Параметрична ідентифікація параметрів з використанням функцій чутливості

Математична модель коливання трьох тіл

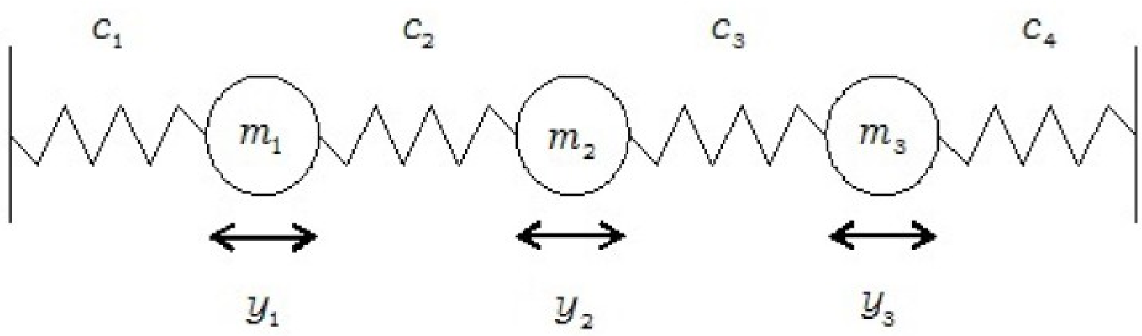

Рис. 3.1: Математична модель коливання трьох тіл

Математична модель коливання трьох мас m_1, m_2, m_3, які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3, c_4 має вигляд

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + \frac{(c_2+c_1)}{m_1}y_1(t) - \frac{c_2}{m_1}y_2(t) = f_1(t), \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} - \frac{c_2}{m_2}y_1(t) + \frac{(c_2+c_3)}{m_2}y_2(t) - \frac{c_3}{m_2}y_3(t) = f_2(t), \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2y_3(t)}{dt^2} - \frac{c_3}{m_3}y_2(t) + \frac{(c_4+c_3)}{m_3}y_3(t) = f_3(t). \tag{3.3}$$

Тут $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ – зовнішні сили.

Функція чутливості

Розглянемо динамічну систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), p, t), \; t \in [t_0, T]\,, \tag{3.4}$$

з умовою Коші

$$x(t_0) = x_0(p). \tag{3.5}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^*$ – вектор стану, $f(x,p,t) = (f_1(x,p,t), ..., f_n(x,p,t))^*$ – неперервно диференційована функція за x та p, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ – параметр, $x_0(p)$ –неперервно диференційована функція з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

Означення 3.1. *Функцією чутливості системи* (3.4) *в точці* $p = \hat{p}$ *називається функція, яка задається співвідношенням* $U(t) = \frac{\partial x(t,\hat{p})}{\partial p}$.

Тут $x(t) = x(t, \hat{p})$ є розв'язком системи (3.4) при $p = \hat{p}$. З (3.4), (3.5) отримуємо еквівалентне інтегральне рівняння

$$x\left(t, p\right) = x_0(p) + \int_{t_0}^{t} f\left(x(s), p, s\right) ds.$$

Диференціюємо останню рівність за змінною p і підставляємо $p = \hat{p}$.

Отримуємо інтегральне співвідношення для знаходження функції чутливості

$$U\left(t\right)=\frac{\partial x_0(p)}{\partial p}+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial f\left(x(s),\hat{p},s\right)}{\partial x}U\left(s\right)+\frac{\partial f\left(x(s),\hat{p},s\right)}{\partial p}\right)ds.$$

Продиференціюємо останню рівність. Отже, матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння (рівняння чутливості)

$$\begin{aligned}&\frac{dU\left(t\right)}{dt}=\frac{\partial f\left(x(t),\hat{p},t\right)}{\partial x}U\left(t\right)+\frac{\partial f\left(x(s),\hat{p},t\right)}{\partial p}.\\&U\left(t_0\right)=\frac{\partial x_0(p)}{\partial p}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Метод параметричної ідентифікації параметрів з використанням функцій чутливості

Потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі (3.1) - (3.3) з використанням функції чутливості за відомими спостереженнями $\bar{y}(t)$ на часовому інтервалі $t \in [0, T]$. Для цього записуємо (3.1) - (3.3) у вигляді системи диференціальних рівнянь в нормальній формі розмірності 6.

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c_2 + c_1)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{(c_2 + c_3)}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 & -\frac{(c_4 + c_3)}{m_3} & 0 \end{pmatrix} y = Ay$$

Показник якості ідентифікації параметрів β має вигляд

$$I(\beta) = \int_{t_0}^{T} (\bar{y}(t) - y(t, \beta))^T (\bar{y}(t) - y(t, \beta)) dt \to \min_{\beta} .$$

Числовий метод ітераційний і має вигляд

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta\beta.$$

Початкове наближення β_0 задається,

$$\Delta\beta = \left(\int_{t_0}^{T} U^T(t)U(t)dt\right)^{-1} \int_{t_0}^{T} U^T(t)(\bar{y}(t) - y(t))dt.$$

Матриці чутливості $U(t)$ визначається з матричного диференціального рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + \frac{\partial(Ay)}{\partial\beta},\ U(t_0) = 0 \tag{3.7}$$

В даному випадку $\frac{\partial(Ay)}{\partial y} = A$. Спостереження стану моделі проведені на інтервалі часу $[0, T]$, де $t_0 = 0$, $T = 50$, $\Delta t = 0.2$.

Алгоритм.

Ітерація 1.

Задаємо параметр точності $\varepsilon > 0$, початкове наближення β_0. В лабораторних роботах початкове наближення задається.

Крок 1. Розв'язуємо систему (3.1) - (3.3) одним з числових методів при $\beta = \beta_0$, $y(t_0) = \bar{y}(t_0)$ (можна застосувати метод Рунге- Кутти) Знаходимо $y(t, \beta_0)$.

Крок 2. Підставляємо $y(t, \beta_0)$ в рівняння чутливості 3.7. Розв'язуємо це рівняння одним з числових методів і знаходимо його розв'язок $U(t, \beta_0)$.

Крок 3. Знаходимо

$$\Delta\beta_0 = \left(\int_{t_0}^{T} U^T(t, \beta_0) U(t, \beta_0) dt\right)^{-1} \int_{t_0}^{T} U^T(t, \beta_0)(\bar{y}(t) - y(t, \beta_0)) dt.$$

Крок 4. Обчислюємо
$$\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta_0.$$

Крок 5. В кінці першої ітерації перевіряємо одну з умов зупинки алгоритму:

1. $\Delta\beta_1 < \varepsilon$;
2. $I(\beta_1) < \varepsilon$.

Якщо умова зупинки виконується, то алгоритм зупиняється і $\beta = \beta_1$ є наближеним розв'язком задачі. Якщо не виконується то переходимо на ітерацію 2.

Ітерація $k - 1$.

На початку цієї ітерації ми знаємо β_k.

Крок 1. Розв'язуємо систему (3.1) - (3.3) одним з числових методів при $\beta = \beta_k$, $y(t_0) = \bar{y}(t_0)$. Знаходимо $y(t, \beta_k)$.

Крок 2. Підставляємо $y(t, \beta_k)$ в рівняння чутливості 3.7. Розв'язуємо це рівняння одним з числових методів і знаходимо його розв'язок $U(t, \beta_k)$.

Крок 3. Знаходимо

$$\Delta\beta_k = \left(\int_{t_0}^{T} U^T(t,\beta_k)U(t,\beta_k)dt\right)^{-1} \int_{t_0}^{T} U^T(t,\beta_k)(\bar{y}(t) - y(t,\beta_k))dt.$$

Крок 4. Обчислюємо

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta\beta_k.$$

Крок 5. В кінці ітерації перевіряємо одну з умов зупинки алгоритму:
1. $\Delta\beta_{k+1} < \varepsilon$;
2. $I(\beta_{k+1}) < \varepsilon$.

Якщо умова зупинки виконується, то алоритм зупиняється і $\beta = \beta_{k+1}$ є наближеним розв'язком задачі. Якщо не виконується то

$$k := k + 1$$

і переходимо на наступну ітерацію.

Метод Рунге-Кутти

Задана система диференціальних рівнянь в нормальній формі

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t),\ y(t_0) = y_0, \tag{3.8}$$

де $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, $f(y,t) = (f_1(y,t), f_2(y,t), \ldots, f_m(y,t))^T)$, y_0 – задана точка, $t \in [t_0, T]$.

Для чисельного інтегрування можна застосувати метод Рунге-Кутти 4-го порядку з постійним кроком h, $y_n = y(t_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\ n = 0, 1, \ldots, n-1,$$

де

$$k_1 = hf(y_n, t_n).$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_3 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, t_n + h),$$

$$t_{n+1} = t_n + h,\ n = 0, 1, ...N-1,\ t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

Лабораторна робота

1. Знати означення функції чутливості і вивчити диференціальне рівняння, з якого шукається матриця чутливості. Записати рівняння чутливості для математичної моделі (3.1) - (3.3).

2. Створити програму, яка реалізує метод параметричної ідентифікації параметрів з використанням функцій чутливості для математичної моделі (3.1) - (3.3).

3. Вивести знайдені параметри.

4. Оформити в друкованій формі звіт про виконання роботи, в якому викласти результати проведених обчислень.

Варіанти експериментальних даних:

1) Вектор оцінюваних параметрів $\boxed{\beta = (c_1, m_1, m_2)^T}$, початкове наближення $\boxed{\beta_0 = (0.1,\ 11,\ 23)^T}$, відомі параметри $\boxed{c_2 = 0.3, c_3 = 0.2, c_4 = 0.12}$, $\boxed{m_3 = 18}$, ім'я файлу з спостережуваними даними y1.txt.

0.5 0.51953 0.53807 0.55558 0.57203 0.58736 0.60153 0.61451 0.62626 0.63675 0.64594 0.65382 0.66035 0.66551 0.66928 0.67165 0.67259 0.67211 0.67018 0.6668 0.66197 0.65569 0.64797 0.6388 0.6282 0.61618 0.60275 0.58793 0.57174 0.55421 0.53535 0.51521 0.4938 0.47116 0.44734 0.42236 0.39627 0.36911 0.34094 0.31179 0.28172 0.25078 0.21902 0.1865 0.15329 0.11942 0.08498 0.050016 0.014596 -0.021216 -0.057354 -0.093751 -0.13034 -0.16706 -0.20382 -0.24058 -0.27726 -0.31378 -0.35008 -0.3861 -0.42175 -0.45698 -0.49171 -0.52588 -0.55942 -0.59227 -0.62436 -0.65563 -0.68601 -0.71545 -0.74389 -0.77127 -0.79752 -0.82261 -0.84648 -0.86908 -0.89035 -0.91027 -0.92877 -0.94583 -0.9614 -0.97546 -0.98796 -0.99887 -1.0082 -1.0159 -1.0219 -1.0262 -1.0289 -1.0298 -1.0291 -1.0266 -1.0224 -1.0165 -1.0089 -0.99957 -0.98854 -0.97583 -0.96145 -0.94542 -0.92777 -0.90851 -0.88768 -0.8653 -0.84142 -0.81606 -0.78928 -0.7611 -0.73158 -0.70076 -0.6687 -0.63544 -0.60104 -0.56556 -0.52906 -0.49159 -0.45323 -0.41403 -0.37407 -0.3334 -0.29211 -0.25026 -0.20792 -0.16517 -0.12208 -0.078728 -0.035185 0.0084708 0.052163 0.095814 0.13935 0.18269 0.22576 0.26848 0.31078 0.35258 0.39381 0.43439 0.47425 0.51332 0.55153 0.58881 0.62509 0.66031 0.6944 0.7273 0.75895 0.78929 0.81827 0.84583 0.87192 0.89649 0.9195 0.9409 0.96065 0.97871 0.99506 1.0096 1.0225 1.0335 1.0426 1.0499 1.0554 1.059 1.0607 1.0604 1.0583 1.0543 1.0484 1.0406 1.031 1.0194 1.0061 0.99084 0.97383 0.95504 0.9345 0.91224 0.88831 0.86273 0.83555 0.80682 0.77658 0.74488 0.71178 0.67732 0.64158 0.60459 0.56644 0.52718 0.48687 0.44559 0.40341 0.36039 0.31661 0.27215 0.22707 0.18145 0.13538 0.088928 0.042173 -0.0048049 -0.051925 -0.099108 -0.14627 -0.19334 -0.24023 -0.28687 -0.33317 -0.37905 -0.42444 -0.46926 -0.51344 -0.55689 -0.59956 -0.64135 -0.68221 -0.72206 -0.76084 -0.79849 -0.83493 -0.8701 -0.90396 -0.93643 -0.96747 -0.99703 -1.0251 -1.0515 -1.0763 -1.0995 -1.1209 -1.1406 -1.1586 -1.1747 -1.189 -1.2015 -1.2121 -1.2208 -1.2276 -1.2326 -1.2356 -1.2367 -1.2358 -1.2331 -1.2285 -1.222 -1.2136 -1.2033 -1.1912 -1.1773 -1.1616

- 0.1 0.095212 0.090186 0.084932 0.079462 0.073785 0.067912 0.061856 0.055627 0.049239 0.042704 0.036035 0.029245 0.022348 0.015357 0.0082862 0.00115 -0.0060375 -0.013262 -0.020509 -0.027763 -0.035011 -0.042237 -0.049427 -0.056567 -0.063641 -0.070635 -0.077535 -0.084328 -0.090998 -0.097532 -0.10392 -0.11014 -0.11619 -0.12204 -0.1277 -0.13315 -0.13837 -0.14335 -0.14809 -0.15257 -0.15679 -0.16073 -0.16439 -0.16775 -0.17082 -0.17357 -0.17601 -0.17813 -0.17993 -0.18139 -0.18252 -0.18332 -0.18377 -0.18387 -0.18364 -0.18305 -0.18212 -0.18085 -0.17923 -0.17726 -0.17496 -0.17231 -0.16934 -0.16603 -0.1624 -0.15845 -0.15418 -0.14961 -0.14474 -0.13958 -0.13413 -0.12842 -0.12243 -0.1162 -0.10972 -0.10301 -0.096081 -0.088943 -0.081609 -0.074092 -0.066406 -0.058564 -0.05058 -0.042469 -0.034244 -0.025921 -0.017514 -0.0090396 -0.00051205 0.0080528 0.016639 0.025232 0.033815 0.042373 0.050889 0.059349 0.067736 0.076035 0.084231 0.092308 0.10025 0.10805 0.11568 0.12313 0.13039 0.13745 0.14428 0.15089 0.15725 0.16335 0.16919 0.17474 0.18001 0.18497 0.18962 0.19396 0.19796 0.20163 0.20495 0.20792 0.21053 0.21278 0.21466 0.21617 0.21731 0.21806 0.21843 0.21842 0.21803 0.21725 0.21609 0.21454 0.21262 0.21031 0.20763 0.20459 0.20117 0.19739 0.19326 0.18878 0.18396 0.1788 0.17332 0.16753 0.16142 0.15503 0.14834 0.14138 0.13416 0.12669 0.11898 0.11105 0.10291 0.094571 0.08605 0.077362 0.068522 0.059544 0.050445 0.04124 0.031946 0.022579 0.013154 0.0036892 -0.0057997 -0.015296 -0.024783 -0.034244 -0.043662 -0.053021 -0.062304 -0.071495 -0.080578 -0.089536 -0.098355 -0.10702 -0.11551 -0.12382 -0.13192 -0.13981 -0.14747 -0.15489 -0.16205 -0.16894 -0.17556 -0.18188 -0.18789 -0.1936 -0.19897 -0.20402 -0.20872 -0.21306 -0.21705 -0.22068 -0.22392 -0.2268 -0.22928 -0.23138 -0.23309 -0.2344 -0.23531 -0.23583 -0.23594 -0.23565 -0.23497 -0.23388 -0.2324 -0.23052 -0.22825 -0.2256 -0.22256 -0.21914 -0.21536 -0.2112 -0.20669 -0.20184 -0.19664 -0.19111 -0.18525 -0.17909 -0.17262 -0.16587 -0.15884 -0.15154 -0.14399 -0.1362 -0.12818 -0.11995 -0.11153 -0.10292 -0.094151 -0.085226 -0.076164 -0.066982 -0.057695 -0.048321 -0.038874 -0.029373 -0.019832 -0.010269 -0.00070097 0.0088564 0.018386 0.027872 0.037297 0.046645 0.055901 0.065048 0.07407 0.082952

- -0.2 -0.21977 -0.23908 -0.25788 -0.27616 -0.29389 -0.31105 -0.3276 -0.34354 -0.35883 -0.37347 -0.38742 -0.40067 -0.41321 -0.42502 -0.43608 -0.44638 -0.45592 -0.46468 -0.47264 -0.47982 -0.48619 -0.49176 -0.49651 -0.50046 -0.5036 -0.50592 -0.50744 -0.50815 -0.50806 -0.50718 -0.50551 -0.50307 -0.49986 -0.49589 -0.49119 -0.48575 -0.4796 -0.47276 -0.46524 -0.45706 -0.44824 -0.4388 -0.42876 -0.41814 -0.40698 -0.39529 -0.38309 -0.37042 -0.3573 -0.34376 -0.32983 -0.31553 -0.3009 -0.28595 -0.27074 -0.25527 -0.23959 -0.22372 -0.2077 -0.19156 -0.17533 -0.15903 -0.14271 -0.12638 -0.11009 -0.093858 -0.07772 -0.061706 -0.045844 -0.030163 -0.014692 0.00054055 0.015507 0.030181 0.044537 0.058547 0.072189 0.085438 0.098271 0.11067 0.1226 0.13406 0.14501 0.15546 0.16536 0.17472 0.18351 0.19172 0.19934 0.20636 0.21277 0.21855 0.22371 0.22822 0.2321 0.23533 0.23792 0.23985 0.24113 0.24177 0.24175 0.2411 0.2398 0.23788 0.23532 0.23215 0.22838 0.224 0.21904 0.2135 0.20741 0.20077 0.19361 0.18593 0.17776 0.16911 0.16001 0.15047 0.14051 0.13016 0.11945 0.10838 0.09699 0.085299 0.073334 0.061118 0.048677 0.036037 0.023224 0.010264 -0.0028167 -0.015991 -0.029232 -0.042513 -0.055808 -0.069091 -0.082334 -0.095511 -0.1086 -0.12157 -0.13439 -0.14705 -0.15952 -0.17177 -0.18378 -0.19552 -0.20698 -0.21814 -0.22897 -0.23944 -0.24955 -0.25928 -0.2686 -0.2775 -0.28596 -0.29397 -0.30152 -0.30858 -0.31516 -0.32123 -0.32679 -0.33183 -0.33633 -0.34031 -0.34374 -0.34663 -0.34897 -0.35076 -0.35199 -0.35268 -0.35281 -0.3524 -0.35144 -0.34994 -0.34791 -0.34535 -0.34228 -0.33869 -0.3346 -0.33003 -0.32498 -0.31946 -0.31349 -0.30709 -0.30027 -0.29305 -0.28545 -0.27747 -0.26915 -0.2605 -0.25154 -0.24229 -0.23278 -0.22303 -0.21305 -0.20287 -0.19252 -0.18202 -0.17139 -0.16065 -0.14984 -0.13897 -0.12807 -0.11716 -0.10627 -0.095428 -0.084649 -0.073961 -0.063388 -0.052954 -0.042683 -0.032596 -0.022717 -0.013068 -0.0036698 0.0054557 0.014288 0.022808 0.030997 0.038835 0.046305 0.05339 0.060075 0.066344 0.072182 0.077577 0.082517 0.086989 0.090983 0.09449 0.097502 0.10001 0.10201 0.1035 0.10447 0.10492 0.10485 0.10425 0.10314 0.1015 0.099346 0.096679 0.093505 0.089829 0.085659 0.081004 0.075873 0.070277 0.064227 0.057738

- -0.1 -0.097715 -0.095291 -0.092733 -0.090045 -0.087233 -0.0843 -0.081252 -0.078096 -0.074835 -0.071477 -0.068026 -0.06449 -0.060874 -0.057184 -0.053427 -0.04961 -0.045738 -0.04182 -0.037861 -0.033869 -0.02985 -0.025812 -0.02176 -0.017703 -0.013647 -0.0095982 -0.0055647 -0.0015528 0.0024306 0.0063789 0.010285 0.014144 0.017947 0.021689 0.025365 0.028966 0.032489 0.035926 0.039273 0.042524 0.045674 0.048718 0.05165 0.054467 0.057164 0.059736 0.062181 0.064493 0.06667 0.068709 0.070606 0.07236 0.073967 0.075425 0.076733 0.077889 0.078891 0.07974 0.080433 0.080971 0.081353 0.08158 0.081651 0.081569 0.081332 0.080944 0.080405 0.079717 0.078882 0.077903 0.076781 0.075521 0.074124 0.072595 0.070936 0.069152 0.067246 0.065223 0.063088 0.060843 0.058496 0.056049 0.053509 0.050881 0.04817 0.045381 0.042521 0.039595 0.036609 0.033569 0.030481 0.027352 0.024186 0.020991 0.017773 0.014537 0.011291 0.008041 0.0047925 0.001552 -0.0016742 -0.0048801 -0.0080594 -0.011206 -0.014315 -0.017379 -0.020393 -0.023352 -0.02625 -0.029081 -0.03184 -0.034524 -0.037125 -0.03964 -0.042065 -0.044395 -0.046625 -0.048753 -0.050773 -0.052684 -0.05448 -0.056161 -0.057721 -0.05916 -0.060475 -0.061664 -0.062724 -0.063655 -0.064455 -0.065123 -0.065658 -0.06606 -0.066329 -0.066464 -0.066466 -0.066335 -0.066073 -0.06568 -0.065158 -0.064507 -0.063731 -0.062831 -0.061809 -0.060668 -0.05941 -0.05804 -0.056559 -0.054971 -0.05328 -0.05149 -0.049604 -0.047628 -0.045564 -0.043418 -0.041195 -0.038898 -0.036534 -0.034107 -0.031622 -0.029085 -0.026501 -0.023875 -0.021214 -0.018521 -0.015804 -0.013068 -0.010319 -0.0075614 -0.0048021 -0.0020464 0.00069984 0.0034311 0.0061417 0.008826 0.011479 0.014094 0.016667 0.019193 0.021665 0.02408 0.026431 0.028716 0.030928 0.033063 0.035118 0.037087 0.038968 0.040756 0.042448 0.044039 0.045529 0.046912 0.048187 0.049351 0.050401 0.051337 0.052155 0.052855 0.053435 0.053894 0.054232 0.054447 0.054539 0.054509 0.054357 0.054082 0.053687 0.053171 0.052536 0.051783 0.050915 0.049933 0.048839 0.047636 0.046326 0.044912 0.043398 0.041786 0.040081 0.038285 0.036403 0.034438 0.032396 0.03028 0.028095 0.025846 0.023537 0.021174 0.018762 0.016305 0.01381 0.011281 0.0087249 0.0061461 0.0035506 0.00094404 -0.0016679 -0.0042795 -0.0068849 -0.0094786 -0.012055 -0.014608 -0.017132 -0.019621 -0.022071 -0.024474 -0.026827 -0.029124 -0.031359 -0.033527

- 0.3 0.31985 0.33937 0.35854 0.37734 0.39575 0.41375 0.43132 0.44843 0.46508 0.48123 0.49688 0.512 0.52657 0.54059 0.55404 0.5669 0.57916 0.5908 0.60182 0.61219 0.62192 0.631 0.6394 0.64713 0.65418 0.66053 0.6662 0.67116 0.67542 0.67898 0.68182 0.68396 0.68539 0.68611 0.68612 0.68542 0.68402 0.68192 0.67913 0.67564 0.67147 0.66663 0.66112 0.65494 0.64812 0.64065 0.63255 0.62384 0.61451 0.60459 0.59408 0.58301 0.57138 0.55921 0.54652 0.53332 0.51962 0.50545 0.49082 0.47575 0.46026 0.44436 0.42807 0.41142 0.39441 0.37708 0.35944 0.34151 0.32331 0.30485 0.28617 0.26728 0.24819 0.22894 0.20954 0.19001 0.17037 0.15064 0.13084 0.111 0.091118 0.071231 0.051352 0.031501 0.011697 -0.0080417 -0.027697 -0.047252 -0.066687 -0.085987 -0.10513 -0.12411 -0.1429 -0.16149 -0.17987 -0.19801 -0.21591 -0.23355 -0.25092 -0.268 -0.28478 -0.30126 -0.31741 -0.33323 -0.3487 -0.36383 -0.37859 -0.39298 -0.407 -0.42062 -0.43385 -0.44669 -0.45911 -0.47112 -0.48272 -0.49389 -0.50464 -0.51495 -0.52483 -0.53428 -0.54329 -0.55186 -0.55999 -0.56768 -0.57493 -0.58173 -0.5881 -0.59402 -0.59951 -0.60456 -0.60918 -0.61336 -0.61711 -0.62044 -0.62335 -0.62584 -0.62791 -0.62957 -0.63083 -0.63169 -0.63215 -0.63223 -0.63192 -0.63123 -0.63017 -0.62874 -0.62695 -0.62481 -0.62232 -0.61949 -0.61632 -0.61283 -0.60902 -0.60489 -0.60046 -0.59573 -0.5907 -0.58539 -0.5798 -0.57394 -0.56781 -0.56142 -0.55478 -0.5479 -0.54077 -0.53342 -0.52584 -0.51804 -0.51003 -0.50182 -0.4934 -0.48479 -0.47599 -0.46701 -0.45785 -0.44852 -0.43903 -0.42937 -0.41956 -0.4096 -0.3995 -0.38926 -0.37888 -0.36837 -0.35774 -0.34698 -0.33611 -0.32513 -0.31403 -0.30284 -0.29155 -0.28016 -0.26867 -0.2571 -0.24545 -0.23372 -0.22191 -0.21003 -0.19808 -0.18607 -0.17399 -0.16186 -0.14967 -0.13744 -0.12516 -0.11283 -0.10047 -0.08808 -0.075657 -0.063207 -0.050736 -0.038248 -0.025748 -0.013239 -0.0007263 0.011785 0.02429 0.036785 0.049263 0.06172 0.074151 0.086549 0.09891 0.11123 0.12349 0.13571 0.14785 0.15994 0.17194 0.18387 0.1957 0.20744 0.21908 0.2306 0.24201 0.25329 0.26444 0.27545 0.28631 0.29701 0.30754 0.3179 0.32808 0.33806 0.34784 0.35742 0.36678 0.3759 0.3848 0.39345

- 0.1 0.098431 0.09675 0.094956 0.093055 0.091047 0.088935 0.086723 0.084413 0.082008 0.079512 0.076927 0.074258 0.071507 0.068678 0.065775 0.062801 0.059761 0.056658 0.053496 0.050279 0.047011 0.043697 0.04034 0.036945 0.033515 0.030056 0.026571 0.023065 0.019541 0.016005 0.01246 0.0089114 0.0053623 0.0018173 -0.0017193 -0.0052434 -0.0087509 -0.012238 -0.0157 -0.019134 -0.022535 -0.025899 -0.029224 -0.032505 -0.035739 -0.038921 -0.04205 -0.045121 -0.048132 -0.051078 -0.053958 -0.056768 -0.059505 -0.062167 -0.064752 -0.067256 -0.069678 -0.072015 -0.074266 -0.076428 -0.0785 -0.08048 -0.082366 -0.084158 -0.085853 -0.087451 -0.088951 -0.090352 -0.091654 -0.092855 -0.093956 -0.094955 -0.095854 -0.096651 -0.097348 -0.097944 -0.098439 -0.098834 -0.099131 -0.099328 -0.099428 -0.099432 -0.099339 -0.099153 -0.098873 -0.098502 -0.09804 -0.09749 -0.096852 -0.09613 -0.095324 -0.094437 -0.093471 -0.092428 -0.091309 -0.090118 -0.088856 -0.087526 -0.08613 -0.084671 -0.08315 -0.081572 -0.079937 -0.07825 -0.076511 -0.074725 -0.072893 -0.071019 -0.069104 -0.067152 -0.065165 -0.063146 -0.061097 -0.059021 -0.056921 -0.0548 -0.052659 -0.050501 -0.048329 -0.046145 -0.043952 -0.041751 -0.039546 -0.037339 -0.035131 -0.032925 -0.030723 -0.028528 -0.02634 -0.024162 -0.021996 -0.019843 -0.017706 -0.015585 -0.013483 -0.011401 -0.0093402 -0.0073022 -0.0052881 -0.0032993 -0.0013368 0.0005984 0.0025052 0.0043828 0.0062303 0.0080469 0.0098321 0.011585 0.013306 0.014993 0.016646 0.018266 0.019852 0.021403 0.02292 0.024402 0.02585 0.027263 0.028641 0.029985 0.031295 0.03257 0.033812 0.035021 0.036196 0.037339 0.038449 0.039527 0.040574 0.04159 0.042575 0.043531 0.044457 0.045354 0.046222 0.047063 0.047877 0.048664 0.049425 0.050161 0.050871 0.051558 0.05222 0.052859 0.053475 0.054068 0.05464 0.05519 0.055719 0.056227 0.056715 0.057182 0.05763 0.058058 0.058467 0.058857 0.059228 0.059579 0.059912 0.060226 0.060521 0.060797 0.061055 0.061292 0.061511 0.06171 0.061889 0.062048 0.062187 0.062304 0.062401 0.062475 0.062528 0.062557 0.062564 0.062546 0.062504 0.062436 0.062343 0.062224 0.062077 0.061902 0.061698 0.061465 0.061202 0.060908 0.060582 0.060223 0.059831 0.059404 0.058943 0.058446 0.057912 0.057341 0.056732 0.056084 0.055397 0.054669 0.053901 0.053091 0.05224 0.051346 0.050409 0.049428 0.048404 0.047335 0.046222 0.045064 0.043861 0.042613