Алгоритми та складність

I семестр

Лекція 10

Інші підходи до пошуку підрядків

- В основі вже розглянутих методів пошуку підрядка в рядку лежить порівняння.
- Їх головною елементарною операцією є безпосереднє порівняння двох символів.
- Існують алгоритми, що використовують інші принципи: застосування бітових та арифметичних операцій.
- Ці алгоритми намагаються не зменшити кількість кроків пошуку, а мінімізувати обчислення на кожному з них.

Алгоритм Shift-And

- Також відомий як алгоритм Shift-Or, bitap-алгоритм, двійковий алгоритм пошуку підрядка, алгоритм Baeza-Yates – Gonnet.
- Ідея полягає у використанні швидких бітових операцій при порівнянні.
- Метод ефективний при пошуку невеликих зразків (довжиною з типове англійське слово).

- Нехай маємо зразок P довжини n та текст T довжини m.
- Для обчислень розглядається двійкова (з 0 та 1) матриця M розміром $n \cdot (m+1)$.

Алгоритм Shift-And

- В матриці M індекс i змінюється від 1 до n (довжина шаблону), індекс j – від 0 до m (довжина тексту).
- $M(i,j) = 1 \Leftrightarrow P[1..i] = T[(j–i+1)..j]$
- Тобто перші i символів зразка P співпадають з і символами тексту T, закінчуючи позицією j.
- Решта елементів матриці M нулі.
- Іншими словами, одиниці в рядку і показують всі місця в тексті, де закінчуються копії P[1..i], одиниці в стовпці j відповідно показують всі префікси зразка, що закінчуються в позиції j рядка T.

Алгоритм Shift-And

- Нехай T = «CALIFORNIA», P = «FOR»

			C	A	L	I	F	O	R	N	I	A
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
O	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
R	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

- M(n,j) = 1 ⇔ входження P закінчується в позиції j тексту.
- Отримання одиниці в останньому рядку означає розв’язання задачі про точне співпадіння.

Для побудови матриці M потрібно ввести ще дві операції.

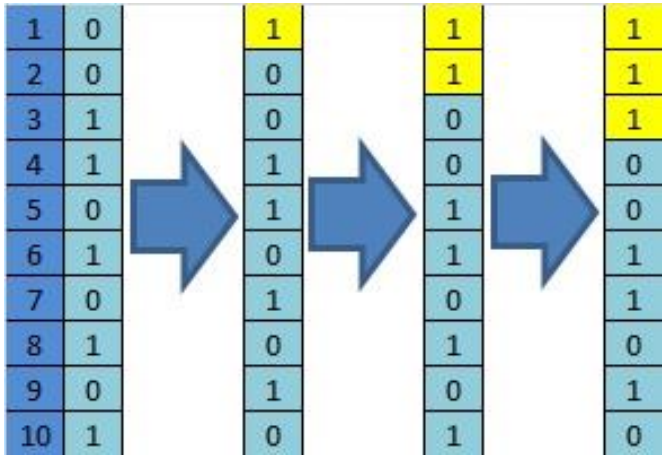
Алгоритм Shift-And

- Введемо характеристичні вектори-маски U(x) для шаблону для кожного символу x, що входить до тексту.
- Одиниці будуть стояти в тих позиціях P, де є символ x.
- Наприклад, при P = «ABACDEAB» отримаємо зокрема вектор U(A) = 10100010:

		1	2	3	4	5	6	7	8
P	=	A	B	A	C	D	E	A	B
U(A)	=	1	0	1	0	0	0	1	0

Алгоритм Shift-And

- Також вводиться операція Bit-Shift(j) – вектор, отриманий зсувом стовпчика j на позицію вниз та дописуванням згори 1; старе значення в позиції n втрачається.
- Іншими словами, вектор Bit-Shift(j) складається з 1, до якої приписано перші (n–1) бітів стовпчика j.
- Приклад трьох послідовних застосувань Bit-Shift до стовпця 0011010101:



Алгоритм Shift-And

- Матриця M обчислюється по стовпцях.
- Нульовий стовпчик містить всі нулі.
- Кожен наступний стовпчик j отримується через попередній та вектор U для символа T(j):

$$M(j) = \text{Bit-Shift}(j-1) \text{ AND } U(T(j))$$

- Тут AND – побітове логічне множення.
- Зберігати всю матрицю не потрібно, достатньо двох стовпчиків.

Алгоритм Shift-And

Приклад: нехай дано шаблон P = «ABAAC» та текст T = «XABXABAAXA».

- M(0) = (0,0,0,0,0)
- U(T(1)) = U(X) = (0,0,0,0,0)
- Shift-And(0) = (1,0,0,0,0)
- M(1) = (1,0,0,0,0) AND (0,0,0,0,0) = (0,0,0,0,0)

			X	A	B	X	A	B	A	A	X	A
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	0	0									
B	2	0	0									
A	3	0	0									
A	4	0	0									
C	5	0	0									

Алгоритм Shift-And

P = «ABAAC», T = «XABXABAAXA»

- U(T(2)) = U(A) = (1,0,1,1,0)
- Shift-And(1) = (1,0,0,0,0)
- M(2) = (1,0,0,0,0) AND (1,0,1,1,0) = (1,0,0,0,0)

			X	A	B	X	A	B	A	A	X	A
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	0	0	1								
B	2	0	0	0								
A	3	0	0	0								
A	4	0	0	0								
C	5	0	0	0								

Алгоритм Shift-And

P = «ABAAC», T = «XABXABAAXA»

- U(T(3)) = U(B) = (0,1,0,0,0)
- Shift-And(2) = (1,1,0,0,0)
- M(3) = (1,1,0,0,0) AND (0,1,0,0,0) = (0,1,0,0,0)

			X	A	B	X	A	B	A	A	X	A
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	0	0	1	0							
B	2	0	0	0	1							
A	3	0	0	0	0							
A	4	0	0	0	0							
C	5	0	0	0	0							

Алгоритм Shift-And

P = «ABAAC», T = «XABXABAAXA»

Врешті-решт отримуємо:

- U(T(10)) = U(A) = (1,0,1,1,0)
- Shift-And(9) = (1,0,0,0,0)
- M(10) = (1,0,0,0,0) AND (1,0,1,1,0) = (1,0,0,0,0)

			X	A	B	X	A	B	A	A	X	A
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
B	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
A	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
A	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
C	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Як видно, повних входжень зразка у текст не було знайдено.

Алгоритм Shift-And

- Для довільного i>1 справедливо M(i,j) = 1 ⇔ P[1..(i–1)] = T[(j–i+1)..(j–1)] та P[i] = T[j].
- Перша умова вірна при M(i–1,j–1) = 1.
- Друга умова вірна, якщо i-й біт вектора U для символа T[j] дорівнює 1.
- Після зсуву стовпчика j–1, елемент M(i–1,j–1) множиться на i-й елемент вектора U(T[j]).
- Отже, елементи матриці M обчислюються коректно.

Алгоритм Shift-And

- Алгоритм має складність O(m*n).
- Побудова масиву U вимагає O(|Σ|*n) операцій та пам’яті. (|Σ| – довжина алфавіту.)
- Дуже швидкий, якщо довжина зразка n не перевищує довжину машинного слова та алфавіт невеликий: оцінки O(m) та O(n+|Σ|) відповідно.
- Не чутливий до поганих вхідних даних.
- Однак не має явної переваги над іншими алгоритмами.
- Легко модифікується для наближеного та множинного пошуку.

Алгоритм Shift-Or

- Варіант підходу Shift-And.
- Оскільки при реальній операції зсуву на вільному місці з’являється 0, ролі 0 та 1 в алгоритмі можна поміняти.
- «Сигнальним» значенням стає 0.
- Операція Bit-Shift’ записує вгорі 0.
- W(T(j)) = not U(T(j))
- Тоді значення стовпчика обчислюватиметься як

$$M'(j) = \text{Bit-Shift}'(j-1) \text{ OR } W(T(j))$$

- Формула коректна, оскільки є запереченням виразу, що використовувався для Shift-And.

Наближений пошук рядків

- Наближений (нечіткий) пошук рядків (approximate string matching, fuzzy string searching).
- Допускається «неточне» входження зразка – з кількістю «помилок», що не перевищує задану.
- «Помилка» – неспівпадіння, вставка чи пропуск символа, у порівнянні з шаблоном.
- Алгоритми наближеного пошуку використовуються при перевірці орфографії, в пошукових системах, в біоінформатиці (визначення схожості послідовностей ДНК).

Наближений пошук рядків

- Вводиться «міра близькості» слів – відстань редагування.
- Оцінюється мінімальна кількість примітивних операцій, необхідних для перетворення одного слова в інше.
- Можуть розглядатися різні набори примітивних операцій, яким може призначатися різна вага. Серед них:

Заміна: co**a**t → co**s**t

Вставка: cot → co**a**t

Видалення: co**a**t → cot

Транспозиція: co**st** → co**ts**

Наближений пошук рядків

- Найпростіший варіант – оцінка кількості відмінних відповідних позицій в словах однієї довжини.
- Це – відстань Геммінга (Hamming).
- Приклади відстаней:

"ka**rol**in" та "ka**thr**in": 3

"k**a**r**ol**in" та "k**e**r**st**in": 3

10**1**1**1**01 та 10**0**1**0**01: 2

2**17**3**8**96 та 2**23**3**7**96: 3

Наближений пошук рядків

- Найчастіше під відстанню редагування мають на увазі відстань Левенштейна.
- Найприродніша з метрик; містить примітивні операції заміни, вставки та видалення символу.
- Наприклад, відстань між словами "kitten" та "sitting" дорівнює 3:

kitten => **s**itten (заміна)

sitt**e**n => sitt**i**n (заміна)

sittin => sittin**g** (вставка)

- Якщо додатково допускається перестановка сусідніх символів, отримуємо відстань Дамерау-Левенштейна.

Модифікація Shift-And

- Для наближеного пошуку без індексації найчастіше використовують модифікації алгоритму Shift-And.
- Таку варіацію як один з алгоритмів містить, зокрема, пошукова утиліта agrep.
- Алгоритм працює з відстанню Левенштейна.
- Розглядається сімейство двійкових матриць M^k:

$M^k(i,j) = 1 \Leftrightarrow$ не менше (i–k) з перших і символів зразка P співпадають з і символами у відрізку тексту T, що закінчується позицією j.

- Параметр k визначає допустиму кількість неспівпадінь.

Модифікація Shift-And

- M^0 – матриця, що відповідає масиву M первинного методу.
- Умова $M^k(n,j) = 1$ означає наявність входження зразка P в T, що закінчується в позиції j та має не більше k неспівпадінь.
- Ефективність методу залежить від значення k: чим воно більше, тим повільніше працює алгоритм.
- Для малих k метод дуже швидкий.
- Для кожного наступного символу тексту послідовно обчислюються значення стовпців $M^0(j)$, $M^1(j)$, …, $M^k(j)$.

Модифікація Shift-And

- Обчислення значень $M^0(j)$ залишається незмінним.
- Для різних типів неспівпадінь обраховується своє сімейство $M^1(j),\ldots,M^k(j)$, за своїми умовами.
- Для вставки символу:

$$M^k_{встав}(j) = (\text{Bit-Shift}(M^k_{встав}(j-1)) \text{ AND } U(T(j))) \text{ OR } M^{k-1}_{встав}(j-1)$$

- Для видалення символу:

$$M^k_{видал}(j) = (\text{Bit-Shift}(M^k_{видал}(j-1)) \text{ AND } U(T(j))) \text{ OR Bit-Shift}(M^{k-1}_{видал}(j))$$

Модифікація Shift-And

- Для заміни символу:

$$M^k_{зам}(j) = (\text{Bit-Shift}(M^k_{зам}(j–1)) \text{ AND } U(T(j))) \text{ OR } M^{k–1}_{зам}(j–1)$$

- Перші частини виразів описують ситуацію вже наявності k неточностей при співпадінні поточного символу в тексті з шаблоном.
- Другі частини описують випадок виявлення помилки.
- Результуюче значення по всіх типах неспівпадінь береться через побітовий логічний OR умов:

$$M^k(j) = M^k_{встав}(j) \text{ OR } M^k_{видал}(j) \text{ OR } M^k_{зам}(j)$$

Деякі означення теорії чисел

- d|a – d ділить a; a кратне d.
- Якщо d|a та d≥0, то d є *дільником* a.
- 0 ділиться на всі цілі числа.
- Кожне число a ділиться на *тривіальні дільники* 1 та a. Нетривіальні дільники також називають *множниками*.
- *Просте число*: ціле a>1, що має лише тривіальні дільники.
- Ціле a>1, яке не є простим – *складене*.
- Число 1 (*одиниця*) не є ні простим, ні складеним.
- Число 0 та всі від'ємні цілі також не є ні простими, ні складеними.

Деякі означення теорії чисел

- Для довільного цілого a та довільного додатного цілого n існує єдина пара цілих q та r, що $0 \le r < n$ та $a = qn + r$.
- $q = [a/n]$ – *частка* від ділення, $r = a \bmod n$ – *остача* від ділення. Тобто $n \mid a \Leftrightarrow a \bmod n = 0$.
- Відповідно до їх остач по модулю n, всі числа можна розбити на n *класів еквівалентності*, які містять число a:

$$[a]_n = \{a + kn : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Наприклад, $[3]_7 = \{..., -11, -4, 3, 10, 17, ...\}$
- Інші варіанти позначення цієї ж множини: $[-4]_7$, $[10]_7$.

Деякі означення теорії чисел

- *Множина* всіх таких *класів еквівалентності*:

$$\mathbb{Z}_n = \{[a]_n : 0 \leq a \leq n-1\}$$

- a $\in$ $[b]_n$ означає a ≡ b (mod n), тобто

(a – b) mod n = 0, або ж

a mod n = b mod n.

- Альтернативний запис

$\mathbf{Z}_n$ = {0, 1, …, n – 1}

підкреслює, що кожен клас представлений найменшим невід'ємним елементом: 0 позначає $[0]_n$, 1 позначає $[1]_n$ і т.д.

- З іншого боку, $-1 \in [n-1]_n$, бо $-1 \equiv n-1 \pmod n$.

Деякі означення теорії чисел

- Правила робота з остачами:
  - $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
  - $(a – b) \bmod n = ((a \bmod n) – (b \bmod n)) \bmod n$
  - $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$
- Для всіх цілих x, y: з $d|a$ та $d|b$ => $d|(ax + by)$
- *Найбільший спільний дільник* gcd(a,b) двох цілих чисел a та b, не рівних 0 одночасно, – найбільший зі спільних дільників a та b.
- Якщо a та b – довільні цілі, не рівні 0 одночасно, то величина gcd(a,b) дорівнює найменшому додатному елементу множини $\{ax + by \mid x,y \in \mathbf{Z}\}$ лінійних комбінацій чисел a та b.

Алгоритм Рабіна-Карпа (Rabin-Karp)

- Нехай Σ = {0,1,2,…,9}, тобто кожен символ є десятковою цифрою.
- Для загального випадку можна припустити, що кожен символ – цифра в системі числення з основою d=$|\Sigma|$.
- Розглянемо рядок з k послідовних символів як k-цифрове десяткове число.
- Позначимо p – десяткове значення, що відповідає заданому шаблону.
- Так само t_s – десяткове значення підрядків T[(s+1)..(s+m)] довжини m при s=0,1,…,(n–m).

Алгоритм Рабіна-Карпа

- $t_s = p \Leftrightarrow T[(s+1)..(s+m)] = P[1..m]$.
- Тоді s є допустимим зсувом $\Leftrightarrow t_s = p$.
- Якщо значення p можна обчислити за Θ(m), а всі значення t_s за загальний час Θ(n–m+1), то значення всіх допустимих зсувів обчислюється порівнянням p з кожним із t_s за час Θ(m)+Θ(n–m+1) = Θ(n).
- Запис Θ(n–m+1) символізує, що при n = m час роботи буде Θ(1).
- Величину p справді можна обчислити за Θ(m) (схема Горнера):

$$p = P[m] + 10\,(P[m-1] + 10(P[m-2] + \cdots + 10(P[2] + 10P[1]) \cdots))\ .$$

Алгоритм Рабіна-Карпа

- Аналогічно Θ(m) обчислюється t_0 з T[1..m].
- Величину t_{s+1} можна обчислити, маючи t_s, за константний час, використавши співвідношення

$$t_{s+1} = 10(t_s - 10^{m-1}T[s+1]) + T[s+m+1] \ .$$

- З величини t_s видалається старша цифра, результат домножується на 10 і додається відповідна молодша цифра.

Алгоритм Рабіна-Карпа

- Наприклад, t_s=31415, m=5 і нова молодша цифра 2:

$$t_{s+1} = 10(31415 - 10000 \cdot 3) + 2$$
$$= 14152 .$$

- Або так:

i	...	2	3	4	5	6	7	...	
current value	1	4	1	5	9	2	6	5	*text*
new value		4	1	5	9	2	6	5	

	4	1	5	9	2	*current value*
-	4	0	0	0	0	
		1	5	9	2	*subtract leading digit*
			*	1	0	*multiply by radix*
	1	5	9	2	0	
				+	6	*add new trailing digit*
	1	5	9	2	6	*new value*

Алгоритм Рабіна-Карпа

- Якщо константа 10^{m-1} вже попередньо обчислена за час O(m), то на обчислення кожного t_{s+1} піде фіксована кількість арифметичних операцій.
- Таким чином визначаються t_1 , t_2 , …, t_{n-m} за час Θ(n–m).
- Отже, всі входження зразка P[1..m] в текст T[1..n] можна знайти, витративши на передобробку час Θ(m), а на фазу порівняння Θ(n–m+1).
- А якщо значення t_s та p виявляться занадто великими?
- Можна проводити обчислення по модулю!

Алгоритм Рабіна-Карпа

- Обчислимо значення p по модулю деякого q за час Θ(m) та значення усіх t_s по цьому ж модулю – сумарно за час Θ(n–m+1).
- Якщо взяти q таким простим числом, що 10q поміщається в машинне слово, то обчислення виконаються з використанням арифметики одинарної точності (для розглянутого випадку).
- В загальному випадку для d-символьного алфавіту {0,1,…, (d – 1)} вибирається q так, щоб значення dq поміщалося в машинне слово.
- Рекурентне співвідношення для t_{s+1} слід поправити, щоб воно працювало по модулю q.

Алгоритм Рабіна-Карпа

- Вигляд оновленого рекурентного співвідношення:

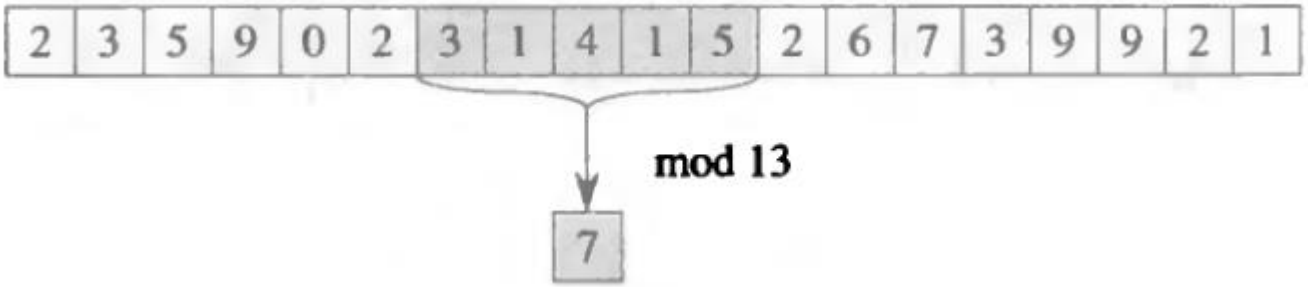
$$t_{s+1} = (d(t_s - T[s+1]h) + T[s+m+1]) \bmod q$$

- Тут $h \equiv d^{m-1} \pmod q$ – значення цифри 1 в старшому розряді вікна розміром m цифр.
- Однак з $t_s \equiv p \pmod q$ не випливає $t_s \equiv p$!
- Але відсутність рівності по модулю гарантує $t_s \neq p$, що дає недопустимість зсуву s.
- Тому перевірка $t_s \equiv p \pmod q$ буде евристичним тестом, що допоможе виключити недопустимі зсуви s.
- У разі виконання співвідношення зсув s необхідно додатково перевірити на допустимість.

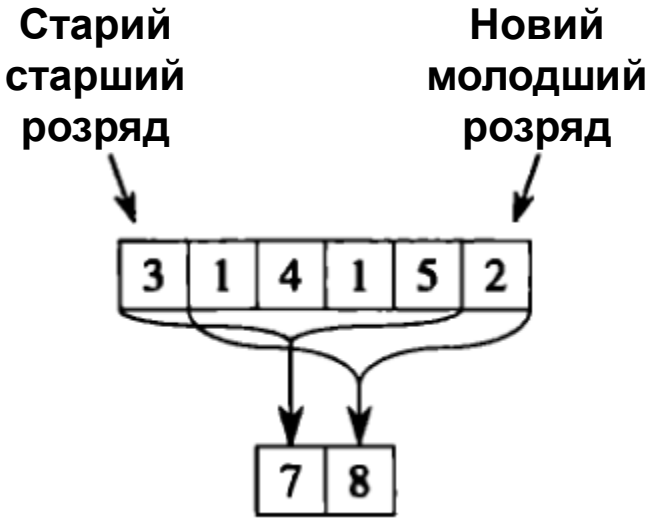
Алгоритм Рабіна-Карпа

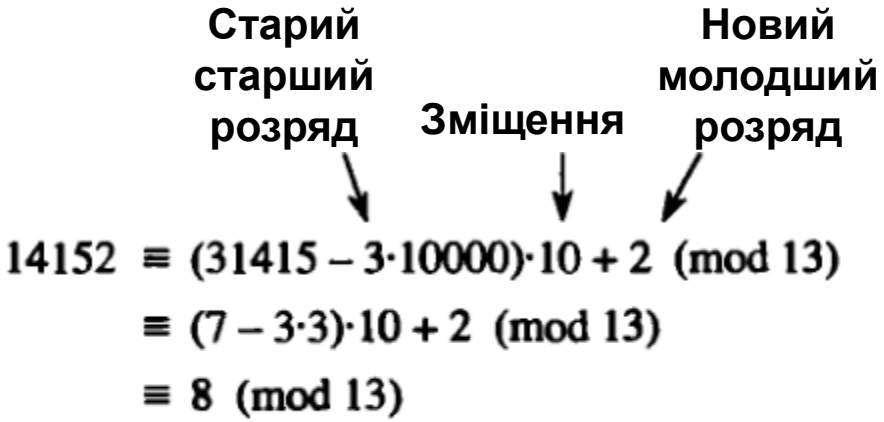
- Ситуація, при якій виконується $t_s \equiv p \pmod q$, але зсув s є недопустимим, називається *хибним співпадінням*.
- Відрізнити хибне співпадіння від справжнього входження можна безпосередньою перевіркою P[1..m] = T[(s+1)..(s+m)].
- При підборі достатньо великого q висока ймовірність рідкості випадків хибних співпадінь, тому вартість додаткової перевірки виявиться низькою.
- По суті, алгоритм виконує пошук зразка в тексті з використанням хешування.

Алгоритм Рабіна-Карпа



Результат обчислення чисельного значення вікна довжини 5 по модулю 13





Обчислення чисельного значення поточного вікна за відомим попереднім з обчислень по модулю

Алгоритм Рабіна-Карпа

Пошук зразка «31415» в заданому тексті методом Рабіна-Карпа. Обчислені всі чисельні значення вікон довжини 5. Всі обчислення ведуться за модулем 13.

Приклад наявності істинного входження та хибного співпадіння.

Алгоритм Рабіна-Карпа

Пошук зразка «26535»

i	0	1	2	3	4
	2	6	5	3	5

0 2 % 997 = 2

1 2 6 % 997 = (2*10 + 6) % 997 = 26

2 2 6 5 % 997 = (26*10 + 5) % 997 = 265

3 2 6 5 3 % 997 = (265*10 + 3) % 997 = 659

4 2 6 5 3 5 % 997 = (659*10 + 5) % 997 = 613

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3

0 3 % 997 = 3

1 3 1 % 997 = (3*10 + 1) % 997 = 31

2 3 1 4 % 997 = (31*10 + 4) % 997 = 314

3 3 1 4 1 % 997 = (314*10 + 1) % 997 = 150

4 3 1 4 1 5 % 997 = (150*10 + 5) % 997 = 508

5 1 4 1 5 9 % 997 = ((508 + 3*(997 - 30))*10 + 9) % 997 = 201

6 4 1 5 9 2 % 997 = ((201 + 1*(997 - 30))*10 + 2) % 997 = 715

7 1 5 9 2 6 % 997 = ((715 + 4*(997 - 30))*10 + 6) % 997 = 971

8 5 9 2 6 5 % 997 = ((971 + 1*(997 - 30))*10 + 5) % 997 = 442

9 9 2 6 5 3 % 997 = ((442 + 5*(997 - 30))*10 + 3) % 997 = 929

10 2 6 5 3 5 % 997 = ((929 + 9*(997 - 30))*10 + 5) % 997 = 613

match

Алгоритм Рабіна-Карпа

```
Rabin_Karp_Matcher(T, P, d, q)
 1 n ← length[T]
 2 m ← length[P]
 3 h ← d^(m−1) mod q
 4 p ← 0
 5 t_0 ← 0
 6 for i ← 1 to m //Попередня обробка
 7     do p ← (dp + P[i]) mod q
 8        t_0 ← (dt_0 + T[i]) mod q
 9 for s ← 0 to n − m //Перевірка
10     do if p = t_s
11           then if P[1..m] = T[s + 1..s + m]
12                   then print «Зразок знайдено зі зсувом» s
13        if s < n − m
14           then t_{s+1} ← (d(t_s − T[s + 1]h) + T[s + m + 1]) mod q
```

- Опис алгоритму. В якості вхідних даних виступають текст T, зразок P, основа системи числення d (яку часто вибирають як $|\Sigma|$) та просте число q.

Алгоритм Рабіна-Карпа

- В порівнянні з іншими алгоритмами пошуку підрядка повільно працює в найгіршому випадку.
- Гарно адаптується для множинного пошуку рядків і при цьому матиме зручнішу реалізацію серед інших альтернатив.
- Адаптується також до пошуку в розмірності 2D і більше (наприклад, підматриці в матриці).
- Популярне застосування – перевірка на плагіат.