AMS Autour des p-sous-groupes de Sylow

Samy AMARA, Gabriel PITINO, et Guillaume SALLOUM

Résumé

Le but de cette AMS est d'étudier les théorèmes de Sylow, réciproques partielles au thoérème de Lagrange. Nous introduirons tout d'abord les notions utiles pour définir les théorèmes de Sylow, puis nous en donnerons deux preuves. Enfin nous en donnerons quelques applications pour la classification des groupes simples finis.

Table des matières

1 Théorèmes de Sylow

1.1 Notions préliminaires

1.1.1 Actions de groupes

Définition 1.1.2 (Action de groupe)**.** Soit G un groupe et A un ensemble quelconque. Une action *à gauche* de G sur A est une application $f : G \times A \to A$ qui satisfait :

(i) $g1.(g2.a) = (g1g2).a$ pour tout $g1, g2 \in G$, $a \in A$,

(ii) $1.a = a$ pour tout $a \in A$

On peut définir de manière équivalente [DF03, p. 43] une action comme un morphisme $\varphi : G \to S_A$ de G dans le groupe des permutations de A satisfaisant :

$$g.a = \varphi(g)(a) \quad \forall g \in G, \forall a \in A \tag{1}$$

Un exemple important d'action de G sur lui-même que nous allons utiliser par la suite est la *conjugaison*.

[Ser79] [Che24b]

$$\begin{aligned} f : G \times G &\to G \\ g.a &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

1.2 Enoncé et preuves

Nous enonçons en premier lieu quelques définitions issues de [DF03, p. 123 et 139] utiles pour poser le théorème.

Définition 1.2.1 (p-groupe)**.** Soit G un groupe et p un nombre premier.

(i) Si $|G| = p^\alpha$ pour un $\alpha > 0$, G est un *p-groupe*. Un sous groupe H de G est appelé *p-sous groupe*.

(ii) Si $|G| = p^\alpha m$ où m n'est pas un multiple de p, alors un sous groupe d'ordre p^α est appelé *p-sous groupe de Sylow de G*.

(iii) L'ensemble des p-sous groupes de Sylow de G est noté $Syl_p(G)$, et le nombre de p-sous groupes de Sylow de G est noté $n_p(G)$.

Définition 1.2.2 (Sous-ensembles conjugués)**.** Soit G un groupe, A et B deux sous-ensembles de G. A et B sont dit *conjugués dans* G s'il existe $g \in G$ tel que $B = gAg^{-1}$. En d'autres termes, A et B sont dans le même orbite pour l'action de conjugaison.

Plusieurs formulations sont possibles pour les théorèmes, nous avons décidé d'adapter celle de [Che24a, p. 215] qui nous a le plus éclairé.

Théorème 1.2.3 (Théorèmes de Sylow)**.** *Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$ où p est un nombre premier, m et p sont premiers entre eux. Alors on a :*

(i) *Au moins un p-sous-groupe de Sylow existe, donc* $n_p(G) \geq 1$ *et* $Syl_p(G) \neq \emptyset$

(ii) $n_p \equiv 1[p]$

2 Applications

2.1 Application à la classification des groupes simples finis

[DF03]

2.2 Elements of representation theory of finite groups

Références

[Che24a] E. Chen. *An Infinitely Large Napkin*. Revision 1.6.20240911. Sept. 2024.

[Che24b] G. Chenevier. *Cours d'Algèbre I*. 2024.

[DF03] D.S. Dummit et R.M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003. isbn : 9780471433347.

[Ser79] J.-P. Serre. *Groupes finis*. Cours à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. 1978–1979.