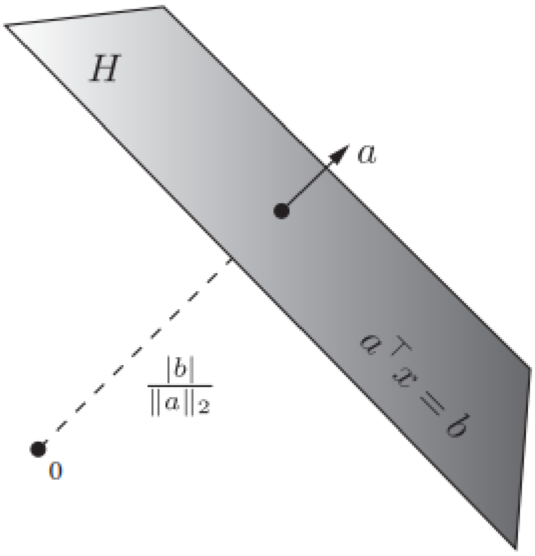
如何求解一个多面体中的最大面积椭圆

空间中多面体的表示

在$\mathbb{R}^n$中，超平面可以表示为如下形式的一个集合：

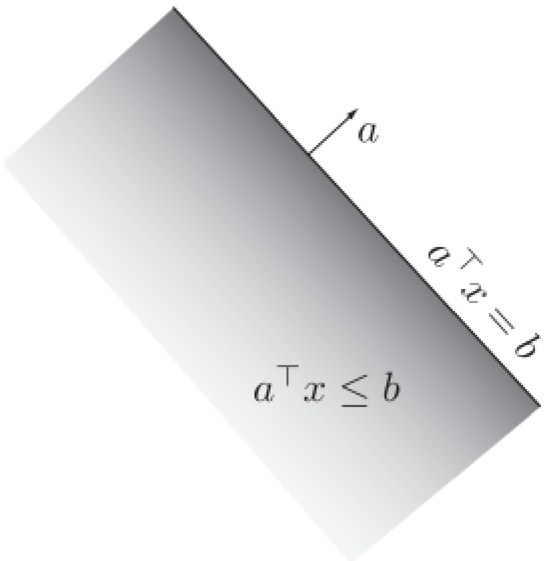
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

其中$a \in \mathbb{R}^n$ 且 $a \neq 0$， $b \in \mathbb{R}^n$.



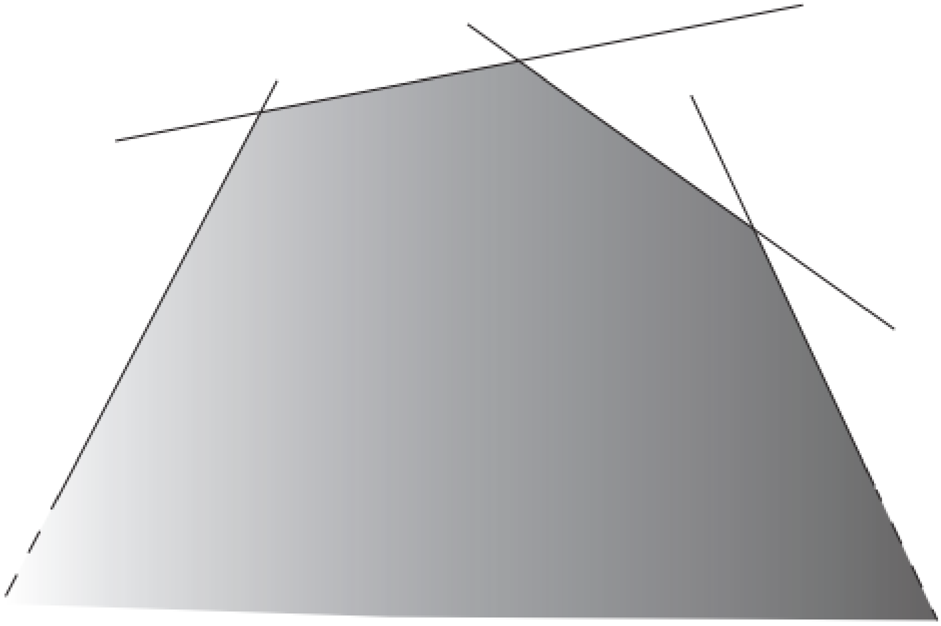
一个超平面H将整个空间分为了两个部分，其中每个部分都是一个half-space:

$$H_- = \{x : a^T x \leq b\}, H_{++} = \{x : a^T x > b\}$$



空间中的一个多面体P就可以描述为一系列half-space的交集：

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : {a_i}^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$$



空间中的椭圆

一个空间中的有界椭圆可以认为是一个单位圆的仿射映射下的图形：

$$\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n:x=Qz+c,\parallel z\parallel_2\leq 1\}$$

Q就是仿射矩阵，且$Q\succ 0$，c是椭圆的圆心。此时椭圆的面积正比于$\det Q$。

多面体中的最大椭圆

椭圆被包含在多面体中，即$\varepsilon\subseteq P$，意味着不等式${a_i}^Tx\leq b_i,i=1,\ldots,m$对于所有的$x\in\varepsilon$都应该满足，即对于$i=1,\ldots,m$，必须满足：

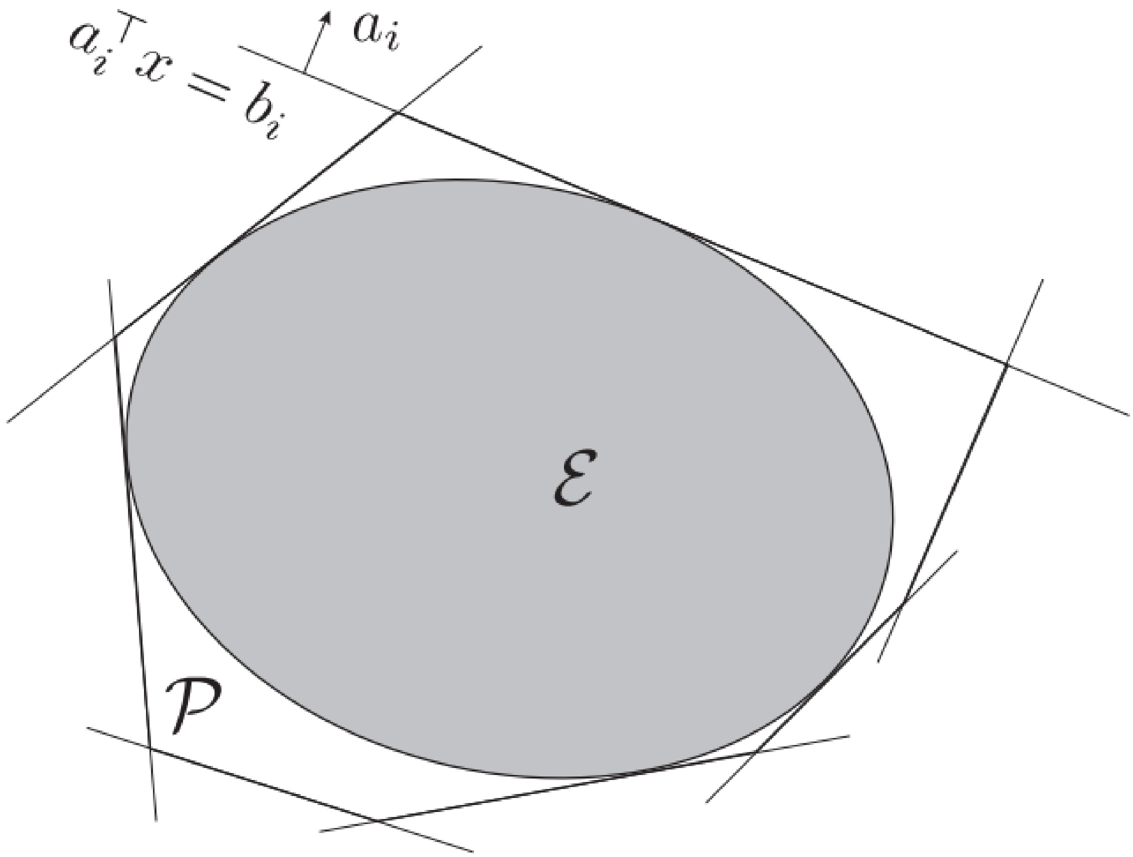
$${a_i}^Tx\leq b_i,x=Qz+c,\forall z:\parallel z\parallel_2\leq 1$$

我们将$x=Qz+c$代入不等式${a_i}^T\leq b_i$中，对于所有的$i=1,\ldots,m$：

$${a_i}^TQz+{a_i}^Tc\leq b_i,\forall z:\parallel z\parallel_2\leq 1\Leftrightarrow \underset{\parallel z\parallel_2\leq 1}{max}{a_i}^TQz+{a_i}^Tc\leq b_i$$

${a_i}^Tc$部分是常数，所以我们只考虑前边部分。在已知$\parallel z\parallel_2\leq 1$情况下，$z=Q^Ta_i/\parallel Q^Ta_i\parallel_2$时${a_i}^TQz$取到最大，等于${a_i}^TQQ^Ta_i/\parallel Q^Ta_i\parallel_2\Rightarrow\parallel Q^Ta_i\parallel_2^2/\parallel Q^Ta_i\parallel_2\Rightarrow\parallel Q^Ta_i\parallel_2$。
就意味着：

$$\varepsilon\subseteq P\Leftrightarrow\parallel Q^Ta_i\parallel_2+{a_i}^Tc\leq b_i,i=1,\ldots,m$$



因为log是一个单调递增函数，所以我们可以等价的最大化$log(detQ)$，此时我们的目标函数时一个凹函数。

因此，通过求解以下凸优化问题可以得到P中包含的最大体积椭球(它涉及一个凹目标$f_0 = \log\det Q$的最大化，等价最小化凸目标$-f_0$)

$$
\begin{aligned}
\max_{Q\in\mathbb{S}^n, c\in\mathbb{R}^n} \quad & \log\det Q \\
s.t.: \quad & Q \succ 0 \\
& \| Q^T a_i \|_2 + {a_i}^T c \le b_i, i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$