§2.4 行列式的基本性质

直接用定义计算行列式是很麻烦的事，本节要导出行列式运算的一些性质，利用这些性质，将使行列式的计算大为简化。

转置行列式：把n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的第i行

变为第i列（i=1，2，…，n）所得的行列式

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为D的转置行列式，用 D' 表示。

性质1：行列式D与它的转置行列式相等。（转置变换）

证：考察D的任意项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ —（1）

它是取自D的不同行不同列的n个元素的乘积，因而也是取自 D' 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 行，1，2，…，n列的n个元素的乘积，因而也是 D' 中的一项:

$$a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n} \quad \text{—（2）。}$$

（1）项所带的符号是 $(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}$，(2)项所带的符号也是 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)+\tau(12\cdots n)}$。因而D中的任一项均为 D' 中的项而且所带的符号也相同。同理可知 D' 中的任一项也是D中的项且所带的符号相同。因此D= D'.

性质1表明，在行列式中，行与列的地位是相同的。凡是对行成立的性质，对列也同样成立。

性质2：把行列式D中某一行（列）的所有元素同乘以常数k，相当于用数k乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD \qquad \text{（倍法变换）}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots \left(ka_{ij_i}\right) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论1：一个行列式中某一行（列）所有元素的公因式可以提到行列式的符号外面。

推论2：如果行列式中某一行（列）所有元素都为零，则这个行列式等于零。

在性质2中，取k=0，即知结论成立。

性质3：交换行列式D中的某两行（列），行列式变号。（换法变换）

即设 $D \square \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \square D_1$

则有： $D = -D_1$

证：取D中任一项： $a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n}$ —（1）

它所带的符号是：$(-1)^{\tau(k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)}$ ，

显然 $a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n}$ 也是 D_1 中的一项，

它所带符号为：$(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}$。由于对换改变排列的奇偶性，故D中的任一项与 D_1 中对应项刚好相差一个符号，

故 $D=-D_1$

推论3：如果行列式中有两行（列）的元素对应相同，则这个行列式等于零。

（交换这两行（列）即知 $D=-D$ ）

推论4：如果行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则这个行列式等于零。

（利用性质2和推论3）

性质4：如果行列式中某一行（列）中的所有元素都可表成两项之和，则该行列式可拆成两个行列式之和，即（拆法变换）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：$D=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots\left(a_{ij_i}+b_{ij_i}\right)\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质5：把行列式中某一行（列）的所有元素同乘上一个数k再加到另一行（列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等。（消法变换）

即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

利用性质4和推论4即知。

例2.4.1 计算行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} a+x_1 & b+x_1 & c+x_1 \\ a+x_2 & b+x_2 & c+x_2 \\ a+x_3 & b+x_3 & c+x_3 \end{vmatrix}$

解： $$D_3 = \begin{vmatrix} a+x_1 & b-a & c-a \\ a+x_2 & b-a & c-a \\ a+x_3 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

例2.4.2 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 1\end{vmatrix}$

解: $$D_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -3 & -2\\ 0 & 3 & -5 & -11\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -11\\ 0 & 0 & -2 & -20\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2 & -20\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{vmatrix}$$

$$=-22$$

定理2.4.1：任一个n阶行列式都可以利用性质5中的行或列变换化为一个与其相等的上（下）三角行列式。

证明：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

1、先设D中第一列元素不全为零，若 $a_{11}=0, a_{i1}\neq 0,$

则把第i行所有元素同乘1加到第一行上，则 $a'_{11}=a_{i1}\neq 0,$

故不妨设 $a_{11}\neq 0,$ 把第一行依次乘以 $-a_{11}^{-1}a_{21},\cdots,-a_{11}^{-1}a_{n1}$

后分别加到第2行，…，第n行，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{——（1）}$$

若D中第一列元素全为零，则D已经是（1）的形式。

现对（1）中第二列的 $b_{22},\cdots,b_{n2}$ 进行考虑，同上类似，先设它们不全为零，不妨设 $b_{22}\neq 0$ ，

则利用上面相似的方法，可得 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$

仿此不断进行下去，就可把D化为上三角行列式。

例2.4.3　计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解　法一： $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

法二：$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

在一个n阶行列式D_n中，若有$a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$，则称$D_n$为n阶对称行列式；若有$a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$则称$D_n$为反对称行列式。

例2.4.4　奇数阶的反对称行列式等于0。

证明：设D_n为奇数阶的反对称行列式。

由于$a_{ij}=-a_{ji}$，得$a_{ii}=0,\ \ i=1,2,\cdots,n$

于是 $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{转置}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{推论1}]{\text{性质2}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{n\text{为奇数}} -D_n$$

$$\therefore D_n = 0$$

例2.4.5(思考题) 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$