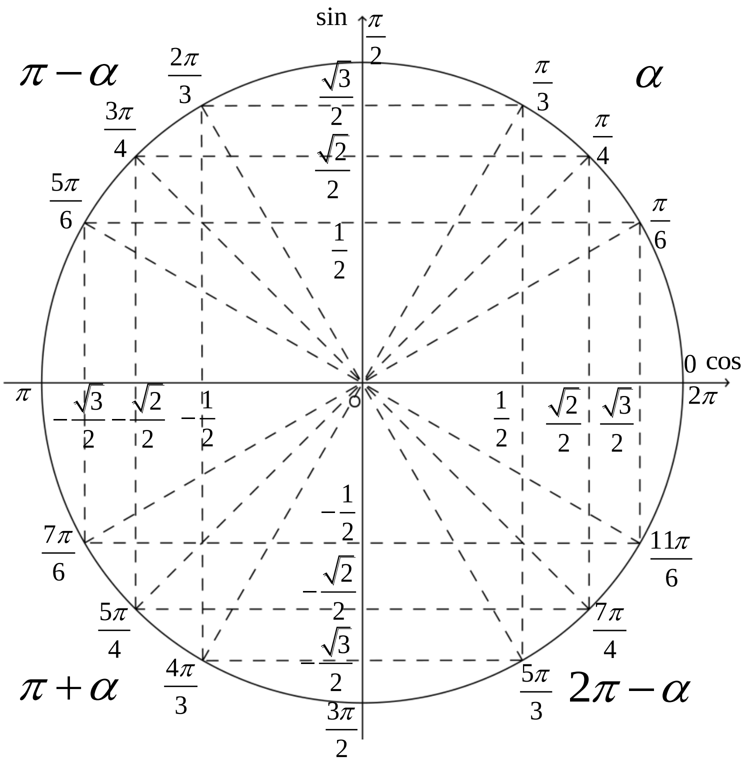
ដេរីវេលំដាប់ 2 នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាដេរីវេនៃ y' កំណត់តាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ។

VIII. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់នេះថា ដេរីវេលំដាប់ 2 ; ដេរីវេលំដាប់ 3 ;...;ដេរីវេលំដាប់ n តាង $f', f'', ..., f^{(n)}$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ



$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\sin a=2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
$\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$	$1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$ $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$
$\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$ $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$ $\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ $\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ (t=\tan\dfrac{a}{2})$ $\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

❖ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $A(x_A, y_A, z_A)$ និង $B(x_B, y_B, z_B)$ ជាពីរចំណុច នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេបាន $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)}$

❖ ណមនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u} = (x, y, z)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេបានណមវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កំណត់ដោយ

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}$$

❖ ផលគុណស្កាលែពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u} = (x, y, z)$ និង $\vec{v} = (x', y', z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ និង $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ គេបាន

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

❖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u} = (x, y, z)$ និង $\vec{v} = (x', y', z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេបាន $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$; $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (yz' - y'z)\,\vec{i} - (xz' - x'z)\,\vec{j} + (xy' - x'y)\,\vec{k}$$

❖ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ និង $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេបាន $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

❖ ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ

បើ $A(x_A, y_A, z_A)$ និង $B(x_B, y_B, z_B)$ ជាពីរចំណុច នៅក្នុងលំហ គេបានចម្ងាយពី A ទៅ B កំណត់ដោយ

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

❖ សមីការស្វ៊ែ

សមីការស្វ៊ែ S ដែលមានផ្ចិត (a, b, c) និងកាំ r គេបាន

- ទម្រង់ស្តង់ដា $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
- ទម្រង់ទូទៅ $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$

ដែល $k = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2$

❖ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់

បើបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (a, b, c)$ នោះយើងបាន ៖

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $L : \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \quad , t \in IR \\ z = z_0 + ct \end{cases}$
- សមីការឆ្លុះ $L : \dfrac{x - x_o}{a} = \dfrac{y - y_o}{b} = \dfrac{z - z_o}{c}$

❖ សមីការប្លង់

បើប្លង់ P កាត់តាមចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (a, b, c)$ នោះសមីការប្លង់ P មានទម្រង់

- ស្តង់ដា $P : a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$
- ទូទៅ $P : ax + by + cz + d = 0$

❖ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

បើប្លង់ P មានសមីការ $P : ax + by + cz + d = 0$ នោះ ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_o, y_o, z_o)$ ទៅប្លង់ P គឺ

$$\boxed{d(A, P) = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

❖ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ

បើបន្ទាត់ L ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និងមាន $M \in L$ ហើយ ចំណុច $A \notin L$ នោះចម្ងាយពី A ទៅបន្ទាត់ L គឺ

$$\boxed{d(A, L) = \frac{|\overrightarrow{MA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

❖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(yz'-y'z)\,\vec{i}-(xz'-x'z)\,\vec{j}+(xy'-x'y)\,\vec{k}$$

❖ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$; $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេបាន $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$

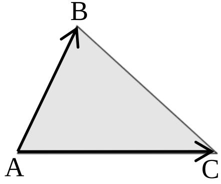
$$=u_1\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}-u_2\begin{vmatrix}v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}$$

❖ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

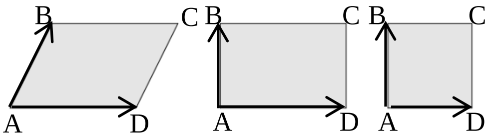
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|$$



ចំណាំ៖ ត្រូវប្រើផលគុណពីរវ៉ិចទ័រចេញពីកំពូលតែមួយ

❖ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម-ចតុកោណកែង-ការេ



$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$$

$$=\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|$$

ចំណាំ៖ ត្រូវប្រើផលគុណពីរវ៉ិចទ័រចេញពីកំពូលតែមួយ

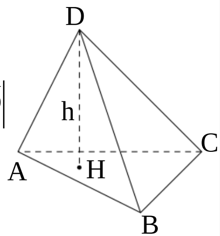
❖ មាឌចតុមុខ ឬតេត្រាអ៊ែត

- ប្រើផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ

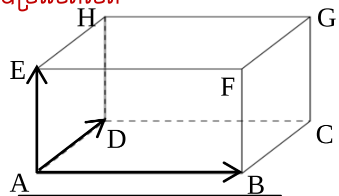
$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$$

- ប្រើក្រឡាផ្ទៃបាត និងកំពស់

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$$

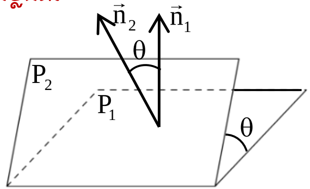


❖ មាឌប្រលេពីប៉ែត



$$\boxed{V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right|}$$

❖ មុំរវាងប្លង់ពីរ



បើប្លង់ P_1 មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1$ និងប្លង់ P_2 មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2$

- ប្លង់ទាំងពីរកែងគ្នាបើ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$
- ប្លង់ទាំងពីរស្របគ្នាបើ $\vec{n}_1=k\vec{n}_2$ ដែល $k\neq 0$
- មុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

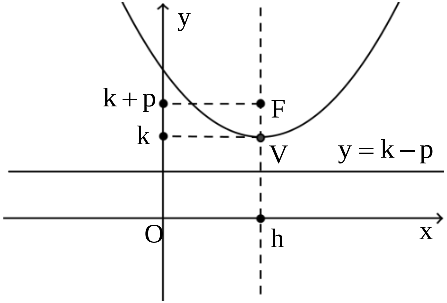
❖ សម្គាល់៖

- វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង
- $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កូលីនេអ៊ែរនឹង $\vec{v}$
- $\vec{u}=k\vec{v}$, $k\neq 0$ នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កូលីនេអ៊ែរនឹង $\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ នោះវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{v}$
- $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta\cdot\vec{k}$ ដែល $\theta=(\vec{u},\vec{v})$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
កោនិច - ប៉ារ៉ាបូល

I. ប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដារាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
- កំពូល $V(h,k)$
- កំណុំ $F(h,k+p)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = k-p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះឈរ $x = h$

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h = 0$ និង $k = 0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដារាង $x^2 = 4py$

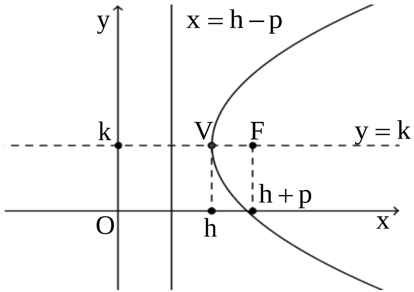
- កំពូល $O(0,0)$
- កំណុំ $F(0,p)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = -p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះ $x = 0$

<u>សំគាល់</u>

- បើ $p > 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $y > 0$
- បើ $p < 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $y < 0$

II. ប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដារាង $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
- កំពូល $V(h,k)$
- កំណុំ $F(h+p,k)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = h-p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះដេក $y = k$

❖ ករណីប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h = 0$ និង $k = 0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដារាង $y^2 = 4px$
- កំពូល $O(0,0)$
- កំណុំ $F(p,0)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = -p$
- សមីការអ័ក្សឆ្លុះ $y = 0$

<u>សំគាល់</u>

- បើ $p > 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $x > 0$
- បើ $p < 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតរកទិស $x < 0$

III. សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល

- ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

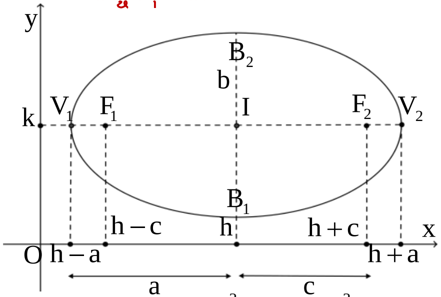
  សមីការទូទៅរាង $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$
- ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក

  សមីការទូទៅរាង $By^2 + Cy + Dx + E = 0$

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
កោនិច - អេលីប

I. អេលីបដែលមានអ័ក្សធំដេក និងអ័ក្សតូចឈរ

❖ អេលីបមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,k)$
- កំពូល $V_1(h-a,k)$ និង $V_2(h+a,k)$
- កំណុំ $F_1(h-c,k)$ និង $F_2(h+c,k)$
- ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ $2a$ និង ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ $2b$
- ចំ.ប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(h,k-b);B_2(h,k+b)$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

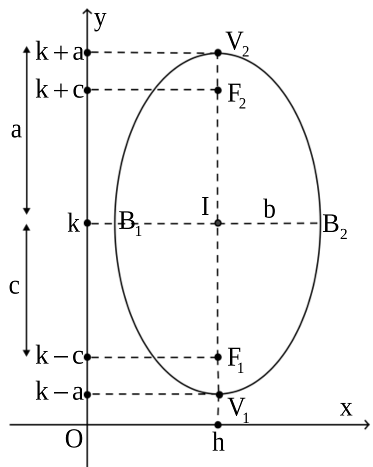
❖ អេលីបមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0\,,0)$
- កំពូល $V_1(-a,0)$ និង $V_2(a,0)$
- កំណុំ $F_1(-c,0)$ និង $F_2(c\,,0)$
- ចំ.ប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(0,-b);B_2(0,b)$
- ដែល $a>b>0\,,c^2=a^2-b^2$

II. អេលីបដែលមានអ័ក្សធំឈរ និងអ័ក្សតូចដេក

❖ អេលីបមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,k)$
- កំពូល $V_1(h\,,k-a)$ និង $V_2(h\,,k+a)$

- កំណុំ $F_1(h\,,k-c)$ និង $F_2(h\,,k+c)$
- ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ $2a$ និង ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ $2b$
- ចំ.ប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(h-b,k);B_2(h+b,k)$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

❖ អេលីបមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0\,,0)$
- កំពូល $V_1(0\,,-a)$ និង $V_2(0\,,a)$
- កំណុំ $F_1(0\,,-c)$ និង $F_2(0\,,c)$
- ចំ.ប្រសព្វអ័ក្សតូច $B_1(-b,0);B_2(b,0)$
- ដែល $a>b>0$ និង $c^2=a^2-b^2$

III. សមីការទូទៅនៃអេលីប

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ដែល $A\cdot B>0$ និង $A\neq 0\,,B\neq 0$

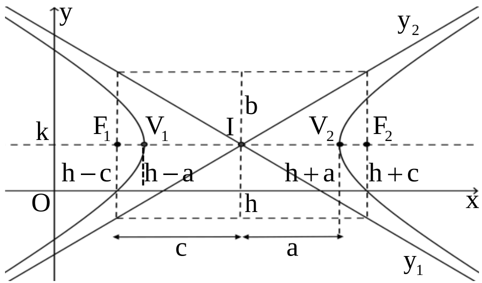
IV. អុិចសង់ទ្រីស៊ីតេ

អុិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e នៃអេលីប គឺជាផលធៀបរវាងចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំ និងកន្លះអ័ក្សធំនៃអេលីប កំណត់ដោយ $e=c/a$ ។

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២
កោនិច - អ៊ីពែបូល

I. អ៊ីពែបូលមានអ័ក្សទទឹងដេក

❖ អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតខុសពីគល់ O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,k)$
- កំពូល $V_1(h-a,k)$ និង $V_2(h+a,k)$
- កំណុំ $F_1(h-c,k)$ និង $F_2(h+c,k)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=k-\frac{b}{a}(x-h) \text{ និង } y_2=k+\frac{b}{a}(x-h)$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

❖ អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតត្រង់គល់ O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

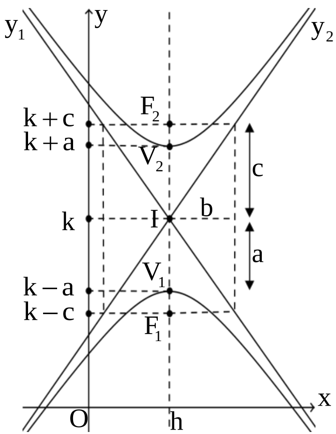
- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- មានផ្ចិត $O(0,0)$
- កំពូល $V_1(-a\,,0)$ និង $V_2(a\,,0)$
- កំណុំ $F_1(-c\,,0)$ និង $F_2(c\,,0)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=-\frac{b}{a}x \text{ និង } y_2=\frac{b}{a}x$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

II. អ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងឈរ

❖ អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់O



- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $I(h\,,k)$
- កំពូល $V_1(h,k-a)$ និង $V_2(h,k+a)$
- កំណុំ $F_1(h,k-c)$ និង $F_2(h,k+c)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=k-\frac{a}{b}(x-h) \text{ និង } y_2=k+\frac{a}{b}(x-h)$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

❖ អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់O

មានន័យថា $h=0$ និង $k=0$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដា $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
- ផ្ចិត $O(0,0)$
- កំពូល $V_1(0\,,-a)$ និង $V_2(0\,,a)$
- កំណុំ $F_1(0\,,-c)$ និង $F_2(0\,,c)$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

$$y_1=-\frac{a}{b}x \text{ និង } y_2=\frac{a}{b}x$$

- ដែល $a>0\,,b>0$ និង $c^2=a^2+b^2$

I. សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ដែល $A\cdot B<0$ និង $A\neq 0\,,B\neq 0$

II. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=c/a$