UE Projet Tutoré : Ensembles de cardinal infini

Auteur :
Guillaume SALLOUM
Avignon Université
L2 Mathématiques

Enseignant :
Marc ARCOSTANZO
Avignon Université

Résumé

Nous étudierons quelques propriétés des ensembles infinis et de combinatoire infine. Dans un premier temps nous établirons l'existence d'ensembles infinis et indénombrables en prouvant l'indénombrabilité de $\mathbb{R}$. Nous construirons ensuite les ordinaux dits de Von Neumann, qui nous permettrons d'aborder (très brièvement) l'étude des cardinaux infinis. Dans tout ce qui suit, on se place dans le modèle axiomatique ZFC où l'on précisera quand on utilise AC. Les références sont indiquées par un numéro clickable dans la bibliographie.

Table des matières

1 Ensembles infinis et dénombrabilité

1.1 Bijections et dénombrabilité

On rappelle des propriétés utilisées dans toute la suite pour comparer deux ensembles entre eux.

Définition 1.1.1 (Ensemble fini)**.** Soit E un ensemble. E est dit fini s'il est vide ou en bijection avec un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Définition 1.1.2 (Dénombrabilité)**.** Soit E un ensemble. E est *dénombrable* si et seulement si on peut énumérer successivement tout les éléments de E :

$$E \coloneqq \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

Autrement dit, E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Sinon E est dit *indénombrable.*

Définition 1.1.3 (Cardinal)**.** Soit E et F deux ensembles *finis.* Alors E est en bijection avec un intervalle de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$ où n est le cardinal de E.
E et F sont de même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E dans F.

Proposition 1.1.4 (Bijections)**.** *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection et sont donc dénombrables. [6]*

Démonstration. Une bijection explicite entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ est donnée par :

$$\begin{cases} 2n, & \mapsto n \\ 2n+1 & \mapsto -n \end{cases}$$

□

1.2 Indénombrabilité de l'ensemble des réels et implications

Théorème 1.2.1 (Argument diagonal de Cantor)**.** *$\mathbb{R}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$. [1] [2]*

Démonstration. Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est *au plus dénombrable* : soit fini soit dénombrable. On se restreint donc à l'intervalle $]0, 1]$ et on montre qu'il n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$, ce qui implique le résultat énoncé.
Supposons que $I =]0, 1]$ est dénombrable, alors $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$.
Chaque $i_n \in I$ admet une représentation décimale infinie de la forme :

$$i_n = 0, i_{n1} i_{n2} i_{n3} \ldots$$

où $i_{nk} \in [\![0, 9]\!]$.

On considère le tableau à double entrée formé avec $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ (INSERER TABLEAU)

Soit l_n le plus petit entier dans $\{1, 2\}$ tel que $l_n \neq i_{nk}$.

Alors $r = 0, r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \ldots$ admet un indice dans le tableau, par exemple $r = r_k$. Or cela est impossible puique $r_k \neq a_{kk}$.

$\square$

Théorème 1.2.2 (Cantor, Fraenkel, König)**.** *L'ensemble* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est en bijection avec* $\mathbb{R}$. *[1]*

Démonstration. De même que pour le théorème prcédent, on se restreint à établir une bijection entre les paires (x, y) telles que $0 < x, y \leq 1$ sur l'intervalle $]0, 1]$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ munis de leur représentation décimale infinie :

$$\begin{array}{lll} x = 0.r1r2r3 & r4r5r6 & \ldots \\ y = 0.r1r2 & r3r4 & r5\ldots \end{array}$$

où l'on sépare chaque décimale de x et de y en groupes en prenant à chaque fois la prochaine décimale non nulle (inclusive). Sur un exemple, cela donne :

$$\begin{array}{lllll} x = 0.3 & 01 & 2 & 007 & 08\ldots \\ y = 0.009 & 2 & 05 & 1 & 0008\ldots \end{array}$$

On associe ensuite à cette paire un réel $r \in]0, 1]$ représenté par le premier groupe de x, le premier groupe de y, le second de x, puis de y et ainsi de suite. Dans l'exemple ci-dessus, cela donne :

$$r = 0.3 \quad 009 \quad 01 \quad 2 \quad 2 \quad 05 \quad 007 \quad 1 \quad 08 \quad 0008$$

Puisque ni x ni y ne forment des suites de décimales composées uniquement de zéros, on trouve qu'il en est de même pour la représentation décimale et non terminalle de r. D'autre part, on peut déduire l'expression de x et de y à partir de celle de r directement, ainsi l'application formée est bijective. $\square$

Corollaire 1.2.3. *Puisque* $\mathbb{C}$ *est isomorphe à* $\mathbb{R}^2$*, on a* $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$.

On peut étendre la preuve ci-dessus à un nombre fini de coordonnées et obtenir que $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ pour $n \in \mathbb{N}$. [3] On établit ainsi l'existence de deux cardinaux infinis distincs : celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$. Avec la proposition suivante, on va voir qu'il en existe une infinité.

Remarque 1.2.4. *Il est aussi possible de construire des applications continues, surjectives mais pas injectives entre* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *comme le montre l'exemple des courbes de Peano. [5]*

Proposition 1.2.5 (théorème de Cantor)**.** *Soit A un ensemble. Alors l'ensemble des parties de A et A ne sont pas en bijection.*

Démonstration. On note $\mathcal{P}(A) \coloneqq \{I \mid I \subseteq A\}$.
Soit $f : A \to \mathcal{P}(A)$ quelconque et $B \coloneqq \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. On montre que f n'est pas surjective. Si $a \in B$, alors $a \in B \setminus f(a)$ donc $f(a) \neq B$. Si $a \notin B$ alors $a \in f(a) \setminus B$ donc $f(a) \neq B$. D'où B n'est pas dans l'ensemble image de f, et f n'est pas surjective. $\square$

Corollaire 1.2.6 (Infinité d'infinis)**.** *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \ldots$ *sont deux à deux non en bijection.*

D'après l'argument diagonal de Cantor on obtient $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, ce qui soulève la question de *l'hypothèse du continu* : tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est-il soit en bijection avec $\mathbb{N}$, ou avec $\mathbb{R}$? Cette question, ainsi que le Corollaire 1.2.5 on motivé le développement de la théorie des ensembles.

2 Ordinaux

Dans ce chapitre et le suivant, on se basera principalement sur [2]. Les ordinaux constituent une extension de l'arithmétique des entiers naturels et permettent de dénombrer en préservant la propriété de bon ordre (voir ci-dessus). Ils serviront de base à la construction des cardinaux infinis.

2.1 Construction des ordinaux

Définition 2.1.1 (Bon ordre)**.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. $\leq$ est un bon ordre si toute partie non vide de E posséde un élément minimal par rapport à $\leq$. Dans ce cas on appelle $(E, \leq)$ un ensemble *bien ordonné*.

Définition 2.1.2 (Segment initial)**.** Si $(E, \leq)$ est un ensemble bien ordonné et $y \in E$, on appelle *segment initial* de $(E, \leq)$ déterminé par y l'ensemble suivant :

$$Init(y) \coloneqq \{x \in E \mid x \leq y\}$$

Proposition 2.1.3 (Comparaison des bons ordres)**.** *Soit $(A, \leq)$ et $(B, \preceq)$ deux ensembles bien ordonnées. Alors on a l'un des cas suivants :*

(i) *$(A, <)$ et $(B, \preceq)$ sont isomorphes ;*

(ii) *$(A, <)$ est isomorphe à un segment initial de $(B, \preceq)$*

(iii) *$(B, \preceq)$ est isomorphe à un segment initial de $(A, <)$*

Idée générale de la démonstration. On définit une application :

$$\begin{aligned} &F : A \to B \\ &a \mapsto F(a) = b \Leftrightarrow \text{Init(a) est isomorphe à Init(b)} \end{aligned}$$

On montre que F est strictement croissante et que le domaine de F est clos par minorant dans $(A, <)$. Réciproquement, on montre que l'image de F est close par minorant dans $(B, \preceq)$ pour obtenir que F est un isomorphisme de son domaine sur son image. □

Définition 2.1.4 (Ensemble transitif)**.** Soit E un ensemble quelconque. E est *transitif* si tout les éléments d'éléments de E sont des éléments de E. En d'autres termes :

$$x \in a \in E \implies x \in E \tag{Tr}$$

Lemme 2.1.5 (Stabilité par opérations ensemblistes)**.** *(i)* *$\emptyset$ est transitif ;*

(ii) *Si E est transitif, alors $E \cap \{E\}$, $\bigcup E$ et $\mathcal{P}(E)$ le sont aussi ;*

(iii) *Toute réunion ou intersection d'ensemble transitifs est transitive*

Démonstration. (i) Comme $\emptyset$ n'a pas d'éléments (Tr) est vérifiée.

(ii) On suppose que E est transitif. Si $x \in e \in E \cup \{E\}$ alors x est dans E ou $x = E$. Dans les deux cas $x \in E$ donc à fortiori $x \in E \cup \{E\}$. Donc $E \cup \{E\}$ est transitif.

Supposons $x \in E \in \mathcal{P}(E)$, alors $x \in e \subseteq E$ et donc $x \in E$. D'après (Tr), $x \subseteq E$ donc $x \subseteq \mathcal{P}(E)$. Donc $\mathcal{P}(E)$ est transitif.

Supposons $x \in E \in \bigcup E$. Il existe $y \in E$ tel que $x \in y \in E$, donc $x \in E$ puisque E est transitif, et $x \in \bigcup E$. Donc $\bigcup E$ est transitif.

(iii) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles transitifs. Supposons $x \in a \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Il existe donc i vérifiant $x \in a \in A_i$, donc $x \in A_i$ par hypothèse, et aussi $x \in \bigcup_{i \in I}$. Donc $\bigcup_{i \in I} A_i$ est transitif. On utilise le même raisonnement avec $\bigcap_{i \in I} A_i$ pour obtenir le résultat énoncé.

$\square$

Définition 2.1.6 (Ordinal)**.** Un ensemble α est un ordinal si α est transitif et que la restriction de $\in$ à α notée $\in_{|\alpha}$ est un bon ordre strict.

Définition 2.1.7 (Caractérisation des ordinaux)**.** Un ensemble α est un ordinal si on a :

(i) $\forall x \in \alpha,\ x \subseteq \alpha$;

(ii) $\forall x \in \alpha,\ x \notin x$;

(iii) $\forall x, y, z \in \alpha$, si $x \in y$ et $y \in z$, alors $x \in z$;

(iv) $\forall I \subseteq \alpha,\ I \neq \emptyset$, $\exists x \in \alpha$ tel que $x \in y$ pour tout $y \in I$ avec $x \neq y$.

2.2 Arithmétique des ordinaux

Puisque les ordinaux forment un cas particulier d'ensembles transitifs, les ordinaux sont stables par union et par intersection d'après le Lemme 2.1.5. On peut donc construire une infinité d'ordinaux.

Définition 2.2.1 (Successeur)**.** Soit E un ensemble et $S(E) \coloneqq E \cup \{E\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\underline{n}$ l'ordinal $S^n(\emptyset)$.

$$\underline{0} = \emptyset,$$
$$\underline{1} = S(\underline{0}) = \{\underline{0}\},$$
$$\underline{2} = S(\underline{1}) = \underline{1} \cup \{\underline{1}\} = \{\underline{0}\} \cup \{\underline{1}\} = \{\underline{0}, \underline{1}\}, etc.$$

On montre à partir de cette définition qu'un ordinal $\underline{n}$ possède exactement n éléments.

Proposition 2.2.2 (Ordinaux $\underline{n}$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ordinal $\underline{n}$ admet exactement n éléments qui sont les ordinaux $\underline{k}$ pour $k < n$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n.

L'ordinal $\underline{0}$ n'admet aucun élément par définition. On suppose $n > 0$, et on pose $m \coloneqq n - 1$. Puisque $\underline{n} = \underline{m} \cup \{\underline{m}\}$, par hypothèse n est formé des m ordinaux $\underline{k}$ où $k < m$ et de $\{\underline{m}\}$. Or $\{\underline{m}\}$ est transitif, donc n'est pas dans $\underline{m}$. D'où $\underline{n}$ a n éléments qui sont les ordinaux $\underline{k}$ avec $k < n$. $\square$

Proposition 2.2.3 (Borne inférieure et bon ordre)**.** *Tout ensemble non vide d'ordinaux E admet un minorant $\bigcap E$.*

Démonstration. On pose $\alpha \coloneqq \bigcap E$. Pour tout β dans E on a $\alpha \in \beta$ donc $\alpha \leq \beta$. Si $\alpha < \beta$ alors $\alpha \in \bigcap E$ et $\alpha \in \alpha$ ce qui contredit la définition 2.1.7. Donc on doit avoir $\alpha = \beta$ où α est le plus petit élément de E. □

Proposition 2.2.4 (Borne supérieure)**.** *Un ensemble d'ordinaux E possède une borne supérieure $\bigcup E$.*

Démonstration. Soit $e \coloneqq \bigcup E$. Les éléments de E sont transitifs donc e est transitif. De plus $\forall \alpha, \beta, \gamma \in E$, par propriétés des ensembles transitifs $\alpha \notin \alpha$ et si $\alpha \in \beta \in \gamma$ alors $\alpha \in \gamma$. Donc la relation $\in_{|e}$ est un bon ordre strict. D'où e est un ordinal.

Soit $X \in \bigcup E$ non vide et $\alpha \coloneqq \bigcap X$. Alors α est un ordinal qui minore X d'après la proposition 2.2.3. Cela implique que pour tout $\beta \in X$ distincts de α on a $\alpha \in \beta$.

Pour tout $\alpha \in E$ on a $\alpha \subseteq e$, donc $\alpha \leq e$. Si β est un minorant strict de e on a $\beta < e$ et $\beta \in \bigcup E$. On a donc un α dans la réunion tel que $\beta \in \alpha$ et $\beta < \alpha$ où β n'est pas un majorant de E. Ainsi e est le plus petit majorant de E. □

On cite un résultat simialire au paradoxe de Russell (voir [3] pour une discussion sur le sujet) sur les ensembles : on ne peut pas construire un ensemble qui contient tout les ordinaux (pas seulement les ordinaux $\underline{n}$).

Proposition 2.2.5 (Paradoxe de Burlati-Forti)**.** *Il n'existe pas d'ensemble contenant tout les ordinaux.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un ensemble Ω contenant tout les ordinaux.

Alors $\bigcup \Omega$ est un ordinal qui vérifie : $\forall \alpha \in \Omega, \alpha \leq \bigcup \Omega$.

Donc $\bigcup \Omega < S(\bigcup \Omega) \leq \bigcup \Omega$, ce qui implique $\bigcup \Omega \in \bigcup \Omega$, or cela contredit 2.1.7. □

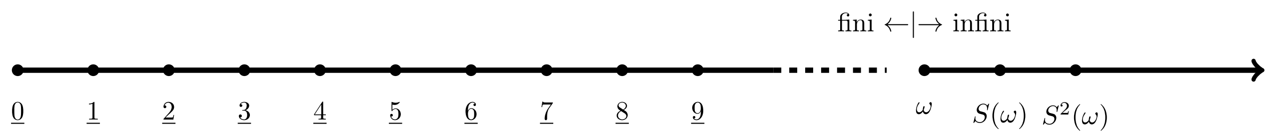
Définition 2.2.6 (Ordinal omega)**.** On définit l'ordinal ω comme la borne supérieure des ordinaux $\underline{n}$:

$$\omega \coloneqq \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots\}$$

On distingue désormais deux familles d'ordinaux.

Définition 2.2.7 (Ordinal successeur, limite)**.** Soit α un ordinal non nul. α est dit successeur s'il existe β vérifiant $\alpha = S(\beta)$, et limite si on a $\alpha = \bigcup \alpha$.

On représente la construction obtenue jusqu'ici : la suite des ordinaux où ω est un ordinal limite.



Proposition 2.2.8 (Induction ordinale)**.** *Le principe de récurrence définit sur les entiers peut s'étendre aux ordinaux* $\underline{n}$.

Une conséquence importante de ce résultat est un théorème qui servira de base à la construction des cardinaux infinis : on peut exhiber un représentant unique pour chaque ensemble bien ordonné.

Théorème 2.2.9 (Comparaison)**.** *Tout ensemble bien ordonné* $(E, <)$ *est isomorphe à un unique ordinal.*

Démonstration. Soit $(E, <)$ un ensemble bien ordonné.

D'après la Proposition 2.1.3, soit $(E, <)$ est isomorphe à la suite des ordinaux, soit la suite des ordinaux est isomorphe à un segment initial de $(E, <)$, ou bien $(E, <)$ est isomorphe à un segment initial de la suite des ordinaux.

Or la suite des ordinaux ne forme pas un ensemble d'après le paradoxe de Burlati-Forti, donc il ne reste que le dernier cas. Un segment initial de la suite des ordinaux est un ordinal par transitivité. Par unicité des segments initiaux, l'ordinal obtenu est unique, d'où le résultat. □

On définit principalement trois opérations (que l'on étendra aux cardinaux infinis) : l'addition, la multiplication et l'exponentiation ordinale. On admet le principe d'induction sur les ordinaux, qui s'étend naturellement de celui sur les entiers.

Proposition 2.2.10 (Addition)**.** *Soit* α *et* β *deux ordinaux. On définit* $\alpha + \beta$ *comme l'unique ordinal* γ *tel que* $(\gamma, \in)$ *est isomorphe à* $(\alpha, \in) + (\beta, \in)$.

Démonstration. □

3 Cardinaux infinis

3.1 Definitions et généralités

Avec l'axiome du choix, on peut établir une bijection entre un ensemble et un ordinal.

Définition 3.1.1 (Cardinal)**.** Un cardinal est un ordinal qui n'est en bijection avec aucun ordinal plus petit que lui-même.

Proposition 3.1.2 (Cardinalité)**.** *Tout ensemble est en bijection avec un unique cardinal.*

Démonstration. Existence : D'après le théorème de Zermolo, pour tout ensemble E, il existe un bon ordre $<$ sur E, et d'après le théorème de comparaison il existe un unique ordinal α tel que $(E, <)$ est isomorphe à $(\alpha, \in)$. Soit κ le plus petit des ordinaux en bijection avec α. Alors κ est un cardinal par construction en bijection avec lui-même.

Unicité : Soit κ, μ deux cardinaux distincts. Alors par bon ordre strict l'un des deux est plus grand que l'autre, donc il ne peut pas y avoir de bijection entre les deux. □

Corollaire 3.1.3. *Un cardinal infini est un ordinal limite.*

Notation. *On note $|E|$ l'unique cardinal κ tel que E est en bijection avec κ.*

Démonstration. Pour tout ordinal infini α il existe une bijection de α sur $\alpha + 1$, ce qui donne le résultat. Par exemple, on a $|\omega + 1| = \omega$. Il est important de bien noter que cette bijection ne conserve pas l'ordre (n'est pas un isomorphisme sur l'ordre). [4] □

Références

[1] M. Aigner, K.H. Hofmann et G.M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN : 9783662572658. URL : https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57265-8.

[2] P. Dehornoy. *La théorie des ensembles : introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux*. Tableau noir. Calvage & Mounet, 2017. ISBN : 9782916352404. URL : http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/la-theorie-des-ensembles.

[3] J.C. Dumoncel. *Philosophie des mathématiques*. Philo (Collection) (Ellipses (Firme)). Ellipses, 2002. ISBN : 9782729808907. URL : https://books.google.fr/books?id=sEKGAAAACAAJ.

[4] W.T. Gowers. *A beginner's guide to countable ordinals*. URL : https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/ordinals.html#infplusone.

[5] G. Peano. « Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane ». In : *Mathematische Annalen* 36 (1890), p. 157-160. URL : https://doi.org/10.1007/BF01905689.

[6] T. Tao. *Analysis I*. Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2014. URL : https://terrytao.wordpress.com/books/analysis-i.