AMS ECUE Algèbre générale : Autour de la théorie des groupes finis

Auteur :
Guillaume SALLOUM
L3 Mathématiques
Avignon Université

Enseignant :
Philippe BOLLE
PR
Avignon Université

Résumé

Le but de cette AMS est d'introduire certains concepts de théorie des groupes permettant de construire des théorèmes de classification. Nous étudierons principalement les théorèmes de Sylow et leurs applications, ainsi que quelques éléments de théorie de la représentation (lemme de Schur) utiles à la classification. Le document est divisé en trois parties dont l'une est en anglais afin de lier les deux AMS.

Table des matières

1 Actions de groupes et théorèmes de Sylow

1.1 Actions de groupes

Une idée récurrente en mathématiques est d'étudier comment un objet *agit* sur un autre afin d'obtenir plus d'informations sur les deux. C'est précisement le cas lorsque l'on considère un groupe G agissant sur un ensemble A.

Définition 1.1.1 (Action de groupe)**.** Soit G un groupe et A un ensemble quelconque. Une action *à gauche* de G sur A est une application $f : G \times A \to A$ qui satisfait :

(i) $g1.(g2.a) = (g1g2).a$ pour tout $g1, g2 \in G$, $a \in A$,

(ii) $1.a = a$ pour tout $a \in A$

On peut définir de manière équivalente [3, p. 43] une action comme un morphisme $\varphi : G \to S_A$ de G dans le groupe des permutations de A satisfaisant :

$$g.a = \varphi(g)(a) \quad \forall g \in G, \forall a \in A \tag{1}$$

Un exemple important d'action de G sur lui-même est la *conjugaison.*
[4] [2]

$$\begin{aligned} f : G \times G &\to G \\ g.a &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

1.2 Théorèmes de Sylow

Nous enonçons et prouvons une réciproque partielle au théorème de Lagrange utile pour déterminer si un groupe est simple.

Définition 1.2.1 (p-groupe)**.** Soit G un groupe et p un nombre premier.

(i) Si $|G| = p^\alpha$ pour un $\alpha > 0$, G est un *p-groupe*. Un sous groupe H de G est appelé *p-sous groupe*.

(ii) Si $|G| = p^\alpha m$ où m n'est pas un multiple de p, alors un sous groupe d'ordre p^α est appelé *p-sous groupe de Sylow de G*.

(iii) L'ensemble des p-sous groupes de Sylow de G est noté $Syl_p(G)$, et le nombre de p-sous groupes de Sylow de G est noté $n_p(G)$.

[1, p. 213]

2 Vers la classification des groupes finis simples

[3]

3 Elements of representation theory of finite groups

3.1 Character theory

Références

[1] Evan Chen. *An Infinitely Large Napkin*. Revision 1.6.20240911. Sept. 2024. url : https://venhance.github.io/napkin/Napkin.pdf.

[2] Gaêtan Chenevier. *Cours d'Algèbre I*. 2024. url : http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/ALG1/Algebre_ENS_Chenevier.pdf.

[3] D.S. Dummit et R.M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003. isbn : 9780471433347.

[4] J.-P. Serre. *Groupes finis*. Cours à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. 1978–1979.