

完全版

概率论与数理统计习题答案 第四版 盛骤 (浙江大学)

浙大第四版 (高等教育出版社)

第一章 概率论的基本概念

1.[一] 写出下列随机试验的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数 (充以百分制记分) ([一] 1)

$$S = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n \times 100}{n} \right\}, n \text{ 表小班人数}$$

(3) 生产产品直到得到 10 件正品, 记录生产产品的总件数。 ([一] 2)

$$S = \{10, 11, 12, \dots, n, \dots\}$$

(4) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的盖上“正品”, 不合格的盖上“次品”, 如连续查出二个次品就停止检查, 或检查 4 个产品就停止检查, 记录检查的结果。

查出合格品记为“1”, 查出次品记为“0”, 连续出现两个“0”就停止检查, 或查满 4 次才停止检查。 ([一] (3))

$$S = \{00, 100, 0100, 0101, 1010, 0110, 1100, 0111, 1011, 1101, 1110, 1111, \}$$

2.[二] 设 A, B, C 为三事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列事件。

(1) A 发生, B 与 C 不发生。

表示为: \overline{ABC} 或 $A - (AB + AC)$ 或 $A - (B \cup C)$

(2) A, B 都发生, 而 C 不发生。

表示为: $AB\overline{C}$ 或 $AB - ABC$ 或 $AB - C$

(3) A, B, C 中至少有一个发生 表示为: $A+B+C$

(4) A, B, C 都发生, 表示为: ABC

(5) A, B, C 都不发生, 表示为: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $S - (A+B+C)$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$

(6) A, B, C 中不多于一个发生, 即 A, B, C 中至少有两个同时不发生

相当于 $\overline{A}\overline{B}, \overline{B}\overline{C}, \overline{A}\overline{C}$ 中至少有一个发生。故 表示为: $\overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}$ 。

(7) A, B, C 中不多于二个发生。

相当于: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 中至少有一个发生。故 表示为: $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ 或 \overline{ABC}

(8) A, B, C 中至少有二个发生。

相当于: AB, BC, AC 中至少有一个发生。故 表示为: $AB+BC+AC$

6.[三] 设 A, B 是两事件且 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$. 问(1)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少? (2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

解: 由 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$ 即知 $AB \neq \Phi$, (否则 $AB = \Phi$ 依互斥事件加法定理, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.7 = 1.3 > 1$ 与 $P(A \cup B) \leq 1$ 矛盾)。

从而由加法定理得

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (*)$$

(1) 从 $0 \leq P(AB) \leq P(A)$ 知, 当 $AB=A$, 即 $A \cap B$ 时 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值为

$$P(AB) = P(A) = 0.6,$$

(2) 从(*)式知, 当 $A \cup B = S$ 时, $P(AB)$ 取最小值, 最小值为

$$P(AB) = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3。$$

7.[四] 设 A, B, C 是三事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$. 求 A, B, C 至少有一个发生的概率。

解: $P(A, B, C \text{ 至少有一个发生}) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}$

8.[五] 在一标准英语字典中具有 55 个由二个不相同的字母新组成的单词，若从 26 个英语字母中任取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

记 A 表“能排成上述单词”

\therefore 从 26 个任选两个来排列，排法有 A_{26}^2 种。每种排法等可能。

字典中的二个不同字母组成的单词：55 个

$$\therefore P(A) = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{11}{130}$$

9. 在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率。（设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0, 1, 2, …, 9）

记 A 表“后四个数全不同”

\therefore 后四个数的排法有 10^4 种，每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有 A_{10}^4

$$\therefore P(A) = \frac{A_{10}^4}{10^4} = 0.504$$

10.[六] 在房间里有 10 人。分别佩带着从 1 号到 10 号的纪念章，任意选 3 人记录其纪念章的号码。

(1) 求最小的号码为 5 的概率。

记“三人纪念章的最小号码为 5”为事件 A

\therefore 10 人中任选 3 人为一组：选法有 $\binom{10}{3}$ 种，且每种选法等可能。

又事件 A 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码大于 5。这种组合的种数有 $1 \times \binom{5}{2}$

$$\therefore P(A) = \frac{1 \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

(2) 求最大的号码为 5 的概率。

记“三人中最大的号码为 5”为事件 B，同上 10 人中任选 3 人，选法有 $\binom{10}{3}$ 种，且每种选法等可能，又事件 B 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码小于 5，选法有 $1 \times \binom{4}{2}$ 种

$$P(B) = \frac{1 \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{20}$$

11.[七] 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标签脱落，交货人随意将这些标签重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为 A。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^9 种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2$

故
$$P(A) = \frac{C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2}{C_{17}^9} = \frac{252}{2431}$$

12.[八] 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任意取 200 个。

(1) 求恰有 90 个次品的概率。

记“恰有 90 个次品”为事件 A

∴ 在 1500 个产品中任取 200 个，取法有 $\binom{1500}{200}$ 种，每种取法等可能。

200 个产品恰有 90 个次品，取法有 $\binom{400}{90} \binom{1100}{110}$ 种

∴
$$P(A) = \frac{\binom{400}{90} \binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$$

(2) 至少有 2 个次品的概率。

记: A 表 “至少有 2 个次品”

B_0 表 “不含有次品”, B_1 表 “只含有一个次品”, 同上, 200 个产品不含次品, 取法有 $\binom{1100}{200}$ 种, 200 个产品含一个次品, 取法有 $\binom{400}{1}\binom{1100}{199}$ 种

$\therefore \quad \bar{A} = B_0 + B_1$ 且 B_0, B_1 互不相容。

$$\therefore \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - [P(B_0) + P(B_1)] = 1 - \left[\frac{\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}} + \frac{\binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}} \right]$$

13.[九] 从 5 双不同鞋子中任取 4 只, 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

记 A 表 “4 只全中至少有两支配成一对”

则 \bar{A} 表 “4 只人不配对”

\therefore 从 10 只中任取 4 只, 取法有 $\binom{10}{4}$ 种, 每种取法等可能。

要 4 只都不配对, 可在 5 双中任取 4 双, 再在 4 双中的每一双里任取一只。取法有 $\binom{5}{4} \times 2^4$

$$\therefore \quad P(\bar{A}) = \frac{C_5^4 \cdot 2^4}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$$

15.[十一] 将三个球随机地放入 4 个杯子中去, 问杯子中球的最大个数分别是 1, 2, 3, 的概率各为多少?

记 A_i 表 “杯中球的最大个数为 i 个” $i=1,2,3$,

三只球放入四只杯中, 放法有 4^3 种, 每种放法等可能

对 A_1 : 必须三球放入三杯中, 每杯只放一球。放法 $4 \times 3 \times 2$ 种。

(选排列: 好比 3 个球在 4 个位置做排列)

$$P(A_1) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{6}{16}$$

对 A_2 : 必须三球放入两杯, 一杯装一球, 一杯装两球。放法有 $C_3^2 \times 4 \times 3$ 种。

(从 3 个球中选 2 个球, 选法有 C_3^2 , 再将此两个球放入一个杯中, 选法有 4 种, 最后将剩余的 1 球放入其余的一个杯中, 选法有 3 种。

$$P(A_2) = \frac{C_3^2 \times 4 \times 3}{4^3} = \frac{9}{16}$$

对 A_3 : 必须三球都放入一杯中。放法有 4 种。(只需从 4 个杯中选 1 个杯子, 放入此 3 个球, 选法有 4 种)

$$P(A_3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

16.[十二] 50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件, 其中有三个铆钉强度太弱, 每个部件用 3 只铆钉, 若将三只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱, 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

记 A 表 “10 个部件中有一个部件强度太弱”。

法一: 用古典概率作:

把随机试验 E 看作是用三个钉一组, 三个钉一组去铆完 10 个部件 (在三个钉的一组中不分先后次序。但 10 组钉铆完 10 个部件要分先后次序)

对 E : 铆法有 $C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots \times C_{23}^3$ 种, 每种装法等可能

对 A : 三个次钉必须铆在一个部件上。这种铆法有 $[C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots C_{23}^3] \times 10$ 种

$$P(A) = \frac{[C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots \times C_{23}^3] \times 10}{C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times \cdots \cdots \times C_{23}^3} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

法二: 用古典概率作

把试验 E 看作是在 50 个钉中任选 30 个钉排成一行, 顺次钉下去, 直到把部件铆完。(铆钉要计先后次序)

对 E : 铆法有 A_{50}^3 种, 每种铆法等可能

对 A : 三支次钉必须铆在 “1, 2, 3” 位置上或 “4, 5, 6” 位置上, \cdots 或 “28, 29,

30”位置上。这种铆法有 $A_3^3 \times A_{47}^{27} + A_3^3 \times A_{47}^{27} + \cdots + A_3^3 + A_{47}^{27} = 10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}$ 种

$$P(A) = \frac{10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

17.[十三] 已知 $P(\bar{A}) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A\bar{B}) = 0.5$, 求 $P(B | A \cup \bar{B})$ 。

解一:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.7, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.6, A = AS = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$$

注意 $(AB)(A\bar{B}) = \phi$. 故有

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

再由加法定理,

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

$$\text{于是 } P(B | A \cup \bar{B}) = \frac{P[B(A \cup \bar{B})]}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$\text{解二: } P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B} | A) \xrightarrow{\text{由已知}} 0.5 = 0.7 \cdot P(\bar{B} | A)$$

$$\therefore P(\bar{B} | A) = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} \Rightarrow P(B | A) = \frac{2}{7} \quad \text{故} \quad P(AB) = P(A)P(B | A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B | A \cup \bar{B}) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(BA \cup B\bar{B})}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(BA)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{\frac{1}{5}}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

18.[十四] $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B | A) = \frac{1}{3}$, $P(A | B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A \cup B)$ 。

$$\text{解: 由 } P(A | B) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B | A)}{P(B)} \xrightarrow{\text{由已知条件}} \text{有 } \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{由乘法公式, 得 } P(AB) = P(A)P(B | A) = \frac{1}{12}$$

由加法公式, 得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

19.[十五] 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数之和为 7, 求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法)。

解: (方法一) (在缩小的样本空间 SB 中求 $P(A|B)$, 即将事件 B 作为样本空间, 求事件 A 发生的概率)。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组 (x, y) ($x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 并且满足 $x+y=7$, 则样本空间为

$$S = \{(x, y) | (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

每种结果 (x, y) 等可能。

$$A = \{\text{掷二骰子, 点数和为 7 时, 其中有一颗为 1 点. 故 } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\}$$

$$\text{方法二: (用公式 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{)}$$

$$S = \{(x, y) | x=1, 2, 3, 4, 5, 6; y=1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ 每种结果均可能}$$

$A =$ “掷两颗骰子, x, y 中有一个为 “1” 点”, $B =$ “掷两颗骰子, $x+y=7$ ”。则

$$P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}, P(AB) = \frac{2}{6^2},$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

20.[十六] 据以往资料表明, 某一 3 口之家, 患某种传染病的概率有以下规律: $P(A) = P\{\text{孩子得病}\} = 0.6$, $P(B|A) = P\{\text{母亲得病}|\text{孩子得病}\} = 0.5$, $P(C|AB) = P\{\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}\} = 0.4$ 。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解: 所求概率为 $P(AB\bar{C})$ (注意: 由于 “母病”, “孩病”, “父病” 都是随机事件, 这里不是求 $P(\bar{C}|AB)$)

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3, P(\bar{C}|AB) = 1 - P(C|AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

$$\text{从而 } P(AB\bar{C}) = P(AB) \cdot P(\bar{C}|AB) = 0.3 \times 0.6 = 0.18.$$

21.[十七] 已知 10 只晶体管中有 2 只次品, 在其中取二次, 每次随机地取一只, 作

不放回抽样，求下列事件的概率。

(1) 二只都是正品（记为事件 A）

法一：用组合做 在 10 只中任取两只来组合，每一个组合看作一个基本结果，每种取法等可能。

$$P(A) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45} = 0.62$$

法二：用排列做 在 10 只中任取两个来排列，每一个排列看作一个基本结果，每个排列等可能。

$$P(A) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

法三：用事件的运算和概率计算法则来作。

记 A_1, A_2 分别表第一、二次取得正品。

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

(2) 二只都是次品（记为事件 B）

法一：

$$P(B) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

法二：

$$P(B) = \frac{A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

法三：

$$P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

(3) 一只是正品，一只是次品（记为事件 C）

法一：

$$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法二：
$$P(C) = \frac{(C_8^1 \times C_2^1) \times A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法三：
$$P(C) = P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2) \text{ 且 } A_1 \bar{A}_2 \text{ 与 } \bar{A}_1 A_2 \text{ 互斥}$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$$

(4) 第二次取出的是次品 (记为事件 D)

法一：因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作，

法二：
$$P(D) = \frac{A_9^1 \times A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

法三：
$$P(D) = P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2) \text{ 且 } A_1 \bar{A}_2 \text{ 与 } \bar{A}_1 \bar{A}_2 \text{ 互斥}$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}$$

22.[十八] 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

记 H 表拨号不超过三次而能接通。

A_i 表第 i 次拨号能接通。

注意：第一次拨号不通，第二拨号就不再拨这个号码。

$\therefore H = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 三种情况互斥
 $\therefore P(H) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

如果已知最后一个数字是奇数 (记为事件 B) 问题变为在 B 已发生的条件下，求 H 再发生的概率。

$$P(H | B) = P(A_1 | B) + P(\bar{A}_1 A_2 | B) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 | B)$$

$$= P(A_1 | B) + P(\bar{A}_1 | B)P(A_2 | B\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1 | B)P(\bar{A}_2 | B\bar{A}_1)P(A_3 | B\bar{A}_1 \bar{A}_2)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

24.[十九] 设有甲、乙二袋，甲袋中装有 n 只白球 m 只红球，乙袋中装有 N 只白球 M 只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？（此为第三版 19 题(1)）

记 A_1, A_2 分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记 B 表“再从乙袋中取得白球”。

$\therefore B = A_1B + A_2B$ 且 A_1, A_2 互斥

$\therefore P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

$$= \frac{n}{n+m} \times \frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m} \times \frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记 C_1 为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

C_2 为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

C_3 为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

D 为“从第二盒子中取得白球”，显然 C_1, C_2, C_3 两两互斥， $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = S$ ，由全概率公式，有

$$P(D) = P(C_1)P(D|C_1) + P(C_2)P(D|C_2) + P(C_3)P(D|C_3)$$

$$= \frac{C_5^2}{C_9^2} \cdot \frac{5}{11} + \frac{C_4^2}{C_9^2} \cdot \frac{7}{11} + \frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{53}{99}$$

26.[二十一] 已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解： $A_1 = \{\text{男人}\}, A_2 = \{\text{女人}\}, B = \{\text{色盲}\}$ ，显然 $A_1 \cup A_2 = S, A_1 A_2 = \phi$

由已知条件知 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ 。 $P(B|A_1) = 5\%, P(B|A_2) = 0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000}} = \frac{20}{21}$$

[二十二] 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P ，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P ；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{P}{2}$ （1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解： $A_i = \{\text{他第 } i \text{ 次及格}\}$ ， $i=1,2$

已知 $P(A_1) = P(A_2 | A_1) = P$ ， $P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{P}{2}$

（1） $B = \{\text{至少有一次及格}\}$

所以 $\bar{B} = \{\text{两次均不及格}\} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$

$\therefore P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2 | \bar{A}_1)]$$

$$= 1 - (1 - P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2$$

（2） $P(A_1 A_2) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)}$ (*)

由乘法公式，有 $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$

$$= P \cdot P + (1 - P) \cdot \frac{P}{2}$$

$$= \frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入 (*) 得 $P(A_1 | A_2) = \frac{P^2}{\frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}} = \frac{2P}{P+1}$

28.[二十五] 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的，试求他是乘地铁回家的概率。

解：设 A = “乘地铁”， B = “乘汽车”， C = “5:45~5:49 到家”，由题意 $AB = \phi$, $A \cup B = S$

已知： $P(A)=0.5$, $P(C|A)=0.45$, $P(C|B)=0.2$, $P(B)=0.5$

由贝叶斯公式有

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.5 \times 0.45}{P(C|A)\frac{1}{2} + P(C|B)\frac{1}{2}} = \frac{0.45}{0.65} = \frac{9}{13} = 0.6923$$

29.[二十四] 有两箱同种类型的零件。第一箱装 5 只，其中 10 只一等品；第二箱 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（1）第一次取到的零件是一等品的概率。（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设 B_i 表示 “第 i 次取到一等品” $i=1, 2$

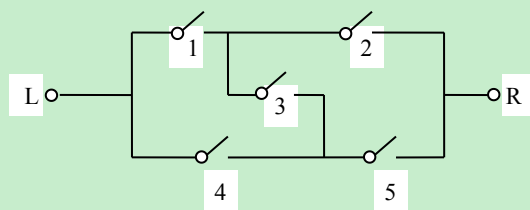
A_j 表示 “第 j 箱产品” $j=1,2$ ，显然 $A_1 \cup A_2 = S$ $A_1 A_2 = \phi$

$$(1) P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (B_1 = A_1 B + A_2 B \text{ 由全概率公式解}).$$

$$(2) P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{10}{50} \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \frac{18}{30} \frac{17}{29}}{\frac{2}{5}} = 0.4857$$

（先用条件概率定义，再求 $P(B_1 B_2)$ 时，由全概率公式解）

32.[二十六(2)] 如图 1, 2, 3, 4, 5 表示继电器接点, 假设每一继电器接点闭合的概率为 p , 且设各继电器闭合与否相互独立, 求 L 和 R 是通路的概率。



记 A_i 表第 i 个接点接通

记 A 表从 L 到 R 是构成通路的。

$\because A = A_1A_2 + A_1A_3A_5 + A_4A_5 + A_4A_3A_2$ 四种情况不互斥

$\therefore P(A) = P(A_1A_2) + P(A_1A_3A_5) + P(A_4A_5) + P(A_4A_3A_2) - P(A_1A_2A_3A_5)$

$$+ P(A_1A_2A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4) + P(A_1A_3A_4A_5)$$

$$+ P(A_1A_2A_3A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

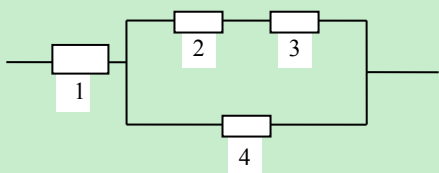
$$+ (A_1A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) - P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

又由于 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 互相独立。

故 $P(A) = p^2 + p^3 + p^2 + p^3 - [p^4 + p^4 + p^4 + p^4 + p^5 + p^4]$

$$+ [p^5 + p^5 + p^5 + p^5] - p^5 = 2p^2 + 3p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

[二十六(1)] 设有 4 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4。它们的可靠性分别为 P_1, P_2, P_3, P_4 , 将它们按图 (1) 的方式联接, 求系统的可靠性。



记 A_i 表示第 i 个元件正常工作, $i=1, 2, 3, 4$,

A 表示系统正常。

$\because A = A_1A_2A_3 + A_1A_4$ 两种情况不互斥

$\therefore P(A) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$ (加法公式)

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= P_1P_2P_3 + P_1P_4 - P_1P_2P_3P_4 \quad (A_1, A_2, A_3, A_4 \text{ 独立})$$

34.[三十一] 袋中装有 m 只正品硬币, n 只次品硬币, (次品硬币的两面均印有国徽)。在袋中任取一只, 将它投掷 r 次, 已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多

少?

解: 设“出现 r 次国徽面” $=B_r$ “任取一只是正品” $=A$

由全概率公式, 有

$$P(B_r) = P(A)P(B_r | A) + P(\bar{A})P(B_r | \bar{A}) = \frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n}{m+n} \times 1^r$$
$$\therefore P(A | B_r) = \frac{P(A)P(B_r | A)}{P(B_r)} = \frac{\frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n}{m+n}} = \frac{m}{m+n \cdot 2^r}$$

(条件概率定义与乘法公式)

35. 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2, 被两人击中而被击落的概率为 0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解: 高 H_i 表示飞机被 i 人击中, $i=1, 2, 3$ 。 B_1, B_2, B_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机

$$\therefore H_1 = B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3, \text{ 三种情况互斥。}$$

$$H_2 = B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 B_3 \quad \text{三种情况互斥}$$

$$H_3 = B_1 B_2 B_3$$

又 B_1, B_2, B_3 独立。

$$\therefore P(H_1) = P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) \\ + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \\ \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

$$P(H_2) = P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) \\ + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 \\ + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.41$$

$$P(H_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times 0.5\times 0.7=0.14$$

又因: $A=H_1A+H_2A+H_3A$ 三种情况互斥

故由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3) \\ &= 0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1=0.458 \end{aligned}$$

36.[三十三] 设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2% (这一事件记为 A_1), 10% (事件 A_2), 90% (事件 A_3) 的概率分别为 $P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.15$, $P(A_3)=0.05$, 现从中随机地独立地取三件, 发现这三件都是好的 (这一事件记为 B), 试分别求 $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$ (这里设物品件数很多, 取出第一件以后不影响取第二件的概率, 所以取第一、第二、第三件是互相独立地)

$\therefore B$ 表取得三件好物品。

$$B=A_1B+A_2B+A_3B \quad \text{三种情况互斥}$$

由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.8\times (0.98)^3+0.15\times (0.9)^3+0.05\times (0.1)^3=0.8624 \end{aligned}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.8\times (0.98)^3}{0.8624} = 0.8731$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.15\times (0.9)^3}{0.8624} = 0.1268$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05\times (0.1)^3}{0.8624} = 0.0001$$

37.[三十四] 将 A, B, C 三个字母之一输入信道, 输出为原字母的概率为 α , 而输出为其它一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$ 。今将字母串 $AAAA, BBBB, CCCC$ 之一输入信道, 输入 $AAAA, BBBB, CCCC$ 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$), 已知输出为 $ABCA$, 问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少? (设信道传输每个字母的工作是相互独立的。)

解: 设 D 表示输出信号为 $ABCA$, B_1, B_2, B_3 分别表示输入信号为 $AAAA, BBBB, CCCC$, 则 B_1, B_2, B_3 为一完备事件组, 且 $P(B_i)=P_i, i=1, 2, 3$ 。

再设 A 发、 A 收分别表示发出、接收字母 A ，其余类推，依题意有

$$P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|B_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|C_{\text{发}})=\alpha,$$

$$P(A_{\text{收}}|B_{\text{发}})=P(A_{\text{收}}|C_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|C_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|B_{\text{发}})=\frac{1-\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } P(ABCA|AAAA) &= P(D|B_1)=P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}}) \\ &=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{同样可得 } P(D|B_2)=P(D|B_3)=\alpha \cdot \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

于是由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(D|B_i) \\ &= p_1\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 + (P_2 + P_3)\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

由 Bayes 公式，得

$$\begin{aligned} P(AAAA|ABCA) &= P(B_1|D) = \frac{P(B_1)P(D|B_1)}{P(D)} \\ &= \frac{2\alpha P_1}{2\alpha P_1 + (1-\alpha)(P_2 + P_3)} \end{aligned}$$

[二十九] 设第一只盒子装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球。独立地分别从两只盒子各取一只球。（1）求至少有一只蓝球的概率，（2）求有一只蓝球一只白球的概率，（3）已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率。

解：记 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示是从第一只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球， B_1 、 B_2 、 B_3 分别表示是从第二只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球。

（1）记 $C=\{\text{至少有一只蓝球}\}$

$C=A_1B_1+A_1B_2+A_1B_3+A_2B_1+A_3B_1$ ，5 种情况互斥

由概率有限可加性，得

$$P(C) = P(A_1 B_1) + P(A_1 B_2) + P(A_1 B_3) + P(A_2 B_1) + P(A_3 B_1)$$

$$\underline{\text{独立性}} P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(B_3) + P(A_2)P(B_1) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

(2) 记 $D = \{\text{有一只蓝球, 一只白球}\}$, 而且知 $D = A_1 B_3 + A_3 B_1$ 两种情况互斥

$$P(D) = P(A_1 B_3 + A_3 B_1) = P(A_1)P(B_3) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{63}$$

$$(3) P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{16}{35} \quad (\text{注意到 } CD = D)$$

[三十] A, B, C 三人在同一办公室工作, 房间有三部电话, 据统计知, 打给 A, B, C 的电话的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ 。他们三人常因工作外出, A, B, C 三人外出的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$, 设三人的行动相互独立, 求

(1) 无人接电话的概率; (2) 被呼叫人在办公室的概率; 若某一时间断打进了 3 个电话, 求 (3) 这 3 个电话打给同一人的概率; (4) 这 3 个电话打给不同人的概率; (5) 这 3 个电话都打给 B , 而 B 却都不在的概率。

解: 记 C_1, C_2, C_3 分别表示打给 A, B, C 的电话

D_1, D_2, D_3 分别表示 A, B, C 外出

注意到 C_1, C_2, C_3 独立, 且 $P(C_1) = P(C_2) = \frac{2}{5}, P(C_3) = \frac{1}{5}$

$$P(D_1) = \frac{1}{2}, P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{4}$$

$$(1) P(\text{无人接电话}) = P(D_1 D_2 D_3) = P(D_1)P(D_2)P(D_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

(2) 记 $G = \text{“被呼叫人在办公室”}$, $G = C_1 \overline{D_1} + C_2 \overline{D_2} + C_3 \overline{D_3}$ 三种情况互斥, 由有限可加性与乘法公式

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(C_1 \overline{D_1}) + P(C_2 \overline{D_2}) + P(C_3 \overline{D_3}) \\
 &= P(C_1)P(\overline{D_1} | C_1) + P(C_2)P(\overline{D_2} | C_2) + P(C_3)P(\overline{D_3} | C_3) \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{20}
 \end{aligned}
 \left(\begin{array}{l} \text{由于某人外出与} \\ \text{否和来电话无关} \\ \text{故 } P(\overline{D_k} | C_k) = P(\overline{D_k}) \end{array} \right)$$

(3) H 为“这 3 个电话打给同一个人”

$$P(H) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{125}$$

(4) R 为“这 3 个电话打给不同的人”

R 由六种互斥情况组成，每种情况为打给 A, B, C 的三个电话，每种情况的概率为

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

$$\text{于是 } P(R) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$$

(5) 由于是知道每次打电话都给 B ，其概率是 1，所以每一次打给 B 电话而 B 不在的概率为 $\frac{1}{4}$ ，且各次情况相互独立

$$\text{于是 } P(3 \text{ 个电话都打给 } B, B \text{ 都不在的概率}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

第二章 随机变量及其分布

1.[一] 一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律

解： X 可以取值 3, 4, 5，分布律为

$$P(X=3)=P(\text{一球为3号, 两球为1,2号})=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=4)=P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球})=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球})=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

也可列为下表

$X:$ 3, 4, 5

$P:$ $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}$

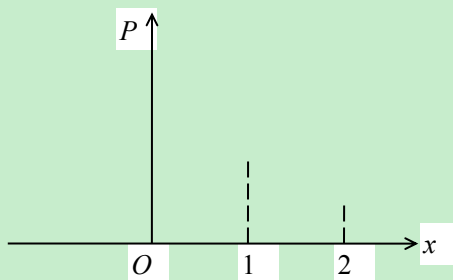
3.[三] 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，(1) 求 X 的分布律，(2) 画出分布律的图形。

解：任取三只，其中新含次品个数 X 可能为 0, 1, 2 个。

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1 \times C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2 \times C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$



再列为下表

$X:$ 0, 1, 2

$P:$ $\frac{22}{35}, \frac{12}{35}, \frac{1}{35}$

4.[四] 进行重复独立实验，设每次成功的概率为 p ，失败的概率为 $q=1-p(0<p<1)$

(1) 将实验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律。
(此时称 X 服从以 p 为参数的几何分布。)

(2) 将实验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律。
(此时称 Y 服从以 r, p 为参数的巴斯卡分布。)

(3) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

解：(1) $P(X=k)=q^{k-1}p \quad k=1,2,\dots$

(2) $Y=r+n=\{\text{最后一次实验前 } r+n-1 \text{ 次有 } n \text{ 次失败, 且最后一次成功}\}$

$$P(Y=r+n)=C_{r+n-1}^n q^n p^{r-1} p = C_{r+n-1}^n q^n p^r, \quad n=0,1,2,\dots, \text{其中 } q=1-p,$$

$$\text{或记 } r+n=k, \text{ 则 } P\{Y=k\}=C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k=r, r+1, \dots$$

$$(3) P(X=k)=(0.55)^{k-1} 0.45 \quad k=1,2,\dots$$

$$P(X \text{ 取偶数}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty} (0.55)^{2k-1} 0.45 = \frac{11}{31}$$

6.[六] 一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

(1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X=2)=C_5^2 p^2 q^{5-2}=C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3=0.0729$$

(2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X \geq 3)=C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2 + C_5^4 \times (0.1)^4 \times (0.9) + C_5^5 \times (0.1)^5 = 0.00856$$

(3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X \leq 3)=C_5^0 (0.9)^5 + C_5^1 \times 0.1 \times (0.9)^4 + C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3 \\ + C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2 = 0.99954$$

(4) 至少有一个设备被使用的概率是多少？

$$P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$$

[五] 一房间有 3 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的。有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去。鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间。假定鸟是没有记忆的，鸟飞向各扇窗子是随机的。

(1) 以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律。

(2) 户主声称，他养的一只鸟，是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数，如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律。

(3) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率；求试飞次数 Y 小于 X 的概率。

解：(1) X 的可能取值为 1, 2, 3, ..., n , ...

$$P\{X=n\}=P\{\text{前 } n-1 \text{ 次飞向了另 2 扇窗子, 第 } n \text{ 次飞了出去}\} \\ =\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad n=1, 2, \dots$$

(2) Y 的可能取值为 1, 2, 3

$$P\{Y=1\}=P\{\text{第 1 次飞了出去}\}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=2\}=P\{\text{第 1 次飞向 另 2 扇窗子中的一扇, 第 2 次飞了出去}\}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$P\{Y=3\}=P\{\text{第1, 2次飞向了另2扇窗子, 第3次飞了出去}\}$

$$= \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P\{X < Y\} &= \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\}P\{X < Y | Y=k\} \\ &= \sum_{k=2}^3 P\{Y=k\}P\{X < Y | Y=k\} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{全概率公式并注意到} \\ P\{X < Y | Y=1\} = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^3 P\{Y=k\}P\{X < k\} && \text{注意到 } X, Y \text{ 独立即} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \right] = 8/27 && P\{X < Y | Y=k\} \\ & && = P\{X < k\} \end{aligned}$$

$$\text{同上, } P\{X=Y\} = \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\}P\{X=Y | Y=k\}$$

$$= \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\}P\{X=k\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{27} = \frac{19}{81}$$

$$\text{故 } P\{Y < X\} = 1 - P\{X < Y\} - P\{X=Y\} = \frac{38}{81}$$

8.[八] 甲、乙二人投篮，投中的概率各为 0.6, 0.7，令各投三次。求

(1) 二人投中次数相等的概率。

记 X 表甲三次投篮中投中的次数

Y 表乙三次投篮中投中的次数

由于甲、乙每次投篮独立，且彼此投篮也独立。

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P(X=0, Y=0) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) \\ &= P(X=0)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=3) \\ &= (0.4)^3 \times (0.3)^3 + [C_3^1 \times 0.6 \times (0.4)^2] \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2] \\ &\quad + [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times [C_3^2 \times (0.7)^2 \times .3] + (0.6)^3 \\ &\quad \times (0.7)^3 = 0.321 \end{aligned}$$

(2) 甲比乙投中次数多的概率。

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + \\ &\quad P(X=3)P(Y=0) + P(X=3)P(Y=1) + P(X=3)P(Y=2) \\ &= P(X=1)P(Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P(X=3)P(Y=0) + P(X=3)P(Y=1) + P(X=3)P(Y=2) \\
&= [C_3^1 \times 0.6 \times (0.4)^2] \times (0.3)^3 + [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times (0.3)^8 + \\
& [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2] + (0.6)^3 \\
& \times (0.3)^3 + (0.6)^3 \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2] + (0.6)^3 \\
& \times [C_3^2 \times (0.7)^2 \times 0.3] = 0.243
\end{aligned}$$

9.[十] 有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 4 杯。如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次。试问他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的。）

解：(1) $P(\text{一次成功}) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70}$

(2) $P(\text{连续试验 10 次，成功 3 次}) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{70}\right)^3 \left(\frac{69}{70}\right)^7 = \frac{3}{10000}$ 。此概率太小，按实际推断原理，就认为他确有区分能力。

[九] 有一大批产品，其验收方案如下，先做第一次检验：从中任取 10 件，经验收无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品，若产品的次品率为 10%，求

- (1) 这批产品经第一次检验就能接受的概率
- (2) 需作第二次检验的概率
- (3) 这批产品按第 2 次检验的标准被接受的概率
- (4) 这批产品在第 1 次检验未能做决定且第二次检验时被通过的概率
- (5) 这批产品被接受的概率

解：X 表示 10 件中次品的个数，Y 表示 5 件中次品的个数，

由于产品总数很大，故 $X \sim B(10, 0.1)$ ， $Y \sim B(5, 0.1)$ （近似服从）

- (1) $P\{X=0\} = 0.9^{10} \approx 0.349$
- (2) $P\{X \leq 2\} = P\{X=2\} + P\{X=1\} = C_{10}^2 0.1^2 0.9^8 + C_{10}^1 0.1 0.9^9 \approx 0.581$
- (3) $P\{Y=0\} = 0.9^5 \approx 0.590$
- (4) $P\{0 < X \leq 2, Y=0\}$ ($\{0 < X \leq 2\}$ 与 $\{Y=2\}$ 独立)
 $= P\{0 < X \leq 2\} P\{Y=0\}$

$$=0.581 \times 0.590 \approx 0.343$$

$$(5) P\{X=0\} + P\{0 < X \leq 2, Y=0\}$$

$$\approx 0.349 + 0.343 = 0.692$$

12.[十三] 电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求

(1) 每分钟恰有 8 次呼唤的概率

$$\text{法一: } P(X=8) = \frac{4^8}{8!} e^{-4} = 0.029770 \quad (\text{直接计算})$$

$$\text{法二: } P(X=8) = P(X \geq 8) - P(X \geq 9) \quad (\text{查 } \lambda = 4 \text{ 泊松分布表}).$$

$$= 0.051134 - 0.021363 = 0.029771$$

(2) 每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。

$$P(X > 10) = P(X \geq 11) = 0.002840 \quad (\text{查表计算})$$

[十二 (2)] 每分钟呼唤次数大于 3 的概率。

$$P\{X > 3\} = P\{X \geq 4\} = 0.566530$$

[十六] 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一顾客到达的等待时间(以分计), X 的分布函数是

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求下述概率:

(1) $P\{\text{至多 3 分钟}\}$; (2) $P\{\text{至少 4 分钟}\}$; (3) $P\{3 \text{ 分钟至 } 4 \text{ 分钟之间}\}$;

(4) $P\{\text{至多 3 分钟或至少 4 分钟}\}$; (5) $P\{\text{恰好 2.5 分钟}\}$

$$\text{解: (1) } P\{\text{至多 3 分钟}\} = P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 1 - e^{-1.2}$$

$$(2) P\{\text{至少 4 分钟}\} = P(X \geq 4) = 1 - F_X(4) = e^{-1.6}$$

$$(3) P\{3 \text{ 分钟至 } 4 \text{ 分钟之间}\} = P\{3 < X \leq 4\} = F_X(4) - F_X(3) = e^{-1.2} - e^{-1.6}$$

$$(4) P\{\text{至多 3 分钟或至少 4 分钟}\} = P\{\text{至多 3 分钟}\} + P\{\text{至少 4 分钟}\} \\ = 1 - e^{-1.2} + e^{-1.6}$$

$$(5) P\{\text{恰好 2.5 分钟}\} = P(X=2.5) = 0$$

$$18.[十七] \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数为 } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \ln x, & 1 \leq x < e, \\ 1, & x \geq e. \end{cases}$$

求 (1) $P(X < 2)$, $P\{0 < X \leq 3\}$, $P(2 < X < \frac{5}{2})$; (2) 求概率密度 $f_X(x)$.

$$\text{解: (1) } P(X \leq 2) = F_X(2) = \ln 2, \quad P(0 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(0) = 1,$$

$$P(2 < X < \frac{5}{2}) = F_X(\frac{5}{2}) - F_X(2) = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4}$$

$$(2) \quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x < e, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

20.[十八(2)] 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$, 并作出 (2) 中的 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形。

解: 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_{-1}^x \\ &= \frac{1}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{当 } 1 < x \text{ 时: } F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_1^x 0 \, dx = 1$$

故分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

$$\text{解: (2) } F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^x t \, dt = \frac{x^2}{2}$$

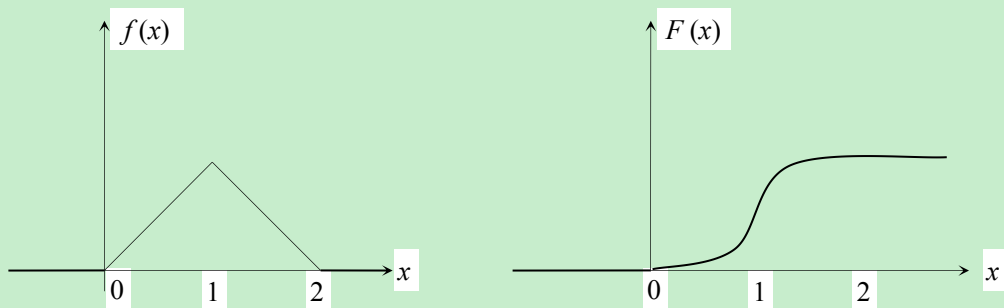
$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^1 t \, dt + \int_1^x (2-t) \, dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\text{当 } 2 < x \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^1 t \, dt + \int_1^2 (2-t) \, dt + \int_2^x 0 \, dt = 1$$

故分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

(2) 中的 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形如下



22.[二十] 某种型号的电子的寿命 X (以小时计) 具有以下的概率密度:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & x > 1000 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

现有一大批此种管子 (设各电子管损坏与否相互独立)。任取 5 只, 问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

解: 一个电子管寿命大于 1500 小时的概率为

$$\begin{aligned} P(X > 1500) &= 1 - P(X \leq 1500) = 1 - \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2} dx = 1 - \left\{ 1000 \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{1000}^{1500} \right\} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

令 Y 表示 “任取 5 只此种电子管中寿命大于 1500 小时的个数”。则 $Y \sim B(5, \frac{2}{3})$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - \{P(Y = 0) + P(Y = 1)\} = 1 - \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right\} \\ &= 1 - \frac{1 + 5 \times 2}{3^5} = 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243} \end{aligned}$$

23.[二十一] 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。他一个月要到银行 5 次。以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律。并求 $P(Y \geq 1)$ 。

解：该顾客“一次等待服务未成而离去”的概率为

$$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{5} \int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{x}{5}} dx = -e^{-\frac{x}{5}} \Big|_{10}^{+\infty} = e^{-2}$$

因此 $Y \sim B(5, e^{-2})$. 即 $P(Y = k) = \binom{5}{k} e^{-2k} (1 - e^{-2})^{5-k}, (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 1 - (1 - \frac{1}{7.389})^5 = 1 - (1 - 0.1353363)^5 \\ &= 1 - 0.8677^5 = 1 - 0.4833 = 0.5167. \end{aligned}$$

24.[二十二] 设 K 在 $(0, 5)$ 上服从均匀分布，求方程 $4x^2 + 4xK + K + 2 = 0$ 有实根的概率

$$\therefore K \text{ 的分布密度为: } f(K) = \begin{cases} \frac{1}{5-0} & 0 < K < 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

要方程有根，就是要 K 满足 $(4K)^2 - 4 \times 4 \times (K+2) \geq 0$ 。

解不等式，得 $K \geq 2$ 时，方程有实根。

$$\therefore P(K \geq 2) = \int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^5 \frac{1}{5} dx + \int_5^{+\infty} 0 dx = \frac{3}{5}$$

25.[二十三] 设 $X \sim N(3, 2^2)$

(1) 求 $P(2 < X \leq 5)$, $P(-4 < X \leq 10)$, $P\{|X| > 2\}$, $P(X > 3)$

$$\therefore \text{若 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } P(\alpha < X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(2 < X \leq 5) &= \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) \\ &= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-4 < X \leq 10) &= \Phi\left(\frac{10-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-4-3}{2}\right) = \Phi(3.5) - \Phi(-3.5) \\ &= 0.9998 - 0.0002 = 0.9996 \end{aligned}$$

$$P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \leq 2) = 1 - P(-2 < X < 2)$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right) \right]$$

$$=1-\Phi(-0.5)+\Phi(-2.5)$$

$$=1-0.3085+0.0062=0.6977$$

$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-\Phi\left(\frac{3-3}{2}\right)=1-0.5=0.5$$

(2) 决定 C 使得 $P(X>C)=P(X\leq C)$

$$\therefore P(X>C)=1-P(X\leq C)=P(X\leq C)$$

$$\text{得 } P(X\leq C)=\frac{1}{2}=0.5$$

$$\text{又 } P(X\leq C)=\Phi\left(\frac{C-3}{2}\right)=0.5, \text{ 查表可得 } \frac{C-3}{2}=0 \quad \therefore C=3$$

26.[二十四] 某地区 18 岁的女青年的血压(收缩区,以 mm-Hg 计)服从 $N(110,12^2)$ 在该地区任选一 18 岁女青年, 测量她的血压 X 。求

(1) $P(X\leq 105)$, $P(100<X\leq 120)$. (2) 确定最小的 X 使 $P(X>x)\leq 0.05$.

$$\text{解: (1) } P(X\leq 105)=\Phi\left(\frac{105-110}{12}\right)=\Phi(-0.4167)=1-\Phi(0.4167)=1-0.6616=0.3384$$

$$P(100<X\leq 120)=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)=\Phi\left(\frac{5}{6}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{5}{6}\right)-1=2\Phi(0.8333)-1=2\times 0.7976-1=0.5952$$

$$(2) P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)\leq 0.05\Rightarrow \Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)\geq 0.95.$$

$$\text{查表得 } \frac{x-110}{12}\geq 1.645.\Rightarrow x\geq 110+19.74=129.74. \text{ 故最小的 } X=129.74.$$

27.[二十五] 由某机器生产的螺栓长度 (cm) 服从参数为 $\mu=10.05$, $\sigma=0.06$ 的正态分布。规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品, 求一螺栓为不合格的概率是多少?

设螺栓长度为 X

$$P\{X \text{ 不属于 } (10.05-0.12, 10.05+0.12)\}$$

$$=1-P(10.05-0.12<X<10.05+0.12)$$

$$=1-\left\{\Phi\left[\frac{(10.05+0.12)-10.05}{0.06}\right]-\Phi\left[\frac{(10.05-0.12)-10.05}{0.06}\right]\right\}$$

$$=1-\{\Phi(2)-\Phi(-2)\}$$

$$=1-\{0.9772-0.0228\}$$

$$=0.0456$$

28.[二十六] 一工厂生产的电子管的寿命 X (以小时计) 服从参数为 $\mu=160$, σ (未知) 的正态分布, 若要求 $P(120<X\leq 200)=0.80$, 允许 σ 最大为多少?

$$\therefore P(120 < X \leq 200) = \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) = 0.80$$

又对标准正态分布有 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\therefore \text{上式变为 } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right] \geq 0.80$$

$$\text{解出 } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \text{ 便得: } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9$$

$$\text{再查表, 得 } \frac{40}{\sigma} \geq 1.281 \quad \sigma \leq \frac{40}{1.281} = 31.25$$

30.[二十七] 设随机变量 X 的分布律为:

$$\begin{array}{ccccc} X: & -2, & -1, & 0, & 1, & 3 \\ P: & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{15}, & \frac{11}{30} \end{array}$$

求 $Y=X^2$ 的分布律

$$\begin{array}{ccccc} Y=X^2: & (-2)^2 & (-1)^2 & (0)^2 & (1)^2 & (3)^2 \\ P: & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{array}$$

再把 X^2 的取值相同的合并, 并按从小到大排列, 就得函数 Y 的分布律为:

$$\begin{array}{ccccc} Y: & 0 & 1 & 4 & 9 \\ P: & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} + \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{array}$$

31.[二十八] 设随机变量 X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布

(1) 求 $Y=e^X$ 的分布密度

$$\therefore X \text{ 的分布密度为: } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ 为其他} \end{cases}$$

$$Y=g(X)=e^X \text{ 是单调增函数}$$

又 $X=h(Y)=\ln Y$, 反函数存在

$$\text{且 } \alpha = \min[g(0), g(1)] = \min(1, e) = 1$$

$$\beta = \max[g(0), g(1)] = \max(1, e) = e$$

$$\therefore Y \text{ 的分布密度为: } \psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度。

$$\therefore Y=g(X)=-2\ln X \text{ 是单调减函数}$$

又 $X=h(Y)=e^{-\frac{Y}{2}}$ 反函数存在。

$$\text{且} \quad \alpha = \min[g(0), g(1)] = \min(+\infty, 0) = 0$$

$$\beta = \max[g(0), g(1)] = \max(+\infty, 0) = +\infty$$

$$\therefore Y \text{ 的分布密度为: } \psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \left| -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \right| = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & 0 < y < +\infty \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

32.[二十九] 设 $X \sim N(0, 1)$

(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度

$$\because X \text{ 的概率密度是 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

$Y = g(X) = e^X$ 是单调增函数

又 $X = h(Y) = \ln Y$ 反函数存在

$$\text{且} \quad \alpha = \min[g(-\infty), g(+\infty)] = \min(0, +\infty) = 0$$

$$\beta = \max[g(-\infty), g(+\infty)] = \max(0, +\infty) = +\infty$$

$\therefore Y$ 的分布密度为:

$$\psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \frac{1}{y} & 0 < y < +\infty \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

(2) 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里, $Y=2X^2+1$ 在 $(+\infty, -\infty)$ 不是单调函数, 没有一般的结论可用。

设 Y 的分布函数是 $F_Y(y)$,

$$\text{则} \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X^2 + 1 \leq y)$$

$$= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y < 1$ 时: $F_Y(y) = 0$

$$\text{当 } y \geq 1 \text{ 时: } F_Y(y) = P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

故 Y 的分布密度 $\psi(y)$ 是:

$$\text{当 } y \leq 1 \text{ 时: } \psi(y) = [F_Y(y)]' = (0)' = 0$$

$$\begin{aligned}\text{当 } y > 1 \text{ 时, } \psi(y) &= [F_Y(y)]' = \left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}\end{aligned}$$

(3) 求 $Y=|X|$ 的概率密度。

$\therefore Y$ 的分布函数为 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\therefore Y$ 的概率密度为:

当 $y \leq 0$ 时: $\psi(y) = [F_Y(y)]' = (0)' = 0$

$$\text{当 } y > 0 \text{ 时: } \psi(y) = [F_Y(y)]' = \left(\int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

33.[三十] (1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 求 $Y = X^3$ 的概率密度。

$\therefore Y = g(X) = X^3$ 是 X 单调增函数,

又 $X = h(Y) = Y^{\frac{1}{3}}$, 反函数存在,

且 $\alpha = \min[g(-\infty), g(+\infty)] = \min(0, +\infty) = -\infty$

$\beta = \max[g(-\infty), g(+\infty)] = \max(0, +\infty) = +\infty$

$\therefore Y$ 的分布密度为:

$$\psi(y) = f[h(h)] \cdot |h'(y)| = f(y^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}, -\infty < y < +\infty, \text{ 但 } y \neq 0$$

$$\psi(0) = 0$$

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

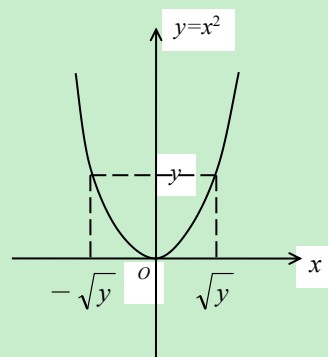
法一: $\therefore X$ 的分布密度为: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$Y = x^2$ 是非单调函数

当 $x < 0$ 时 $y = x^2 \ni$ 反函数是 $x = -\sqrt{y}$

当 $x > 0$ 时 $y = x^2 \ni x = \sqrt{y}$

$$\therefore Y \sim f_Y(y) = f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})' + f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$$



$$= \begin{cases} 0 + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{法二: } Y \sim F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$\begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 0 = 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0. \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

34.[三十一] 设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x \text{ 为其他} \end{cases}$$

求 $Y = \sin X$ 的概率密度。

$$\begin{aligned} \therefore F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\sin X \leq y) \end{aligned}$$

当 $y < 0$ 时: $F_Y(y) = 0$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时: $F_Y(y) = P(\sin X \leq y) = P(0 \leq X \leq \arcsin y \text{ 或 } \pi - \arcsin y \leq X \leq \pi)$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx$$

当 $1 < y$ 时: $F_Y(y) = 1$

$\therefore Y$ 的概率密度 $\psi(y)$ 为:

$$y \leq 0 \text{ 时, } \psi(y) = [F_Y(y)]' = (0)' = 0$$

$$\begin{aligned} 0 < y < 1 \text{ 时, } \psi(y) &= [F_Y(y)]' = \left(\int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx \right)' \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

$$1 \leq y \text{ 时, } \psi(y) = [F_Y(y)]' = (1)' = 0$$

36.[三十三] 某物体的温度 $T(^{\circ}F)$ 是一个随机变量, 且有 $T \sim N(98.6, 2)$, 试求 $\theta(^{\circ}C)$

的概率密度。[已知 $\theta = \frac{5}{9}(T - 32)$]

$$\text{法一: } \because T \text{ 的概率密度为 } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(t-98.6)^2}{2 \times 2}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

又 $\theta = g(T) = \frac{5}{9}(T - 32)$ 是单调增函数。

$$T = h(\theta) = \frac{9}{5}\theta + 32 \quad \text{反函数存在。}$$

$$\text{且 } \alpha = \min[g(-\infty), g(+\infty)] = \min(-\infty, +\infty) = -\infty$$

$$\beta = \max[g(-\infty), g(+\infty)] = \max(-\infty, +\infty) = +\infty$$

$\therefore \theta$ 的概率密度 $\psi(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= f[h(\theta)] \cdot |h'(\theta)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(\frac{9}{5}\theta + 32 - 98.6)^2}{4}} \cdot \frac{9}{5} \\ &= \frac{9}{10\sqrt{\pi}} e^{-\frac{81(\theta - 37)^2}{100}}, \quad -\infty < \theta < +\infty \end{aligned}$$

法二: 根据定理: 若 $X \sim N(\alpha_1, \sigma_1)$, 则 $Y = aX + b \sim N(a\alpha_1 + b, a^2\sigma_1^2)$

由于 $T \sim N(98.6, 2)$

$$\text{故 } \theta = \frac{5}{9}T - \frac{160}{9} \sim N\left[\frac{5}{9} \times 98.6 - \frac{160}{9}, \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times 2\right] = N\left[\frac{333}{9}, \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times 2\right]$$

故 θ 的概率密度为:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{5}{9} \sqrt{2}} e^{-\frac{\left(\theta - \frac{333}{9}\right)^2}{2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times 2}} = \frac{9}{10\sqrt{\pi}} e^{-\frac{81(\theta - 37)^2}{100}}, \quad -\infty < \theta < +\infty$$

第三章 多维随机变量及其分布

1.[一] 在一箱子里装有 12 只开关, 其中 2 只是次品, 在其中随机地取两次, 每次取一只。考虑两种试验: (1) 放回抽样, (2) 不放回抽样。我们定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品,} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品。} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品,} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品。} \end{cases}$$

试分别就 (1) (2) 两种情况, 写出 X 和 Y 的联合分布律。

解: (1) 放回抽样情况

由于每次取物是独立的。由独立性定义知。

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$$

$$P(X=0, Y=0) = \frac{10}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{25}{36}$$

$$P(X=0, Y=1) = \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{36}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2) 不放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} = \frac{45}{66}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} = \frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

3.[二] 盒子里装有 3 只黑球, 2 只红球, 2 只白球, 在其中任取 4 只球, 以 X 表示取到黑球的只数, 以 Y 表示取到白球的只数, 求 X, Y 的联合分布律。

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

解: (X, Y) 的可能取值为 (i, j) , $i=0, 1, 2, 3$, $j=0, 1, 2$, $i+j \leq 4$, 联合分布律为

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_2^2 C_2^2}{C_7^4} = \frac{1}{35}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_3^1 C_2^1 C_2^2}{C_7^4} = \frac{6}{35}$$

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{C_3^1 C_2^2 C_2^1}{C_7^4} = \frac{6}{35}$$

$$P\{X=2, Y=0\} = \frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4} = \frac{3}{35}$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \frac{C_3^2 C_2^1 C_2^1}{C_7^4} = \frac{12}{35}$$

$$P\{X=2, Y=2\} = \frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4} = \frac{3}{35}$$

$$P\{X=3, Y=0\} = \frac{C_3^3 C_2^1}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$

$$P\{X=3, Y=1\} = \frac{C_3^3 C_2^1}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$

$$P\{X=3, Y=2\} = 0$$

5.[三] 设随机变量 (X, Y) 概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 确定常数 k 。 (2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$

(3) 求 $P(X < 1.5)$ (4) 求 $P(X+Y \leq 4)$

分析: 利用 $P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G \cap D_o} f(x, y) dx dy$ 再化为累次积分, 其中

$$D_o = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 < x < 2, \\ 2 < y < 4 \end{array} \right. \right\}$$

解: (1) $\because 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_2^4 k(6-x-y) dy dx, \therefore k = \frac{1}{8}$

(2) $P(X < 1, Y < 3) = \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{1}{8} (6-x-y) dy = \frac{3}{8}$

(3) $P(X \leq 1.5) = P(X \leq 1.5, Y < \infty) = \int_0^{1.5} dx \int_2^4 \frac{1}{8} (6-x-y) dy = \frac{27}{32}$

(4) $P(X+Y \leq 4) = \int_0^2 dx \int_0^{4-x} \frac{1}{8} (6-x-y) dy = \frac{2}{3}$

6. (1) 求第 1 题中的随机变量 (X, Y) 的边缘分布律。

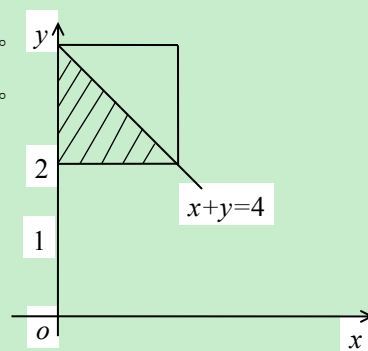
(2) 求第 2 题中的随机变量 (X, Y) 的边缘分布律。

解: (1) ① 放回抽样 (第 1 题)

Y \ X	0	1
	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

边缘分布律为

X	0	1	Y	0	1
P _{i.}	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	P _{.j}	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$



② 不放回抽样 (第 1 题)

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

边缘分布为

X	0	1	Y	0	1
P _{i.}	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	P _{.j}	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2) (X, Y) 的联合分布律如下

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

解: X 的边缘分布律

X	0	1	2	3
P _{i.}	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y 的边缘分布律

Y	1	3
P _{.j}	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求边缘概率密度.}$$

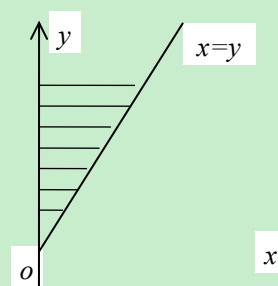
$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 4.8y(2-x) dy = 2.4x^2(2-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 4.8y(2-x) dx = 2.4y(3-4y+y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

8.[六] 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, 0 < x < y \\ 0, \text{其它.} \end{cases} \quad \text{求边缘概率密度.}$$

$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

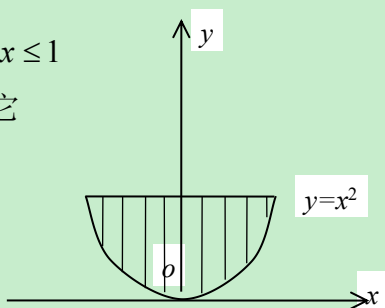
10. [七] 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 试确定常数 c 。(2) 求边缘概率密度。

解: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} cx^2y dx = c \int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{4}{21} c \Rightarrow c = \frac{21}{4}$

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



15. 第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立。

解: 放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\} = \frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{1}{36}$$

在放回抽样的情况下, X 和 Y 是独立的

不放回抽样的情况:

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} = \frac{45}{66}$$

$$P\{X=0\} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{Y=0, X=1\} = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} + \frac{2}{11} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=0\} \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

∴ X 和 Y 不独立

16.[十四] 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布。 Y

的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

(1) 求 X 和 Y 的联合密度。(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求有实根的概率。

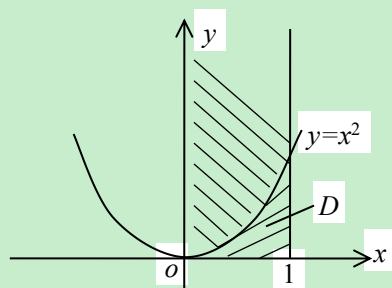
解: (1) X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

Y 的概率密度为

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$ 且知 X, Y 相互独立,

于是 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



(2) 由于 a 有实跟根, 从而判别式 $\Delta = 4X^2 - 4Y \geq 0$

即: $Y \leq X^2$ 记 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$

$$\begin{aligned} P(Y \leq X^2) &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy = -\int_0^1 dx \int_0^{x^2} de^{-\frac{y}{2}} = 1 - \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 1 - \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \sqrt{2\pi} (\Phi(1) - \Phi(2)) = 1 - \sqrt{2\pi} (0.8413 - 0.5) \\ &= 1 - 2.5066312 \times 0.3413 = 1 - 0.8555 = 0.1445 \end{aligned}$$

23. 设某种商品一周的需要量是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

并设各周的需要量是相互独立的, 试求 (1) 两周 (2) 三周的需要量的概率密度。

解: (1) 设第一周需要量为 X , 它是随机变量

设第二周需要量为 Y , 它是随机变量

且为同分布, 其分布密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$Z = X + Y$ 表示两周需要的商品量, 由 X 和 Y 的独立性可知:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x} ye^{-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$\therefore z \geq 0$

\therefore 当 $z < 0$ 时, $f_z(z) = 0$

当 $z > 0$ 时, 由和的概率公式知

$$\begin{aligned}
 f_z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy \\
 &= \int_0^z (z-y)e^{-(z-y)} \cdot ye^{-y} dy = \frac{z^3}{6} e^{-z}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f_z(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{6} e^{-z}, & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 设 } z \text{ 表示前两周需要量, 其概率密度为 } f_z(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{6} e^{-z}, & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

设 ξ 表示第三周需要量, 其概率密度为:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

z 与 ξ 相互独立

$\eta = z + \xi$ 表示前三周需要量

则: $\because \eta \geq 0, \therefore$ 当 $u < 0, f_{\eta}(u) = 0$

当 $u > 0$ 时

$$\begin{aligned}
 f_{\eta}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y)f_{\xi}(y)dy \\
 &= \int_0^u \frac{1}{6} (u-y)^3 e^{-(u-y)} \cdot ye^{-y} dy \\
 &= \frac{u^5}{120} e^{-u}
 \end{aligned}$$

所以 η 的概率密度为

$$f_{\eta}(u) = \begin{cases} \frac{u^5}{120} e^{-u} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

30. 设某种型号的电子管的寿命 (以小时计) 近似地服从 $N(160, 20^2)$ 分布。随机地选取 4 只求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率。

解: 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为 4 只电子管的寿命, 它们相互独立, 同分布, 其概率密度为:

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 20} e^{-\frac{(t-160)^2}{2 \times 20^2}}$$

$$f\{X < 180\} = F_X(180) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{20} \int_{-\infty}^{180} \frac{(t-160)^2}{2 \times 20^2} dt$$

$$\underline{\underline{\text{令 } \frac{t-160}{20} = u}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{查表}}} 0.8413$$

设 $N = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

$$P\{N > 180\} = P\{X_1 > 180, X_2 > 180, X_3 > 180, X_4 > 180\}$$

$$= P\{X > 180\}^4 = \{1 - p[X < 180]\}^4 = (0.1587)^4 = 0.00063$$

27.[二十八] 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2|Y=2\}$, $P\{Y=3|X=0\}$

(2) 求 $V = \max(X, Y)$ 的分布律

(3) 求 $U = \min(X, Y)$ 的分布律

解: (1) 由条件概率公式

$$\begin{aligned} P\{X=2|Y=2\} &= \frac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}} \\ &= \frac{0.05}{0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.08} \\ &= \frac{0.05}{0.25} = 0.2 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } P\{Y=3|X=0\} = \frac{1}{3}$$

(2) 变量 $V = \max\{X, Y\}$

显然 V 是一随机变量, 其取值为 $V: 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$

$$P\{V=0\}=P\{X=0, Y=0\}=0$$

$$P\{V=1\}=P\{X=1, Y=0\}+P\{X=1, Y=1\}+P\{X=0, Y=1\} \\ =0.01+0.02+0.01=0.04$$

$$P\{V=2\}=P\{X=2, Y=0\}+P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=2\} \\ +P\{Y=2, X=0\}+P\{Y=2, X=1\} \\ =0.03+0.04+0.05+0.01+0.03=0.16$$

$$P\{V=3\}=P\{X=3, Y=0\}+P\{X=3, Y=1\}+P\{X=3, Y=2\}+P\{X=3, Y=3\} \\ +P\{Y=3, X=0\}+P\{Y=3, X=1\}+P\{Y=3, X=2\} \\ =0.05+0.05+0.05+0.06+0.01+0.02+0.04=0.28$$

$$P\{V=4\}=P\{X=4, Y=0\}+P\{X=4, Y=1\}+P\{X=4, Y=2\}+P\{X=4, Y=3\} \\ =0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$$

$$P\{V=5\}=P\{X=5, Y=0\}+ \cdots + P\{X=5, Y=3\} \\ =0.09+0.08+0.06+0.05=0.28$$

(3) 显然 U 的取值为 0, 1, 2, 3

$$P\{U=0\}=P\{X=0, Y=0\}+\cdots + P\{X=0, Y=3\}+P\{Y=0, X=1\} \\ + \cdots + P\{Y=0, X=5\}=0.28$$

同理 $P\{U=1\}=0.30 \quad P\{U=2\}=0.25 \quad P\{U=3\}=0.17$

或缩写成表格形式

(2)	V	0	1	2	3	4	5
	P_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3)	U	0	1	2	3
	P_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W=V+U$ 显然 W 的取值为 0, 1, \cdots 8

$$P\{W=0\}=P\{V=0, U=0\}=0$$

$$P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1, U=0\}$$

$\because V=\max\{X, Y\}=0$ 又 $U=\min\{X, Y\}=1$ 不可能

上式中的 $P\{V=0, U=1\}=0$,

又 $P\{V=1, U=0\}=P\{X=1, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=0.2$

故 $P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1, U=0\}=0.2$

$$\begin{aligned}
 P\{W=2\} &= P\{V+U=2\} = P\{V=2, U=0\} + P\{V=1, U=1\} \\
 &= P\{X=2, Y=0\} + P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} \\
 &= 0.03 + 0.01 + 0.02 = 0.06
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{W=3\} &= P\{V+U=3\} = P\{V=3, U=0\} + P\{V=2, U=1\} \\
 &= P\{X=3, Y=0\} + P\{X=0, Y=3\} + P\{X=2, Y=1\} \\
 &\quad + P\{X=1, Y=2\} = 0.05 + 0.01 + 0.04 + 0.03 = 0.13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{W=4\} &= P\{V=4, U=0\} + P\{V=3, U=1\} + P\{V=2, U=2\} \\
 &= P\{X=4, Y=0\} + P\{X=3, Y=1\} + P\{X=1, Y=3\} \\
 &\quad + P\{X=2, Y=2\} = 0.19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{W=5\} &= P\{V+U=5\} = P\{V=5, U=0\} + P\{V=5, U=1\} \\
 &\quad + P\{V=3, U=2\} = P\{X=5, Y=0\} + P\{X=5, Y=1\} \\
 &\quad + P\{X=3, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\} = 0.24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{W=6\} &= P\{V+U=6\} = P\{V=5, U=1\} + P\{V=4, U=2\} \\
 &\quad + P\{V=3, U=3\} = P\{X=5, Y=1\} + P\{X=4, Y=2\} \\
 &\quad + P\{X=3, Y=3\} = 0.19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{W=7\} &= P\{V+U=7\} = P\{V=5, U=2\} + P\{V=4, U=3\} \\
 &= P\{V=5, U=2\} + P\{X=4, Y=3\} = 0.6 + 0.6 = 0.12
 \end{aligned}$$

$$P\{W=8\} = P\{V+U=8\} = P\{V=5, U=3\} + P\{X=5, Y=3\} = 0.05$$

或列表为

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

[二十一] 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 b ; (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

(3) 求函数 $U = \max(X, Y)$ 的分布函数。

$$\text{解: (1) } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)} dy dx = b[1 - e^{-1}]$$

$$\therefore b = \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \\ \int_0^{+\infty} b e^{-(x+y)} dy = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx = e^{-y} & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(3) F_u(\omega) = P\{U \leq u\} = P\{\max(X, Y) \leq u\} = P\{X \leq u, Y \leq u\}$$

$$= F(u, u) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^u f(x, y) dx dy$$

$$u < 0, F_U(u) = 0$$

$$0 \leq u < 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^u b e^{-(x+y)} dx dy = \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u \geq 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx dy = 1 - e^{-u}$$

第四章

2.[二] 某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次。每次随机地抽取 10 件产品进行检验，如果发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 E(X)。(设诸产品是否是次品是相互独立的。)

解：设表示一次抽检的 10 件产品的次品数为 ξ

$$P = P(\text{调整设备}) = P(\xi > 1) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - [P(\xi = 0) + P(\xi = 1)] \quad \underline{\underline{\text{查二项分布表}}}$$

$$1 - 0.7361 = 0.2639.$$

因此 X 表示一天调整设备的次数时 $X \sim B(4, 0.2639)$. $P(X=0) = \binom{4}{0} \times 0.2639^0 \times 0.7361^4 = 0.2936$.

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \times 0.2639^1 \times 0.7361^3 = 0.4210, P(X=2) = \binom{4}{2} \times 0.2639^2 \times 0.7361^2 = 0.2264.$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\times 0.2639^3\times 0.7361=0.0541, P(X=4)=\binom{4}{4}\times 0.2639\times 0.7361^0=0.0049. \text{从而}$$

$$E(X)=np=4\times 0.2639=1.0556$$

3.[三] 有 3 只球, 4 只盒子, 盒子的编号为 1, 2, 3, 4, 将球逐个独立地, 随机地放入 4 只盒子中去。设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码 (例如 $X=3$ 表示第 1 号, 第 2 号盒子是空的, 第 3 号盒子至少有一只球), 求 $E(X)$ 。

\therefore 事件 $\{X=1\}=\{\text{一只球装入一号盒, 两只球装入非一号盒}\}+\{\text{两只球装入一号盒, 一只球装入非一号盒}\}+\{\text{三只球均装入一号盒}\}$ (右边三个事件两两互斥)

$$\therefore P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

\therefore 事件 “ $X=2$ ” = “一只球装入二号盒, 两只球装入三号或四号盒” + “两只球装二号盒, 一只球装入三或四号盒” + “三只球装入二号盒”

$$\therefore P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理:
$$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故
$$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$$

5.[五] 设在某一规定的时间段里, 其电气设备用于最大负荷的时间 X (以分计) 是一个连续型随机变量。其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{(1500)^2}x, & 0\leq x\leq 1500 \\ \frac{-1}{(1500)^2}(x-3000), & 1500< x\leq 1500 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X)$

解:
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{1500} x \cdot \frac{x}{(1500)^2} dx + \int_{1500}^{3000} x \cdot \frac{(3000-x)}{(1500)^2} dx \\
&= \frac{1}{(1500)^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1500} + \frac{1}{(1500)^2} \left[1500x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{1500}^{3000} \\
&= 1500(\text{分})
\end{aligned}$$

6.[六] 设随机变量 X 的分布为

X	-2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$, $E(3X^2+5)$

解: $E(X) = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8$$

$$E(3X^2+5) = 3E(X^2) + E(5) = 8.4 + 5 = 13.4$$

7.[七] 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 (1) $Y=2X$ (2) $Y=e^{-2x}$ 的数学期望。

解: (1) $E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx$

$$= \left[-2xe^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 2$$

$$(2) E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}$$

8.[八] 设 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	X		
	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$, $E(Y)$ 。

(2) 设 $Z=Y/X$, 求 $E(Z)$ 。

(3) 设 $Z=(X-Y)^2$, 求 $E(Z)$ 。

解: (1) 由 X, Y 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
-1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

$$E(X)=1\times 0.4+2\times 0.2+3\times 0.4 \\ =0.4+0.4+1.2=2.$$

$$E(Y)=(-1)\times 0.3+0\times 0.4 \\ +1\times 0.3=0.$$

$Z=Y/X$	-1	-1/2	-1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

(2)

$$E(Z)=(-1)\times 0.2+(-0.5)\times 0.1+(-1/3)\times 0+0\times 0.4+1/3\times 0.1+0.5\times 0.1+1\times 0.1 \\ =(-1/4)+1/30+1/20+1/10=(-15/60)+11/60=-1/15.$$

(3)

$Z(X-Y)^2$	0 (1-1) 2	1 (1-0) ² 或(2-1) ²	4 (2-0) ² 或(1-(-1)) ² 或(3-1) ²	9 (3-0) ² 或(2-(-1)) ²	16 (3-(-1)) 2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$$E(Z)=0\times 0.1+1\times 0.2+4\times 0.3+9\times 0.4+16\times 0=0.2+1.2+3.6=5$$

10.[十] 一工厂生产的某种设备的寿命 X (以年计) 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

工厂规定出售的设备若在一年内损坏, 可予以调换。若工厂出售一

台设备可赢利 100 元, 调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望。

解: 一台设备在一年内损坏的概率为 $P(X<1)=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}x} dx = -e^{-\frac{x}{4}} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{4}}$

故 $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则
$$Y=f(X)=\begin{cases} (-300+100)=-200, & (X<1) \\ 100, & (X\geq 1). \end{cases}$$

故
$$E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\geq 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}} \\ =300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

11.[十一] 某车间生产的圆盘直径在区间 (a, b) 服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解: 设 X 为圆盘的直径, 则其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积, 则 $Y = \frac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\pi x^2 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 dx = \frac{\pi}{4(b-a)} \cdot \frac{(b^3 - a^3)}{3} = \frac{\pi}{12} (a^2 + ab + b^2).$$

12.[十三] 设随机变量 X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 (1) $E(X_1 + X_2)$, $E(2X_1 - 3X_2^2)$; (2) 又设 X_1, X_2 相互独立, 求 $E(X_1 X_2)$

解: (1) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx + \int_0^{\infty} x \cdot 4e^{-4x} dx$

$$= \left[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^{\infty} + \left[-xe^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-4x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2) E(2X_1 - 3X_2^2) = 2E(X_1) - 3E(X_2^2) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 \int_0^{\infty} x^2 \cdot 4e^{-4x} dx$$

$$= 1 - 3 \left[-x^2 e^{-4x} - \frac{x}{2} e^{-4x} - \frac{1}{8} e^{-4x} \right]_0^{\infty} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$(3) E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

13.[十四] 将 n 只球 (1~ n 号) 随机地放进 n 只盒子 (1~ n 号) 中去, 一只盒子装一只球。将一只球装入与球同号的盒子中, 称为一个配对, 记 X 为配对的个数, 求 $E(X)$

解: 引进随机变量 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 号盒装第 } i \text{ 号球} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 号盒装非 } i \text{ 号球} \end{cases}$

$$i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{则球盒对号的总配对数为 } X = \sum_{i=1}^n X_i$$

X_i 的分布列为

$X_i:$	1	0
--------	---	---

$P:$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$
------	---------------	-----------------

$$E(X_i) = \frac{1}{n} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\therefore E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \times \frac{1}{n} = 1 \quad i=1, 2, \dots, n$$

14.[十五] 共有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设抽取钥匙是相互独立的，等可能性的。若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。

(1) 写出 X 的分布律，(2) 不写出 X 的分布律。

解：(1)

X	1	2	3	$\dots\dots n$
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$	$\dots\dots \frac{1}{n}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} \dots\dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1+2+\dots\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

(2) 设一把一把钥匙的试开，直到把钥匙用完。

$$\text{设 } X_i = \begin{cases} i & \text{第 } i \text{ 次试开能开门} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 次试开不能开门} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{则试开到能开门所须试开次数为 } X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c} X_i & i & 0 \\ \hline P & \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \dots\dots \frac{1}{n-i} = \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{array} \quad \begin{array}{l} E(X_i) = i \cdot \frac{1}{n} \\ i=1, 2, \dots, n \end{array}$$

$$\therefore E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots\dots + \frac{n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

15. (1) 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$ ，方差为 $D(X) > 0$ ，引入新的随机变量 (X^*

$$\text{称为标准化的随机变量})：X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

验证 $E(X^*) = 0$ ， $D(X^*) = 1$

(2) 已知随机变量 X 的概率密度。

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x|, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

求 X^* 的概率密度。

$$\text{解: (1) } E(X^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X) - E(X)] = 0$$

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E[X^* - E(X^*)]^2 = E(X^{*2}) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]^2 \\ &= \frac{1}{D(X)} E[X - E(X)]^2 = \frac{1}{D(X)} \cdot D(X) = 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad E(X) = \int_0^2 x[1 - |1 - x|]dx = \int_0^1 x[1 - (1 - x)]dx + \int_1^2 x[1 + (1 - x)]dx = 1$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^2 x^2[1 - |1 - x|]dx = \int_0^1 x^2[1 - (1 - x)]dx \\ &\quad + \int_1^2 x^2[1 + (1 - x)]dx = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$

$$F_{X^*}(y) = P(X^* \leq y) = P\left(\frac{X - 1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \leq y\right) = P(X \leq \sqrt{\frac{1}{6}}y + 1) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{6}}y+1} f(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } \frac{1}{\sqrt{6}}y + 1 \leq 0, \text{即 } y \leq -\sqrt{6} \text{ 时} \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}y+1} [1 - |1 - x|]dx & \text{当 } 0 < \frac{1}{\sqrt{6}}y + 1 \leq 2, \text{即 } -\sqrt{6} < y \leq \sqrt{6} \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } 2 < \frac{1}{\sqrt{6}}y + 1, \text{即 } \sqrt{6} < y \text{ 时} \end{cases}$$

$$g_{X^*}(y) = \begin{cases} \{1 - |1 - (\frac{1}{\sqrt{6}}y + 1)|\} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{6} < y \leq \sqrt{6} \\ 0 & y \text{ 为其他值} \end{cases}$$

16.[十六] 设 X 为随机变量, C 是常数, 证明 $D(X) \leq E\{(X - C)^2\}$, 对于 $C \neq E(X)$,

(由于 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$, 上式表明 $E\{(X - C)^2\}$ 当 $C = E(X)$ 时取到最小值。)

$$\text{证明: } \because D(X) - E(X - C)^2 = D(X^2) - [E(X)]^2 - [E(X^2) - 2CE(X^2) + C^2]$$

$$= -\{[E(X)]^2 - 2CE(X^2) + C^2\}$$

$$= -[E(X) - C]^2 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } E(X) \neq C \text{ 时 } D(X) < E(X - C)^2$$

$$17. \text{ 设随机变量 } X \text{ 服从指数分布, 其概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 其中 } \theta > 0 \text{ 是常}$$

数, 求 $E(X)$, $D(X)$ 。

解:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} x d(-e^{-\frac{x}{\theta}}) = -xe^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 0 + (-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}) \Big|_0^{+\infty} = \theta$$

$$\text{又 } E(X^2) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{x}{\theta}} \theta^2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = 2\theta^2$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$21. \text{ 设 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 是相互独立的随机变量且有 } E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{记 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. (1) \text{ 验证 } E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. (2) \text{ 验证}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right]. (3) \text{ 验证 } E(S^2)$$

$$\text{证明: } (1) E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

(利用数学期望的性质 2°, 3°)

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \xrightarrow{X_1, \dots, X_n \text{ 相互独立}} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(利用方差的性质 2°, 3°)

$$(2) \text{ 首先证 } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i\bar{X} + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X} \cdot \bar{X} + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.\end{aligned}$$

$$\text{于是 } S^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right\} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\begin{aligned}(3) \quad E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (D(X_i) + E^2(X_i)) - n(D(\bar{X}) + E^2(\bar{X})) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} [n\sigma^2 + n\mu^2 - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)] = \sigma^2\end{aligned}$$

23. [二十五] 设随机变量 X 和 Y 的联合分布为:

Y \ X	X		
	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证: X 和 Y 不相关, 但 X 和 Y 不是相互独立的。

$$\begin{aligned}\text{证: } \because \quad P[X=1, Y=1] &= \frac{1}{8} \quad P[X=1] = \frac{3}{8} \quad P[Y=1] = \frac{3}{8} \\ P[X=1, Y=1] &\neq P[X=1] P[Y=1]\end{aligned}$$

$\therefore X, Y$ 不是独立的

$$\text{又} \quad E(X) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$\begin{aligned} COV(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - EX \cdot EY \\ &= (-1)(-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times (-1) \times \frac{1}{8} + 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore X, Y$ 是不相关的

27. 已知三个随机变量 X, Y, Z 中, $E(X) = E(Y) = 1, E(Z) = -1, D(X) = D(Y) = D(Z) = 1,$
 $\rho_{XY} = 0, \rho_{XZ} = \frac{1}{2}, \rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$ 。设 $W = X + Y + Z$ 求 $E(W), D(W)$ 。

解: $E(W) = E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 - 1 = 1$

$$\begin{aligned} D(W) &= D(X + Y + Z) = E\{[(X + Y + Z) - E(X + Y + Z)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)] + [Y - E(Y)] + Z - E(Z)\}^2 \\ &= E\{[X - E(X)]^2 + [Y - E(Y)]^2 + [Z - E(Z)]^2 + 2[X - E(X)][Y - E(Y)] \\ &\quad + 2[Y - E(Y)][Z - E(Z)] + 2[Z - E(Z)][X - E(X)]\} \\ &= D(X) + D(Y) + D(Z) + 2COV(X, Y) + 2COV(Y, Z) + 2COV(Z, X) \\ &= D(X) + D(Y) + D(Z) + 2\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY} + 2\sqrt{D(Y)D(Z)}\rho_{YZ} \\ &\quad + 2\sqrt{D(Z)D(X)}\rho_{ZX} = 1 + 1 + 1 + 2 \times \sqrt{1 \times 1} \times 0 + 2\sqrt{1 \times 1}(-\frac{1}{2}) \\ &\quad + 2\sqrt{1 \times 1}(\frac{1}{2}) = 3 \end{aligned}$$

26.[二十八] 设随机变量 (X_1, X_2) 具有概率密度。

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(x + y), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

求 $E(X_1), E(X_2), COV(X_1, X_2), \rho_{X_1 X_2}, D(X_1 + X_2)$

$$\text{解: } E(X_2) = \int_0^2 dx \int_0^2 x \cdot \frac{1}{8}(x + y) dy = \frac{7}{6}$$

$$E(X_1) = \int_0^2 dx \int_0^2 y \cdot \frac{1}{8}(x + y) dy = \frac{7}{6}$$

$$\begin{aligned} COV(X_1, X_2) &= E\{(X_1 - \frac{7}{6})(X_2 - \frac{7}{6})\} \\ &= \int_0^2 dx \int_0^2 (x - \frac{7}{6})(y - \frac{7}{6}) \cdot \frac{1}{8}(x + y) dy = -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$D(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = \int_0^2 dx \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{8}(x + y) dy - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

$$D(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = \int_0^2 dx \int_0^2 y^2 \cdot \frac{1}{8}(x + y) dy - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = -\frac{1}{11}$$

$$D(X_1+X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2COV(X_1, X_2)$$

$$= \frac{11}{36} + \frac{11}{36} + 2 \times \left(-\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{9}$$

28.[二十九] 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X, Y 相互独立. 试求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 (其中 α, β 是不为零的常数).

解: 由于 X, Y 相互独立

$$\begin{aligned} Cov(Z_1, Z_2) &= E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = E(\alpha X + \beta Y)(\alpha X - \beta Y) - (\alpha EX + \beta EY)(\alpha EX - \beta EY) \\ &= \alpha^2 EX^2 - \beta^2 EY^2 - \alpha^2 (EX)^2 + \beta^2 (EY)^2 = \alpha^2 DX - \beta^2 DY = (\alpha^2 - \beta^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

$$DZ_1 = \alpha^2 DX + \beta^2 DY = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2, DZ_2 = \alpha^2 DX + \beta^2 DY = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2,$$

(利用数学期望的性质 2° 3°)

$$\text{故 } \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{Cov(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

29. [二十三] 卡车装运水泥, 设每袋水泥重量 (以公斤计) 服从 $N(50, 2.5^2)$ 问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

解: 已知 $X \sim N(50, 2.5^2)$ 不妨设最多可装 A 袋水泥才使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05. 则由期望和方差的性质得 $Y = AX \sim N(50A, 2.5^2 A)$. 故由题意得

$$P\{Y \geq 2000\} \leq 0.05 \Rightarrow P\{Y < 2000\} \geq 0.95$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{2000 - 50A}{2.5\sqrt{A}}\right) \geq 0.95 \text{ 查表得 } \frac{2000 - 50A}{2.5\sqrt{A}} \geq 1.65 \text{ 解得 } A \geq 39.$$

30.[三十二] 已知正常男性成人血液中, 每一毫升白细胞数平均是 7300, 均方差是 700, 利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200~9400 之间的概率 p .

解: 由题意知 $\mu = 7300, \sigma = 700$, 则由契比雪夫不等式

$$P\{5200 \leq X \leq 9400\} = P\{|X - 7300| \leq 2100\} \geq 1 - \frac{700^2}{2100^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$$

31.[三十三] 对于两个随机变量 V, W 若 $E(V^2)E(W^2)$ 存在, 证明 $[E(VW)]^2 \leq E(V^2)E(W^2)$ 这一不等式称为柯西施瓦兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式.

证明: 由 $|VW| \leq \frac{1}{2}(V^2 + W^2)$ 和关于矩的结论, 知当 $E(V^2), E(W^2)$ 存在时 $E(VW)$, $E(V), E(W), D(V), D(W)$, 都存在. 当 $E(V^2), E(W^2)$ 至少有一个为零时, 不妨设 $E(V^2) = 0$,

由 $D(V) = E(V^2) - [E(V)]^2 \leq E(V^2) = 0$ 知 $D(V) = 0$, 此时 $[E(V)]^2 = E(V^2) = 0$ 即 $E(V) = 0$ 。
再由方差的性质知 $P(V=0)=1$ 。又 $(VW=0) \supset (V=0)$ 故有 $P(VW=0)=1$ 。于是 $E(VW)=0$, 不等式成立。当 $E(V^2) > 0$, $E(W^2) > 0$ 时, 对 $\forall t > 0$

$$\text{有 } E(W - tV)^2 = E(V^2)t^2 - 2E(VW)t + E(W^2) \geq 0. (*)$$

(*) 式是 t 的二次三项式且恒非负, 所以有 $\Delta = [-2E(VW)]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leq 0$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立。

[二十一] (1) 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且有 $E(X_i) = i, D(X_i) = 5 - i, i = 1, 2, 3, 4$ 。
设 $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{\gamma}X_4$, 求 $E(Y), D(Y)$ 。

(2) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(720, 30^2), Y \sim N(640, 25^2)$, 求 $Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$ 的分布, 并求 $P\{X > Y\}, P\{X + Y > 1400\}$

解: (1) 利用数学期望的性质 $2^\circ, 3^\circ$ 有

$$E(Y) = 2E(X_1) - E(X_2) + 3E(X_3) - \frac{1}{\gamma}E(X_4) = 7$$

利用数学方差的性质 $2^\circ, 3^\circ$ 有

$$D(Y) = 2^2 D(X_1) + (-1)^2 D(X_2) + 3^2 D(X_3) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^2 D(X_4) = 37.25$$

(2) 根据有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布, 知 $Z_1 \sim N(\cdot, \cdot), Z_2 \sim N(\cdot, \cdot)$

而 $EZ_1 = 2EX + Y = 2 \times 720 + 640, D(Z_1) = 4D(X) + D(Y) = 4225$

$EZ_2 = EX - EY = 720 - 640 = 80, D(Z_2) = D(X) + D(Y) = 1525$

即 $Z_1 \sim N(2080, 4225), Z_2 \sim N(80, 1525)$

$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = P\{Z_2 > 0\} = 1 - P\{Z_2 \leq 0\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0 - 80}{\sqrt{1525}}\right) = \Phi\left(\frac{80}{\sqrt{1525}}\right) = 0.9798$$

$P\{X + Y > 1400\} = 1 - P\{X + Y \leq 1400\}$

同理 $X + Y \sim N(1360, 1525)$

则 $P\{X + Y > 1400\} = 1 - P\{X + Y \leq 1400\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1400 - 1360}{\sqrt{1525}}\right) = 0.1539$$

[二十二] 5 家商店联营, 它们每周售出的某种农产品的数量 (以 kg 计) 分别为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 , 已知 $X_1 \sim N(200, 225), X_2 \sim N(240, 240), X_3 \sim N(180, 225), X_4 \sim N(260, 265), X_5 \sim N(320, 270), X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 相互独立。

(1) 求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差;

(2) 商店每隔两周进货一次, 为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99, 问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品?

解: (1) 令 $Y = \sum_{i=1}^5 X_i$ 为总销售量。

已知 $E X_1=200, E X_2=240, E X_3=180, E X_4=260, E X_5=320,$

$D(X_1)=225, D(X_2)=240, D(X_3)=225, D(X_4)=265, D(X_5)=270,$

利用数学期望的性质 3° 有

$$E(Y) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = 1200$$

利用方差的性质 3° 有

$$D(Y) = \sum_{i=1}^5 D(X_i) = 1225$$

(2) 设商店仓库储存 a 公斤该产品, 使得

$$P\{Y \leq a\} > 0.99$$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布, 并注意到 (1), 得

$$Y \sim N(1200, 1225)$$

$$P\{Y \leq a\} = \Phi\left(\frac{a-1200}{35}\right) > 0.99$$

查标准正态分布表知

$$\frac{a-1200}{35} > 2.33$$

$$a > 1281.55$$

$\therefore a$ 至少取 1282.

第五章 大数定理和中心极限定理

1. [一] 据以往经验某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布, 现在随机的抽取 16 只, 设它们的寿命是相互独立的, 求这 16 只元件寿命总和大于 1920 小时的概率。

解：设第 i 只寿命为 X_i , ($1 \leq i \leq 16$), 故 $E(X_i) = 100$, $D(X_i) = 100^2$ ($i = 1, 2, \dots, 16$). 依本章定理 1 知

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 1920\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{\sqrt{16} \times 100} \leq \frac{1920 - 1600}{\sqrt{16} \times 100}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{400} \leq 0.8\right) \\ &= \Phi(0.8) = 0.7881. \end{aligned}$$

$$\text{从而 } P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i > 1920\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 1920\right) = 1 - 0.7881 = 0.2119.$$

3. [三] 计算机在进行加法时, 对每个加数取整 (取为最接近它的整数), 设所有的取整误差是相互独立的, 且它们都在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布,

(1) 若将 1500 个数相加, 问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2) 几个数相加在一起使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90

解:

(1) 设取整误差为 X_i ($i = 1, 2, \dots, 1500$), 它们都在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布。

$$\text{于是: } E(X_i) = p = \frac{-0.5 + 0.5}{2} = 0$$

$$D(X_i) = \frac{[0.5 - (-0.5)]^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$nE(X_i) = 0, \quad \sqrt{nD(X_i)} = \sqrt{1500 \times \frac{1}{12}} = \sqrt{125} = 11.18$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=0}^{1500} X_i\right| > 15\right\} = 1 - P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| \leq 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{-15 \leq \sum_{i=1}^{1500} X_i \leq 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{-15}{11.18} \leq \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i}{11.18} \leq \frac{15}{11.18}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - [\Phi(1.34) - \Phi(-1.34)] \\
&= 2[1 - \Phi(1.34)] = 2 \times [1 - 0.9099] = 0.1802
\end{aligned}$$

8. 某药厂断言, 该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8, 医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人, 如果其中多于 75 人治愈, 就接受这一断言, 否则就拒绝这一断言。(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8, 问接受这一断言的概率是多少? (2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7, 问接受这一断言的概率是多少?

解: 设 X 为 100 人中治愈的人数, 则 $X \sim B(n, p)$ 其中 $n=100$

$$\begin{aligned}
(1) \quad P(X > 75) &= 1 - P(X \leq 75) = 1 - P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) = \Phi\left(+\frac{5}{4}\right) = 0.8944
\end{aligned}$$

(2) $p=0.7$ 由中心极限定理知

$$\begin{aligned}
P(X > 75) &= 1 - P(X \leq 75) = 1 - P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \Phi(1.09) = 1 - 0.8621 = 0.1379.
\end{aligned}$$

7. [七] 一复杂的系统, 由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统起作用至少必需有 85 个部件工作。求整个系统工作的概率。

(2) 一个复杂的系统, 由 n 个互相独立起作用的部件所组成, 每个部件的可靠性 (即部件工作的概率) 为 0.90。且必须至少有 80% 部件工作才能使整个系统工作, 问 n 至少为多少才能使系统的可靠性不低于 0.95。

解: (1) 设每个部件为 $X_i (i=1, 2, \dots, 100)$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{部件工作} \\ 0 & \text{部件损坏不工作} \end{cases}$$

设 X 是 100 个相互独立, 服从 (0-1) 分布的随机变量 X_i 之和

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

由题设知 $n=100 \quad P\{X_i=1\}=p=0.9, P\{X_i=0\}=0.1$

$$E(X_i) = p = 0.9$$

$$D(X_i) = p(1-p) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$$

$$n \cdot E(X_i) = 100 \times 0.9 = 90, n D(X_i) = 100 \times 0.09 = 9$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 85\right\} = P\left\{\frac{X - nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}} \geq \frac{85 - nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{X - 90}{\sqrt{9}} \geq \frac{85 - 90}{\sqrt{9}}\right\} = P\left\{\frac{X - 90}{3} \geq \frac{-5}{3}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 90}{3} < -\frac{5}{3}\right\} \quad \text{由中心极限定理知}$$

$$\approx 1 - \int_{-\infty}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \quad \text{查标准正态分布表}$$

$$= \Phi(1.67)$$

$$= 0.9525$$

解：(2) 设每个部件为 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{部件工作} \\ 0 & \text{部件损坏不工作} \end{cases}$$

$$P\{X_i=1\}=p=0.9, P\{X_i=0\}=1-p=0.1$$

$$E(X_i)=p=0.9, \quad D(X_i)=0.9 \times 0.1 = 0.09$$

由问题知 $P\left\{\sum_{i=1}^n X_i > \frac{80}{100}n\right\} = 0.95$ 求 $n=?$

而 $P\left\{\sum_{i=1}^n X_i > \frac{80}{100}n\right\}$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{nD(X_i)}} > \frac{\frac{80}{100}n - np}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{\frac{80}{100}n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$

$$= 1 - P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{80}{100}n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \right\} \text{ 由中心极限定理知}$$

$$= 1 - \Phi \left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}} \right) = \Phi \left(\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}} \right) \geq 0.95$$

查标准正态分布表得 $\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}} \geq 1.645$

解得 $n \geq 24.35$

取 $n=25$, 即 n 至少为 25 才能使系统可靠性为 0.95.

[八] 随机地取两组学生, 每组 80 人, 分别在两个实验室里测量某种化合物的 PH 值, 各人测量的结果是随机变量, 它们相互独立, 且服从同一分布, 其数学期望为 5, 方差为 0.3, 以 \bar{X}, \bar{Y} 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均:

$$(1) \text{ 求 } P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\} \quad (2) \text{ } P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$$

解: 由中心极限定理知

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 80 \times 5}{\sqrt{80 \times 0.3}} \sim N(0,1) \quad V = \frac{\sum_{j=1}^{80} Y_j - 80 \times 5}{\sqrt{80 \times 0.3}} \sim N(0,1)$$

$$(1) \text{ } P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\} = P \left\{ \frac{4.9 \times 80 - 80 \times 5}{\sqrt{80 \times 0.3}} < \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 80 \times 5}{\sqrt{80 \times 0.3}} < \frac{5.1 \times 80 - 80 \times 5}{\sqrt{80 \times 0.3}} \right\}$$

$$P \left\{ -1.63 < \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 80 \times 5}{\sqrt{24}} < 1.63 \right\} = 2\Phi(1.63) - 1 = 2 \times 0.9484 - 1 = 0.8968$$

(2) 由 X_i, Y_j 的相互独立性知 $\sum_{i=1}^{80} X_i$ 与 $\sum_{j=1}^{80} Y_j$ 独立。从而 U, V 独立。

于是 $U - V \sim N(0, 2)$

$$\text{而 } Z \cong U - V = \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - \sum_{j=1}^{80} Y_j}{\sqrt{24}}$$

$$P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\} = P\left\{ \frac{-0.1 \times 80}{\sqrt{80 \times 0.3}} < \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - \sum_{j=1}^{80} Y_j}{\sqrt{80 \times 0.3}} < \frac{0.1 \times 80}{\sqrt{80 \times 0.3}} \right\}$$

$$= P\{-1.63 < Z < 1.63\} = \Phi\left(\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right) = 2\Phi(1.15) - 1$$

$$= 2 \times 0.8749 - 1 = 0.7498$$

[九] 某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望 μ （未知），方差 $\sigma^2=400$ 为了估计 μ ，随机地取几只这种器件，在时刻 $t=0$ 投入测试（设测试是相互独立的）直到失败，测得其寿命 X_1, \dots, X_n ，以 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 作为 μ 的估计，为使 $P\{|\bar{X} - \mu| \geq 0.95\} \geq 0.95$ ，问 n 至少为多少？

解：由中心极限定理知，当 n 很大时

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{n\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} = P\left\{ \frac{-n}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{n\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}} \right\} \approx \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$\text{所以 } \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geq 0.975$$

查标准正态分布表知

$$\frac{\sqrt{n}}{20} \geq 1.96$$

$$n \geq 1536.64$$

即 n 至少取 1537。

第六章 样本及抽样分布

1.[一] 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本, 求样本均值 \bar{X} 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解:

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N(52, \frac{6.3^2}{36}), P\{50.8 < \bar{X} < 53.8\} = P\{-\frac{1.2}{\frac{6.3}{6}} < \frac{\bar{X}-52}{\frac{6.3}{6}} < \frac{1.8}{\frac{6.3}{6}}\} \\ &= \Phi(\frac{12}{7}) - \Phi(\frac{-8}{7}) = 0.8293\end{aligned}$$

2.[二] 在总体 $N(12, 4)$ 中随机抽一容量为 5 的样本 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 .

(1) 求样本均值与总体平均值之差的绝对值大于 1 的概率。

(2) 求概率 $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 15\}$.

(3) 求概率 $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 10\}$.

$$\begin{aligned}\text{解: (1) } P\{|\bar{X} - 12| > 1\} &= P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| > \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\} = 2P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| > \frac{\sqrt{5}}{2}\right\} \\ &= 2[1 - \Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})] = 0.2628\end{aligned}$$

(2) $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 15\} = 1 - P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 15\}$

$$= 1 - \prod_{i=1}^5 P\{X_i \leq 15\} = 1 - [\Phi(\frac{15-12}{2})]^5 = 0.2923.$$

(3) $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) < 10\} = 1 - P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \geq 10\}$

$$= 1 - \prod_{i=1}^5 P\{X_i \geq 10\} = 1 - [1 - \Phi(\frac{10-12}{2})]^5 = 1 - [\Phi(1)]^5 = 0.5785.$$

4.[四] 设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 为 $N(0, 0.3^2)$ 的一个样本, 求 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$.

解: $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 / 0.3^2 \sim \chi^2(10), P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\} = P\{\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} > 16\} = 0.1$ (查表5)

7. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的一个样本, \bar{X}, S^2 分别为样本均值和样本方差, 求 $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$.

解: 由 $X \sim \pi(\lambda)$ 知 $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$

$$\therefore E(\bar{X}) = E(X) = \lambda, D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}, E(S^2) = D(X) = \lambda.$$

[六] 设总体 $X \sim b(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本。

(1) 求 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布律;

(2) 求 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布律;

(3) 求 $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$.

解: (1) (X_1, \dots, X_n) 的分布律为

$$\begin{aligned} P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n\} &\stackrel{\text{独立}}{=} \prod_{k=1}^n P\{X_k = i_k\} = \prod_{k=1}^n P^{i_k} (1-P)^{1-i_k} \\ &= P^{\sum_{k=1}^n i_k} (1-P)^{n - \sum_{k=1}^n i_k}, i_k = 0 \text{ 或 } 1, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(2) $\sum_{i=1}^n X_i \sim b(n, p)$

(由第三章习题 26[二十七]知)

(3) $E(\bar{X}) = E(X) = P,$

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{P}{n}$$

$$E(S^2) = D(X) = P(1-P)$$

[八] 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, \dots, X_{10} 是来自 X 的样本。

(1) 写出 X_1, \dots, X_{10} 的联合概率密度 (2) 写出 \bar{X} 的概率密度。

解: (1) (X_1, \dots, X_{10}) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{10}) &= \prod_{i=1}^{10} f(x_i) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

(2) 由第六章定理一知

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), n=10$$

即 \bar{X} 的概率密度为

$$f_{\bar{X}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{n(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

第七章 参数估计

1. [一] 随机地取 8 只活塞环, 测得它们的直径为 (以 mm 计)

74.001 74.005 74.003 74.001 74.000 73.998 74.006 74.002

求总体均值 μ 及方差 σ^2 的矩估计, 并求样本方差 S^2 。

解: μ, σ^2 的矩估计是 $\hat{\mu} = \bar{X} = 74.002, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = 6 \times 10^{-6}$

$$S^2 = 6.86 \times 10^{-6}.$$

2. [二] 设 X_1, X_1, \dots, X_n 为准总体的一个样本。求下列各总体的密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量。

$$(1) f(x) = \begin{cases} \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x > c \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } c > 0 \text{ 为已知, } \theta > 1, \theta \text{ 为未知参数。}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0, \theta \text{ 为未知参数。}$$

$$(5) P(X=x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\dots,m, 0 < p < 1, p \text{ 为未知参数。}$$

解: (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_c^{+\infty} \theta c^\theta x^{-\theta} dx = \frac{\theta c^\theta}{\theta-1} c^{-\theta+1} = \frac{\theta c}{\theta-1}$, 令 $\frac{\theta c}{\theta-1} = \bar{X}$, 得

$$\theta = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$$

$$(2) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}, \text{ 令 } \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{X}, \text{ 得 } \theta = \left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

$$(5) E(X) = mp \quad \text{令 } mp = \bar{X}, \quad \text{解得 } \hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$$

3. [三]求上题中各未知参数的极大似然估计值和估计量。

$$\text{解: (1) 似然函数} \quad L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \theta^n c^{n\theta} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\theta+1}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln(\theta) + n\theta \ln c + (1-\theta) \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\theta}{n} + n \ln c - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln c} \quad (\text{解唯一故为极大似然估计量})$$

$$(2) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \theta^{-\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, \quad \ln L(\theta) = \frac{-n}{2} \ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{-n}{2} \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0, \quad \hat{\theta} = \left(n \left/ \sum_{i=1}^n \ln x_i \right.\right)^2. \quad (\text{解唯一}) \text{ 故为极大似然估计}$$

量。

$$(5) L(p) = \prod_{i=1}^n P\{X = x_i\} = \binom{m}{x_1} \cdots \binom{m}{x_n} p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{mn - \sum_{i=1}^n x_i},$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \ln \binom{m}{x_i} + \sum_{i=1}^n x_i \ln p + (mn - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-p),$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{mn - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$$

$$\text{解得 } p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{mn} = \frac{\bar{X}}{m}, \quad (\text{解唯一}) \text{ 故为极大似然估计量。}$$

4. [四(2)] 设 X_1, X_1, \cdots, X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本, 试求 λ 的极大似然估计量及矩估计量。

解：（1）矩估计 $X \sim \pi(\lambda)$, $E(X) = \lambda$, 故 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 为矩估计量。

$$(2) \text{ 极大似然估计 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \cdots x_n!} e^{-n\lambda},$$

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i! - n\lambda$$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0, \text{ 解得 } \hat{\lambda} = \bar{X} \text{ 为极大似然估计量。}$$

$$(\text{其中 } p(x_i; \lambda) = P\{X = x_i\} = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}, x_i = 0, 1, \dots)$$

5. [六] 一地质学家研究密歇根湖地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，并由过去经验知，它们都服从参数为 $n=10$, P 的二项分布。 P 是该地区一块石子是石灰石的概率。求 p 的极大似然估计值，该地质学家所得的数据如下

样品中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

解： λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \bar{X} = 0.499$

[四(1)] 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta (0 < \theta < 1)$ 为未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$ ，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：（1）求 θ 的矩估计值

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \theta^2 + 2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 \\ &= [\theta + 3(1-\theta)][\theta + (1-\theta)] = 3 - 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{令 } E(X) = 3 - 2\theta = \bar{X}$$

$$\text{则得到 } \theta \text{ 的矩估计值为 } \hat{\theta} = \frac{3 - \bar{X}}{2} = \frac{3 - \frac{1+2+1}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

（2）求 θ 的最大似然估计值

$$\begin{aligned}
 \text{似然函数 } L(\theta) &= \prod_{i=1}^3 P\{X_i = x_i\} = P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 2\}P\{X_3 = 1\} \\
 &= \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot \theta^2 \\
 &= 2\theta^5(1-\theta)
 \end{aligned}$$

$$\ln L(\theta) = \ln 2 + 5\ln \theta + \ln(1-\theta)$$

$$\text{求导} \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$$

$$\text{得到唯一解为 } \hat{\theta} = \frac{5}{6}$$

8. [九(1)] 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_1, \dots, X_n 是来自 X 的一个样本。试确定常数 c 使 $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解：由于

$$E\left[c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] = c \left[\sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1} - X_i)^2\right] = c \sum_{i=1}^{n-1} [D(X_{i+1} - X_i)^2 + (E(X_{i+1} - X_i))^2]$$

$$= c \sum_{i=1}^{n-1} [D(X_{i+1}) + D(X_i) + (EX_{i+1} - EX_i)^2] = c \sum_{i=1}^{n-1} (2\sigma^2 + 0^2) = c(2n-1)\sigma^2$$

当 $c = \frac{1}{2(n-1)}$ 时, $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

[十] 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本, 其中 θ 未知, 设有估计量

$$T_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4)$$

$$T_2 = (X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4)/5$$

$$T_3 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$$

(1) 指出 T_1, T_2, T_3 哪几个是 θ 的无偏估计量;

(2) 在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效。

解：(1) 由于 X_i 服从均值为 θ 的指数分布, 所以

$$E(X_i) = \theta, \quad D(X_i) = \theta^2, \quad i=1,2,3,4$$

由数学期望的性质 2°, 3° 有

$$E(T_1) = \frac{1}{6}[E(X_1) + E(X_2)] + \frac{1}{3}[E(X_3) + E(X_4)] = \theta$$

$$E(T_2) = \frac{1}{5}[E(X_1) + 2E(X_2) + 3E(X_3) + 4E(X_4)] = 2\theta$$

$$E(T_3) = \frac{1}{4}[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)] = \theta$$

即 T_1, T_2 是 θ 的无偏估计量

(2) 由方差的性质 2°, 3° 并注意到 X_1, X_2, X_3, X_4 独立, 知

$$D(T_1) = \frac{1}{36}[D(X_1) + D(X_2)] + \frac{1}{9}[D(X_3) + D(X_4)] = \frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_2) = \frac{1}{16}[D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + D(X_4)] = \frac{1}{4}\theta^2$$

$$D(T_1) > D(T_2)$$

所以 T_2 较为有效。

14.[十四] 设某种清漆的 9 个样品, 其干燥时间(以小时计)分别为 6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0。设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。(1) 若由以往经验知 $\sigma=0.6$ (小时) (2) 若 σ 为未知。

解: (1) μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$,

计算得 $\bar{X}=6.0$, 查表 $z_{0.025}=1.96, \sigma=0.6$, 即为 $(6.0 \pm \frac{0.6}{\sqrt{9}} \times 1.96) = (5.608, 6.392)$

(2) μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$, 计算得 $\bar{X}=6.0$, 查表 $t_{0.025}(8)=2.3060$.

$$S^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8} \times 2.64 = 0.33. \text{ 故为 } (6.0 \pm \frac{\sqrt{0.33}}{3} \times 2.3060) = (5.558, 6.442)$$

16.[十六] 随机地取某种炮弹 9 发做试验, 得炮弹口速度的样本标准差为 $s=11(\text{m/s})$ 。设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解: σ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}} \right) = \left(\frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{2.18}} \right) = (7.4, 21.1)$$

其中 $\alpha=0.05, n=9$

查表知 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.975}(8)=2.180$

19.[十九] 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率。设两者都服从正态分布, 并且已知燃烧率的标准差均近似地为 0.05cm/s , 取样本容量为 $n_1=n_2=20$. 得燃烧率的样本均值分别为 $\bar{x}_1=18\text{cm/s}, \bar{x}_2=24\text{cm/s}$. 设两样本独立, 求两燃烧率总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.99 的置信区间。

解: $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.99 的置信区间为

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) = (18 - 24 + 2.58 \sqrt{\frac{0.05^2}{20} \times 2}) = (-6.04, -5.96).$$

其中 $\alpha=0.01, z_{0.005}=2.58, n_1=n_2=20, \sigma_1^2=\sigma_2^2=0.05^2, \bar{X}_1=18, \bar{X}_2=24$

20.[二十] 设两位化验员 A, B 独立地对某中聚合物含氯两用同样的方法各做 10 次测定, 其测定值的样本方差依次为 $S_A^2=0.5419, S_B^2=0.6065$. 设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A, B 所测定的测定值总体的方差, 设总体均为正态的。设两样本独立, 求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

解: σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_A^2}{S_B^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \right) \\ &= \left(\frac{0.5419}{0.6065 \times 4.03}, \frac{0.5419 \times 4.03}{0.6065} \right) = (0.222, 3.601). \end{aligned}$$

其中 $n_1=n_2=10, \alpha=0.05, F_{0.025}(9,9)=4.03, F_{0.975}(9,9)=\frac{1}{F_{0.025}(9,9)}=\frac{1}{4.03}$ 。

第八章 假设检验

1.[一]某批矿砂的 5 个样品中的镍含量, 经测定为(%)3.25 3.27 3.24 3.26 3.24。设测定值总体服从正态分布, 问在 $\alpha=0.01$ 下能否接受假设: 这批矿砂的含镍量的均值为 3.25。

解: 设测定值总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知

步骤：（1）提出假设检验 $H_0: \mu=3.25$; $H_1: \mu \neq 3.25$

$$(2) \text{ 选取检验统计量为 } t = \frac{\bar{X} - 3.25}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(3) H_0 的拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

$$(4) n=5, \alpha=0.01, \text{ 由计算知 } \bar{x}=3.252, S=\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2} = 0.01304$$

$$\text{查表 } t_{0.005}(4)=4.6041, |t| = \left| \frac{3.252 - 3.25}{0.01304/\sqrt{5}} \right| = 0.343 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

(5) 故在 $\alpha=0.01$ 下, 接受假设 H_0

2. [二] 如果一个矩形的宽度 ω 与长度 l 的比 $\omega/l = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618$, 这样的矩形称为黄金矩形。这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉。现代建筑构件（如窗架）、工艺品（如图片镜框）、甚至司机的执照、商业的信用卡等常常都是采用黄金矩型。下面列出某工艺品工厂随机取的 20 个矩形的宽度与长度的比值。设这一工厂生产的矩形的宽度与长短的比值总体服从正态分布, 其均值为 μ , 试检验假设（取 $\alpha=0.05$ ）

$$H_0: \mu = 0.618 \quad H_1: \mu \neq 0.618$$

$$0.693 \quad 0.749 \quad 0.654 \quad 0.670 \quad 0.662 \quad 0.672 \quad 0.615 \quad 0.606 \quad 0.690 \quad 0.628 \quad 0.668$$

$$0.611 \quad 0.606 \quad 0.609 \quad 0.601 \quad 0.553 \quad 0.570 \quad 0.844 \quad 0.576 \quad 0.933.$$

解：步骤：（1） $H_0: \mu = 0.618$; $H_1: \mu \neq 0.618$

$$(2) \text{ 选取检验统计量为 } t = \frac{\bar{X} - 0.618}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(3) H_0 的拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

(4) $n=20 \quad \alpha=0.05$, 计算知

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0.6605, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.0925,$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = 2.0930, |t| = \left| \frac{0.6605 - 0.618}{0.0925/\sqrt{20}} \right| = 2.055 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

(5) 故在 $\alpha = 0.05$ 下, 接受 H_0 , 认为这批矩形的宽度和长度的比值为 0.618

3.[三] 要求一种元件使用寿命不得低于 1000 小时, 今从一批这种元件中随机抽取 25 件, 测得其寿命的平均值为 950 小时, 已知这种元件寿命服从标准差为 $\sigma = 100$ 小时的正态分布。试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下确定这批元件是否合格? 设总体均值为 μ 。即需检验假设 $H_0: \mu \geq 1000$, $H_1: \mu < 1000$ 。

解: 步骤: (1) $H_0: \mu \geq 1000$; $H_1: \mu < 1000$; ($\sigma = 100$ 已知)

$$(2) H_0 \text{ 的拒绝域为 } \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$$

$$(3) n=25, \alpha = 0.05, \bar{x} = 950,$$

$$\text{计算知 } \frac{\bar{x} - 1000}{100 / \sqrt{25}} = -2.5 < -z_{0.05} = 1.645$$

(4) 故在 $\alpha = 0.05$ 下, 拒绝 H_0 , 即认为这批元件不合格。

12.[十一] 一个小学校长在报纸上看到这样的报导: “这一城市的初中学生平均每周看 8 小时电视”。她认为她所领导的学校, 学生看电视的时间明显小于该数字。为此她向 100 个学生作了调查, 得知平均每周看电视的时间 $\bar{x} = 6.5$ 小时, 样本标准差为 $s = 2$ 小时。问是否可以认为这位校长的看法是对的? 取 $\alpha = 0.05$ 。(注: 这是大样本检验问题。由中心极限定理和斯鲁茨基定理知道不管总体服从什么分布, 只要方差存在, 当 n 充分

大时 $\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ 近似地服从正态分布。)

解: (1) 提出假设 $H_0: \mu \leq 8$; $H_1: \mu > 8$

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 充分大时, } \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \text{ 近似地服从 } N(0, 1) \text{ 分布}$$

$$(3) H_0 \text{ 的拒绝域近似为 } \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$$

(4) $n=100$, $\alpha = 0.05$, $\bar{x} = 6.5$, $S=2$, 由计算知

$$|t| = \left| \frac{6.5 - 8}{2 / \sqrt{100}} \right| = 7.5 > z_{0.05} = 1.645$$

(5) 故在 $\alpha = 0.05$ 下, 拒绝 H_0 , 即认为校长的看法是不对的。

14.[十三] 某种导线, 要求其电阻的标准差不得超过 0.005(欧姆)。今在生产的一批

导线中取样品 9 根, 测得 $s=0.007$ (欧姆), 设总体为正态分布。问在水平 $\alpha=0.05$ 能否认为这批导线的标准差显著地偏大?

解: (1) 提出 $H_0: \sigma \leq 0.005$; $H_1: \sigma > 0.005$

(2) H_0 的拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{0.005^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$

(3) $n=9$, $\alpha=0.05$, $S=0.007$, 由计算知

$$\frac{(n-1)S^2}{0.005^2} = \frac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > \chi_{\alpha}^2(n-1)$$

查表 $\chi_{0.05}^2(8) = 15.507$

(4) 故在 $\alpha=0.05$ 下, 拒绝 H_0 , 认为这批导线的标准差显著地偏大。

15.[十四] 在题 2 中记总体的标准差为 σ 。试检验假设 (取 $\alpha=0.05$)

$H_0: \sigma^2 = 0.11^2$, $H_1: \sigma^2 \neq 0.11^2$ 。

解: 步骤 (1) $H_0: \sigma^2 = 0.11^2$; $H_1: \sigma^2 \neq 0.11^2$

(2) 选取检验统计量为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{0.11^2} \sim \chi^2(n-1)$

(3) H_0 的拒绝域为 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

(4) $n=20$, $\alpha=0.05$, 由计算知 $S^2=0.0925^2$, $\frac{(n-1)S^2}{0.11^2} = 13.437$

查表知 $\chi_{0.025}^2(19) = 32.852$, $\chi_{0.975}^2(19) = 8.907$

(5) 故在 $\alpha=0.05$, 接受 H_0 , 认为总体的标准差 σ 为 0.11。

16.[十五] 测定某种溶液中的水份, 它的 10 个测定值给出 $s=0.037\%$, 设测定值总体为正态分布, σ^2 为总体方差。试在水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0: \sigma \geq 0.04\%$; $H_1: \sigma < 0.04\%$ 。

解: (1) $H_0: \sigma^2 \geq (0.04\%)^2$; $H_1: \sigma^2 < (0.04\%)^2$

(2) H_0 的拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

(3) $n=10$, $\alpha=0.05$, $S=0.037\%$, 查表知 $\chi_{0.95}^2(9) = 3.325$

$$\text{由计算知 } \frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} = \frac{9 \times 0.037^2}{(0.04\%)^2} = 7.701 > \chi_{0.95}^2(9).$$

(4) 故在 $\alpha=0.05$ 下, 接受 H_0 , 认为 σ 大于 0.04%

17.[十六] 在第 6[五]题中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 。试检验假设 (取 $\alpha=$

0.05) $H_0: \sigma_1^2$ 和 σ_2^2 以说在第 6[五]题中我们假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解: (1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) 选取检验统计量为 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

(3) H_0 的拒绝域为 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

(4) $n_1=8, n_2=10, \alpha=0.05$, 查表知 $F_{0.025}(7,9)=4.20$

$$F_{0.975}(7,9) = \frac{1}{F_{0.025}(9,7)} = \frac{1}{4.82} = 0.207, F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.00025}{0.00084} = 0.298$$

$$F_{0.975}(7,9) < F < F_{0.025}(7,9)$$

(5) 故在 $\alpha=0.05$ 下, 接受 H_0 , 认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

18.[十七] 在第 8 题[七]中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 。试检验假设 (取 $\alpha=0.05$) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 以说明在第 8[七]题中我们假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解: (1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) 选取检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

(3) $n_1=n_2=12, \alpha=0.05$, 查表知

$$F_{0.025}(11,11)=3.34, F_{0.975}(11,11) = \frac{1}{F_{0.025}(11,11)} = \frac{1}{3.34} = 0.299$$

$$\text{由计算知 } S_1^2 = 0.932, S_2^2 = 1, 0.299 < \frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.932 < 3.34$$

(4) 故在 $\alpha=0.05$ 下, 接受 H_0 , 认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

24.[二十三] 检查了一本书的 100 页, 记录各页中印刷错误的个数, 其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
含 f_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误个数服从泊松分布 (取 $\alpha=0.05$)。

解: (1) H_0 : 总体 $X \sim \pi(\lambda)$; H_1 : X 不服从泊松布; (λ 未知)

(2) 当 H_0 成立时, λ 的最大似然估计为 $\hat{\lambda} = \bar{x} = 1$.

(3) H_0 的拒绝域为 $\chi^2 = \sum \frac{\hat{f}_i^2}{n\hat{p}_i} - n > \chi_{\alpha}^2(k - \gamma - 1)$

(4) $n=100$

$$\hat{P}_0 = P\{X=0\} = \frac{e^{-1}}{0!} = 0.3679$$

$$\hat{P}_1 = P\{X=1\} = \frac{1^1 e^{-1}}{1!} = 0.3679$$

$$\hat{P}_2 = P\{X=2\} = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = 0.18397$$

$$\hat{P}_3 = P\{X=3\} = \frac{1^3 e^{-1}}{3!} = 0.06132$$

$$\hat{P}_4 = P\{X=4\} = \frac{1^4 e^{-1}}{4!} = 0.01533$$

$$\hat{P}_5 = P\{X=5\} = \frac{1^5 e^{-1}}{5!} = 0.003066$$

$$\hat{P}_6 = P\{X=6\} = \frac{1^6 e^{-1}}{6!} = 0.000511$$

$$\hat{P}_7 = P\{X=7\} = 1 - \sum_{i=0}^6 \hat{P}_i = 0.000083$$

对于 $j>3$, $n\hat{P}_j < 5$

将其合并得

$$\sum_{j=3}^7 n\hat{P}_j = 8.023$$

合并后, $K=4$, $Y=1$

查表知 $\chi_{0.05}^2(4-1-1) = 5.991$

$$\text{由计算知 } \chi^2 = \frac{36^2}{36.79} + \frac{40^2}{36.79} + \frac{19^2}{18.397} + \frac{5^2}{8.023} - 100 = 1.444$$

(5) 故在 $\alpha=0.05$ 下, 接受 H_0 , 认为一页的印刷错误个数服从泊松分布。