# Побудова лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів

# Псевдообернена матриця. Формула Гревіля

## Означення псевдооберненої матриці

Нехай задана матриця $A$ розмірності $m \times n$. За означенням Мура - Пенроуза, псевдооберненою матрицею $A^+$ називається матриця розмірності $n \times m$ вигляду

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ \left(A^T A + \delta^2 E_n\right)^{-1} A^T \right\} = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ A^T \left(A A^T + \delta^2 E_m\right)^{-1} \right\}. \quad (2.1)$$

Тут $E_n$ – одинична матриця розмірності $n \times n$.

# Властивості псевдооберненої матриці

1. Якщо матриця $A$ – невироджена, то $A^+ = A^{-1}$.
2. $A^+ = \left(A^T A\right)^+ A^T$, $A^+ = A^T \left(AA^T\right)^+$.
3. Якщо матриця $A^T A$ – невироджена, то

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T.$$

Якщо матриця $AA^T$ – невироджена, то

$$A^+ = A^T \left(AA^T\right)^{-1}.$$

4. Якщо $a \in \mathbb{R}^n$ – вектор розмірності $n$, $a \neq 0$, то з означення Мура-Пенроуза (2.1) випливає, що

$$\left(a^T\right)^+ = \frac{a}{a^T a}, \ a^+ = \frac{a^T}{a^T a}.$$

Якщо $a = 0$, то з (2.1) випливає $a^+ = 0$.

5. $(A^+)^+ = A$.
6. $(A^T)^+ = (A^+)^T$

**Теорема 2.1. (характеристична властивість псевдооберненої матриці).** *Матриця $A^+$ розмірності $n \times m$ є псевдооберненою матрицею до матриці $A$ розмірності $m \times n$ тоді і тільки тоді, якщо виконуються такі умови:*

- $AA^+A = A$;
- $A^+AA^+ = A^+$;
- $AA^+$ – *симетрична матриця розмірності* $m \times m$;
- $A^+A$ – *симетрична матриця розмірності* $n \times n$.

## Проективні матриці

1. Матриця $Z(A) = E - A^+A$ – проектор на ядро $Ker\, A$ матриці $A$, тобто
$$Z(A)\mathbb{R}^n = Ker\, A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\};$$

2. Матриця $Z(A^T) = E - AA^+$ – проектор на ядро $Ker\, A^T$ матриці $A^T$;

3. Матриця $Y(A) = AA^+$ – проектор на область значень матриці $A$, тобто
$$Y(A)\mathbb{R}^n = Im\, A = \{y \in \mathbb{R}^n : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\};$$

4. Матриця $Y(A^T) = A^+A$ – проектор на область значень матриці $A^T$;

## Знаходження псевдооберненої матриці за допомогою сингулярного розкладу

**Теорема 2.2** (про сингулярний розклад матриці). *Будь-яку матрицю $A$ розмірності $m \times n$ можна єдиним способом представити у вигляді*

$$A = U\Lambda V^T,$$

*де $U$ – унітарна матриця розмірності $m \times m$, $V$ – унітарна матриця розмірності $n \times n$, $\Lambda$ – матриця розмірності $m \times n$, яка в* лівому *верхньому кутку містить матрицю $\Lambda_0$ розмірності $r \times r$, яка є діагональною*

$$\Lambda_0 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots, \lambda_r > 0$, а решта елементів матриці $\Lambda$ є нульовими, $r = rangA$.*

Нехай задана матриця $A$ розмірності $m \times n$. Якщо відомий її сингулярний розклад

$$A = U \Lambda V^T,$$

де позначення відповідають теоремі 2.2, то

$$A^+ = V \Lambda^+ U^T,$$

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} \Lambda_0^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda_0^+ = diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_r^{-1}).$$

# Формула Гревіля

Якщо для матриці $A$ відома псевдообернена (обернена) матриця $A^+$, то для розширеної матриці $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$ справедлива формула

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left(A^+ - \frac{Z(A)aa^TA^+}{a^TZ(A)a} \vdots \frac{Z(A)a}{a^TZ(A)a}\right), if\; a^TZ(A)a > 0 \\ \left(A^+ - \frac{R(A)aa^TA^+}{1+a^TR(A)a} \vdots \frac{R(A)a}{1+a^TR(A)a}\right), if\; a^TZ(A)a = 0 \end{cases}, \qquad (2.2)$$

де $Z(A) = E - A^+A$ – проектор на ядро матриці $A$, $R(A) = A^+\left(A^+\right)^T$.

# Алгоритми знаходження псевдооберненої матриці

Для знаходження псевдооберненої матриці реалізуються такі алгоритми:

I. алгоритм, заснований на означенні Мура-Пенроуза. З означення Мура-Пенроуза (2.1) випливає, що для наближеного визначення псевдооберненої матриці можна застосовувати одну з формул

$$A^+ \approx \left(A^T A + \delta_0^2 E_n\right)^{-1} A^T, \tag{2.3}$$

$$A^+ \approx A^T \left(A A^T + \delta_0^2 E_m\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

Тут $\delta_0^2 > 0$ –число, яке підбирається експерементально. Одна з можливих схем є такою:

1. Задається початкове значення $\delta = \delta_0$;
2. Розраховується початкове наближення $A_0^+ = A^T(AA^T + \delta_0^2 E_m)^{-1}$;
3. На кроці $k$ нове значення $\delta_k = \dfrac{\delta_{k-1}}{2}$;
4. Наближення $A_k^+ = A^T(AA^T + \delta_k^2 E_m)^{-1}$;
5. Якщо $\| A_k^+ - A_{k-1}^+ \| < \varepsilon$, то зупинитись з $A^+ = A_k^+$, інакше $k := k+1$ і продовжити з пункту 3.

II. алгоритм на основі формули Гревіля (2.2). Цей алгоритм є рекурентним. Представляємо матрицю $A$ у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}.$$

Для першого кроку алгоритму $\left(a_1^T\right)^+ = \frac{a_1}{a_1^T a_1}$, при $a_1 \neq 0$; $\left(a_1^T\right)^+ = 0$, якщо $a_1 = 0$. На наступному кроці додаємо до матриці другий рядок і шукаємо псевдообернену матрицю згідно формули Гревіля. Потім знову додаємо рядок і т.д. поки не вичерпаються всі рядки матриці $A$.

III. алгоритм, що базується на сингулярному розкладі матриці (теорема 2.2).

## Застосування псевдооберненої матриці до знаходження загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана матриця $A$ розмірності $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ – відомий вектор і розглядається система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \tag{2.5}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – шуканий вектор. Така система може не мати точних розв'язків. Тоді шукають такі вектори $x \in \mathbb{R}^n$, що розв'язують задачу

$$\|Ax - b\|^2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}.$$

Найменшим за нормою серед таких векторів є вектор

$$\overline{x} = A^+ b,$$

який називається псевдорозв'язком системи (2.5). Загальне представлення множини узагальнених розв'язків системи (2.5) таке

$$\Omega_x = A^+ b + ker A = \left\{A^+ b + Z(A)v : v \in \mathbb{R}^n\right\},$$

де $Z(A) = E - A^+ A$ – проектор на ядро $ker A$ матриці $A$.

## Метод побудови лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів

Будемо вважати, що на вхід системи перетворення, математична модель якої невідома, поступають послідовно дані у вигляді $m-1$ вимірних векторів $x_j$. На виході системи спостерігається сигнал у вигляді вектора $y_j$ розмірності $p$.

Постановка задачі: для послідовності вхідних сигналів $x_j$, $j = 1, 2, ..., n$ та вихідних сигналів $y_j$, $j = 1, 2, ...n$ знайти оператор $P$ перетворення вхідного сигналу у вихідний.

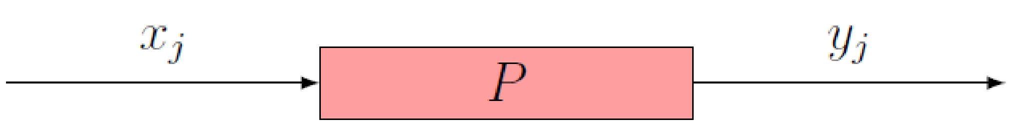


Рис. 2.1: Математична модель

Будемо шукати математичну модель оператора об'єкту в класі лінійних операторів

$$Dx_j + b = y_j, j = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{2.6}$$

Тут $D$ –невідома матриця, $b$ – невідомий вектор. Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} D \\ b^T \end{pmatrix}.$$

Тоді з (2.6) випливає

$$A \begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = y_j, j = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{2.7}$$

Систему (2.7) запишемо у матричній формі

$$A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n)\,,$$

або

$$AX = Y, \tag{2.8}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – матриця вхідних сигналів розмірності $m \times n$, $Y = (y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n)$ – матриця вихідних сигналів розмірності $p \times n$. Тоді

$$A = YX^+ + VZ^T(X^T), \tag{2.9}$$

де матриця

$$V = \begin{pmatrix} v_{(1)}^T \\ v_{(2)}^T \\ \vdots \\ v_{(p)}^T \end{pmatrix},$$

розмірності $p \times m$, $Z(X^T) = I_m - XX^+$.

# Лабораторна робота

Матрицю $X$ будемо інтерпретувати як двовимірне вхідне зображення, а матрицю $Y$ – як вихідне зображення. Потрібно побудувати лінійний оператор перетворення вхідного сигналу $X$ у вихідний сигнал $Y$ на основі формули (2.9).

1. Вивчити означення псевдоберненої матриці і її основні властивості.

2. Створити програму, яка за заданими двома зображеннями знаходить лінійний оператор переходу між цими зображеннями. Основою для програми є формула (2.9), де $V$ – довільна матриця (наприклад, нульова). Псевдобернену матрицю в (2.9) шукати двома методами: на основі формули Мура-Пенроуза (див. (2.3) або (2.4)) і на основі формули Гревіля. Правильність знаходження псавдоберненої матриці перевірити за допомогою теореми 2.1 про характеристичну властивість псевдоберненої матриці.

3. Вивести вихідне зображення і образ вхідного зображення при одержаному перетворенні. Зробити порівняння. Проаналізувати одержаний результат.