基礎的な物理量の定義

・応力

「単位体積あたりに作用する力」を指す。断面積 A の物体に力 F が加わている場合

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1}$$

となる。次元は $\mathrm{N/m^2}$ となり、圧力と同じ (ヤング率も)

・歪み

「外力により形状が変形した場合のその割合」と考えることができる。長さ l_0 の物体が l に変形した場合

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{2}$$

と書ける。次元は無次元

・ヤング率

応力と歪みは大いに関係がある。ある材料に力を加えると歪みが生じるが、この歪みの量が応力に比例する場合、弾性と呼び、その比例定数をヤング率という。

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{3}$$

次元は $\mathrm{N/m^2}$

・曲げモーメント

物質に与えられる力は、圧縮、伸縮だけでなく「曲げ」にも作用する。つまりモーメントで荷重と距離に比例。

$$M = F \cdot L \tag{4}$$

次元は Nm

・断面一次モーメントと断面二次モーメント

ある物体に対する曲げを考える。物体の断面に均等に応力が働く時、回転体から y 離れた微小面積 dA に働く曲げモーメントは

$$dM = y\,\sigma\,dA \tag{5}$$

となる。このうち σ を除外して全断面積で積分したもの

$$G = \int y\,dA \tag{6}$$

を断面一次モーメントをいう。次元は $\mathrm{m^3}$

もし、物体の中心と回転軸が一致していたら、$G=0$ となるので y を y^2 としたものを断面二次モーメントという。

$$I=\int y^2\,dA \tag{7}$$

次元は m^4 で、「材料の曲げにくさ」を表す。大きいほど曲げにくい。

参考サイト：http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/ishijima/Material-01.html

$F=EI\frac{d^4y}{dx^4}$ について

梁が曲がった時、微小部分の右側側面に生じる曲げモーメント M の値は曲率半径を R とすると

$$M=\frac{EI}{R} \tag{8}$$

と書ける (`http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/engineering/me/mechanics_of_materials/henkan-tex.cgi?target=/math/engineering/me/mechanics_of_materials/caliculation_of_bending_moment.html`)。さらに

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2y}{dx^2} \tag{9}$$

と書ける (`http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/engineering/me/mechanics_of_materials/henkan-tex.cgi?target=/math/engineering/me/mechanics_of_materials/radius_of_curvature.html`) ので、

$$M=\pm EI\frac{d^2y}{dx^2} \tag{10}$$

が成り立つ。曲げモーメントと荷重の関係は

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-F \tag{11}$$

となる (`http://wwwra.meijo-u.ac.jp/labs/ra007/murata/onlinetext/mecha/step2-3.htm`)。

以上から

$$F=EI\frac{d^4y}{dx^4} \tag{12}$$

が成り立つ。