

# AMS Autour des p-sous-groupes de Sylow

Samy Amara, Gabriel Pitino, et Guillaume Salloum

## Résumé

Le but de cette AMS est d'étudier les théorèmes de Sylow, qui forment une réciproque partielle au théorème de Lagrange. Nous introduirons quelques notions utiles pour énoncer les théorèmes, puis nous en donnerons deux preuves : la première utilise les actions de groupes, tandis que la deuxième se base sur???? . Enfin nous en donnerons quelques applications, notamment pour la classification des groupes simples finis.

## Table des matières

<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>1 Théorèmes de Sylow</b>	<b>3</b>
1.1 Notions préliminaires . . . . .	3
1.2 Énoncé . . . . .	3
1.3 Première démonstration . . . . .	4
1.4 Deuxième démonstration . . . . .	5
<b>2 Applications</b>	<b>6</b>
2.1 Application à la classification des groupes simples finis . . . . .	6
2.2 Example : classifing all groups of order 60 up to isomorphism . .	6

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

## Notations

$Card(X)$	Cardinal de l'ensemble X fini.
$G$	Groupe quelconque.
$A \cong B, A \overset{\varphi}{\cong} B$	A est isomorphe à B, $\varphi$ est un isomorphisme de A vers B.
$x^g$	Conjugué à gauche de x par g.
$H \triangleleft G$ $N_G(H)$	H est un sous-groupe distingué de G. Normalisateur de H dans G.
$n_p$	Nombre de p-sous-groupes de Sylow de G.
$Syl_p(G)$	Ensembles des p-sous-groupes de Sylow de G.

# 1 Théorèmes de Sylow

## 1.1 Notions préliminaires

**Définition 1.1.1** (Action de groupe). Soit  $G$  un groupe et  $A$  un ensemble quelconque. Une action à gauche de  $G$  sur  $A$  est une application  $f : G \times A \rightarrow A$  qui satisfait :

- (i)  $g1.(g2.a) = (g1g2).a$  pour tout  $g1, g2 \in G, a \in A$ ,
- (ii)  $1.a = a$  pour tout  $a \in A$

On peut définir de manière équivalente d'après le chapitre 1 du cours une action comme un morphisme  $\varphi : G \rightarrow S_A$  de  $G$  dans le groupe des permutations de  $A$  satisfaisant :

$$g.a = \varphi(g)(a) \quad \forall g \in G, \forall a \in A \quad (1)$$

Un exemple important d'action de  $G$  sur lui-même que nous allons utiliser par la suite est la *conjugaison*.

$$\begin{aligned} f : G \times G &\rightarrow G \\ g.a &\mapsto x^g := gag^{-1} \end{aligned}$$

**Définition 1.1.2** (Normalisateur de  $H$  dans  $G$ ). Le normalisateur de  $H$  dans  $G$  est l'ensemble  $N_G(H) := \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ . De manière équivalente, c'est le stabilisateur de  $H$  sous l'action de conjugaison.

**Définition 1.1.3** (Sous-ensembles conjugués). Soit  $G$  un groupe,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $G$ .  $A$  et  $B$  sont dit *conjugués dans  $G$*  s'il existe  $g \in G$  tel que  $B = gAg^{-1}$ . En d'autres termes,  $A$  et  $B$  sont dans le même orbite pour l'action de conjugaison.

## 1.2 Enoncé

Nous énonçons en premier lieu quelques définitions issues de l'énoncé du sujet (ou de manière équivalente de [DF03, p. 123 et 139]) utiles pour poser le théorème.

**Définition 1.2.1** ( $p$ -groupe). Soit  $G$  un groupe et  $p$  un nombre premier.

- (i) Si  $\text{Card}(G) = p^n$  pour un  $n > 0$ ,  $G$  est un  $p$ -groupe. Un sous groupe  $H$  de  $G$  est appelé  $p$ -sous groupe.
- (ii) Si  $\text{Card}(G) = p^n m$  où  $m$  n'est pas un multiple de  $p$ , alors un sous groupe d'ordre  $p^n$  est appelé  $p$ -sous groupe de Sylow de  $G$ .
- (iii) L'ensemble des  $p$ -sous groupes de Sylow de  $G$  est noté  $\text{Syl}_p(G)$ , et le nombre de  $p$ -sous groupes de Sylow de  $G$  est noté  $n_p(G)$ .

Plusieurs formulations sont possibles pour les théorèmes, nous avons décidé d'adapter celle de l'énoncé du sujet directement en ajoutant un dernier point issu de [Che24, p. 215].

**Théorème 1.2.2** (Théorèmes de Sylow). *Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^n m$  où  $p$  est un nombre premier,  $m$  et  $p$  sont premiers entre eux. Alors on a :*

- (i) *(Existence) Au moins un  $p$ -sous-groupe de Sylow existe, c'est-à-dire que  $n_p(G) \geq 1$  et  $Syl_p(G) \neq \emptyset$*
- (ii) *Tout sous-groupe de  $G$  d'ordre  $p^r$  avec  $0 \leq r \leq n$  est inclus dans un  $p$ -sous-groupe de Sylow.*
- (iii) *Deux  $p$ -sous-groupes de Sylow  $H$  et  $H'$  de  $G$  sont conjugués entre eux, c'est-à-dire il existe  $g \in G$  tel que  $H' = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H, g \in G\}$ .*
- (iv) *Le nombre de  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$  est congru à 1 modulo  $p$ , i.e.  $n_p \equiv 1[p]$  ou  $Card(Syl_p(G)) = n_p = 1 + kp$ .*

### 1.3 Première démonstration

*Démonstration.* (i) Soit

$$\begin{aligned}\varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x) := g.x\end{aligned}$$

une action de  $G$  sur  $X$  où  $X$  est l'ensemble des parties de  $G$  de cardinal  $p^n$ . En utilisant un résultat de probabilités que l'on admet, on a :

$$Card(X) = \binom{p^n m}{p^n} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

En d'autres termes  $Card(X)$  n'est pas un multiple de  $p$ . Soit  $O_x$  une orbite de  $X$  sous l'action de  $\varphi$  telle que  $p$  ne divise pas  $Card(O_x)$ . Soit  $S \in O_x$  et  $H = Stab_G(S)$  où  $H = \{g.s = s \mid g \in G, s \in S\}$  Montrons que  $Card(H) = p^n$  en montrant que  $Card(H) \mid p^n$  et  $p^n \mid Card(H)$ .

Montrons d'abord que  $Card(H) \mid p^n$ .

Comme  $G$  est fini, alors on  $Card(O_x) = [G : H] = \frac{Card(G)}{Card(H)}$  On en déduit que  $p^n \mid Card(H)$  car sinon  $Card(X)$  pourrait être un multiple de  $p$ .

Réciproquement, montrons que  $p^n \mid Card(H)$ . Soit une nouvelle action :

$$\begin{aligned}\psi : H \times S &\rightarrow S \\ (h, s) &\mapsto \varphi(h, s) := h.s\end{aligned}$$

or  $Stab_H(s) = \{h \in H, s \in S \mid h.s = s\} = \{h \in \{g \in G \mid g.s = s\} \mid h.s = s\} = e_G$

$S$  est partitionné en orbites que l'on note  $O_y$ . On a alors  $S = \bigcup O_y$  et  $Card(S) = \sum Card(O_y)$ . Donc les orbites de  $S$  sous l'action de  $\psi$  sont de cardinal  $Card(O_y) = [H : Stab_H(s)] = \frac{Card(H)}{Card(Stab_H(s))} = Card(H)$  car  $Card(Stab_H(s)) = Card(e_G) = 1$

D'où  $Card(S) = \sum Card(H) = \sum Card(O_y)$ .

Ainsi  $Card(H) \mid Card(S) = p^n$ .

- (ii) Soit  $P \in \text{Syl}_p(G)$ .  $P$  existe d'après (i). Montrons que pour tout  $p$ -sous-groupe  $Q$  de  $G$  on a  $Q \subseteq gPg^{-1}$ , c'est-à-dire que  $Q$  est dans un sous-groupe conjugué de  $P$ .

□

## 1.4 Deuxième démonstration

## 2 Applications

### 2.1 Application à la classification des groupes simples finis

[\[DF03\]](#)

### 2.2 Example : classifying all groups of order 60 up to isomorphism

## Références

- [Che24] E. CHEN. *An Infinitely Large Napkin*. Revision 1.6.20240911. Sept. 2024.
- [DF03] D.S. DUMMIT et R.M. FOOTE. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003. ISBN : 9780471433347.