

第一章 概率论的基本概念

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1 解：该试验的结果有 9 个：(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)。所以，

(1) 试验的样本空间共有 9 个样本点。

(2) 事件 A 包含 3 个结果：不吸烟的身体健康者，少量吸烟的身体健康者，吸烟较多的身体健康者。即 A 所包含的样本点为 (0, a), (1, a), (2, a)。

(3) 事件 B 包含 3 个结果：不吸烟的身体健康者，不吸烟的身体一般者，不吸烟的身体有病者。即 B 所包含的样本点为 (0, a), (0, b), (0, c)。

2、解

$$(1) AB \cup BC \cup AC \text{ 或 } ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

$$(2) \bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{C}$$

(提示：题目等价于 \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} 至少有 2 个发生，与 (1) 相似)；

$$(3) \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

$$(4) \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \text{ 或 } \overline{ABC};$$

(提示： \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} 至少有一个发生，或者 A, B, C 不同时发生)；

3 (1) 错。依题得 $p(AB) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0$, 但 $A \cap B \neq \emptyset$, 故 A、B 可能相容。

(2) 错。举反例

(3) 错。举反例

(4) 对。证明：由 $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.7$ 知

$p(AB) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 1.3 - p(A \cup B) > 0.3$, 即 A 和 B 交非空，故 A 和 B 一定相容。

4、解

(1) 因为 A, B 不相容，所以 A, B 至少有一发生的概率为：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.6 = 0.9$$

(2) A, B 都不发生的概率为：

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1;$$

(3) A 不发生同时 B 发生可表示为： $\bar{A} \cap B$ ，又因为 A, B 不相容，于是

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) = 0.6;$$

5 解: 由题知 $p(AB \cup AC \cup BC) = 0.3$, $P(ABC) = 0.05$.

因 $p(AB \cup AC \cup BC) = p(AB) + p(AC) + p(BC) - 2p(ABC)$ 得,

$$p(AB) + p(AC) + p(BC) = 0.3 + 2p(ABC) = 0.4$$

故 A,B,C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned} p(\overline{ABC}) &= 1 - p(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [(p(A) + p(B) + p(C)) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC)] \\ &= 1 - (1.2 - 0.4 + 0.05) \\ &= 0.15. \end{aligned}$$

6、解 设 $A = \{ \text{“两次均为红球”} \}$, $B = \{ \text{“恰有 1 个红球”} \}$, $C = \{ \text{“第二次是红球”} \}$

若是放回抽样, 每次抽到红球的概率是: $\frac{8}{10}$, 抽不到红球的概率是: $\frac{2}{10}$, 则

$$(1) P(A) = \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} = 0.64;$$

$$(2) P(B) = 2 \times \frac{8}{10} \times (1 - \frac{8}{10}) = 0.32;$$

(3) 由于每次抽样的样本空间一样, 所以:

$$P(C) = \frac{8}{10} = 0.8$$

若是不放回抽样, 则

$$(1) P(A) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45};$$

$$(2) P(B) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$(3) P(C) = \frac{A_8^1 A_7^1 + A_2^1 A_8^1}{A_{10}^2} = \frac{4}{5}.$$

7 解: 将全班学生排成一排的任何一种排列视为一样本点, 则样本空间共有 $30!$ 个样本点。

(1) 把两个“王姓”学生看作一整体, 和其余 28 个学生一起排列共有 $29!$ 个样本点, 而两

个“王姓”学生也有左右之分, 所以, 两个“王姓”学生紧挨在一起共有 $2 \cdot 29!$ 个样本点。

即两个“王姓”学生紧挨在一起的概率为 $\frac{2 \cdot 29!}{30!} = \frac{1}{15}$ 。

(2) 两个“王姓”学生正好一头一尾包含 $2 \cdot 28!$ 个样本点，故

两个“王姓”学生正好一头一尾的概率为 $\frac{2 \cdot 28!}{30!} = \frac{1}{435}$ 。

8、解

(1) 设 $A = \{ \text{“1 红 1 黑 1 白”} \}$ ，则

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_2^1}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

(2) 设 $B = \{ \text{“全是黑球”} \}$ ，则

$$P(B) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35};$$

(3) 设 $C = \{ \text{第 1 次为红球，第 2 次为黑球，第 3 次为白球} \}$ ，则

$$P(C) = \frac{2 \times 3 \times 2}{7!} = \frac{2}{35}。$$

9 解：设 $A_i = \{ \text{第 } i \text{ 号车配对} \}$ ， $i = 1, 2, \dots, 9$ 。

若将先后停入的车位的排列作为一个样本点，那么共有 $9!$ 个样本点。

由题知，出现每一个样本点的概率相等，当 A_i 发生时，第 i 号车配对，其余 9 个号可以任意

排列，故 (1) $p(A_i) = \frac{8!}{9!}$ 。

(2) 1 号车配对，9 号车不配对指 9 号车选 2~8 号任一个车位，其余 7 辆车任意排列，共有

$7 \cdot 7!$ 个样本点。故 $p(A_1 \bar{A}_9) = \frac{7 \cdot 7!}{9!} = \frac{7}{72}$ 。

(3) $p(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_8 A_9) = p(\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_8 | A_1 A_9) p(A_1 A_9)$ ， $p(\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_8 | A_1 A_9)$ 表示在事件：已知 1 号和 9 号配对情况下，2~8 号均不配对，问题可以转化为 2~8 号车随即停入 2~8 号车位。

记 $B_i = \{ \text{第 } i+1 \text{ 号车配对} \}$ ， $i = 1, 2, \dots, 7$ 。

则 $p(\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_8 | A_1 A_9) = p(\bar{B}_1 \cdots \bar{B}_7) = 1 - p(B_1 \cup \cdots \cup B_7)$ 。

由上知， $p(B_i) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$ ， $p(B_i B_j) = \frac{5!}{7!} = \frac{1}{42}$ ， $(i < j)$ ， $p(B_i B_j B_k) = \frac{4!}{7!} = \frac{1}{210}$ ， $(i < j < k)$

.....

$$p(B_1 \cdots B_7) = \frac{1}{7!}。 \text{ 则 } p(\overline{B_1} \cdots \overline{B_7}) = \sum_{i=0}^7 \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\text{故 } p(A_1 \overline{A_2} \cdots \overline{A_8} A_9) = p(\overline{B_1} \cdots \overline{B_7}) p(A_1 A_9) = \frac{7!}{9!} \sum_{i=0}^7 \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{72} \sum_{i=0}^7 \frac{(-1)^i}{i!}。$$

10、解 由已知条件可得出:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4;$$

$$P(AB) = P(A) - P(A\overline{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2;$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.9;$$

$$(1) P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{7}{9};$$

$$(2) P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}B) = 0.5$$

$$\text{于是 } P(A | \overline{A} \cup B) = \frac{P(A \cap (\overline{A} \cup B))}{P(\overline{A} \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(\overline{A} \cup B)} = \frac{2}{5};$$

$$(3) P(AB | A \cup B) = \frac{P(AB \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{2}{9}。$$

11 解: 由题知 $p(A) = 0.5$, $p(B) = 0.3$, $p(C) = 0.4$, $p(B|A) = 0.2$, $p(A \cup B|C) = 0.6$

$$\text{则 } p(A \cup B \cup C) = p(A \cup B \cup C|C)p(C) + p(A \cup B \cup C|\overline{C})p(\overline{C})$$

$$= p(C) + p(A \cup B|\overline{C})p(\overline{C})$$

$$= p(C) + p(A \cup B) - p(A \cup B|C)p(C)$$

$$= p(C) + p(A) + p(B) - p(AB) - p(A \cup B|C)p(C)$$

$$= p(C) + p(A) + p(B) - p(B|A)p(A) - p(A \cup B|C)p(C)$$

$$= 0.86$$

12、解 设 $A = \{\text{该职工为女职工}\}$, $B = \{\text{该职工在管理岗位}\}$, 由题意知,

$$P(A) = 0.45, P(B) = 0.1, P(AB) = 0.05$$

所要求的概率为

$$(1) P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{9};$$

$$(2) P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

13、解：

$$\begin{aligned} p(Y=2) &= p(Y=2|X=1)p(X=1) + p(Y=2|X=2)p(X=2) + \cdots + p(Y=2|X=5)p(X=5) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{77}{300} \end{aligned}$$

14、解 设 $A = \{\text{此人取的是调试好的枪}\}$, $B = \{\text{此人命中}\}$, 由题意知:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B|A) = \frac{3}{5}, \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{20}$$

所要求的概率分别是:

$$(1) P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{37}{80};$$

$$(2) P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)} = \frac{1}{37}.$$

15 解： 设 $A_1 = \{\text{入市时间在1年以内}\}$, $A_2 = \{\text{入市时间在1年以上不到4年}\}$,

$A_3 = \{\text{入市时间在4年以上}\}$, $B_1 = \{\text{股民赢}\}$, $B_2 = \{\text{股民平}\}$, $B_3 = \{\text{股民亏}\}$

则

$$p(B_1|A_1) = 0.1, \quad p(B_2|A_1) = 0.2, \quad p(B_3|A_1) = 0.7, \quad p(B_1|A_2) = 0.2, \quad p(B_2|A_2) = 0.3,$$

$$p(B_3|A_2) = 0.5, \quad p(B_1|A_3) = 0.4, \quad p(B_2|A_3) = 0.4, \quad p(B_3|A_3) = 0.2$$

$$\begin{aligned} (1) p(B_1) &= p(B_1|A_1)p(A_1) + p(B_1|A_2)p(A_2) + p(B_1|A_3)p(A_3) \\ &= 0.22 \end{aligned}$$

$$(2) p(A_1|B_3) = \frac{p(A_1B_3)}{p(B_3)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p(B_3|A_1)p(A_1)}{p(B_3|A_1)p(A_1) + p(B_3|A_2)p(A_2) + p(B_3|A_3)p(A_3)} \\ &= \frac{7}{13} \approx 0.538 \end{aligned}$$

16、解 设 A , B 分别为从第一、二组中取优质品的事件, C , D 分别为第一、二次取到得产品是优质品的事件, 有题意知:

$$P(A) = \frac{10}{30}, \quad P(B) = \frac{15}{20}$$

(1) 所要求的概率是:

$$P(C) = \frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{2}P(B) = \frac{13}{24} \approx 0.5417$$

(2) 由题意可求得: $P(D) = P(C) = \frac{13}{24}$

$$P(\overline{CD}) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{30} \times \frac{10}{29} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{19} \approx 0.2136$$

所要求的概率是:

$$P(\overline{C} | D) = \frac{P(\overline{CD})}{P(D)} = \frac{2825}{7163} \approx 0.3944.$$

17 解: (1) 第三天与今天持平包括三种情况: 第 2 天平, 第 3 天平; 第 2 天涨, 第 3 天跌; 第 2 天跌, 第 3 天涨。则

$$p_1 = \alpha_3 \gamma_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \beta_1$$

(2) 第 4 天股价比今天涨了 2 个单位包括三种情况: 第 2 天平, 第 3、4 天涨; 第 2、4 天涨, 第 3 天平; 第 2、3 天涨, 第 4 天平。则

$$p_2 = 2\alpha_3 \gamma_1 \alpha_1 + \alpha_1^2 \alpha_3.$$

19(1)对。证明: 假设 A, B 不相容, 则 $p(AB) = 0$ 。而 $p(A) > 0$, $p(B) > 0$, 即 $p(A)p(B) > 0$,

故 $p(AB) \neq p(A)p(B)$, 即 A, B 不相互独立。与已知矛盾, 所以 A, B 相容。

(2) 可能对。证明: 由 $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.7$ 知

$$p(AB) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 1.3 - p(A \cup B) > 0.3,$$

$$p(A)p(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42,$$

$p(AB)$ 与 $p(A)p(B)$ 可能相等, 所以 A, B 独立可能成立。

(3) 可能对。

(4) 对。证明: 若 A, B 不相容, 则 $p(AB) = 0$ 。而 $p(A) > 0$, $p(B) > 0$, 即 $p(A)p(B) > 0$,

故 $p(AB) \neq p(A)p(B)$, 即 A, B 不相互独立。

18、证明: 必要条件

由于 A , B 相互独立, 根据定理 1.5.2 知, A 与 \overline{B} 也相互独立, 于是:

$$P(A|B) = P(A), \quad P(A|\bar{B}) = P(A)$$

$$\text{即 } P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

充分条件

$$\text{由于 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ 及 } P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}, \text{ 结合已知条件, 成立}$$

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

化简后, 得:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

由此可得到, A 与 B 相互独立。

20、解 设 A_i 分别为第 i 个部件工作正常的事件, B 为系统工作正常的事件, 则 $P(A_i) = p_i$

(1) 所要求的概率为:

$$\begin{aligned} \alpha = P(B) &= P(A_1 A_2 A_3 \cup A_1 A_2 A_4 \cup A_1 A_3 A_4 \cup A_2 A_3 A_4) \\ &= P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + P(A_1 A_3 A_4) + P(A_2 A_3 A_4) - 3P(A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_4 - 3p_1 p_2 p_3 p_4 \end{aligned}$$

(2) 设 C 为 4 个部件均工作正常的事件, 所要求的概率为:

$$\beta = P(C|B) = \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{\alpha}.$$

$$(3) \gamma = C_3^2 \alpha^2 (1 - \alpha).$$

21 解: 记 $C_i = \{\text{第 } i \text{ 次出现正面}\}, i = 1, 2, \dots$

$$(1) p(A_i) = p(\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_{i-1} C_i) = p(\bar{C}_1) \cdots p(\bar{C}_{i-1}) p(C_i) = p(1-p)^{i-1}$$

$$p(B_4) = p(\bar{C}_1 \bar{C}_2 C_3 C_4) + p(C_1 \bar{C}_2 C_3 C_4) = p^2(1-p)$$

$$(2) p(B_4|A_1) = \frac{p(B_4 A_1)}{p(A_1)} = \frac{p^3(1-p)}{p} = p^2(1-p)$$

$$(3) p(A_1|B_4) = \frac{p(B_4 A_1)}{p(B_4)} = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p)} = p$$

22、解 设 $A = \{\text{照明灯管使用寿命大于 1000 小时}\}, B = \{\text{照明灯管使用寿命大于 2000 小时}\}, C = \{\text{照明灯管使用寿命大于 4000 小时}\}$, 由题意可知

$$P(A) = 0.95, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.05$$

(1) 所要求的概率为:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.95} = \frac{1}{19};$$

(2) 设 A_i 分别为有 i 个灯管损坏的事件 ($i=0,1,2,3\cdots$), α 表示至少有 3 个损坏的概率, 则

$$P(A_0) = [P(B)]^{10} = (0.3)^{10} = 0.0000059$$

$$P(A_1) = C_{10}^1 [P(B)]^9 (1-P(B)) = 0.0001378$$

$$P(A_2) = C_{10}^2 [P(B)]^8 (1-P(B))^2 = 0.0014467$$

所要求的概率为:

$$\alpha = 1 - P(A_0) - P(A_1) - P(A_2) = 0.9984$$

23 解: 设 $A = \{\text{系统能正常工作}\}$, $B = \{\text{系统稳定}\}$, $C = \{\text{系统外加电压正常}\}$,

则 $p(C) = 0.99$, $p(B|C) = 0.9$, $p(B|\bar{C}) = 0.2$, $p(A|B) = 0.8$, $p(\bar{A}|\bar{B}) = 0.9$

$$\begin{aligned} (1) \quad p(A) &= p(A|B)p(B) + p(A|\bar{B})p(\bar{B}) \\ &= p(A|B)[p(B|C)p(C) + p(B|\bar{C})p(\bar{C})] + [1 - p(\bar{A}|\bar{B})][p(\bar{B}|C)p(C) + p(\bar{B}|\bar{C})p(\bar{C})] \\ &= 0.8 \times (0.9 \times 0.99 + 0.2 \times 0.01) + (1 - 0.9) \times [(1 - 0.9) \times 0.99 + (1 - 0.2) \times 0.01] \\ &= \frac{1}{19} \end{aligned}$$

(2) 记 $A_i = \{\text{第}i\text{个元件正常工作}\}$, 则 $p(A_i) = \frac{1}{19}$

$$\begin{aligned} p(\bar{A}_1 \cup \cdots \cup \bar{A}_5) &= 1 - p(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_5) \\ &= 1 - p(\bar{A}_1) \cdots p(\bar{A}_5) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{19}\right)^5 \\ &\approx 0.9984 \end{aligned}$$

第二章 随机变量及其概率分布

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1 解：X 取值可能为 2,3,4,5,6，则 X 的概率分布律为：

$$p(X=2) = \frac{\cancel{4}_5^1}{\cancel{8}_7^3} = \frac{1}{35};$$

$$p(X=3) = \frac{\cancel{4}_4^1}{\cancel{8}_7^3} = \frac{8}{35};$$

$$p(X=4) = \frac{\cancel{4}_3^1}{\cancel{8}_7^3} = \frac{9}{35};$$

$$p(X=5) = \frac{\cancel{4}_2^1}{\cancel{8}_7^3} = \frac{8}{35};$$

$$p(X=6) = \frac{\cancel{4}_1^1}{\cancel{8}_7^3} = \frac{1}{7}。$$

2、解 （1）由题意知，此二年得分数 X 可取值有 0、1、2、4，有

$$P(X=0) = 1 - 0.2 = 0.8,$$

$$P(X=1) = 0.2 \times (1 - 0.2) = 0.16,$$

$$P(X=2) = 0.2 \times 0.2 \times (1 - 0.2) = 0.032,$$

$$P(X=4) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008,$$

从而此人得分数 X 的概率分布律为：

X	0	1	2	4
P	0.8	0.16	0.032	0.008

（2）此人得分数大于 2 的概率可表示为：

$$P(X > 2) = P(X = 4) = 0.008;$$

（3）已知此人得分不低于 2，即 $X \geq 2$ ，此人得分 4 的概率可表示为：

$$P(X=4 | X \geq 2) = \frac{P(X=4)}{P(X \geq 2)} = \frac{0.008}{0.032 + 0.008} = 0.2。$$

3 解: (1) 没有中大奖的概率是 $p_1 = (1 - 10^{-7})^n$;

(2) 每一期没有中大奖的概率是 $p = (1 - 10^{-7})^{10}$,

n 期没有中大奖的概率是 $p_2 = p^n = (1 - 10^{-7})^{10n}$ 。

4、解 (1) 用 X 表示男婴的个数, 则 X 可取值有 0、1、2、3, 至少有 1 名男婴的概率可表示为:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.51)^3 = 0.8824;$$

(2) 恰有 1 名男婴的概率可表示为:

$$P(X = 1) = C_3^1 0.51 \times (1 - 0.51)^2 = 0.3674;$$

(3) 用 α 表示第 1, 第 2 名是男婴, 第 3 名是女婴的概率, 则

$$\alpha = 0.51^2 \times (1 - 0.51) = 0.127;$$

(4) 用 β 表示第 1, 第 2 名是男婴的概率, 则

$$\beta = 0.51^2 = 0.260。$$

5 解: X 取值可能为 0,1,2,3; Y 取值可能为 0,1,2,3

$$p(x=0) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3),$$

$$p(x=1) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + p_2(1 - p_1)(1 - p_3) + p_3(1 - p_1)(1 - p_2),$$

$$p(x=2) = p_1p_2(1 - p_3) + p_1p_3(1 - p_2) + p_3p_2(1 - p_1),$$

$$p(x=3) = p_1p_2p_3。$$

Y 取每一值的概率分布为:

$$p(y=0) = p_1,$$

$$p(y=1) = (1 - p_1)p_2,$$

$$p(y=2) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3,$$

$$p(y=3) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)。$$

6、解 由题意可判断各次抽样结果是相互独立的, 停止时已检查了 X 件产品, 说明第 X 次

抽样才有可能抽到不合格品。 X 的取值有 1、2、3、4、5, 有

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,4,$$

$$P(X=5)=(1-p)^4;$$

$$(2) P(X \leq 2.5) = P(X=1) + P(X=2) = p + p(1-p) = p(2-p)。$$

$$7 \text{ 解: } (1) \alpha = (1-0.1)^3 \cdot 0.1^2 + {}_5^4 (1-0.1)^4 \cdot 0.1 + {}_5^5 (1-0.1)^5 = 0.991,$$

$$\beta = 1 - 0.2^3 (1-0.2)^2 + {}_5^4 0.2^4 (1-0.2) + {}_5^5 0.2^5 = 0.942。$$

$$(2) \text{ 诊断正确的概率为 } p = 0.7\alpha + 0.3\beta = 0.977。$$

$$(3) \text{ 此人被诊断为有病的概率为 } p = 0.7\alpha + 0.3(1-\beta) = 0.711。$$

7、解 (1) 用 X 表示诊断此人有病的专家的人数, X 的取值有 1、2、3、4、5。在此人有病的条件下, 诊断此人有病的概率为:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= C_5^3 (1-0.1)^3 \cdot 0.1^2 + C_5^4 (1-0.1)^4 \cdot 0.1 + C_5^5 (1-0.1)^5 \\ &= 0.991 \end{aligned}$$

在此人无病的条件下, 诊断此人无病的概率为:

$$\begin{aligned} \beta &= P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= C_5^0 (1-0.2)^5 + C_5^1 (1-0.2)^4 \cdot 0.2 + C_5^2 (1-0.2)^3 \cdot 0.2^2 \\ &= 0.942 \end{aligned}$$

(2) 用 γ 表示诊断正确的概率, 诊断正确可分为两种情况: 有病条件下诊断为有病、无病条件下诊断为无病, 于是:

$$\gamma = 0.7\alpha + 0.3\beta = 0.977;$$

(3) 用 η 表示诊断为有病的概率, 诊断为有病可分为两种情况: 有病条件下诊断此人为有病、无病条件下诊断此人为有病, 于是:

$$\eta = 0.7\alpha + 0.3 \times (1-\beta) = 0.711;$$

8、解 用 A 表示恰有 3 名专家意见一致, B 表示诊断正确的事件, 则

$$P(AB) = 0.7 \times P(X=3) + 0.3 \times P(X=2) = 0.112$$

$$P(A) = 0.7 \times P(X=3 \text{ 或 } X=2) + 0.3 \times P(X=2 \text{ 或 } X=3) = 0.1335$$

所求的概率可表示为:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.842$$

9 解: (1) 由题意知, 候车人数 $X = k$ 的概率为 $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$,

则 $p(X = 0) = e^{-\lambda}$,

从而单位时间内至少有一人候车的概率为 $p = 1 - e^{-\lambda}$, 所以 $1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-4.5}$

解得 $\lambda = 4.5$

则 $p(X = k) = \frac{e^{-4.5} 4.5^k}{k!}$ 。

所以单位时间内至少有两人候车的概率为 $p = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 5.5e^{-4.5}$ 。

(2) 若 $\lambda = 3.2$, 则 $p(X = k) = \frac{e^{-3.2} 3.2^k}{k!}$,

则这车站就他一人候车的概率为 $p = \frac{3.2}{e^{3.2} - 1}$ 。

10、解 有题意知, $X \sim \pi(\lambda t)$, 其中 $\lambda = \frac{1}{20}$

(1) 10: 00 至 12: 00 期间, 即 $t = 120$, 恰好收到 6 条短信的概率为:

$$P(X = 6) = \frac{e^{-\lambda t} (t\lambda)^6}{6!} = \frac{e^{-6} \cdot (-6)^6}{6!} = \frac{324}{5} e^{-6} = 0.161;$$

(2) 在 10: 00 至 12: 00 期间至少收到 5 条短信的概率为:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) = 1 - \sum_{k=0}^4 P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-\lambda t} (t\lambda)^k}{k!} = 1 - 115e^{-6} \end{aligned}$$

于是, 所求的概率为:

$$P(X = 6 | X \geq 5) = \frac{324}{5(e^6 - 115)}。$$

11、解: 由题意知, 被体检出有重大疾病的人数近似服从参数为 $\lambda = np = 3000 \times \frac{1}{1000} = 3$

的泊松分布, 即 $p(X = k) = \frac{e^{-3} 3^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

则至少有 2 人被检出重大疾病的概率为

$$p = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} \approx 0.801。$$

12、解 (1) 由于 $P\{0 < X \leq 1\} + P\{2 \leq X \leq 3\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 因此 X 的概率分布函数为:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{x-1}{2} & 2 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$(2) P\{X \leq 2.5\} = \frac{2.5-1}{2} = \frac{3}{4}$$

13、解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 c(4-x^2)dx = 1$ 解得 $c = \frac{3}{16}$ 。

(2) 易知 $x \leq 0$ 时, $F(x) = 0$; $x \geq 2$ 时, $F(x) = 1$;

$$\text{当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } F(x) = \int_0^x f(y)dy = \frac{3}{16} \int_0^x (4-y^2)dy = \frac{(12x-x^3)}{16},$$

$$\text{所以, } X \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{(12x-x^3)}{16}, & 0 < x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(3) p(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = F(1) = \frac{11}{16}。$$

(4) 事件 $\{-1 < X < 1\}$ 恰好发生 2 次的概率为

$$p = \cancel{p} p(-1 < X < 1)^2 (1 - p(-1 < X < 1))^3 = \frac{11^2}{16} \left(1 - \frac{11}{16}\right)^3 = 0.1442。$$

14、解 (1) 该学生在 7:20 过 X 分钟到站, $X \sim U(0, 25)$, 由题意知, 只有当该学生在 7:20~7:30 期间或者 7:40~7:45 期间到达时, 等车小时 10 分钟, 长度一共 15 分钟, 所以:

$$P\{\text{该学生等车时间小于10分钟}\} = P\{X < 10\} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5};$$

(2) 由题意知, 当该学生在 7:20~7:25 和 7:35~7:45 到达时, 等车时间大于 5 分钟又小于 15 分钟, 长度为 15 分钟, 所以:

$$P\{\text{该学生等车时间大于5分钟又小于15分钟}\} = P\{5 < X < 15\} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5};$$

(3) 已知其候车时间大于 5 分钟的条件下, 其能乘上 7:30 的班车的概率为:

$$P\{\text{该学生乘上7:30的班车}|X>5\} = \frac{P\{\text{该学生乘上7:30的班车且}X>5\}}{P\{X>5\}}$$

其中 $P\{\text{该学生乘上7:30的班车且}X>5\} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, $P\{X>5\} = \frac{5+15}{25} = \frac{4}{5}$, 于是

$$P\{\text{该学生乘上7:30的班车}|X>5\} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

15、解: 由题知, X 服从区间 $(-1, 3)$ 上的均匀分布, 则 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

在该区间取每个数大于 0 的概率为 $\frac{3}{4}$, 则

$$P\{Y=k\} = \delta_n^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

16、解 (1)

$$\begin{aligned} P(X > 2.5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{2.5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > -2.5\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -2.5\right) = 1 - \Phi(-2.5) \\ &= \Phi(2.5) = 0.9938 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(X < 3.52) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3.52-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -1.48\right) \\ &= \Phi(-1.48) = 1 - \Phi(1.48) \\ &= 1 - 0.9306 = 0.0694 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(4 < X < 6) &= P\left(\frac{4-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 1.6826 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

17、解: 他能实现自己的计划的概率为

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2.3}{0.5}\right) = 1 - \Phi(1.4) = 0.0808.$$

18、解 (1) $X \sim N(170, 5.0^2)$, 有题意知, 该青年男子身高大于 170cm 的概率为:

$$\begin{aligned} P(X > 170) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{170 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > 0\right) \\ &= 1 - \Phi(0) = 0.5 \end{aligned}$$

(2) 该青年男子身高大于 165cm 且小于 175cm 的概率为:

$$\begin{aligned} P(165 < X < 175) &= P\left(\frac{165 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{175 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(-1 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 1.6826 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

(3) 该青年男子身高小于 172cm 的概率为:

$$\begin{aligned} P(X < 172) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{172 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < 0.4\right) \\ &= \Phi(0.4) = 0.6554 \end{aligned}$$

19、解: 系统电压小于 200 伏的概率为 $p_1 = P(X \leq 200) = \Phi\left(\frac{200 - 220}{25}\right) = \Phi(-0.8)$,

在区间 $[200, 240]$ 的概率为

$$p_2 = P(200 \leq X < 240) = \Phi\left(\frac{240 - 220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 220}{25}\right) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8),$$

大于 240 伏的概率为 $p_3 = P(X \geq 240) = 1 - \Phi\left(\frac{240 - 220}{25}\right) = 1 - \Phi(0.8)$ 。

(1) 该电子元件不能正常工作的概率为 $\alpha = 0.1p_1 + 0.001p_2 + 0.2p_3 = 0.064$ 。

(2) $\beta = \frac{0.2p_3}{\alpha} = 0.662$ 。

(3) 该系统运行正常的概率为 $\theta = \delta_3^2 (1 - \alpha)^2 \alpha + (1 - \alpha)^3 = 0.972$ 。

20、解 (1) 有题意知:

$$P(|Z| < a) = P(-a < Z < a) = 1 - 2P(Z \geq a) = \alpha$$

$$\text{于是 } P(Z \geq a) = \frac{1 - \alpha}{2},$$

从而得到侧分位点 $a = z_{(1-\alpha)/2}$;

(2)

$$P(|Z| > b) = P(Z > b \text{ 或 } Z < b) = P(Z > b) + P(Z < b) = 2P(Z > b) = \alpha,$$

$$\text{于是 } P(Z > b) = \frac{\alpha}{2},$$

结合概率密度函数是连续的, 可得到侧分点为 $b = z_{\alpha/2}$;

(3)

$$P(Z < c) = 1 - P(Z \geq c) = \alpha$$

于是 $P(Z \geq c) = 1 - \alpha$, 从而得到侧分点为 $c = z_{1-\alpha}$ 。

$$21、\text{解: 由题意得, } p(X < x_1) = \Phi\left(\frac{x_1 - 15}{2}\right),$$

$$p(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - 15}{2}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 15}{2}\right),$$

$$p(X > x_2) = 1 - \Phi\left(\frac{x_2 - 15}{2}\right),$$

$$\text{则 } \Phi\left(\frac{x_1 - 15}{2}\right) : \left(\Phi\left(\frac{x_2 - 15}{2}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 15}{2}\right)\right) : \left(1 - \Phi\left(\frac{x_2 - 15}{2}\right)\right) = 50 : 34 : 16,$$

解得 $x_1 = 15$, $x_2 = 17$ 。

22、解 (1) 由密度函数的性质得:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot e^{-x^2} dx = a\sqrt{\pi}$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

(2)

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \int_{-\infty}^{0.5} a \cdot e^{-x^2} dx$$

令 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}t$, 上式可写为:

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 0.761 = 0.239。$$

$$23 \text{ 解: (1) 易知 } X \text{ 的概率密度函数为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(2) A 等待时间超过 10 分钟的概率是 $p(X > 10) = \int_{10}^{\infty} f(x) dx = e^{-1.25}$ 。

(3) 等待时间大于 8 分钟且小于 16 分钟的概率是

$$p(8 < X < 16) = \int_8^{16} f(x) dx = e^{-1} - e^{-2}。$$

24、解 用 X , Y 分别表示甲、乙两厂生产的同类型产品的寿命, 用 Z 表示从这批混合产品中随机取一件产品的寿命, 则该产品寿命大于 6 年的概率为:

$$P(Z > 6) = P(X > 6) \cdot P(\text{取到甲厂的产品}) + P(Y > 6) \cdot P(\text{取到乙厂的产品})$$

$$= 0.4 \int_6^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx + 0.6 \int_6^{\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx$$

$$= 0.4e^{-2} + 0.6e^{-1} = 0.2749$$

(2) 该产品寿命大于 8 年的概率为:

$$P(Z > 8) = P(X > 8) \cdot P(\text{取到甲厂的产品}) + P(Y > 8) \cdot P(\text{取到乙厂的产品})$$

$$= 0.4 \int_8^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx + 0.6 \int_8^{\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx$$

$$= 0.4e^{-\frac{8}{3}} + 0.6e^{-\frac{4}{3}} = 0.1860$$

所求的概率为:

$$P(Z > 8 | Z > 6) = \frac{P(Z > 8)}{P(Z > 6)} = 0.6772。$$

25、解: (1) 由题知, $f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$(2) p\{5 < x < 10\} = F(10) - F(5) = e^{-1} - e^{-2}。$$

$$(3) \text{每天等待时间不超过五分钟的概率为 } p\{x \leq 5\} = F(5) = 1 - e^{-1},$$

则每一周至少有 6 天等待时间不超过五分钟的概率为

$$p = 6p\{x \leq 5\}^6 (1 - p\{x \leq 5\}) + p\{x \leq 5\}^7 = (1 - e^{-1})^6 (6e^{-1} + 1)。$$

26、解 (1) 这 3 只元件中恰好有 2 只寿命大于 150 小时的概率 α 为:

$$\alpha = C_3^2 [P(X > 150)]^2 P(X \leq 150) = C_3^2 [1 - P(X \leq 150)]^2 P(X \leq 150),$$

$$\text{其中 } P(X \leq 150) = \int_0^{150} 0.01e^{-0.01x} dx = 0.7769$$

$$\text{于是 } \alpha = 3 \cdot [1 - P(X \leq 150)]^2 P(X \leq 150) ;$$

(2) 这个人会再买, 说明这 3 只元件中至少有 2 只寿命大于 150 小时, 这时所求的概率 β 为:

$$\beta = C_3^2 [P(X > 150)]^2 P(X \leq 150) + C_3^3 [P(X > 150)]^3 = 0.1271。$$

27、解：依题知，Y 的分布律为

$$p(Y=10) = p(X=2) = 0.7^2 = 0.490,$$

$$p(Y=8) = p(X=3) = \delta_2^1 0.7(1-0.7) \cdot 0.7 = 0.294,$$

$$p(Y=2) = p(X \geq 4) = p(X=4) + p(X=5) = \delta_4^1 0.7(1-0.7)^2 \cdot 0.7 + \delta_4^1 0.7(1-0.7)^3 \cdot 0.7 = 0.216$$

28、解 (1) 由密度函数的性质可得：

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^2 c(4-x^2) dx = 9c$$

$$\text{于是 } c = \frac{1}{9}$$

(2) 设 X, Y 的分布函数分别为: $F_X(x)$, $F_Y(x)$, Y 的概率密度为 $f_Y(x)$, 有

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(3X \leq x) = P(X \leq \frac{1}{3}x) = F_X(\frac{1}{3}x)$$

$$\text{那么, } f_Y(x) = \frac{1}{3} f(\frac{1}{3}x) = \begin{cases} \frac{1}{27} [4 - (\frac{x}{3})^2], & -3 < x < 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

(3) 设 Z 的分布函数为: $F_Z(x)$ 。当 $x \leq 0$, 显然 $F_Z(x) = 0$ 。当 $x > 0$, 有

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x < X < x) = F_X(x) - F_X(-x),$$

$$\text{于是有 } f_Z(x) = f(x) + f(-x) = \begin{cases} \frac{2}{9} (4-x^2), & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{9} (4-x^2), & -3 < x < 0 \\ 0, & x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3 \end{cases}$$

$$\text{从而, Z 的概率密度为: } f_Z(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} (4-x^2), & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{9} (4-x^2), & -3 < x < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

Z 的分布函数为:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \\ 2(12x - x^3)/27, & 0 < x \leq 1 \\ (12x - x^3 + 11)/27, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}。$$

29、解：（1）依题知， $N(t) \sim \pi(\lambda t)$

当 $t \leq 0$ 时， $F_T(t) = 0$ ，

当 $t > 0$ 时， $F_T(t) = \int_0^t f_{N(t)}(y) dy = 1 - e^{-\lambda t}$ ，

所以，T 的概率分布函数为 $F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

$$(2) \quad p(T > t_0 + t | T > t_0) = \frac{p(T > t_0 + t, T > t_0)}{p(T > t_0)}$$

$$= \frac{p(T > t_0 + t)}{p(T > t_0)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t_0+t)}}{e^{-\lambda t_0}}$$

$$= e^{-\lambda t}。$$

30、解 由题意知， $X \sim U(0,1)$ ，即 X 的概率密度为：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 X ， Y 的分布函数分别为： $F_X(x)$ ， $F_Y(y)$ ，其中 $Y = X^n$ 。有

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

当 $y \leq 0$ ，显然有 $F_Y(y) = 0$ 。当 $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(0 < X^n \leq y) = P(0 < X \leq \sqrt[n]{y}) = F_X(\sqrt[n]{y})$$

$$\text{那么} \quad f_Y(Y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

31 解: 由题意知, X 的概率分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2x}{3\pi}, & 0 \leq x < \frac{3\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

则 $p(Y \leq y) = p(\cos X \leq y)$

$$= p(X \leq \arccos y)$$

$$= F(\arccos y)$$

$$= \begin{cases} 0, & y < -1, \\ \frac{4(\pi - \arccos y)}{3\pi}, & -1 \leq y < 0, \\ 1 - \frac{2\arccos y}{3\pi}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

32、解 由题意知, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 即 X 的概率密度为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, |x| < +\infty$$

设 X , Y 的分布函数分别为: $F_X(x)$, $F_Y(y)$, 其中 $Y = X^2$ 。

当 $y \leq 0$, 显然有 $F_Y(y) = 0$ 。当 $y > 0$, 有

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

那么

$$f_Y(Y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y} \cdot \sigma} [e^{-(\sqrt{y}-\mu)^2/(2\sigma^2)} + e^{-(\sqrt{y}+\mu)^2/(2\sigma^2)}], & y > 0 \end{cases}$$

33 解: (1) 由题意知, $\begin{cases} \int_0^2 (ax+b) dx = 1 \\ \int_0^1 (ax+b) dx = \frac{1}{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}$ 。

(2) $y = \sqrt{x}$ 的反函数为 $x = y^2$, 则

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y^2) \cdot 2y, & 0 < y < \sqrt{2} \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y(2y^2+1)}{3}, & 0 < y < \sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

34、解 设 X , Y , Z 的分布函数分别为: $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$ 。由 $Y = e^X$, 容易得出:

当 $y \leq 0$, 有 $F_Y(y) = 0$ 。当 $y > 0$, 有

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y),$$

$$\text{从而求得 } Y \text{ 的概率密度: } f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0 \end{cases};$$

又 $Z = \ln|X|$, 于是

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\ln|X| \leq z) = P(|X| \leq e^z) = P(-e^z \leq X \leq e^z) = F_X(e^z) - F_X(-e^z)$$

从而

$$f_Z(z) = [f_X(e^z) + f_X(-e^z)]e^z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z - \frac{(e^z)^2}{2}}, |z| < \infty$$

第三章 多维随机变量及其概率分布

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1、解 互换球后，红球的总数是不变的，即有 $X+Y=6$ ， X 的可能取值有：2, 3, 4, Y 的取值为：2, 3, 4。则 (X, Y) 的联合分布律为：

$$P(X=2, Y=2)=P(X=2, Y=3)=P(X=3, Y=2)=P(X=3, Y=4)=P(X=4, Y=3)=P(X=4, Y=4)=0$$

$$P(X=2, Y=4)=P(X=4, Y=2)=\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(X=3, Y=3)=\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

由于 $X+Y=6$ ，计算 X 的边缘分布律为：

$$P(X=2)=P(X=2, Y=4)=\frac{6}{25}$$

$$P(X=3)=P(X=3, Y=3)=\frac{13}{25}$$

$$P(X=4)=P(X=4, Y=2)=\frac{6}{25}$$

$$2 \text{ 解: } a+b+0.5=1 \quad (1)$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=0.4+a$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}=a+b$$

因事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\} \cdot P\{X+Y=1\}, \text{ 即}$$

$$a=(0.4+a)(a+b) \quad (2)$$

$$\text{由 (1), (2) 解得 } \begin{cases} a=0.4 \\ b=0.1 \end{cases}.$$

3、解 利用分布律的性质，由题意，得

$$a+0.1+0.1+b+0.1+0.1+c=1$$

$$P\{Y \leq 0 | X < 2\} = \frac{P(Y \leq 0, X < 2)}{P(X < 2)} = \frac{P(Y \leq 0, X=1)}{P(X=1)} = \frac{a+0.1}{a+0.1+b} = 0.5$$

$$P\{Y=1\}=b+c=0.5$$

计算可得: $a=c=0.2$ $b=0.3$

于是 X 的边缘分布律为:

$$P(X=1)=a+0.1+b=0.6$$

$$P(X=2)=0.1+0.1+c=0.2+c=0.4$$

Y 的边缘分布律为

$$P(Y=-1)=a+0.1=0.3, \quad P(Y=0)=0.2$$

$$P(Y=1)=b+c=0.5$$

4 解: (1) 由已知 $p\{X=0, Y=0\}=p\{X=1, Y=2\}=0.1$, 则

$$p\{X=0, Y=2\}=p\{Y=2\}-p\{X=1, Y=2\}=0.3-0.1=0.2,$$

$$p\{X=0, Y=1\}=p\{X=0\}-p\{X=0, Y=0\}-p\{X=0, Y=2\}=0.1,$$

$$p\{X=1, Y=0\}=p\{Y=0\}-p\{X=0, Y=0\}=0.1,$$

$$p\{X=1, Y=1\}=p\{X=1\}-p\{X=1, Y=0\}-p\{X=1, Y=2\}=0.4.$$

$$(2) \quad p\{Y=k|X=0\}=\frac{p\{X=0, Y=k\}}{p\{X=0\}}=\begin{cases} \frac{1}{4}, & k=0, \\ \frac{1}{4}, & k=1, \\ \frac{1}{2}, & k=2. \end{cases}$$

5、解 (1) 每次抛硬币是正面的概率为 0.5, 且每次抛硬币是相互独立的。由题意知, X 的可能取值有: 3, 2, 1, 0, Y 的取值为: 3, 1。则 (X, Y) 的联合分布律为:

$$P(X=3, Y=1)=P(X=2, Y=3)=P(X=1, Y=3)=P(X=0, Y=1)=0$$

$$P(X=3, Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}, \quad P(X=2, Y=1)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=1, Y=1)=C_3^1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}, \quad P(X=0, Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

X 的边缘分布律为:

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}, \quad P(X=1)=C_3^1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Y 的边缘分布律为:

$$P(Y=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=3, Y=3) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) = \frac{3}{4}$$

(2) 在 $\{Y=1\}$ 的条件下 X 的条件分布律为:

$$P(X=0|Y=1) = 0, \quad P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2|Y=1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1}{2}, \quad P(X=3|Y=1) = 0$$

6 解: (1) $p\{X=0, Y=1\} = p\{Y=1|X=0\}p\{X=0\} = \frac{1}{15},$

$$p\{X=0, Y=2\} = p\{Y=2|X=0\}p\{X=0\} = \frac{11}{30},$$

$$p\{X=0, Y=3\} = p\{Y=3|X=0\}p\{X=0\} = \frac{1}{15},$$

$$p\{X=1, Y=1\} = p\{Y=1|X=1\}p\{X=1\} = \frac{7}{18},$$

$$p\{X=1, Y=2\} = p\{Y=2|X=1\}p\{X=1\} = \frac{1}{18},$$

$$p\{X=1, Y=3\} = p\{Y=3|X=1\}p\{X=1\} = \frac{1}{18}。$$

$$(2) \quad p\{Y=1\} = p\{X=0, Y=1\} + p\{X=1, Y=1\} = \frac{41}{90},$$

$$p\{Y=2\} = p\{X=0, Y=2\} + p\{X=1, Y=2\} = \frac{38}{90},$$

$$p\{Y=3\} = p\{X=0, Y=3\} + p\{X=1, Y=3\} = \frac{11}{90}。$$

$$(3) \quad p\{X=0|Y=1\} = \frac{p\{X=0, Y=1\}}{p\{Y=1\}} = \frac{6}{41},$$

$$p\{X=1|Y=1\} = \frac{p\{X=1, Y=1\}}{p\{Y=1\}} = \frac{35}{41}。$$

7、解 (1) 已知 $P(X=m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$, $m=0,1,2,3,\dots$ 。由题意知, 每次因超速引起的事

故是相互独立的，当 $m=0,1,2,3\cdots$ 时，

$$P(Y=n|X=m)=C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n}, \quad n=0,1,2,\cdots m。$$

于是 (X,Y) 的联合分布律为：

$$P(X=m,Y=n)=P(X=m)\cdot P(Y=n|X=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n},$$

$$(n=0,1,2,\cdots m; \quad m=0,1,2,3\cdots)$$

(2) Y 的边缘分布律为：

$$P(Y=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}P(X=m,Y=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n}=\frac{e^{-0.1\lambda}(0.1\lambda)^n}{n!},$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

即 $Y\sim\pi(0.1\lambda)$ 。

(该题与 41 页例 3.1.4 相似)

8 解：(1) Y 可取值为 0, a , $2a$,

$$p(X=0,Y=0)=0.6,$$

$$p(X=0,Y=a)=p(X=0,Y=2a)=0,$$

$$p(X=1,Y=0)=0.3(1-p),$$

$$p(X=1,Y=a)=0.3p,$$

$$p(X=1,Y=2a)=0,$$

$$p(X=2,Y=0)=0.1(1-p)^2,$$

$$p(X=2,Y=a)=0.2p(1-p),$$

$$p(X=2,Y=2a)=0.1p^2。$$

$$(2) \quad p(Y=0|X=1)=(1-p),$$

$$p(Y=a|X=1)=p,$$

$$p(Y=2a|X=1)=0。$$

9、解 (1)由边际分布函数的定义，知

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.4, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

(2) 从 X 和 Y 的分布函数，可以判断出 X 和 Y 都服从两点分布，则 X 的边际分布律为：

X	0	1
P	0.3	0.7

Y 的边际分布律为

Y	0	1
P	0.4	0.6

(3) 易判断出 $P(X=0, Y=0)=0.1$ ，所以 (X, Y) 的联合分布律为：

$$P(X=0, Y=0)=0.1$$

$$P(X=0, Y=1)=P(X=0)-P(X=0, Y=0)=0.2$$

$$P(X=1, Y=0)=P(Y=0)-P(X=0, Y=0)=0.3$$

$$P(X=1, Y=1)=P(Y=1)-P(X=0, Y=1)=0.4。$$

$$10 \text{ 解: (1) } p\{X=0, Y=1\} = p\{Y=1|X=0\}p\{X=0\} = p\{B|\bar{A}\}p\{\bar{A}\} = 0.35,$$

$$p\{X=0, Y=0\} = p\{X=0\} - p\{X=0, Y=1\} = 0.35,$$

$$p\{X=1, Y=0\} = p\{Y=0\} - p\{X=0, Y=0\} = 1 - p\{Y=1\} - p\{X=0, Y=0\} = 0.25,$$

$$p\{X=1, Y=1\} = p\{X=1\} - p\{X=1, Y=0\} = 0.05。$$

(2) 当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时， $F(x, y) = 0$ ，

当 $0 \leq x < 1$ ， $0 \leq y < 1$ 时， $F(x, y) = p\{X=0, Y=0\} = 0.35$ ，

当 $0 \leq x < 1$ ， $y \geq 1$ 时， $F(x, y) = p\{X=0, Y=0\} + p\{X=0, Y=1\} = 0.7$ ，

当 $x \geq 1, 0 \leq y < 1$ 时, $F(x, y) = p\{X=0, Y=0\} + p\{X=1, Y=0\} = 0.6$,

当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, $F(x, y) = 1$ 。

$$\text{所以, } (X, Y) \text{ 的联合分布函数为 } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ 0.35, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 0.7, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ 0.6, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

11、解 由 (X, Y) 的联合分布律可知, 在 $\{X=1\}$ 的条件下, Y 的条件分布律为:

$$P(Y=0|X=1) = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.25}{0.3} = \frac{5}{6}$$

$$P(Y=1|X=1) = \frac{P\{Y=1, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$$

因此在 $\{X=1\}$ 的条件下, Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(Y|1) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{5}{6}, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

12 解: 设 $F\{x, y\} = kxy$, $(x, y) \in D$,

则 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, $k + 0.2 = 1$, 即 $k = 0.8$ 。

所以 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ 0.8xy + 0.1, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 0.8x + 0.1, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ 0.8y + 0.1, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

13、解 由 $f(x, y)$ 的性质, 得:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y c(y-x) dx = \frac{c}{6},$$

所以 $c = 6$

(2) 设 $D_1 = \{(x, y) | x + y \leq 1, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, 则

$$P\{X+Y \leq 1\} = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} c(y-x) dy = 0.5$$

(3) 设 $D_2 = \{(x,y) | 0 \leq x \leq y \leq 1, X \leq 0.5\}$, 则

$$P\{X < 0.5\} = \iint_{D_2} f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^1 c(y-x) dy = \frac{7}{8}$$

14 解: (1) 由 $1 = \int_1^2 \int_x^{4-x} c(x-1) dy dx = \frac{c}{3}$ 得 $c = 3$ 。

(2) 由 (1) 知, $f(x,y) = \begin{cases} 3(x-1), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

$$\text{则 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} 3 \int_x^{4-x} (x-1) dy, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} = \begin{cases} 3(x-1)(4-2x), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} 3 \int_1^y (x-1) dx, & 1 \leq y < 2, \\ 3 \int_1^{4-y} (x-1) dx, & 2 \leq y < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3(y-1)^2}{2}, & 1 < y \leq 2, \\ \frac{3(3-y)^2}{2}, & 2 < y < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

15、解 (1) 由题意, 知

$$\text{当 } x \in (0, +\infty), \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^x e^{-x} dy = xe^{-x}$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, 0], \quad f_X(x) = 0$$

$$\text{所以: } f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases};$$

$$\text{当 } y \in (0, +\infty), \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-y}$$

$$\text{当 } y \in (-\infty, 0], \quad f_Y(y) = 0$$

$$\text{所以: } f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ e^{-y}, & y > 0 \end{cases};$$

(2) 当 $x > 0$ 时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & y \text{ 取其他值} \end{cases}$$

(3) 当已知 $\{X=x\}$ 时, 由 $f_{Y|X}(y|x)$ 的公式可以判断出, Y 的条件分布为 $[0, x]$ 上的均匀分布。

16 解: (1) 由 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 得,

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\frac{y}{x} - \lambda x}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

(2) 当 $x > 0$ 时,

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, v)}{f_X(x)} dv = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(v|x) dv = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{x} e^{-\frac{v}{x}} dv, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y}{x}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(3) \quad p\{Y > 1 | X = 1\} = p\{X = 1\} - p\{Y \leq 1 | X = 1\} = e^{-1}.$$

17、解 (1) 由题意可得:

$$\text{当 } |y| < 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{y^2}^1 \frac{5}{4} x dx = \frac{5}{8} (1 - y^4),$$

$$\text{当 } |y| \geq 1, \quad f_Y(y) = 0$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{8} (1 - y^4), & |y| < 1; \\ 0, & |y| \geq 1 \end{cases}$$

(2) 当 $y^2 < 1$ 时

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{5}{4}x}{\frac{5}{8}(1-y^4)} = \frac{2x}{1-y^4}, & y^2 \leq x < 1 \\ 0, & x \text{ 取其他值} \end{cases}$$

$$(3) \text{ 当 } y = \frac{1}{2} \text{ 时, } f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{32x}{15}, & \frac{1}{4} \leq x < 1 \\ 0, & x \text{ 取其他值} \end{cases}$$

$$\text{所以 } P\{X > \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{32x}{15} dx = 0.8.$$

18 解: (1) 因 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$,

所以 $f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{(1-x)\ln(1-y)}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

19、解 设事故车与处理车的距离 Z 的分布函数为 $F_Z(t)$, X 和 Y 都服从 $(0, m)$ 的均匀分布, 且相互独立, 由题意知:

当 $0 < t < m$ 时, $F_Z(t) = P(Z < t) = P\{|X - Y| < t\} = \frac{m^2 - (m-t)^2}{m^2} = \frac{2mt - t^2}{m^2}$,

有

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2mt - t^2}{m^2}, & 0 \leq t < m \\ 1, & t \geq m \end{cases}$$

所以 Z 的概率密度函数 $f_Z(t)$ 为:

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{2(m-t)}{m^2}, & 0 \leq t < m \\ 0, & t \text{ 取其他值} \end{cases}$$

20 解: 由题意得 $(X, Y) \square U(D)$, 即 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

(1) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi} dx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

$$(2) \quad P\{Y < 1/2\} = \int_0^{1/2} f_Y(y) dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2} \sqrt{1-y^2} dy = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$(3) \quad \text{同理得 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

所以 $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不独立。

21、解 (1) 设 X , Y 的边际概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 由已知条件得,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{4}}$$

(计算的详细过程见例 3.3.5)

(2) 有条件概率密度的定义可得:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}[y-1+\frac{1}{\sqrt{2}}x]^2}$$

在 $\{X=0\}$ 的条件下, Y 的条件概率密度为:

$$f_{Y|X}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}[y-1]^2}$$

$$(3) \quad P(Y \leq 1 | X=0) = \int_{-\infty}^1 f_{Y|X}(y|0) dy = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}[y-1]^2} dy = 0.5$$

$$22 \text{ 解: } (1) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dy$$

$$= \frac{1}{2} (f_{1X}(x) + f_{2X}(x))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad |x| < \infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad |y| < \infty$$

(2) 当 $\rho_i = 0$ ($i=1, 2$) 时, X_1 与 Y_1 , X_2 与 Y_2 均独立, 则

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{2} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] \\
 &= \frac{1}{2} [f_{1X}(x) f_{1Y}(y) + f_{2X}(x) f_{2Y}(y)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}
 \end{aligned}$$

所以, $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 即 X 与 Y 独立。

23、解 设 T 表示正常工作的时间。由题意知 $X_i \sim E(\lambda)$ ($i=1, 2, 3$), 即

$$F_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x_i}, & x_i > 0 \end{cases}.$$

设 $F_T(t)$ 是设备正常工作时间的概率分布函数, $f_T(t)$ 是概率密度函数。则

当 $t > 0$ 时

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= P(T \leq t) \\
 &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t) + P(X_1 \leq t, X_3 \leq t) + P(X_2 \leq t, X_3 \leq t) - 2P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\} \\
 &= 3(1 - e^{-\lambda t})^2 - 2(1 - e^{-\lambda t})^3
 \end{aligned}$$

当 $t \leq 0$ 时, $F_T(t) = 0$ 。

$$\text{于是: } F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 3(1 - e^{-\lambda t})^2 - 2(1 - e^{-\lambda t})^3, & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{同时可求得: } f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 6\lambda e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}), & t > 0 \end{cases}.$$

24 解: (1) $P(z = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ 。

所以, $Z \sim B(n, p)$

(2)

$$\begin{aligned}
 P(W = k) &= P(X + Y = k) \\
 &= \sum_{l=0}^k P(X = l, Y = k-l) \\
 &= \sum_{l=0}^k C_m^l p^l (1-p)^{m-l} C_n^{k-l} p^{k-l} (1-p)^{n-k+l} \\
 &= C_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k}, k = 0, \dots, m+n
 \end{aligned}$$

所以, $W \sim B(m+n, p)$ 。

25、解 设 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(t)$ 分别是 X , Y , Z 的概率密度。利用公式 (3.5.5), 由题意得:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f_Y(t-x) dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f_Y(y) dy = \frac{1}{2a} [P(Y \leq t+a) - P(Y \leq t-a)] \quad , \quad |t| < +\infty . \\ &= \frac{1}{2a} \left[\Phi\left(\frac{t+a-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t-a-\mu}{\sigma}\right) \right] \end{aligned}$$

26 解: $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t-x) dx$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \int_0^t \frac{3-t}{3} dx, & 0 < t \leq 1, \\ \int_0^1 \frac{3-t}{3} dx, & 1 < t \leq 2, \\ \int_{t-2}^1 \frac{3-t}{3} dx, & 2 < t < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{t(3-t)}{3}, & 0 < t \leq 1, \\ \frac{(3-t)}{3}, & 1 < t \leq 2, \\ \frac{(3-t)^2}{3}, & 2 < t < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \end{aligned}$$

27、解 设 X_i 为一月中第 i 天的产煤量 ($i=1, 2, \dots, 30$), Z 是一月中总的产煤量。由于

$X_i \sim N(1.5, 0.1^2)$, 且相互独立, 因此有 $Z = \sum_{i=1}^{30} X_i \sim N(30 \times 1.5, 30 \times 0.1^2)$, 即

$Z \sim N(45, 3)$ 。

于是,

$$P(Z > 46) = 1 - P(Z \leq 46) = 1 - \Phi\left(\frac{46-45}{\sqrt{0.3}}\right) = 0.034$$

28 解: $F_Z(z) = P(X+Y \leq z)$

$$\begin{aligned}
&= P(X=0, Y \leq z) + P(X=100, Y \leq z-100) + P(X=500, Y \leq z-500) \\
&= 0.5F(z) + 0.3F(z-100) + 0.2F(z-500)
\end{aligned}$$

所以, $f_z(z) = 0.5f(z) + 0.3f(z-100) + 0.2f(z-500)$ 。

29、解 (1) 由于 $X_i \sim \pi(\lambda)$ ($i=1, 2, \dots, 10$), 且相互独立, 因此有 $\sum_{i=0}^{10} X_i \sim \pi(10\lambda)$ (见

例 3.5.1), 由题意知, 得

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=0}^{10} X_i \geq 2\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=0}^{10} X_i < 2\right) = 1 - P\left(\sum_{i=0}^{10} X_i = 0\right) - P\left(\sum_{i=0}^{10} X_i = 1\right) \\
&= 1 - (1 + 10\lambda)e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

(2) 所求的概率为:

$$\begin{aligned}
P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i \geq 2) &= 1 - P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2) \\
&= 1 - P(X_1 < 2, X_2 < 2, \dots, X_{10} < 2) = 1 - P(X_1 < 2)^{10} \\
&= 1 - (1 + \lambda)^{10} e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

(3) 由题意可求:

$$\begin{aligned}
P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) &= 1 - P(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{10} > 0) \\
&= 1 - [1 - P(X_1 = 0)]^{10} = 1 - (1 - e^{-\lambda})^{10}
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i \geq 2, \min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) &= P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2, \min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) \\
&= P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2) + P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2, \min_{1 \leq i \leq 10} X_i > 0) \\
&= P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2) + P\{0 < X_i < 2 \mid i=1, 2, \dots, 10\} \\
&= P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - (1 + \lambda)^{10} e^{-10\lambda} + \lambda^{10} e^{-10\lambda}
\end{aligned}$$

于是所求的概率为:

$$\begin{aligned}
P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i \geq 2 \mid \min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) &= \frac{P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i \geq 2, \min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0)}{P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0)} = \frac{P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - P(\max_{1 \leq i \leq 10} X_i < 2, \min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0)}{P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0)} \\
&= \frac{P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0) - (1 + \lambda)^{10} e^{-10\lambda} + \lambda^{10} e^{-10\lambda}}{P(\min_{1 \leq i \leq 10} X_i = 0)} \\
&= 1 - \frac{[(1 + \lambda)^{10} - \lambda^{10}]e^{-10\lambda}}{1 - (1 - e^{-\lambda})^{10}}
\end{aligned}$$

30 解: ① $P(Z=1) = P(X=0, Y=1) = 0.04$,

$P(Z=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = 0.14$,

$$P(Z=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0.3,$$

$$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)=0.32,$$

$$P(Z=5)=P(X=2,Y=3)=0.2。$$

$$\textcircled{2} P(M=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0.1,$$

$$P(M=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=2)=0.5,$$

$$P(M=3)=0.4。$$

$$\textcircled{3} P(N=0)=0.2,$$

$$P(N=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=1)=0.4$$

$$P(N=2)=P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)=0.4。$$

31、解 设 T 的概率密度函数为 $f_T(t)$ 。

(1) 串联

当 $t > 0$ 时

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X > t, Y > t)$$

$$= 1 - \int_t^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \int_t^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\text{计算可得 } f_T(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

当 $t \leq 0$ 时，显然有 $f_T(t) = 0$ 。

因此 T 的概率密度函数为 $f_T(t)$ 为：

$$f_T(t) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

(2) 并联

当 $t > 0$ 时

$$P(T \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t)$$

$$= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\text{计算可得 } f_T(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

当 $t \leq 0$ 时，显然有 $f_T(t) = 0$ 。

因此 T 的概率密度函数为 $f_T(t)$ 为：

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

(3) 备份

由题意知, $T = X + Y$, 于是

当 $t \leq 0$ 时, 显然有 $f_T(t) = 0$ 。

当 $t > 0$ 时

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-y)} dy \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}], & \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ \lambda_1^2 t e^{-\lambda_1 t}, & \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases} \end{aligned}$$

从而所求的概率密度函数为:

当 $\lambda_2 \neq \lambda_1$ 时

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}], & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

当 $\lambda_2 = \lambda_1$ 时

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda_1^2 t e^{-\lambda_1 t}, & t > 0 \end{cases}$$

32 解: 令 $\begin{cases} u = x \\ v = 2x - y \end{cases}$, 则

$$F_Z(z) = P(2X - Y \leq z)$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^z \int_{v/2}^2 f(u, 2u-v) du dv \\ &= \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \int_0^z \int_{v/2}^2 \frac{1}{4} du dv, & 0 < z \leq 4 \\ 1, & z \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z}{2} - \frac{z^2}{16}, & 0 < z \leq 4 \\ 1, & z \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{所以, } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{z}{8}, & 0 < z \leq 4, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

33、解 (1) 由题意得, 对 X 独立观察 n 次, n 次观察值之和 W 的概率分布律为:

$$P(W=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,3,\dots,n$$

(2) X 的可能取值为: 0, 1, Z 的可能取值为: 0, 1, 因此 (X, Z) 的联合分布律为:

$$P(X=0, Z=0) = P(X=0, X+Y \neq 1) = P(X=0, Y=0) = (1-p)^2$$

$$P(X=0, Z=1) = P(X=0, X+Y=1) = P(X=0, Y=1) = p(1-p)$$

$$P(X=1, Z=0) = P(X=1, X+Y \neq 1) = P(X=1, Y=1) = p^2$$

$$P(X=1, Z=1) = P(X=1, X+Y=1) = P(X=1, Y=0) = p(1-p)$$

$$34 \text{ 解: 令 } \begin{cases} u=x \\ v=\frac{x}{y} \end{cases}, \text{ 则}$$

$$F_Z(t) = P\left(\frac{X}{Y} \leq t\right)$$

$$= \iint_{\substack{\frac{x}{y} \leq t, \\ 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1}} f(x, y) dx dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \int_0^1 f\left(u, \frac{u}{v}\right) \frac{u}{v^2} du dv, & t \geq 1, \\ \int_0^t \int_0^v f\left(u, \frac{u}{v}\right) \frac{u}{v^2} du dv, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2t}, & t \geq 1, \\ \frac{t}{2}, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$f_z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^2}, & t \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

第四章 随机变量的数字特征

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1、解 每次抽到正品的概率为： $\frac{N}{M}$ ，放回抽取，抽取 n 次，抽到正品的平均次数为： $\frac{N}{M}n$

2、方案一：平均年薪为 3 万

方案二：记年薪为 X ，则 $p(X=1.2)=0.2$ ， $p(X=4.2)=0.8$

$$EX = 1.2 \times 0.2 + 4.2 \times 0.8 = 3.6 > 3$$

故应采用方案二

3、解 由于：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

所以 X 的数学期望不存在。

4、
$$p(X=2) = \frac{1}{28}, p(X=3) = \frac{1}{14}, p(X=4) = \frac{3}{28}, p(X=5) = \frac{1}{7}, p(X=6) = \frac{5}{28},$$

$$p(X=7) = \frac{3}{14}, p(X=8) = \frac{1}{4},$$

$$EX = 2 \times \frac{1}{28} + 3 \times \frac{1}{14} + 4 \times \frac{3}{28} + 5 \times \frac{1}{7} + 6 \times \frac{5}{28} + 7 \times \frac{3}{14} + 8 \times \frac{1}{4} = 6.$$

5、解 每次向右移动的概率为 p ，到时刻 n 为止质点向右移动的平均次数，即 η_n 的期望为：

$$E(\eta_n) = np$$

时刻 n 质点的位置 S_n 的期望为： $E(S_n) = np - n(1-p) = n(2p-1)$

6、不会

7、解 方法 1: 由于 $P(T \geq 0) = 1$, 所以 T 为非负随机变量。于是有:

$$E(T) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \int_0^{+\infty} P(T > t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t} (1 + e^{-t}) dt = \frac{3}{4}$$

方法二: 由于 $P(T \geq 0) = 1$, 所以, 可以求出 T 的概率函数:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-t} (1 + 2e^{-t}), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{于是 } E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t) dt = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \frac{3}{4}$$

$$8、f_x(x) = \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^x \frac{2}{x} e^{-2x} dy = 2e^{-2x}, \quad 0 < x < +\infty$$

$$(1) EX = \int_0^{\infty} x f_x(x) dx = \int_0^{\infty} 2x e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

$$(2) E(3X - 1) = 3EX - 1 = \frac{1}{2}$$

$$(3) E(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^x xy \frac{2}{x} e^{-2x} dy dx = \frac{1}{4}。$$

9. 解 设棍子上的点是在 $[0, 1]$ 之间的, Q 点的位置距离端点 0 的长度为 q 。设棍子是在 t 点处跌断, t 服从 $[0, 1]$ 的均匀分布。于是: 包含 Q 点的棍子长度为 T , 则:

$$T = \begin{cases} t, & q < t < 1 \\ 1 - t, & 0 \leq t < q \\ \min(q, 1 - q), & t = q \end{cases}, \quad q \leq t \leq 1$$

于是包 Q 点的那一段棍子的平均长度为:

$$E(T) = \int_0^1 T dx = \int_0^q (1 - t) dt + \int_q^1 t dt = \frac{1}{2} + q - q^2$$

$$10、X \sim U(8, 9), Y \sim U(8, 9)$$

$$E|X - Y| = \int_8^9 \int_8^9 |x - y| f(x, y) dx dy = \frac{1}{3} (\text{小时})$$

即先到的人等待的平均时间为 20 分钟。

11、解 (I) 每个人化验一次, 需要化验 500 次

(II) 分成 k 组, 对每一组进行化验一共化验 $\frac{500}{k}$ 次, 每组化验为阳性的概率为: $1 - 0.7^k$,

若该组检验为阳性的话, 需对每个人进行化验需要 k 次, 于是该方法需要化验的次数为:

$$\frac{500}{k} (1 + (1 - 0.7^k)k)。$$

$$\text{将 (II) 的次数减去 (I) 的次数, 得: } \frac{500}{k} (1 + (1 - 0.7^k)k) - 500 = 500 \left(\frac{1}{k} - 0.7^k \right)$$

于是:

当 $\frac{1}{k} - 0.7^k < 0$ 时, 第二种方法检验的次数少一些; 当 $\frac{1}{k} - 0.7^k > 0$ 时, 第一种方法检验的次数少一些; 当 $\frac{1}{k} - 0.7^k = 0$ 时, 二种方法检验的次数一样多。

$$12、 f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$ET = \int_0^8 t \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_8^\infty 8 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1 - e^{-8\lambda}}{\lambda}。$$

13、解 由题意知:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x, y \text{ 在圆内} \\ 0, & \text{其他值} \end{cases}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r}, & -r < x < r \\ 0, & \text{其他值} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r}, & -r < y < r \\ 0, & \text{其他值} \end{cases}$$

$$(1) \quad \text{计算可得 } E(X) = E(Y) = \int_{-r}^r x \frac{2}{\pi r} dx = 0$$

(2) A 的位置是 (x, y) , 距中心位置 $(0, 0)$ 的距离是: $\sqrt{x^2 + y^2}$, 于是所求的平均距离为:

$$E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{2}{\pi r^2} dx dy = \frac{2r}{3}$$

$$14、(1) \quad a=1 \text{ 时}, \quad p(\xi_n = 0) = \frac{C_{14}^2}{C_{15}^2}, \quad p(\xi_n = 1) = \frac{C_1^1 C_{14}^1}{C_{15}^2}$$

$$E\xi_n = \frac{C_1^1 C_{14}^1}{C_{15}^2} = \frac{2}{15} \neq \frac{4}{3}$$

$$a \geq 2 \text{ 时}, \quad p(\xi_2 = 0) = \frac{C_{15-a}^2}{C_{15}^2}, \quad p(\xi_2 = 1) = \frac{C_a^1 C_{15-a}^1}{C_{15}^2}, \quad p(\xi_2 = 2) = \frac{C_a^2}{C_{15}^2}$$

$$E\xi_2 = 1 \times \frac{C_a^1 C_{15-a}^1}{C_{15}^2} + 2 \times \frac{C_a^2}{C_{15}^2} = \frac{2a}{15}$$

由 $E\xi_2 = \frac{4}{3}$ 得, $a = 10$ 。

$$(2) \quad p(\xi_9 = 4) = \frac{C_{10}^4 C_5^5}{C_{15}^9}, \quad p(\xi_9 = 5) = \frac{C_{10}^5 C_5^4}{C_{15}^9}, \quad p(\xi_9 = 6) = \frac{C_{10}^6 C_5^3}{C_{15}^9},$$

$$p(\xi_9 = 7) = \frac{C_{10}^7 C_5^2}{C_{15}^9}, \quad p(\xi_9 = 8) = \frac{C_{10}^8 C_5^1}{C_{15}^9}, \quad p(\xi_9 = 9) = \frac{C_{10}^9 C_5^0}{C_{15}^9}$$

$$E\xi_9 = 4 \times \frac{C_{10}^4 C_5^5}{C_{15}^9} + 5 \times \frac{C_{10}^5 C_5^4}{C_{15}^9} + 6 \times \frac{C_{10}^6 C_5^3}{C_{15}^9} + 7 \times \frac{C_{10}^7 C_5^2}{C_{15}^9} + 8 \times \frac{C_{10}^8 C_5^1}{C_{15}^9} + 9 \times \frac{C_{10}^9 C_5^0}{C_{15}^9} = 6。$$

$$15、\text{解 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & -\sqrt{r^2-x^2} < y < \sqrt{r^2-x^2} \\ 0, & \text{其他值} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|\frac{\sqrt{3}r}{2}) = \frac{f(\frac{\sqrt{3}r}{2}, y)}{f_X(\frac{\sqrt{3}r}{2})} = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & -\frac{r}{2} < y < \frac{r}{2} \\ 0, & \text{其他值} \end{cases}$$

于是：

$$E(Y|X = \frac{\sqrt{3}r}{2}) = \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{2r} y dy = 0$$

16、记 Y 为进入购物中心的人数， X 为购买冷饮的人数，则

$$\begin{aligned} p_X(X=k) &= \sum_{m=k}^{\infty} p_Y(Y=m) C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-k)! k!} p^k (1-p)^{m-k} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} (1-p)^m \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!} e^{-\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} \end{aligned}$$

故购买冷饮的顾客人数服从参数为 λp 的泊松分布，易知期望为 λp 。

17、解：由题意知 $P(X=k) = \frac{1}{11}$ ，其中 $k=0,1,2,\dots,10$ 。于是

$$P(Y=k, X=i) = 0, i=k+1, \dots, 11$$

$$P(Y=k, X=i) = P(X=i)P(Y=k|X=i) = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11-i}, i=0,1,\dots,k$$

$$\text{从而 } P(Y=k) = \sum_{i=0}^k P(Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11-i}$$

$$\text{于是: } E(Y) = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k k \frac{1}{11-i} = 7.5$$

$$\text{又 } P(Z=k) = \sum_{i=1}^{10} \frac{(11-i)i^{k-1}}{11^{k-1}}$$

$$\text{从而 } E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z=k)k = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{(11-i)} = 3.02$$

$$18、 D(\xi_2) = \frac{C_{15-a}^2}{C_{15}^2} \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{C_a^1 C_{15-a}^1}{C_{15}^2} \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{C_a^2}{C_{15}^2} \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{26}{63}.$$

$$19、 \text{解 } E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)}, (k \geq 1)$$

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx - \left[\int_0^{\infty} x \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \right]^2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} - \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \right]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$20、 EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = 0,$$

$$DX = EX^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 2$$

$$E|X| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-|x|} dx = 1$$

$$D|X| = E|X|^2 - (E|X|)^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx - 1 = 1$$

21、解 (1) 设 p 表示从产品取到非正品的概率，于是有：

$$p = (1-98\%) \cdot 0.7 + 0.2 \cdot (1-90\%) + 0.1 \cdot (1-74\%) = 0.06,$$

用 X 表示产品中非正品数，X 服从二项分布 B(100, 0.06)，有：

$$E(X) = \sum_{k=0}^{100} kP(X=k) = 100 \times 0.06 = 6$$

$$D(X) = 100p(1-p) = 5.64 \quad (\text{参考 77 页的例 4.2.5})$$

(3) 用 Y 表示在该条件下正品数，Y 服从二项分布 B(100, 0.98)，于是

$$E(Y) = 100 \times 0.98 = 98$$

$$D(X) = 100 \times 0.98 \times (1-0.98) = 1.96$$

$$22、 p(X=0)=p(X=1)=p(Y=0)=p(Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$(1) p(X+Y \geq 1) = p(X=0, Y=1) + p(X=1, Y=1) + p(X=1, Y=0)$$

$$= p(X=0)p(Y=1) + p(X=1)p(Y=1) + p(X=1)p(Y=0)$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$(2) E(X \cdot (-1)^Y) = 0 \cdot (-1)^0 p(X=0)p(Y=0) + 0 \cdot (-1)^1 p(X=0)p(Y=1) +$$

$$1 \cdot (-1)^0 p(X=1)p(Y=0) + 1 \cdot (-1)^1 p(X=1)p(Y=1) = 0$$

$$D(X \cdot (-1)^Y) = E(X \cdot (-1)^Y)^2 - [E(X \cdot (-1)^Y)]^2$$

$$= E(X \cdot (-1)^Y)^2$$

$$= [0 \cdot (-1)^0]^2 p(X=0)p(Y=0) + [0 \cdot (-1)^1]^2 p(X=0)p(Y=1) +$$

$$[1 \cdot (-1)^0]^2 p(X=1)p(Y=0) + [1 \cdot (-1)^1]^2 p(X=1)p(Y=1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

23、解 证明：

$$D(XY) = E((XY)^2) - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2$$

$$= E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 \text{ (由于 } X, Y \text{ 相互独立)}$$

$$= (D(X) + E(X)^2) \cdot (D(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2 E(Y)^2$$

$$= D(X) \cdot D(Y) + (E(X))^2 \cdot D(Y) + (E(Y))^2 \cdot D(X)$$

$$24、 f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$(1) Z = \min\{X, Y\}$$

$$F_Z(z) = p(Z \leq z) = 1 - [(1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))] = \begin{cases} 1 - e^{-6z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

故 Z 服从参数为 $\lambda = 6$ 的指数分布，故 $EZ = \frac{1}{6}$ ， $DZ = \frac{1}{36}$ 。故 $Cv(Z) = \frac{\sqrt{DZ}}{EZ} = 1$ 。

$$(2) Z = \max\{X, Y\}$$

$$F_Z(z) = p(Z \leq z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1-e^{-2z})(1-e^{-4z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$EZ = \int_0^{\infty} z dF_Z(z) = \frac{7}{12},$$

$$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \int_0^{\infty} z^2 dF_Z(z) - \frac{49}{144} = \frac{33}{144},$$

$$\text{故 } Cv(Z) = \frac{\sqrt{DZ}}{EZ} = \frac{\sqrt{33}}{7}.$$

$$(3) Z = X + Y,$$

$$EZ = EX + EY = \frac{3}{4}, \quad DZ = DX + DY = \frac{5}{16},$$

$$Cv(Z) = \frac{\sqrt{DZ}}{EZ} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

25、解 (1) 由相关系数的定义，得：

$$\rho_{X|X|} = \frac{Cov(X, |X|)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(|X|)}}, \quad \text{其中 } Cov(X, |X|) = E(X|X|) - E(X)E(|X|)$$

通过计算得 $Cov(X, |X|) = 0$ ，即 $\rho_{X|X|} = 0$ ，从而说明 $X, |X|$ 是不相关的。

(2) 很显然， X 与 $|X|$ 不是相互独立的。

$$26、(1) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2}, \quad |x| < 1$$

$$E(X) = 0, \quad DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$\text{同理 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2}, \quad |y| < 1$$

$$E(Y) = 0, \quad DY = \frac{1}{3}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy \cdot \frac{1}{4}(1+xy) dx dy = \frac{1}{9}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{1}{3}, \quad \text{故 } X \text{ 和 } Y \text{ 正相关}.$$

又 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ，故 X 和 Y 不独立。

(2)

$$\text{cov}(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = E(X^2Y^2) - D(X)D(Y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 \cdot \frac{1}{4}(1+xy) dx dy - \frac{1}{9} = 0$$

故 $\rho = 0$ ，即 X 和 Y 不相关。

$$\begin{aligned} \text{又 } F_{X^2, Y^2}(x, y) &= p(X^2 \leq x, Y^2 \leq y) \\ &= p(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}, -\sqrt{y} \leq Y \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t, v) dt dv = \sqrt{xy} \end{aligned}$$

所以 $f_{X^2, Y^2}(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}} = \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = m(x) \cdot n(y)$ ，故 X^2 和 Y^2 相互独立。

27、解（1）由题意得：

$$E(A) = \frac{\pi}{3}\lambda + \frac{\pi}{4}\theta + \frac{\pi}{6}(1 - \lambda - \theta) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\lambda - \frac{\pi}{12}\theta$$

$$E(\sin A) = \sin \frac{\pi}{6} - \lambda \sin \frac{\pi}{6} - \theta \sin \frac{\pi}{12}, \quad E(\cos A) = \cos \frac{\pi}{6} - \lambda \cos \frac{\pi}{6} - \theta \cos \frac{\pi}{12}$$

结合已知条件，可求出： $\lambda = \frac{1}{4}$ ， $\theta = \frac{1}{2}$

由于 A 和 B 是独立同分布的，于是 (A, B) 的联合分布律为：

$A \backslash B$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$P(A=i)$
$\frac{\pi}{3}$	1/16	1/8	1/16	1/4
$\frac{\pi}{4}$	1/8	1/4	1/8	1/2
$\frac{\pi}{6}$	1/16	1/8	1/16	1/4

（2）

$$\begin{aligned} E(\sin C) &= E(\sin(B + A)) = E(\sin B \cos A) + E(\cos B \sin A) \\ &= E(\sin B)E(\cos A) + E(\cos B)E(\sin A) = 2\left[\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}{8}\right]^2 \approx 0.966 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \rho_{AC} = \frac{Cov(A, C)}{\sqrt{D(A)}\sqrt{D(C)}}, \quad \text{其中}$$

$$Cov(A, C) = Cov(A, \pi - A - B) = Cov(A, -A) + Cov(A, -B) = Cov(A, -A) = -D(A)$$

$$D(C) = D(\pi - A - B) = D(A) + D(B) = 2D(A)$$

$$\text{所以: } \rho_{AC} = \frac{Cov(A, C)}{\sqrt{D(A)}\sqrt{D(C)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{说明 } A \text{ 和 } C \text{ 是负相关的。}$$

28（1）不会写

$$(2) \quad \text{cov}(\bar{X}, X_i) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_j, X_i) = \frac{1}{n} D(X_i) = \frac{1}{n}$$

$$(3) \quad \text{cov}(S_k, T_k) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^k X_i, \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} X_j\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} \text{cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=n_0+1}^k \sum_{j=n_0+1}^k \text{cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=n_0+1}^k \sum_{j=k+1}^{n_0+k} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^k DX_i = k - n_0,$$

$$DS_k = \sum_{i=1}^k DX_i = k,$$

$$DT_k = \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} DX_j = k,$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(S_k, T_k)}{\sqrt{DS_k} \sqrt{DT_k}} = \frac{k - n_0}{k}.$$

29.解 (1) 证明: 由于 X 和 Y 相互独立, 于是由题意得

$$E(\xi) = E(XY) = E(X)E(Y) = 0$$

$$D(\xi) = D(XY) = D(X) \cdot D(Y) + (E(X))^2 \cdot D(Y) + (E(Y))^2 \cdot D(X) = 4p(1-p) + (2p-1)^2 = 1$$

从而有 $\xi \sim N(0, 1)$

(2)

$$\begin{aligned} \rho_{X\xi} &= \frac{\text{Cov}(X, \xi)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(\xi)}} = \text{Cov}(X, \xi) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) \\ &= E(X^2)E(Y) - E(X)^2E(Y) = E(Y) = 2p - 1 \end{aligned}$$

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 和 ξ 是不相关的; 当 $p > \frac{1}{2}$, 即 $\rho_{XC} > 0$ 时, 说明 X 和 ξ 是正相关的

当 $p < \frac{1}{2}$, 即 $\rho_{XC} < 0$ 时, 说明 X 和 ξ 是负相关的

显然, X 和 ξ 是不独立的

$$30 \quad (1) \quad p(X=0, Y=0) = p(Y=0|X=0)p(X=0) = \frac{2}{5},$$

$$\begin{aligned}
p(X=0, Y=1) &= p(Y=1|X=0)p(X=0) = \frac{1}{5}, \\
p(X=1, Y=0) &= p(Y=0|X=1)p(X=1) = \frac{1}{5}, \\
p(X=1, Y=1) &= p(Y=1|X=1)p(X=1) = \frac{1}{5}, \\
p(X=0) &= \frac{3}{5}, \quad p(X=1) = \frac{2}{5}, \quad p(Y=0) = \frac{3}{5}, \quad p(Y=1) = \frac{2}{5}, \\
p(X=0, Y=0) &\neq p(X=0)p(Y=0), \text{ 故 } X \text{ 和 } Y \text{ 不独立。}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= 0 \cdot (p(X=0, Y=0) + p(X=0, Y=1) + p(X=1, Y=0)) \\
&\quad + 1 \cdot p(X=1, Y=1) - p(X=1)p(Y=1) = \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

故 X 和 Y 正相关。

31、解 (1) 泊松分布的表示式为: $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k=0, 1, \dots$, 于是通过计算有:

$$\begin{aligned}
\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{\lambda}{k+1} \\
\text{故: } \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \begin{cases} > 1, \text{ 当 } \lambda > k+1 \\ = 1, \text{ 当 } \lambda = k+1 \\ < 1, \text{ 当 } \lambda < k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

因此若 λ 为正整数, 则众数为 λ 和 $\lambda-1$; 当 λ 不为正整数时, 则众数为 λ 的整数部分 $[\lambda]$ 。

32 (1) 由 $\rho=0$ 知, X 和 Y 不相关, 等价于 X 和 Y 相互独立。

$$X \sim N(0, 1), \quad Y \sim N(1, 4)$$

$$E\xi = aEX - bEY = -b, \quad E\eta = aEY - bEX = a,$$

$$D\xi = a^2DX + b^2DY = a^2 + 4b^2, \quad D\eta = a^2DY + b^2DX = 4a^2 + b^2,$$

$$\xi^* = \frac{\xi + b}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \text{ 和 } \eta^* = \frac{\eta - a}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \text{ 分别为 } \xi \text{ 和 } \eta \text{ 的标准化变量。}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\xi, \eta) &= \text{cov}(aX - bY, aY - bX) \\
&= (a^2 + b^2)\text{cov}(X, Y) - ab(\text{cov}(X, X) + \text{cov}(Y, Y)) \\
&= -ab(DX + DY) = -5ab
\end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{-5ab}{\sqrt{a^2+4b^2}\sqrt{4a^2+b^2}}$$

$$(2) \rho = \frac{1}{2} \text{ 时, } \text{cov}(X, Y) = \rho\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 1,$$

$$E\xi = aEX - bEY = -b, \quad D\xi = a^2DX + b^2DY - 2ab\text{cov}(X, Y) = a^2 + 4b^2 - 2ab$$

$$\text{则 } Cv(\xi) = \frac{\sqrt{D\xi}}{E\xi} = -\frac{\sqrt{a^2+4b^2-2ab}}{b}$$

$$(3) \text{ 因 } E\eta = aEY - bEX = a, \quad D\eta = a^2DY + b^2DX - 2ab\text{cov}(X, Y) = 4a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\eta \sim N(a, 4a^2 + b^2 - 2ab)$$

故定义知 η 的中位数为 a , 众数为 a 。

$$(4) \text{cov}(\xi, \eta) = (a^2 + b^2)\text{cov}(X, Y) - ab(DX + DY) = -(2a + b)(a + 2b)$$

故 $b = -2a$ 或 $a = -2b$ 时, ξ 和 η 不相关。

又正态分布的独立性与相关性相同,

故 $b = -2a$ 或 $a = -2b$ 时, ξ 和 η 独立且不相关, 否则不独立且相关。

33、解 (1) 由题意可知:

$$D(X_1) = 1, E(X_1) = 0, \text{ 说明 } X_1 \sim N(0, 1)$$

$$D(X_1) = 1, E(X_1) = 0, \text{ 说明 } X_2 \sim N(0, 16)$$

$$D(X_3) = 4, E(X_3) = 1, \text{ 说明 } X_3 \sim N(1, 4)$$

(2) 对于二维正态而言, 两变量不相关等价于两变量独立。

由于 $Cov(X_1, X_2) = 2 \neq 0$, 所以 X_1 与 X_2 相关且不独立

由于 $Cov(X_1, X_3) = -1 \neq 0$, 所以 X_1 与 X_3 相关且不独立

由于 $Cov(X_3, X_2) = 0$, 所以 X_3 与 X_2 不相关且独立

从而 (由 88 页性质 4) 可以判断出 X_1 , X_2 与 X_3 不相互独立

$$(3) \text{ 计算有 } E(Y_1) = E(X_1 - X_2) = 0, \quad E(Y_2) = E(X_3 - X_1) = 1$$

$$Cov(Y_1, Y_1) = Cov(X_1 - X_2, X_1 - X_2) = Cov(X_1, X_1) + Cov(X_2, X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 13$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 - X_2, X_3 - X_1) = Cov(X_1, X_3) - Cov(X_1, X_1) - Cov(X_2, X_3) + Cov(X_2, X_1) = 0$$

$$\text{Cov}(Y_2, Y_2) = \text{Cov}(X_3 - X_1, X_3 - X_1) = \text{Cov}(X_3, X_3) + \text{Cov}(X_1, X_1) - 2\text{Cov}(X_3, X_1) = 7$$

$$\text{于是 } Y = (Y_1, Y_2)' \sim N(\mu, \Sigma), \text{ 其中 } \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

第五章 大数定律及中心极限定理

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1、解（1）由于 $P\{X \geq 0\} = 1$ ，且 $E(X) = 36$ ，利用马尔科夫不等式，得

$$P\{X \geq 50\} \leq \frac{E(X)}{50} = 0.72$$

（2） $D(X) = 2^2$ ， $E(X) = 36$ ，利用切比雪夫不等式，所求的概率为：

$$P\{32 < X < 40\} = 1 - P(|X - 36| \geq 4) \geq 1 - \frac{2^2}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

2、解： $X_i \sim B(500, 0.1)$ ，

$$P\left\{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} |X_i - 10\%| < 5\%\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} X_i\right)}{0.05^2} = \frac{116}{125} = 92.8\%$$

3、解 ξ 服从参数为 0.5 的几何分布， $P(\xi = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, (n = 2, 3, 4, \dots)$

$$\text{可求出 } E(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} nP(\xi = n) = 3, D(\xi) = 2$$

于是令 $\frac{a+b}{2} = E(\xi)$ ， $\frac{b-a}{2} = \varepsilon$ ，利用切比雪夫不等式，得

$$\text{有 } P(a < \xi < b) = 1 - P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} = 75\%$$

从而可以求出 $\varepsilon = 2\sqrt{2}$ ， $a = E(\xi) - \varepsilon = 3 - 2\sqrt{2}$ ， $b = E(\xi) + \varepsilon = 3 + 2\sqrt{2}$

4、解： $F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = (F(x))^n = \frac{x^n}{a^n}, x \in (0, a)$ 。

则 $p_{X_{(n)}}(x) = n(F(x))^{n-1} p(x) = \frac{nx^{n-1}}{a^n}, x \in (0, a)$ 。

$$E_{X_{(n)}}(x) = \int_0^a x \cdot \frac{nx^{n-1}}{a^n} dx = \frac{n}{n+1} a,$$

$$D_{X_{(n)}}(x) = \int_0^a x^2 \cdot \frac{nx^{n-1}}{a^n} dx - \left(\frac{n}{n+1} a\right)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} a^2。$$

$$P\left\{\left|X_{(n)} - \frac{n}{n+1} a\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{n}{\varepsilon^2 (n+2)(n+1)^2} a^2,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_{(n)} - a| \geq \varepsilon\} = 0$ 。

5、解 服从大数定律。由题意得：

$$P\{X_i = k\} = \frac{(i^{2/3})^k e^{-i^{2/3}}}{k!}, E(X_i) = D(X_i) = i^{2/3}$$

$$\text{由 } \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^{2/3} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

根据马尔科夫大数定律，可判断该序列服从大数定律的。

6、解：（1） $h(x) = x^2$ ，则 $h(x)$ 连续。

$$E(|h(X_1)|) = EX_1^2 = \sigma^2 + \mu^2 < \infty, \text{ 则 } \forall \varepsilon > 0, \text{ 有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sigma^2 + \mu^2)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \text{ 则 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{p} (\sigma^2 + \mu^2), (n \rightarrow \infty)。$$

（2） $h(x) = (x - \mu)^2$ 连续， $E(|h(X_1)|) = E(X_1 - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \text{ 则 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2, (n \rightarrow \infty)。$$

$$(3) \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{p} \lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X} \xrightarrow{p} \mu, \sum_{i=1}^n X_i^2 = (n-1)S^2 + n\bar{X}^2 \xrightarrow{p} (n-1)\sigma^2 + n\mu^2, \text{ 故}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu}{(n-1)\sigma^2 + n\mu^2} = \frac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}$$

(4) 原式依概率收敛, 即

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right)}} \xrightarrow{p} \lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \frac{n \bar{X}}{\sqrt{n(n-1)S^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-1}} E \frac{\bar{X}}{S}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-1}} E \left(\frac{(\bar{X} - \mu)}{S} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\mu}{S} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n-1}} E \frac{\mu}{S}$$

$$= E \frac{\mu}{S}$$

$$= \frac{\mu}{\sigma}$$

7 解 (1) 由题意得: $P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - a\right| \geq \varepsilon\right\} = 1 - P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 - 1 = 0$

根据推论 5.1.4, 可求得

$$a = E(X_1^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$(2) \text{ 由题意得: } E(X_i) = \frac{1}{\lambda}, D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$E\left(\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{2}{\lambda}, D\left(\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{2500} \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = \frac{1}{25\lambda^2}$$

根据中心极限定理, 可知 $\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\left(\frac{2}{\lambda}, \frac{1}{25\lambda^2}\right)$

$$(3) \quad E(X_i^2) = a = \frac{2}{\lambda^2}, D(X_i^2) = \frac{24}{\lambda^4}, \text{ 利用中心极限定理, 可知}$$

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i^2 \sim N\left(\frac{2}{\lambda^2}, \frac{24}{100\lambda^4}\right)$$

$$\text{从而 } P\left\{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i^2 \leq \frac{2}{\lambda^2}\right\}=0.5$$

$$8、\text{解：}\frac{X-50}{50} \overset{\text{近似地}}{\square} N(0,1),$$

$$P=P(X>60)=1-P(X\leq 60)=1-P\left(\frac{X-50}{50}\leq 0.2\right)=1-\Phi(0.2)=7.9\%$$

$$9、\text{解} \quad (1) \text{ 由题意得：记 } p=P\{0.95<X<1.05\}=1.1-\frac{0.95^2}{2}-\frac{1.05}{2}, \text{ 引入随机变量}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{次试验中该事件发生} \\ 0, & \text{第} i \text{次试验中该事件不发生} \end{cases}, \quad i=1, 2, 3, \dots, \text{ 且 } P(Y_i=1)=p$$

$$\text{于是 } Y = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ 服从二项分布： } P(Y=k)=P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i=k\right)=C_{100}^n p^k (1-p)^{100-k}$$

方法一：（Y 的精确分布）

$$P(Y>2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-(1-p)^{100}-100p(1-p)^{99}=99.756\%$$

方法二（泊松分布）

Y 近似服从参数为 $100p$ 的泊松分布

$$P(Y>2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-e^{-100p}-100pe^{-100p}=99.66\%$$

方法三：（中心极限定理）

Y 近似服从 $N(100p, 100p(1-p))$

$$\text{于是： } P(Y>2)=1-P(Y\leq 2)=1-\Phi\left(\frac{2-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right)=99.55\%$$

(2) 设至少需要 n 次观察

$$\text{记 } q=P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{4}, \text{ 这时 } P(Y_i=1)=q$$

$$\text{于是 } Y = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ 近似服从 } N(nq, nq(1-q))$$

$$95\% \leq P(Y \geq 80) = P\left(\frac{Y-nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \geq \frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)$$

经查表有 $\frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \approx 1.65$ ，从而求得 $n=117$

$$10、\text{解： } X = \begin{cases} 1, & 0.3, \\ 2, & 0.5, \\ 3, & 0.2. \end{cases}$$

$$EX = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 1.3,$$

$$DX = 0.3^2 \times 0.3 + 0.7^2 \times 0.5 + 1.3^2 \times 0.2 = 0.61,$$

$$\frac{\frac{1}{800} \sum_{i=1}^{800} X_i - 1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P\left(\sum_{i=1}^{800} X_i > 1000\right) &= P\left(\frac{\frac{1}{800} \sum_{i=1}^{800} X_i - 1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}} > \frac{\frac{1000}{800} - 1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}}\right) \\ &= \Phi(1.81) = 96.48\% \end{aligned}$$

11、解 （1）由题意得，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 名选手得 } 0 \text{ 分} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 名选手不得 } 0 \text{ 分} \end{cases}, \quad i=1, 2, 3, \dots, 100, \quad \text{且 } P(X_i = 1) = 0.3$$

所求的概率为：

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 35\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i - 0.3}{\sqrt{0.3 \cdot 0.7 / 100}} \leq \frac{0.35 - 0.3}{\sqrt{0.3 \cdot 0.7 / 100}}\right) = \Phi\left(\frac{0.35 - 0.3}{\sqrt{0.3 \cdot 0.7 / 100}}\right) = 86.21\%$$

（2）用 X_i 表示第 i 名选手的得分，则

$$P(X_i = 0) = 0.2, P(X_i = 1) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$$

$$P(X_i = 2) = 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.128, P(X_i = 4) = 0.8^3 = 0.512$$

并且 $E(X_i) = 2.464, D(X_i) = 2.793$

$$\text{同时 } \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 2.464 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 2.793}} \sim N(0,1),$$

于是所求的概率为：

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 220\right) = 1 - \Phi\left(\frac{220 - 2.464 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 2.793}}\right) = \Phi(1.58) = 94.3\%$$

第六章 统计量与抽样分布

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1、解： 易知的 \bar{X} 期望为 μ ， 方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$ ， 则 $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\text{近似地}}{\square} N(0,1)$ ，

$$\text{所以, } P\left(|\bar{X} - \mu| < 0.1\sigma\right) = P\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{285}}} < \frac{0.1\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{285}}}\right) \approx \Phi\left(0.1\sqrt{285}\right) = 0.909。$$

2、解 （1）由题意得：

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) + E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(X_1 \cdot \bar{X}) = E\left(X_1 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i X_1) = \frac{1}{n} \sigma^2 + \mu^2$$

（2） $X_1 - \bar{X}$ 服从正态分布， 其中：

$$E(X_1 - \bar{X}) = 0, \quad D(X_1 - \bar{X}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D(X_1) + \frac{n-1}{n^2} D(X_2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

从而 $X_1 - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n} \sigma^2\right)$

由于 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ， 且相互独立， 因此：

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

由于 $\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 所以 $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以

$$\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} / \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)} = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$$

(3) 由于 $\sum_{i=1}^{n/2} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi(n/2)$, 以及 $\sum_{i=1+n/2}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi(n/2)$, 因此有:

$$\sum_{i=1}^{n/2} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} / \sum_{i=1+n/2}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n/2} (X_i - \mu)^2 / \sum_{i=1+n/2}^n (X_i - \mu)^2 \sim F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

3、解: (1) $(n+1)\overline{X}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1} = n\overline{X}_n + X_{n+1}$

$$\text{故 } \overline{X}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \overline{X}_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

(2) $nS_{n+1}^2 - (n-1)S_n^2 - (X_{n+1} - \overline{X}_{n+1})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_{n+1})^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$

$$= \sum_{i=1}^n \left[(X_i - \overline{X}_{n+1})^2 - (X_i - \overline{X}_n)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n (2X_i - \overline{X}_n - \overline{X}_{n+1})(\overline{X}_n - \overline{X}_{n+1})$$

$$= n(\overline{X}_n - \overline{X}_{n+1})^2$$

$$= n \left\{ \frac{1}{n} \left[(n+1)\overline{X}_{n+1} - X_{n+1} \right] - \overline{X}_{n+1} \right\}^2$$

$$= \frac{1}{n} (\overline{X}_{n+1} - X_{n+1})^2$$

$$= \frac{1}{n} (X_{n+1} - \overline{X}_{n+1})^2$$

4、解 用 \overline{X} 表示 a 的估计值, 则 $\frac{(\overline{X} - a)}{2.5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 。由题意得:

$$95\% \leq P(|\overline{X} - a| \leq 0.5) = 2P(\overline{X} - a \leq 0.5) - 1 = 2\Phi\left(\frac{0.5}{2.5}\sqrt{n}\right) - 1$$

经查表有: $n=97$

5、解：（1） $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow{p} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \right),$

因 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$ ，故 $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ ，

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} E \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1。$

（2）因 $E \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \right) = n$ ， $D \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \right) = 2n$ ，

故 $\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 - n}{\sqrt{2n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$ ，

由分布函数的右连续性知， $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$ ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1) = \Phi(1)$ 。

（3） $E \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \bar{X} \right) = E((n-1)S^2) = (n-1)\sigma^2$

$$\begin{aligned} D \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \bar{X} \right) &= D((n-1)S^2) + D\bar{X} \\ &= \sigma^4 D \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right) + \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

因 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，故 $D \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right) = 2(n-1)$

故 $D \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \bar{X} \right) = 2(n-1)\sigma^4 + \frac{\sigma^2}{n}$

6、解 （1）由题意得： $\sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$ ，于是：

$$P(0.26\sigma^2 \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2 \leq 2.3\sigma^2) = P(2.6 \leq \sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq 23) = 0.9786$$

（2）由于 $\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，即 $\sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$ ，于是

$$P(0.26\sigma^2 \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 \leq 2.3\sigma^2) = P(2.6 \leq \sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \leq 23) = 0.9719$$

7、解： $Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(0, 8)$,

$$Y_2 = X_3 + X_4 + X_5 \sim N(0, 12),$$

$$Y_3 = X_6 + X_7 + X_8 + X_9 \sim N(0, 16),$$

显然 Y_1 , Y_2 和 Y_3 相互独立。

$$\text{则 } \frac{Y_1}{2\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{Y_2}{2\sqrt{3}} \sim N(0, 1), \quad \frac{Y_3}{4} \sim N(0, 1),$$

取 $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{12}$, $c = \frac{1}{16}$, 则 $Y \sim \chi^2(3)$

8、解 由题意得： $\sum_{i=1}^9 \frac{X_i}{3} \sim N(0, 1)$, 以及 $\sum_{i=1}^9 Y_i^2 \sim \chi^2(9)$, 从而有

$$\sum_{i=1}^9 \frac{X_i}{3} / \sqrt{\sum_{i=1}^9 Y_i^2 / 9} \sim t(9), \quad \text{即 } \sum_{i=1}^9 X_i / \sqrt{\sum_{i=1}^9 Y_i^2} \sim t(9)$$

9、解：(1) Y_1 和 Y_2 相互独立，

$$X_1 - Y_1 = \frac{X_1 - X_3}{2}, \quad X_3 - Y_1 = \frac{X_3 - X_1}{2},$$

$$X_2 - Y_2 = \frac{X_2 - X_4}{2}, \quad X_4 - Y_2 = \frac{X_4 - X_2}{2},$$

$$X_1 - X_3 \sim N(0, 2\sigma^2),$$

$$X_2 - X_4 \sim N(0, 2\sigma^2),$$

$$Z = \frac{(X_1 - X_3)^2}{(X_2 - X_4)^2} = \frac{\left(\frac{(X_1 - X_3)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}{\left(\frac{(X_2 - X_4)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \sim F(1, 1),$$

$$(2) \quad Z = \frac{X_1^2 + X_3^2}{X_2^2 + X_4^2} = \frac{X_1^2/\sigma^2 + X_3^2/\sigma^2}{X_2^2/\sigma^2 + X_4^2/\sigma^2}$$

因 $\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, 则

$$Z = \frac{X_1^2 + X_3^2}{X_2^2 + X_4^2} = \frac{X_1^2/\sigma^2 + X_3^2/\sigma^2}{X_2^2/\sigma^2 + X_4^2/\sigma^2} = \frac{(X_1^2/\sigma^2 + X_3^2/\sigma^2)/2}{(X_2^2/\sigma^2 + X_4^2/\sigma^2)/2} \sim F(2, 2)$$

10、解 (1) 由题意得: $E(X)=0$, $D(X)=2$, 从而

$$E(\bar{X})=0, \quad D(\bar{X})=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

(2) 由题意可计算:

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} E(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2) = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (2 - \frac{2*2}{100} + \frac{2}{100}) = 2$$

(3) \bar{X} 近似服从正态分布 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{50})$, 于是

$$P(|\bar{X}| > 0.04) = P\left(P\left(\frac{|\bar{X}|}{\sqrt{1/50}} > \frac{0.04}{\sqrt{1/50}}\right) \approx 2 - 2\Phi\left(\frac{0.04}{\sqrt{1/50}}\right) = 0.7794\right.$$

11、解: $X_{n+1} \sim N(0, 1)$, $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$,

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \sim N(0, 1), \quad (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

$$Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{(n-1)S^2/(n-1)}} \sim t(n-1)$$

12、解 (1) $\chi_{0.05}^2(5)=11.070$, $\chi_{0.06}^2(5)=10.596$, $\chi_{0.95}^2(5)=1.145$, $\chi_{0.94}^2(5)=1.250$

(2) $t_{0.05}(8)=2.306$, $t_{0.06}(8)=2.189$, $t_{0.95}(8)=0.065$, $t_{0.94}(8)=0.078$,

(3) $F_{0.05}(3, 5)=5.409$, $F_{0.05}(5, 3)=9.013$, $F_{0.04}(3, 5)=6.098$, $F_{0.04}(5, 3)=10.617$

13、解: $X_{(1)}$ 和 $nX_{(1)}$ 是统计量,

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} \geq x) = 1 - (1 - F(x))^n = 1 - e^{-n\lambda x},$$

则 $X_{(1)} \sim E(n\lambda)$,

$$F_{nX_{(1)}}(x) = P(nX_{(1)} \leq x) = 1 - P\left(X_{(1)} \geq \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}x \cdot n} = 1 - e^{-\lambda x},$$

则 $nX_{(1)} \sim E(\lambda)$ 。

14、解由题意得： $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(6,6)$ ， $\frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F(6,6)$ ， 于是：

$$0.05 = P(\max(\frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{S_2^2}{S_1^2}) > C) = 2P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C), \text{ 从而: } C = F_{0.025}(6,6) = 5.82$$

15、解： \bar{X} 和 S^2 分别是总体 X 的期望 EX 和方差 DX 的无偏估计。又

$$EX = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta}{2}, \quad DX = EX^2 - (EX)^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{1}{\theta} dx - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12},$$

$$\text{故 } E\bar{X} = \frac{\theta}{2}, \quad E(S^2) = DX = \frac{\theta^2}{12},$$

$$E(\bar{X}^2) = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = D\left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i\right) + (E\bar{X})^2 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^5 DX_i + \frac{\theta^2}{4} = \frac{4\theta^2}{15}.$$

16、解（1）由于 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ， $i=1,2,\dots,n$ ， 且相互独立， 以及 $\frac{5S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)$ ， 因此：

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(6), \quad \sum_{i=1}^6 \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)$$

$$(2) \text{ 由于 } \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{6}} \sim N(0,1), \text{ 所以 } \frac{6(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

$$\text{同时 } \frac{6(\bar{X} - \mu)^2}{S_1^2} = \frac{6(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} / \frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim F(1,5)$$

（3）由题意得：

$$0 = E(a(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma})) = \frac{a}{\sigma}(E(\bar{X}) - E(\bar{Y})) = 0$$

$$1 = D\left(a(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma})\right) = \left(\frac{a}{\sigma}\right)^2 (D(\bar{X}) + D(\bar{Y})) = \frac{1}{4}a^2$$

从而求得： $a=2$

$$(4) \text{ 由 (3) 知: } 2(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma}) \sim N(0,1),$$

$$\text{又 } \frac{5S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5) \text{ 和 } \frac{11S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(11), \text{ 于是 } \frac{5S_1^2 + 11S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(11), \text{ 从而}$$

$$2\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma}\right)/\sqrt{\frac{5S_1^2+11S_2^2}{\sigma^2}}/16 \sim t(16)$$

化简后求得: $b=8$

17、解: $\sum_{i=1}^8 X_i \sim \chi^2(8n)$, $\sum_{i=9}^{16} X_i \sim \chi^2(8n)$, 且 $\sum_{i=1}^8 X_i$ 和 $\sum_{i=9}^{16} X_i$ 相互独立。

$$\text{则 } \frac{\sum_{i=1}^8 X_i / 8n}{\sum_{i=9}^{16} X_i / 8n} \sim F(8n, 8n),$$

$$\text{则 } P\left(\frac{\sum_{i=1}^8 X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} \leq 1\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^8 X_i / 8n}{\sum_{i=9}^{16} X_i / 8n} \leq 1\right) = F_{(8n, 8n)}(1) = 0.5,$$

$$\text{又 } \frac{\sum_{i=1}^8 X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} \text{ 为连续分布, 故 } P\left(\frac{\sum_{i=1}^8 X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} = 1\right) = 0.$$

第七章 参数估计

注意: 这是第一稿(存在一些错误)

1、解 由 $\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta xf(x, \theta)d\theta = \frac{2}{\theta}$, $v_1 = D(X) = \frac{3\theta^2}{10} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20}$, 可得 θ 的矩

估计量为 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$, 这时 $E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{X}) = \theta$, $D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4 \cdot \frac{\theta^2}{20n} = \frac{\theta^2}{5n}$ 。

3、解 由 $\mu_1 = E(X) = 2\theta(1-\theta) + 2(1-\theta)^2 = 2(1-\theta)$, 得 θ 的矩估计量为:

$$\hat{\theta} = 1 - \frac{\bar{X}}{2} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

建立关于 θ 的似然函数: $L(\theta) = (\theta^2)^3 (2\theta(1-\theta))^2 (1-\theta)^2 = 4\theta^8 (1-\theta)^4$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial(8 \ln \theta + 4 \ln(1-\theta))}{\partial \theta} = \frac{8}{\theta} - \frac{4}{1-\theta} = 0, \text{ 得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值: } \hat{\theta} = \frac{2}{3}$$

4、解：矩估计：

$$\mu_1 = 0 \cdot \theta + 1 \cdot \lambda + 2 \cdot (1 - \theta - \lambda) = 2 - 2\theta - \lambda,$$

$$\nu_2 = (2 - 2\theta - \lambda)^2 \theta + (2\theta + \lambda - 1)^2 \lambda + (2\theta + \lambda)^2 (1 - \theta - \lambda),$$

$$A_1 = 1,$$

$$B_2 = \frac{3}{4},$$

$$\text{故 } \begin{cases} 2 - 2\hat{\theta} - \hat{\lambda} = 1, \\ (2 - 2\hat{\theta} - \hat{\lambda})^2 \hat{\theta} + (2\hat{\theta} + \hat{\lambda} - 1)^2 \hat{\lambda} + (2\hat{\theta} + \hat{\lambda})^2 (1 - \hat{\theta} - \hat{\lambda}) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1}{4}, \\ \hat{\theta} = \frac{3}{8}. \end{cases} \text{ 为所求矩估计。}$$

极大似然估计：

$$L(\theta, \lambda) = P\{X_1 = X_4 = X_5 = 0, X_2 = X_6 = X_8 = 2, X_3 = X_7 = 1\} = \theta^3 \lambda^2 (1 - \theta - \lambda)^3,$$

$$l(\theta, \lambda) = \ln L(\theta, \lambda) = 3 \ln \theta + 2 \ln \lambda + 3 \ln(1 - \theta - \lambda),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = \frac{3}{\theta} - \frac{3}{1 - \theta - \lambda} = 0, \\ \frac{\partial l(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{2}{\lambda} - \frac{3}{1 - \theta - \lambda} = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \hat{\theta} = \frac{3}{8}, \\ \hat{\lambda} = \frac{1}{4}. \end{cases} \text{ 即为所求。}$$

5、解 由 $E(X) = p^2 + 3p(1-p) + 3(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3$ ，所以得到 p 的矩估计量为

$$\hat{p} = \frac{3 - \sqrt{9 - 4(3 - \bar{X})}}{2} = \frac{3 - \sqrt{4\bar{X} - 3}}{2}$$

$$\text{建立关于 } p \text{ 的似然函数: } L(p) = \left(\frac{p(1-p)}{2}\right)^{n_0} (p^2)^{n_1} \left(\frac{3p(1-p)}{2}\right)^{n_2} (1-p^2)^{n_3}$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0, \text{ 求得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值: } \hat{p} = \frac{n_0 + 2n_1 + n_2}{2n}$$

$$6、\text{解: (1) } EX = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

由 $\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2} = \bar{X}$ 得 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$l(\theta, \lambda) = \ln L(\theta, \lambda) = \begin{cases} n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \text{ 得 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1,$$

所以 θ 的极大似然估计为 $-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$ 。

(2) $EX = \int_0^1 xf(x, \theta) dx = e^{\frac{\theta}{2}}$, 令 $e^{\frac{\hat{\theta}}{2}} = \bar{X}$ 得 $\hat{\theta} = 2 \ln \bar{X}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}{2\theta}},$$

$$l(\theta, \lambda) = \ln L(\theta, \lambda) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\theta) - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}{2\theta}$$

$$\text{令 } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}{2\theta^2} = 0 \text{ 得 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \text{ 为 } \theta \text{ 的极大似然估计。}$$

$$(3) EX = \int_0^2 xf(x, \theta) dx = \frac{2\theta}{\theta+1},$$

令 $\frac{2\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1} = \bar{X}$ 得 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2-\bar{X}}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^n 2^{-n\theta} \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \begin{cases} n \ln \theta - n \theta \ln 2 + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \text{ 得, } \hat{\theta} = \frac{n}{n \ln 2 - \sum_{i=1}^n \ln x_i} \text{ 为 } \theta \text{ 的极大似然估计。}$$

$$(4) EX = \int_{\theta}^{100} xf(x, \theta) dx = \frac{100 + \theta}{2}, \text{ 令 } \frac{100 + \hat{\theta}}{2} = \bar{X} \text{ 得 } \hat{\theta} = 2\bar{X} - 100 \text{ 为 } \theta \text{ 的矩估计量。}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{1}{(100 - \theta)^n}, \text{ 因 } 0 < \theta < 100, \text{ 要使 } L(\theta) \text{ 最大, 则 } \theta \text{ 应取最大。}$$

$$\text{又 } \theta \text{ 不能大于 } \min\{x_1, \dots, x_n\}, \text{ 故 } \theta \text{ 的极大似然估计为 } \hat{\theta} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$(5) EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta) dx = 0, \text{ 故 } \bar{X} = 0.$$

$$\text{var } X = EX^2 = 2\theta^2,$$

$$\text{由 } 2\hat{\theta}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 和 } \theta > 0 \text{ 得}$$

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}} \text{ 为 } \theta \text{ 的矩估计量。}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n 2^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\theta}}, & -\infty < x < \infty, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

则

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \begin{cases} -n \ln 2 - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|, & -\infty < x < \infty, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\theta^2} = 0 \text{ 得 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ 为 } \theta \text{ 的极大似然估计。}$$

7、解 (1) 记 $p = P\{|X| < 4\}$, 由题意有 $p = P\{|X| < 4\} = P\{X < 4\} - P\{X \leq -4\}$

根据极大似然估计的不变性可得概率 $p = P\{|X| < 4\}$ 的极大似然估计为:

$$\hat{p} = \Phi\left(\frac{4-4}{\sqrt{24s^2/25}}\right) - \Phi\left(\frac{-4-4}{\sqrt{24s^2/25}}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{-4}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right) - 0.5 = 0.4484$$

$$(2) \text{ 由题意得: } 1-0.05 = 1-P\{X > A\} = P\{X \leq A\} = \Phi\left(\frac{A-4}{\sqrt{24s^2/25}}\right) = \Phi\left(\frac{A-4}{2\sqrt{6}}\right),$$

于是经查表可求得 A 的极大似然估计为 $\hat{A} = 12.0588$

$$8、(1) \mu = \bar{X}, \quad E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - 2\mu EX_i + \mu^2) = \sigma^2$$

$$(2) E \left[k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = k \sum_{i=1}^n E(X_{i+1} - X_i)^2 = k \sum_{i=1}^n (EX_{i+1}^2 - 2EX_{i+1}EX_i + EX_i^2) = 2(n-1)k\sigma^2$$

$$\text{则 } k = \frac{1}{2(n-1)} \text{ 即为所求。}$$

$$9、\text{解 由题意得 } E(\hat{\mu}_1) = E\left(\sum_{i=1}^8 X_i - \sum_{i=9}^{15} X_i\right) = 8\mu - 7\mu = \mu$$

$$\text{及 } E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 X_i - \frac{1}{7} \sum_{i=9}^{15} X_i\right) = 2\mu - \mu = \mu$$

所以 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是 μ 的无偏估计量

$$\text{又: } D(\hat{\mu}_1) = D\left(\sum_{i=1}^8 X_i - \sum_{i=9}^{15} X_i\right) = 8\sigma^2 - 7\sigma^2 = \sigma^2$$

$$\text{以及 } D(\hat{\mu}_2) = D\left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 X_i - \frac{1}{7} \sum_{i=9}^{15} X_i\right) = \frac{8}{16}\sigma^2 - \frac{7}{49}\sigma^2 = \frac{5}{14}\sigma^2$$

有 $D(\hat{\mu}_1) > D(\hat{\mu}_2)$, 说明 $\hat{\mu}_2$ 更有效。

$$10、(1) \text{依题, } X_i, Y_j \text{ 与 } Z_l \text{ 相互独立, } ET = aES_1^2 + bES_2^2 + cES_3^2 = (a+b+c)\sigma^2$$

故 T 是 σ^2 的无偏估计的充要条件为 $a+b+c=1$

$$(2) \text{记 } n \text{ 个样本的方差为 } S^2, \text{ 则 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\text{故 } D(S_1^2) = 2\sigma^4, \quad D(S_2^2) = \sigma^4, \quad D(S_3^2) = \frac{2}{3}\sigma^4$$

$$\text{故 } DT = a^2 DS_1^2 + b^2 DS_2^2 + c^2 DS_3^2 = \left(a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{3}\right) 2\sigma^4$$

要使 T 为最有效估计, 只须使 $a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{3}$ 在 $a+b+c=1$ 的条件下取最小值即可。

$$\text{令 } L = a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{3} - \lambda(a+b+c-1)$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 2a - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = b - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial c} = \frac{2c}{3} - \lambda = 0, \\ a+b+c=1. \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = \frac{1}{3}, \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 即为所求。}$$

$$11、\text{解 由题意可以求出: } E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x; \theta) dx = 2\theta。$$

建立建立关于 θ 的似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\theta} e^{-\frac{X_i^2}{2\theta}}\right)$, 于是有:

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{\theta} e^{-\frac{X_i^2}{2\theta}}\right) = \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - n \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\theta}$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\theta^2} = 0, \text{ 得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值: } \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}。$$

$$\text{又: } E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}\right) = E\left(\frac{X_1^2}{2}\right) = \frac{2\theta}{2} = \theta, \text{ 无偏的。}$$

$$12、f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 \leq x < \theta, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}, \quad \theta > 0,$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta) dx = \frac{2\theta}{3} \text{ 故 } \hat{\theta} = \frac{3}{2} \bar{X} \text{ 为 } \theta \text{ 的矩估计量, 且为无偏估计。}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i, & 0 \leq x < \theta, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

显然 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递减。故 θ 取最小值时 $L(\theta)$ 最大。

又 θ 不小于 $\max\{X_1, \dots, X_n\}$, 故 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 为 θ 的极大似然估计。

$$\text{又 } f_{X_{(n)}}(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1}, & 0 \leq x < \theta, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\text{故 } EX_{(n)} = \int_0^\theta \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n} dx = \frac{2n}{2n+1} \theta$$

$$\text{即 } E\hat{\theta}_2 = EX_{(n)} = \frac{2n}{2n+1} \theta \text{ 故 } \hat{\theta}_2 \text{ 为 } \theta \text{ 的有偏估计。}$$

$$13、\text{解 } E(X) = \int_0^\theta xf(x; \theta)dx = \frac{3\theta}{4}, \text{ 于是得 } \theta \text{ 的矩估计量为: } \hat{\theta} = \frac{4\bar{X}}{3}。$$

建立建立关于 θ 的似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\frac{3X_i^2}{\theta^3}) (\theta > X_i)$, 若使其似然函数最大,

于是可以求出 θ 的极大似然估计值: $\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

$$(2) \text{由 } T_1 = \frac{2}{3}(X_1 + X_2), \text{ 可计算 } E(T_1) = \frac{2}{3}[E(X_1) + E(X_2)] = \theta。$$

设 $Z = \max(X_1, X_2)$, 那么

$$P\{Z < t\} = P(\max(X_1, X_2) < t) = P(X_1 < t, X_2 < t) = P(X_1 < t)P(X_2 < t),$$

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } P\{Z < t\} = P(\max(X_1, X_2) < t) = 0,$$

$$\text{于是 } E(Z) = \int_0^\infty (1 - F_Z(t))dt = \int_0^\infty (1 - P(Z < t))dt = \int_0^\theta (1 - \left(\frac{t^3}{\theta^3}\right)^2)dt = \theta - \frac{\theta}{7} = \frac{6\theta}{7}$$

$$\text{从而: } E(T_2) = E\left(\frac{7}{6}\max(X_1, X_2)\right) = \frac{7}{6}E(\max(X_1, X_2)) = \theta$$

因此 T_1 和 T_2 都是 θ 的无偏估计量。

$$\text{又 } D(T_1) = D\left(\frac{2}{3}(X_1 + X_2)\right) = \frac{4}{9}[D(X_1) + D(X_2)] = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{15} \theta^2 = \frac{4}{135} \theta^2$$

$$D(T_2) = D\left(\frac{7}{6}\max(X_1, X_2)\right) = \frac{49}{36}D(\max(X_1, X_2)) = \frac{49}{36} \cdot \frac{3}{196} \theta^2 = \frac{1}{36} \theta^2$$

由于 $D(T_1) = \frac{4}{135} \theta^2 > D(T_2) = \frac{1}{36} \theta^2$, 所以 T_2 比 T_1 更有效。

$$14、(1) L(\mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu) = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)},$$

$$l(\mu) = \ln L(\mu) = -\sum_{i=1}^n X_i + n\mu,$$

$l(\mu)$ 为 μ 的单调递增函数, 故 μ 取最大值时 $l(\mu)$ 取最大值。

又 μ 不大于 $\min\{X_1, \dots, X_n\}$, 故 $\hat{\mu}_1 = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 为 μ 的极大似然估计。

$$\text{因 } F(x, \mu) = \int_{\mu}^x e^{-(t-\mu)} dt = 1 - e^{-(x-\mu)}$$

$$\text{易知 } f_{X_{(1)}}(x_i, \mu) = \begin{cases} ne^{-n(x-\mu)}, & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\text{所以 } E\hat{\mu}_1 = EX_{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X_{(1)}}(x_i, \mu) dx = \mu + \frac{1}{n}, \text{ 即 } \hat{\mu}_1 \text{ 是 } \mu \text{ 的有偏估计。}$$

$$\hat{\mu}_1^* = \hat{\mu}_1 - \frac{1}{n} \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计。}$$

$$(2) EX = \int_{\mu}^{\infty} xe^{-(x-\mu)} dx = \mu + 1, \text{ 则 } \hat{\mu}_2 = \bar{X} - 1 \text{ 是 } \mu \text{ 的矩估计量且为无偏估计。}$$

$$(3) D(\hat{\mu}_1^*) = D\left(\hat{\mu}_1 - \frac{1}{n}\right) = D(\hat{\mu}_1) = EX_{(1)}^2 - (EX_{(1)})^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$D(\hat{\mu}_2) = D(\bar{X} - 1) = D(\bar{X}) = \frac{1}{n} > D(\hat{\mu}_1^*), \text{ 故 } \hat{\mu}_1^* \text{ 比 } \hat{\mu}_2 \text{ 更有效。}$$

$$(4) \text{由切比雪夫不等式知, } \forall \varepsilon > 0, P\{|\hat{\mu}_1^* - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(\hat{\mu}_1^*)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \rightarrow 1$$

$$P\{|\hat{\mu}_2 - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(\hat{\mu}_2)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \rightarrow 1$$

故 $\hat{\mu}_1^*$ 与 $\hat{\mu}_2$ 为 μ 的相合估计。

$$15、\text{解 由于 } E(X) = \int_0^{\infty} xf(x; \lambda) dx = \lambda, \text{ 可求出 } \lambda \text{ 的矩估计量为: } \hat{\lambda} = \bar{X}$$

$$\text{又根据 } \lambda \text{ 的似然函数: } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \lambda) = \lambda^{-n} e^{-\sum_{i=1}^n X_i / \lambda},$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{-n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda^2} = 0, \text{ 得到 } \lambda \text{ 的极大似然估计量: } \hat{\lambda} = \bar{X}$$

因此 \bar{X} 既是 λ 的矩估计量，也是极大似然估计量。

(2) $E(c \cdot \sum_{i=1}^n X_i) = cn\lambda$ ，以及 $D(c \cdot \sum_{i=1}^n X_i) = c^2 n \lambda^2$ 。用 $c \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ 作为 λ 的估计量，

其均方误差为：

$$Mse(c \sum_{i=1}^n X_i) = E[(c \sum_{i=1}^n X_i - \lambda)^2] = E[c^2 n^2 (\bar{X})^2 - 2cn\bar{X}\lambda + \lambda^2] = \lambda^2 (c^2 n(1+n) - 2cn + 1)$$

于是，取 $c = \frac{1}{n+1}$ 时，在均方误差准则下， $c \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ 比 \bar{X} 更有效。

16、(1) $EX = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2\theta}{3}$ ，故 $\hat{\theta}_1 = \frac{3}{2} \bar{X}$ 为 θ 的矩估计量，且为无偏估计。

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{2x}{\theta^2} dx - \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

$$D\hat{\theta}_1 = \frac{9}{4} D\bar{X} = \frac{9}{4n} DX = \frac{\theta^2}{8n}$$

故 $P\left\{\left|\hat{\theta}_1 - \mu\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D(\hat{\theta}_1)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\theta^2}{8n\varepsilon^2} \rightarrow 1$ ，故 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的相合估计。

$$(2) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i$$

易知 $L(\theta)$ 为 θ 的单调递减函数，故 θ 取最小值时， $L(\theta)$ 取最大值。

又 θ 不小于 $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ ，故 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 为 θ 的极大似然估计。

$$f_{X_{(n)}}(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1}, & 0 \leq x < \theta, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

故 $E\hat{\theta}_2 = EX_{(n)} = \frac{2n}{2n+1} \theta$ ，故 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的有偏估计。

$$D\hat{\theta}_2 = DX_{(n)} = EX_{(n)}^2 - (EX_{(n)})^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

所以 $P\left\{\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2 \varepsilon^2} \rightarrow 1$

故 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的相合估计。

17、解 (1) 只对 X 做一次观察。由题意得： X 的条件联合概率密度函数以及其联合概率密度函数分别为：

$$P(X=2|\theta) = \theta(1-\theta)^2, \quad P(X=2, \theta) = \theta(1-\theta)^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\text{从而 } P(X=2) = \int_0^1 P(X=2, \theta) d\theta = \int_0^1 \theta(1-\theta)^2 d\theta = \frac{1}{12}$$

$$\theta \text{ 的条件概率密度函数为 } \pi(\theta|X=2) = \frac{P(X=2, \theta)}{P(X=2)} = 12\theta(1-\theta)^2,$$

$$\text{于是 } \theta \text{ 的贝叶斯估计为: } \hat{\theta}_B = \int_0^1 \theta \pi(\theta|X=2) d\theta = \int_0^1 12\theta^2(1-\theta)^2 d\theta = \frac{2}{5}$$

(2) 对 X 做三次观察。由题意得： X_1, X_2, X_3 的条件联合概率密度函数以及其联合概率密度函数分别为：

$$P(X_1=2, X_2=3, X_3=5|\theta) = \theta^3(1-\theta)^{10},$$

$$P(X_1=2, X_2=3, X_3=5; \theta) = P(X_1=2, X_2=3, X_3=5|\theta)\pi(\theta) = \theta^3(1-\theta)^{10}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

从而

$$P(X_1=2, X_2=3, X_3=5) = \int_0^1 P(X_1=2, X_2=3, X_3=5; \theta) d\theta = \int_0^1 \theta^3(1-\theta)^{10} d\theta = \frac{1}{4004}$$

θ 的条件概率密度函数为：

$$\pi(\theta|X_1=2, X_2=3, X_3=5) = \frac{P(X_1=2, X_2=3, X_3=5; \theta)}{P(X_1=2, X_2=3, X_3=5)} = 4004\theta^3(1-\theta)^{10},$$

于是 θ 的贝叶斯估计为：

$$\hat{\theta}_B = \int_0^1 \theta \pi(\theta|X_1=2, X_2=3, X_3=5) d\theta = \int_0^1 4004\theta^4(1-\theta)^{10} d\theta = \frac{4}{15}$$

18、(1) 因 $F_{X_{(1)}-\mu}(x) = P\{X_{(1)}-\mu < x\} = P\{X_{(1)} < \mu+x\} = 1-e^{-nx}$ 与参数 μ 无关，故可取

$X_{(1)}-\mu$ 为关于 μ 的区间估计问题的枢轴量。

(2) 设常数 $a < b$ ，满足 $P\{a < X_{(1)}-\mu < b\} = 1-\alpha$ ，即 $P\{X_{(1)}-b < \mu < X_{(1)}-a\} = 1-\alpha$

此时，区间的平均长度为 $L=b-a$ ，易知，取 $a = -\frac{1}{n} \ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ ， $b = -\frac{1}{n} \ln\frac{\alpha}{2}$ 时，区间

的长度最短，从而 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(X_{(1)} + \frac{1}{n} \ln \frac{\alpha}{2}, X_{(1)} + \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)。$$

19、解 由题意得： $E(X) = \int_0^{\infty} xf(x; \lambda)dx = \frac{1}{\lambda}$ ，由题意得： $\hat{\lambda}$ 的矩估计量为： $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ 。

由题意得： $2\lambda \sum_{i=1}^7 X_i \sim \chi^2(14)$ ，设存在两个数 a 和 b ，使得：

$P(a < 2\lambda \sum_{i=1}^7 X_i < b) = 0.8$ ，即 $P(\frac{a}{14\bar{X}} < \lambda < \frac{b}{14\bar{X}}) = 0.8$ ，经查表得到

$a = \chi^2_{0.9}(14) = 7.7895$ ， $b = \chi^2_{0.1}(14) = 21.0641$ ，于是 λ 的置信水平为 80% 的双侧置

信区间为： $(\frac{0.56}{\bar{X}}, \frac{1.50}{\bar{X}})$

20、易知 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025})$

将 $z_{0.025} = 1.96$ ， $\sigma = 10$ ， $n = 25$ ， $\bar{X} = 140$ 代入得

μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 (136.08, 143.92)。

21、解设 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} \sim t(10-1)$ ，由题意得， $\bar{x} = 5.68$ ， $s = 0.29$ ，由给定的置信水平

95%，利用 Excel 得到 $t_{0.025}(9) = 2.2622$ ，所以 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为：

$(\bar{x} - t_{0.025}(9) \cdot 0.29/\sqrt{10}, \bar{x} + t_{0.025}(9) \cdot 0.29/\sqrt{10}) = (5.473, 5.887)$

22、 σ^2 的置信水平为 99% 的置信区间为 $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.005}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.995}(n-1)})$

将 $n = 16$ ， $S = 2.2$ ， $\chi^2_{0.005}(15)$ 及 $\chi^2_{0.995}(15)$ 的值代入得

σ^2 的置信水平为 99% 的置信区间为 (2.213, 15.779)。

23、解 由题意得， $\frac{(12-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(11)$ ，于是 σ^2 的置信水平为 90% 的置信区间为：

$(\frac{11s^2}{\chi^2_{0.05}(11)}, \frac{11s^2}{\chi^2_{0.95}(11)}) = (\frac{11s^2}{19.6751}, \frac{11s^2}{4.5748}) = (0.022, 0.096)$

24、已知 $n_1 = 12$ ， $\bar{X} = 13.8$ ， $S_1 = 1.2$ ， $n_2 = 15$ ， $\bar{Y} = 12.9$ ， $S_2 = 1.5$ ， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(1) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{0.025}(n_1 + n_2 - 1) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, 查 EXCEL 表得 $t_{0.025}(26)$ 的值, 将各值代入得

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $(-0.198, 1.998)$

(2) 依题 $\bar{X} - \bar{Y} = 13.8 - 12.9 = 0.9 \in (-0.198, 1.998)$, 故可认为无显著差异。

25、解 (1) 设 μ_1 和 μ_2 分别是第一种和第二种机器的平均分钟, 取 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计为 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, 由于两个总体的方差相等, 所以有

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

根据已知条件知 $n_1 = n_2 = 60$, $s_1 = 19.4$, $s_2 = 18.8$, $\bar{x}_1 = 80.7$, $\bar{x}_2 = 88.1$, 可以求得

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 361.2$$

于是, $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0.025}(120 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0.025}(120 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) = (-14.306, -0.494)$$

(2) 从第一问的结果可以看出有显著差异。

26、 $n_1 = 16$, $S_1 = 55.7$, $n_2 = 20$, $S_2 = 31.4$, $1 - \alpha = 0.95$

(1) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.025}(15, 19)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.975}(15, 19)} \right)$

查 EXCEL 表得 $F_{0.025}(15, 19)$ 和 $F_{0.975}(15, 19)$ 的值, 将各值代入得

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ 的置信水平为 95% 的置信区间为 } (0.678, 4.919)$$

(2) 这些资料不足以说明 σ_1^2 不同于 σ_2^2 。

28 易知 P 置信水平为 $1 - \alpha = 0.95$ 的置信区间为

$\left(\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}), \frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})\right)$ 由已知资料计算得

$$a = n + z_{0.025}^2 = 60 + 1.96^2 = 63.8416,$$

$$b = -(2n\bar{x} + z_{0.025}^2) = -\left(2 \times 60 \times \frac{20}{60} + 1.96^2\right) = -43.8416,$$

$$c = n\bar{x}^2 = 60 \times \left(\frac{20}{60}\right)^2 \approx 6.67, \text{ 故所求的置信区间为 } (0.227, 0.459)。$$

27、解 (1) 设 σ_1 和 σ_2 分别是郊区 A 和郊区 B 的居民收入方差, 则:

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

根据已知条件知 $n_1 = n_2 = 52$, $s_1 = 203.52$, $s_2 = 358.12$, $\bar{x}_1 = 5760.35$, $\bar{x}_2 = 6570.20$,

于是, σ_1/σ_2 的置信水平为 95% 的置信区间为:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{0.025}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{1-0.025}(n_1-1, n_2-1)}\right) = (0.185, 0.563)$$

可见两郊区居民收入的方差有显著差异, 郊区 B 居民的贫富差距程度比郊区 A 居民严重。

(2) 设 μ_1 和 μ_2 分别是郊区 A 和郊区 B 的居民平均收入, 取 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计为 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, 由于两个总体的方差相等, 所以有

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

$$\text{可以求得 } S_w = \left[\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\right]^{0.5} = 291.265$$

于是, $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0.025}(104-2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0.025}(104-2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = (-921.809, -697.891),$$

可见，两郊区居民的平均收入方差有显著差异，郊区 A 居民平均收入比郊区 B 居民低。

第八章 假设检验

注意：这是第一稿（存在一些错误）

1、解 由题意知： $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(1) 对参数 μ 提出假设：

$$H_0: \mu \leq 2.3, \quad H_1: \mu > 2.3$$

(2) 当 H_0 为真时，检验统计量 $\frac{\bar{X}-2.3}{0.29/\sqrt{35}} \sim N(0,1)$ ，又样本实测得 $\bar{x}=2.4$ ，于是

$$P_- = P_{H_0} \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{2.4-2.3}{0.29/\sqrt{35}} \right) = P_{H_0} \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 2.04 \right) = 1 - \Phi(2.04) = 0.0207$$

(3) 由 (2) 知，犯第 I 类错误的概率为 0.0207

(4) 如果 $\alpha=0.05$ 时，经查表得 $z_\alpha=1.645$ ，于是

$$W \left\{ \frac{\bar{X}-2.3}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \right\} = W \left\{ \frac{\bar{X}-2.3}{0.29/\sqrt{35}} > 1.645 \right\}$$

(5) 是。

2、 $\bar{x}=14.55 < 15$ 故将希望得到支持的假设“ $\mu > 15$ ”作为原假设，即考虑假设问题 H_0 ：

$$\mu \geq 15, \quad H_1: \mu < 15$$

因 σ^2 未知，取检验统计量为 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ，由样本资料 $n=10$ ， $\bar{x}=14.55$ ， $s=\sqrt{1.2445}$

和 $\mu_0=15$ 代入得观察值 $t_0=-1.2857$ ，拒绝域为

$$W = \left\{ T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{0.05}(9) \right\}, \quad \text{查分布表得 } t_{0.05}(9)=1.8331, \quad t_0 > -t_{0.05}(9)$$

故接受原假设 H_0 ，即认为该广告是真实的。

3、解 (1) 由题意得, 检验统计量 $Z = \frac{\bar{X}-1}{\sigma/\sqrt{n}}$, 其拒绝域为

$$W = \{Z = \frac{\bar{X}-1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha}\} = W\{\bar{X} \geq 1.66\}$$

当 $\mu = 2$ 时, 犯第 II 类错误的概率为:

$$\beta = P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 是错误的}\} = P\{\bar{X} \leq 1.66 \mid \mu = 2\} = P\left\{\frac{\bar{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1.66-2}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = 0.198$$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 当 σ^2 未知时, 检验统计量 $24S^2$, 其拒绝域为:

$$W = \{24S^2 < \chi^2_{1-\alpha}(24)\} = \{S^2 < 0.577\}$$

当 $\sigma^2 = 1.25$ 时, 检验犯第 I 类错误的概率为:

$$\alpha = P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 是正确的}\} = P\{S^2 < 0.577 \mid \sigma^2 = 1.25\} = P\left\{\frac{24S^2}{1.25} < \frac{24 \cdot 0.577}{1.25}\right\} = 0.012$$

4、(1) 提出假设 $H_0: \mu = 3000$, $H_1: \mu \neq 3000$

建立检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 其中 $\mu_0 = 3000$

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 检验的拒绝域为 $W = \left\{|T| = \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{0.025}(7) = 2.3646\right\}$, 由样

本资料得观察值 $|t_0| = \left|\frac{2958.75 - 3000}{\sqrt{1348.4375}/\sqrt{8}}\right| = 2.972 > t_{0.025}(7)$, 故有显著差异。

(2) μ 的 95% 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$, 由样本资料得 μ 的

95% 的置信区间为 (2925.93, 2991.57)

(3) $P = 2P\{t(n-1) \geq |t_0|\} = 2P\{t(7) \geq 2.972\} = 0.0207$ 。

5、解 (1) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 。由题意得, 样本测得的值为 $\bar{x} = 167.2$, $s = 4.1$,

$n=100$ ，经查表得 $t_{\alpha/2}(99)=1.984$ ，于是均值 μ 的 95% 的置信区间为：

$$(\bar{x}+t_{\alpha/2}(99)s/\sqrt{n}, \bar{x}-t_{\alpha/2}(99)s/\sqrt{n})=(166.4, 168.0)$$

(2) 全国男子身高的平均值是 169.7，从 (1) 中的结果中，可以看出该地区男子的身高明显低于全国水平。

6、假设两组数据均来自正态总体，设 μ_d 表示服用减肥药前后体重均值的差，将减肥药无效即 “ $\mu_d \leq 0$ ” 作为原假设，即考虑假设问题 $H_0: \mu_d \leq 0$ ， $H_1: \mu_d > 0$

由数据资料可知减肥前后数据分散程度变化不大，故可以为两总体方差相等，因此可采用检验。

$$\text{检验统计量为 } T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\omega} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ 其中 } S_{\omega}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)},$$

由样本资料得， $\bar{x} = 61.6$ ， $\bar{y} = 58.6$ ， $s_1^2 = 87.04$ ， $s_2^2 = 76.44$ ， t 分布自由度为 $n_1 + n_2 - 2 = 18$ ，检验统计量的观察值为 $t_0 = 0.75$ ，

P_- 值为 $P_- = P\{t(18) > t_0 = 0.75\} = 0.0056 < \alpha = 0.05$ ，故拒绝原假设，即认为该药的减肥效果明显。

7、解 由题意得，建立检验的原假设和备择建设：

$$H_0: \sigma^2 \geq 8^2, \quad H_1: \sigma^2 < 8^2$$

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 。当 σ^2 未知时，检验统计量 $24S^2$ ，又样本实测得 $s = 4.98$ ，

于是

$$\chi_0^2 = \frac{4.98^2 \cdot 14}{8^2} = 5.421$$

利用 Excel 计算得 $P_- = P\{\chi^2(14) > 5.421\} = 0.021 < 0.05$

所以有充分的理由拒绝原假设，不需要退货。

8、(1) 因检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，故 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)} \right), \text{ 将 } n=16, s=2.2 \text{ 代入得, } (2.641, 11.593) \text{ 即为所求。}$$

(2) $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, 当 H_0 成立时, $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$, 拒绝域为

$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$, 将 $n=16$, $s=2.2$, $\sigma_0^2=4.5$ 代入得, 观察值

$\chi_0^2 = 16.133 \in (\chi_{0.975}^2(15), \chi_{0.025}^2(15))$, 故接受 H_0 。

9、 解 (1) 由样本资料 $\bar{x}=505.2 > 500$ 。建立检验的原假设和备择假设:

$$H_0: \mu \leq 500, \quad H_1: \mu > 500$$

由于 σ^2 未知, 取检验量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 将样本资料有:

$n=10, \bar{x}=505.2, s=6.321, \mu_0=500$ 得到观察值 $t_0=2.601$ 。

利用 Excel 计算得 $P_- = P\{t(n-1) \geq t_0\} = 0.0143$ 。

由 P_- 的值没有充分的理由拒绝原假设, 即没有充分的理由认为 $\mu > 500$

(2) 由题意知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 于是 σ^2 的 95% 的置信区间为:

$$\left(\frac{9s^2}{\chi_{0.05/2}^2(9)}, \frac{9s^2}{\chi_{1-0.05/2}^2(9)} \right) = (18.903, 133.185)$$

10、 假设 $H_0: \mu_A \leq \mu_B$, $H_1: \mu_A > \mu_B$

取检验统计量为 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, 其中 $S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$ 。

当 H_0 成立时, $T \sim t(n_1+n_2-2)$, 由样本资料得, 检验统计量的观察值为 t_0 ,

P_- 值为 $P_- = P\{t(8) > t_0\} = 0.0267 < \alpha = 0.05$, 故拒绝原假设, 即认为 $\mu_A > \mu_B$ 。

11、 解 (1) 相同

设 X 和 Y 分别是甲、乙两人页出错字数, 并且分别服从正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。建立检验的原假设和备择假设:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

取检验统计量为 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ，当 H_0 成立时， $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 。

根据样本资料计算结果如下：

$n_1 = 8, \bar{x} = \frac{19}{8}, s_1 = 1.598, n_2 = 9, \bar{y} = \frac{32}{9}, s_2 = 1.667$ ，检验统计量的观察值为

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.919$ 。利用 Excel 得 $F_{\alpha/2}(7, 8) = 4.529$ ， $F_{1-\alpha/2}(7, 8) = 0.204$ ，即

$F_{\alpha/2}(7, 8) > f_0 > F_{1-\alpha/2}(7, 8)$ ，因此不拒绝 H_0 ，可以认为甲、乙两人页出错字数的方差是相同的。

(2) 在接受方差相等的假设下，我们采用精确 t 检验对两组均值进行比较，考察两总体的右边检验：

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2, \quad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

两组合样本方差为 $s_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1} = 1.642$ ，检验统计量的观察值为

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -1.983, \quad P\text{-值} P_- = P(|t(15)| > t_0) = 0.033 < 0.05, \text{ 因此我们拒绝}$$

原假设的判断，从而甲页均出错不是显著少于乙的。

12、(1) 取检验统计量为 $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$ ，当 H_0 成立时， $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ ，拒绝域为

$W = \{F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或 } F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\}$ ，检验统计量的观察值

$f_0 = \frac{s_A^2}{s_B^2} = 1.21$ ，查表得 $F_{0.025}(30, 30) = 2.07$ ， $F_{0.975}(30, 30) = \frac{1}{F_{0.025}(30, 30)} = 0.48$ ，即

$F_{0.975}(30, 30) < f_0 < F_{0.025}(30, 30)$ ，故接受 H_0 。

(2) 由 (1) 知，接受 $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ ，此时 $\mu_A - \mu_B$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$\left((\bar{X}_A - \bar{X}_B) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right), \text{ 其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}, \text{ 将样本}$$

数据代入得 $(-0.642, -0.558)$ 即为所求。

13、解 (1) 设“一周内去过教堂”的人的比例为 p 。由 0—1 分布性质和中心

极限定理，知 $\frac{\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 $N(0,1)$ ，于是

$$P\left\{-\alpha \leq \frac{\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \alpha\right\} = 1 - 2\alpha,$$

由题意得样本的观察值为 $n=1785, \bar{x}=750$ ，从而求得 p 的置信区间为

(0.397, 0.443)

(详细步骤见 133 页)

(2) 设 $H_0: p < 0.5$, $H_1: p \geq 0.5$

由 (1) 的结果我们有充分的理由接受原假设，即认为不足一半的人去过教堂。

14、考虑假设问题 $H_0: X \sim \pi(\lambda)$

在 H_0 中参数 λ 未知，由极大似然法求得参数 λ 的估计为 $\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{233}{90} \approx 2.59$ ，则

$$\hat{p}_i = \hat{p}\{X=i\} = \frac{\hat{\lambda}^i}{i!} e^{-\hat{\lambda}}, \quad i=0,1,\dots,7, \quad \hat{p}_8 = \hat{p}\{X \geq 8\} = \sum_{j=8}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}^j}{j!} e^{-\hat{\lambda}},$$

量取值为 $\chi_0^2 = \sum_{i=0}^8 \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.683$ ，查 χ^2 分布表得

$\chi_{0.05}^2(9-1-1) = \chi_{0.05}^2(7) = 14.067 > \chi_0^2 = 2.683$ ，故没有充分理由拒绝原假设，即可认为符合泊松分布。

15、解 记 p_i 为数字 i 的概率， n_i 为检验过程中数字 i 出现的频数， n 为总试验次数。考虑假设问题：

$$H_0: p_i = \frac{1}{8} \quad (i=1,2,\dots,8)$$

这时检验统计量的取值为 $\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^8 \frac{n_i^2}{np_i} - n = 6$

查表得 $\chi_{0.05}^2(7) = 14.067 > 6$ ，因此接受 H_0

16、假设 $H_0: X \sim p(X=k) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}, \quad k=1,2,\dots$

则 $p_i = p\{X=i\} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$, $i=1,2,3$, $p_4 = p\{X \geq 4\} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{27}$, 则检验统

计量取值为 χ_0^2 , 利用 EXCEL 计算得 $P_- = P\{\chi^2(4-1) > \chi_0^2\} = 0.309 > \alpha = 0.05$, 故接受假设, 即认为服从几何分布。

17、解 考虑假设问题:

$$H_0: X \sim e(X; \lambda)$$

利用极大似然法求得参数 λ 的估计为 $\hat{\lambda} = 1/\bar{x} = \frac{1}{2}$ 。

当原假设成立, X 的分布函数为:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

根据已知条件计算 $n=100$

$$p_1 = F_0(1) = 1 - e^{-0.5}, p_2 = F_0(2) - F_0(1) = e^{-0.5} - e^{-1}, p_3 = F_0(3) - F_0(2) = e^{-1} - e^{-1.5}$$

$$p_4 = F_0(4) - F_0(3) = e^{-1.5} - e^{-2}, p_5 = 1 - F_0(4) = e^{-2}$$

则检验统计量的取值为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{n_i^2}{np_i} - n = 103.7354 - 100 = 3.7354$$

查表得 $\chi_{0.05}^2(3) = 7.815 > 3.7354$, 因此接受 H_0

$$18、(1) \text{取检验统计量为 } W = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_i \cdot [X_{(n+i-1)} - X_{(i)}] \right\}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \text{ 当 } W \leq W_{1-\alpha}(n) \text{ 时, 拒绝样本来}$$

自正态分布总体的假设。

对新药组: $n_1 = 12$, 查附表 8 得 $a_i (1 \leq i \leq 6)$ 的值, 由样本数据得统计量的观察值

$W_0 > W_{0.95}(12)$, 故接受新药品样本来自正态总体。

对对照组: $n_2 = 10$, 查附表 8 得 $a_i (1 \leq i \leq 5)$ 的值, 由样本数据得统计量的观察值为

$W_0 > W_{0.95}(10)$, 故接受对照组样本来自正态总体。

(2) 由(1)知可认为两组数据均服从正态分布, 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 考虑假

设检验问题 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, 取检验统计量为 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, 当 H_0 成立时,

$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$, 拒绝域为

$W = \{F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或 } F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\}$, 检验统计量的观察值

$f_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, $P_- = P\{F(11, 9) > f_0\} = 0.116 > \alpha = 0.05$ 故接受 H_0 。

即认为两样本来自方差相同的总体。

(3) 在(2)情况下, 考虑假设检验问题 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, 其中 $S_\omega^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$ 。当 H_0 成立时,

$T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, 检验的拒绝域为 $W = \{|T| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$ 由样本数据得检验统计量

的观察值为 $|t_0| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > t_{0.025}(20) = 2.086$, 故拒绝原假设, 即认为有显著差异。

19 解 D 的检验的统计量为

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{168} (i - \frac{168+1}{2}) \cdot X_{(i)}}{n^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \text{ 其中 } n = 168$$

分别计算 D 和 $Y = \frac{\sqrt{n}(D - 0.28209479)}{0.02998598}$, 当 $Y \leq Y_{1-\alpha/2}$ 或 $Y \geq Y_{\alpha/2}$ 时, 拒绝样本来自

自整台分布总体的假设。

经过计算有 $Y_{1-\alpha/2} \leq Y \leq Y_{\alpha/2}$, 可以判断新生女婴的体重数据是服从正态分布

第九章 方差分析与回归分析

注意: 这是第一稿 (存在一些错误)

1. 解:

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(y = y_i) = \prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l(\alpha, \beta, \sigma^2) = \ln L(\alpha, \beta, \sigma^2) = -n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i) x_i}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^4} - \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{解得} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}, \\ \hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}, \text{ 则 } \alpha、\beta \text{ 的极大似然估计与最小二乘估计一致。} \sigma^2 \text{ 的极大似然估计为} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n}. \end{array} \right.$$

$\frac{SSE}{n}$, 最小二乘估计为 $\frac{SSE}{n-2}$, 为 σ^2 的无偏估计。

2.

解: (1) 由题意, 知

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ 不全相等}$$

$$\text{计算有 } \bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \sum_{i=1}^n n_i x_i = 2.54$$

$$S_A = \sum_{i=1}^3 n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 0.738, \quad S_T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = 5.534$$

$$S_E = S_T - S_A = 4.796, \quad MS_A = S_A / (3-1) = 0.369$$

$$MS_E = S_E / (n_1 + n_2 + n_3 - 3) = 0.178, \quad F = MS_A / MS_E = 2.077$$

所以单因素方差分析表为：

方差来源	自由度	平方和	均方	F 比
因素 A	2	0.738	0.369	2.077
误差	27	4.796	0.178	
总和	29	5.534		

由于 $F = 2.077 < F_{\alpha}(2, 27) = 3.3541$ ，接受 H_0

(2) σ^2 的无偏估计量为： $MS_E = S_E / (n_1 + n_2 + n_3 - 3) = 0.178$

3.

解：

(1) $n = 61, r = 4,$

(2) $F_{0.05}(3, 57) \approx 2.76 < 3.564$, 则拒绝原假设，即认为不同年级学生的月生活费水平有显著差异。

4.

解： (1) 利用 Excel

差异源	SS	df	MS	F
组间	18.65733	2	9.328667	13.59203
组内	8.236	12	0.686333	
总计	26.89333	14		

从表中可以看出，三个车间生产的低脂肪奶的脂肪含量有显著差异；

(2) 由 (1) 中的表，可知 $MS_E = 0.686$

(3) 由于 σ^2 未知，用 t 统计量，即 $\frac{\bar{X}_2 - \mu_2}{S_2 / \sqrt{n_2}} \sim t(n_2 - 2)$ ， μ_2 得置信水平为 0.95

的双侧置信区间为：

$$(\bar{X}_2 - S_2 t_{\alpha/2}(n_2 - 1) / \sqrt{n_2}, \bar{X}_2 + S_2 t_{\alpha/2}(n_2 - 1) / \sqrt{n_2}) = (5.593, 7.207)$$

(4) 利用 130 页 (二) (b), 可以知道: $\mu_2 - \mu_3$ 德置信水平为 0.95 的置信区间为:

$$(\bar{X}_2 - \bar{X}_3 \pm t_{\alpha/2}(n_2 + n_3 - 2)S_{\omega} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}})$$

$$\text{其中: } S_{\omega}^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{n_2 + n_3 - 2}$$

经查表及计算得到: $\mu_2 - \mu_3$ 德置信水平为 0.95 的双侧置信区间为:

$$(-3.862, -1.578)$$

5.

$$\text{解: } r = 4, \quad n = 10, \quad \bar{X}_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad n_i = \begin{cases} 2, & i = 1, \\ 3, & i = 2, \\ 3, & i = 3, \\ 2, & i = 4. \end{cases}, \quad \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij},$$

$$S_A = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^4 n_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 = 502,$$

$$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^4 n_i (\bar{X}_{ij} - \bar{X})^2 = 654,$$

$$S_E = S_T - S_A = 152,$$

$$MS_A = S_A / (r - 1) = 167.33, \quad MS_E = S_E / (n - r) = 25.33, \quad \text{则}$$

$$F = MS_A / MS_E = 6.61, \quad \text{查表得 } F_{0.05}(3, 6) \approx 4.76 < 6.61$$

故拒绝原假设, 即认为四种新外观对销量有显著差异。

6.

解: 可以通过 Excel 来做

7.

$$\text{解: (1) } n = 8, \quad r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$s_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \text{ 代入数据得 } r = 0.7985, \text{ 不为 } 0, \text{ 即相关。}$$

$$(2) \hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = 16.428, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 135.362, \text{ 则 } \hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x = 135.362 + 16.428x。$$

$$(3) \sigma^2 \text{ 的无偏估计为 } s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 87928。$$

$$(4) SSR = \hat{\beta}^2 S_{xx} = 928404, \quad SSE = S_{yy} - \hat{\beta} S_{xy} = 527568, \quad SST = S_{yy} = 1455972,$$

$$F = \frac{SSR}{SSE/(n-2)} = 10.56, \text{ 查表得 } F_{0.05}(1, 6) \approx 5.99 < F,$$

故拒绝原假设，即认为回归方差显著。

$$t = \frac{\hat{\beta} \sqrt{s_{xx}}}{s} = 3.249, \text{ 查表得 } t_{\alpha/2}(n-2) = t_{0.025}(6) = 2.4469 < |t|,$$

故拒绝原假设，即认为回归系数检验显著。

$$(5) E(y) \text{ 的置信水平为 } 1-\alpha \text{ 的置信区间为 } \left(\hat{y} \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{s_{xx}}} \right),$$

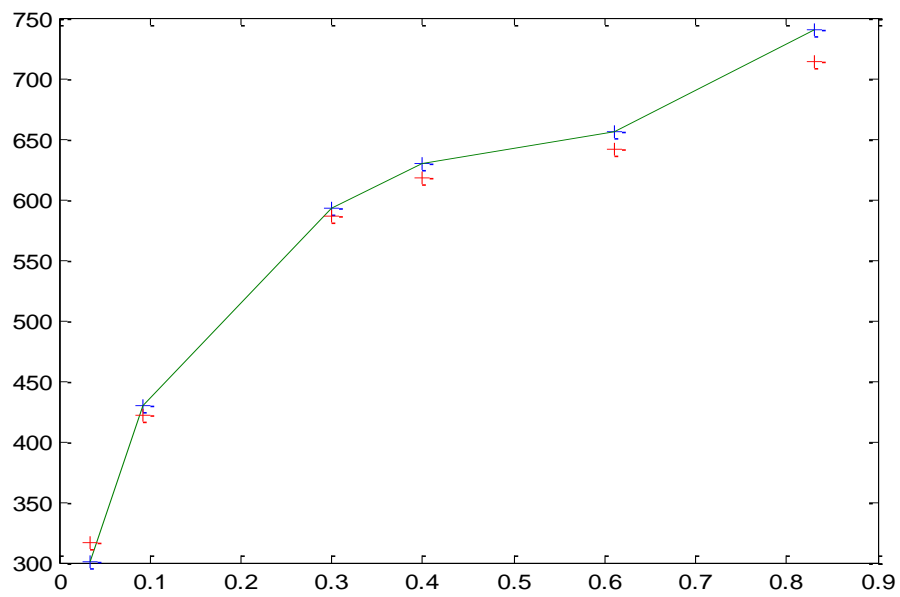
$$\text{由已知条件得, } E(y) \text{ 的置信区间为 } (843, 1399), \text{ 估计值为 } \frac{843+1399}{2} = 1121。$$

$$(6) y \text{ 的预测区间为 } \left(\hat{y} \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{s_{xx}}} \right), \text{ 由已知条件得,}$$

$$y \text{ 的预测区间为 } (344, 1898), \text{ 预测值为 } \frac{344+1898}{2} = 1121。$$

8.

解：(1) 用 Matlab 可以画出 Y 与 X 的散点图，



不

从图中可以看出不是线性关系

(2) 由题意得:

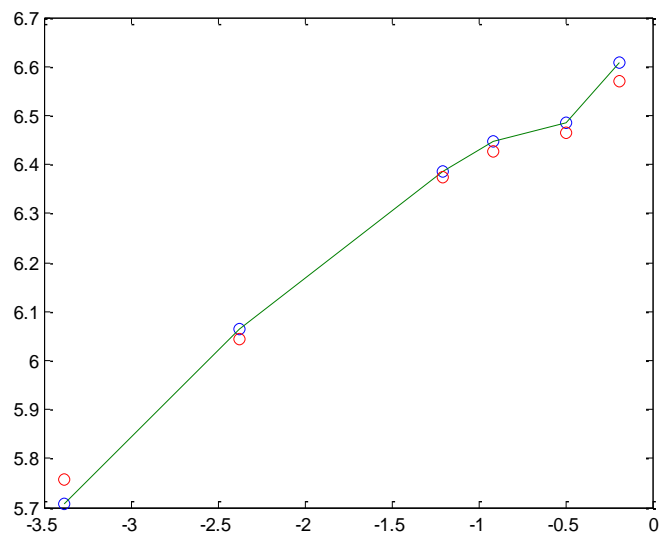
$$\begin{cases} \ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

利用最小二乘估计, 得到:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{\ln x} \\ \hat{\beta} = s_{xy} / s_{xx} \end{cases}$$

从而可以求出 $\ln Y$ 的线性回归方程。

用 Matlab 也可以作出 $\ln Y$ 关于 $\ln X$ 的线性关系:



从图形上也可以判断出采用 Y 比采用 lnY 结果要好。

9.

解：(1)线性回归模型为

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, i=1,2,\dots,16, \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ 且相互独立。} \end{cases}, \text{ 其中 } \beta_j, j=0,1,2, \text{ 和 } \sigma \text{ 为未知参数。}$$

$$\text{采用最小二乘法得 } \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y, \text{ 其中 } X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

代入数据得回归方程为 $\hat{y} = 33.85 + 5.15x_1 + 4.38x_2$ 。

$$(2) SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2, SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, n=16, p=2$$

代入数据得 $F = \frac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)}$, 查表得 $F_{0.05}(2,13) = 3.81 < F$, 故拒绝原假设, 即认为回归方程显著。

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{c_{jj}s}}, j=1,2, s = \sqrt{\frac{SSE}{n-p-1}}, \text{ 代入数据分别得 } t_1 \text{ 和 } t_2 \text{ 的值, 查表得}$$

$t_{0.05}(13) = 2.1604$, 故拒绝原假设, 即认为回归系数检验显著。

(3)线性假设成立, 方差齐性, 独立性满足。